

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

MATEMATIKA BIOZIENTZIAN

Egileak

LEYRE ORMAETXEA BUTRON
MARTIN BLAS PEREZ PINILLA

**EUSKARA, KULTURA ETA NAZIOARTEKOTZEAREN
ARLOKO ERREKTOREORDETZA**

**Argitalpen honek UPV/EHUko Euskara, Kultura eta
Nazioartekotzearen arloko Errektoreordetzaren laguntza izan
du**

ISSN 2603-8900

***Gaizkari,
ene bihotza.***

Gaien aurkibidea

Sarrera	v
I Aldagai bateko kalkulu diferentziala	1
1 Funtzioak	3
1.1 Hastapenak	4
1.2 Idazkera matematikoa	4
1.3 Oinarrizko eragiketak	4
1.4 Funtzioak	7
1.4.1 Polinomioak	8
1.4.2 Funtzio esponentziala	12
1.4.3 Funtzio logaritmikoa	13
1.5 Funtzio trigonometrikoak	14
1.5.1 Sinu funtzioa	14
1.5.2 Kosinu funtzioa	15
1.5.3 Tangente funtzioa	15
1.5.4 Funtzioen transformazioak	16
1.6 Funtzio jarraituak	18
1.7 Funtzio deribagarriak	21
1.8 Batez besteko balioaren teoremak	26
1.9 Funtzio baten irudikapen grafikoa	31
2 Optimizazioa	37
3 Newton-Raphson-en metodoa	45
3.1 Erdibitze-metodoa	46
3.2 Newton-Raphson-en metodoa	48
4 Taylor-ren polinomioa	55
4.1 Hurbilketak	56
4.1.1 Hondarra	60
4.2 Taylor-en teorema	61
4.3 Erabilpenak	66
5 Integrazioa	69
5.1 Integral mugagabea	70
5.1.1 Jatorrizkoak	70

5.1.2	Berehalako jatorrizkoak	70
5.2	Integrazio-metodoak	71
5.2.1	Zatikako integrazioa	71
5.2.2	Aldagai-aldaketa	72
5.3	Funtzio arrazionalen integrazioa	73
5.4	Integral trigonometrikoak	77
5.4.1	$\int \sin^n x \cos^m x dx$	78
5.4.2	$\int \tan^n x dx$ eta $\int \sec^n x dx$	80
5.4.3	$\int \sin(mx) \cos(nx) dx$	81
5.4.4	$\int R(\sin x, \cos x) dx$	81
5.5	Integral irrazionalak	83
5.5.1	$\int R\left(x, x^{\frac{r_1}{s_1}}, \dots, x^{\frac{r_k}{s_k}}\right) dx$	85
5.5.2	$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{px+q}\right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{px+q}\right)^{\frac{r_k}{s_k}}\right) dx$	86
5.5.3	Integral binomikoak	86
5.5.4	Euler-en integralak	88
5.6	Integral mugatua	90
5.7	Kalkuluaren oinarriko teorema	93
5.8	Integral mugatuaren aplikazioak	96
5.8.1	Irudi planoen kalkulua	96
5.8.2	Kurben luzeren kalkulua	97
5.8.3	Biraketa-gorputzen bolumenen kalkulua	98
5.8.4	Biraketa-gainazalen kalkulua	99
II	Algebra	101
6	Matrizeak eta ekuazio linealetako sistemak	103
6.1	Oinarriko definizioak	104
6.2	Eragiketak matrizeekin	105
6.3	Matrize karratuen berreturak	106
6.4	Matrize iraulia	106
6.5	Determinanteak	107
6.6	Determinante baten garapena errenkada edo zutabe baten elementuez	109
6.7	Ekuazio linealetako sistemak	111
6.8	Gauss-en metodoa	114
6.9	Cramer-en sistemak	116
7	Espazio bektorialak	119
7.0.1	Multzoak	120
7.1	Oinarriko egitura aljebraikoak	121
7.1.1	Eragiketa	121
7.2	Egitura aljebraikoak	122
7.2.1	Taldea	123

7.2.2	Eraztuna	123
7.2.3	Gorputza	124
7.3	Espazio bektorialak	124
7.4	Azpiespazioak	125
7.5	Oinarriak eta dimentsioa	127
7.5.1	Konbinazio lineala	127
7.5.2	Sistema askea	127
7.5.3	Sortzaile-sistema	128
7.5.4	Oinarria	128
7.5.5	Azpiespazioen dimentsioa	129
7.5.6	Koordenatuak	130
7.6	Aplikazioak	132
7.6.1	Aplikazio linealak	134
8	Diagonalizazioa	139
8.1	Azpiespazio f -aldagaitzak	140
8.2	Endomorfismo baten balio eta bektore propioak	141
8.3	Matrize karratu baten balio eta bektore propioak	142
8.4	Endomorfismo diagonalizagarria	144
8.5	Matrize diagonalizagarria	145
9	Matrizeen aplikazioak. Leslie	149
9.1	Erreakzio kimikoak	150
9.2	Leslie-ren ereduak	151
9.2.1	Zenbaki konplexuak	153
9.2.2	Epe luzerako portaera	153
	Bibliografia	161

Sarrera

Matematika zientzia formal bat da; axiometan oinarrituta eta arrazoibide logikoari jarraituz, zenbakiak, irudi geometrikoak, edo, oro har, sinboloak bezalako entitate abstraktuen propietateak, egitura abstraktuak eta erlazioak aztertzen ditu. Matematika da testuinguru zehatzetan arazoak zalantzarik gabe planteatzeko tresna gisa erabil daitekeen hizkuntza formalen multzoa.

Biologia eta Matematika historikoki oso agerikoak diren elkarrekiko truke eta lankidetzek etekina atera dioten bi diziplina dira, konputazio- eta modelatze-tresnek lagundutako ikuspegi matematiko berriak aplikatu daitezkeenak oinarritzko arazo biologikoak konpontzeko. Biologiak konputazioaren eta modelatze matematikoaren tresnak eta lengoia behar ditu, orain arte antolaketa biologikoaren maila guztietan aztertzeko objektu zentralak diren sare konplexuak ulertzeko: molekuletatik ekosistemetara.

Tresna matematikoak fenomeno, prozesu eta kontzeptuen ikerketan aplikatzea gero eta garrantzi handiagoa duen jarduera da, jakina, baldin eta arlo biologiko desberdinetako zientzialarien eta beren metodoak aplikatzean interesa duten matematikarien arteko diziplina anitzeko lankidetzak babestuta garatu bada: teoria biologikoa, laborategia edo landa-lana.

Matematika Biozientzietan aplikatzeak funtsean bi bide hartzen ditu: batetik, ezagutzen diren tekniken ohiko aplikazioa; bestetik, sistema biologikoak aztertzeko beharrezkoak diren metodo berriak garatzea. Laburbilduz, eredu matematikoa ez da ekuazio multzo bat besterik, baizik eta, arazo jakin baterako irtenbide-estrategia definitzeko prozesua. Metodologia matematikoa da, baina beste izaera bat izan dezake.

Segur aski, hau irakurri ondoren, liburu honetan izugarrizko metodologia matematikoa landuko dela pentsa daiteke; ezta gutxiago pentsatzekoa ere. Hala ere, guztiz kontrakoa da; biologiako arlo desberdinetara interesgarriak eta beharrezkoak diren oinarritzko matematikako kontzeptuetara zuzenduta dago lan hau. Irakurleak, matematikari esker, epe laburrean ulertze-maila sustatu, eta, modu praktikoan, errealitatearen simulazio-prozesuari modelizazioa eman diezaioke.

LIBURUAREN ANTOLAKETA.

Liburu hau bederatzi kapitulutan antolatuta dago, bi atal nagusietan bananduta: lehenengoa *Al-dagai bateko kalkulu diferentzialari* dagokio, eta bigarrena *Aljebrari*. Lehenengo atalean bost kapitulu landu dira, eta beste kapitulu guztiak bigarren atalari dagozkie.

Hasieratik errepasso zabala egiten da oinarrizko kontzeptuetatik abiatuta: aldagai bateko funtzio errealekin hasten gara, eta baliagarriak diren aplikazio horien kontzeptu garrantzitsuak lantzen dira. Esate baterako, funtzio bat izanik, gure lehenengo pentsamendua da ea irudika daitekeen, horretarako deribazioa behar denez gero; gai hori lantzen da.

Optimizazioaren arazoa maiz agertzen zaigu bizitzan, eta ekintza hori modeliza badaiteke funtzio baten bitartez, optimizazioak eskatzen duena funtzio horren balio maximoa edo minimoak bilatzea besterik ez da. Gai honen inguruan, adibide garatu batzuk azaltzen dira bigarren kapitulutan.

Matematikan agertzen den arazo garrantzitsuenetariko bat ekuazioen ebazpena da. Adibidez, badakigu lehenengo eta bigarren mailatako ekuazio aljebraikoen ebazpenak nola lortu, baita nola erabili Ruffini-ren metodoa edozein mailako ekuazio aljebraiko baten erro osoak lortzeko ere. Orokorrean, ekuazio baten erroak nola lortu ikusiko dugu: erdibitze-metodoarekin eta Newton-Rhapson-en metodoarekin.

Demagun funtzio esponenziala, nahiko ezaguna eta erabilia, kontuan hartzen dugula. Zalantzarik gabe, funtzio horren edozein balio lortzeko kalkulagailu bat hartuko genuke. Izan ere, Brook Taylor (1685-1731) matematikariak, 1712. urtean teorema bat enuntziatu zuen, hots, funtzio bat diferentziala den puntu jakin baten ingurunean hurbilketa polinomikoak lortzen dutena. Horrez gain, teorema estimazio horren bidez lortutako errorea mugatzeko aukera ematen du. Beraz, funtzio baten orde, ingurune batean polinomio bat erabiltzearen abantaila erakusten digu.

Deribatu dugun moduan, funtzio baten integralak ere kalkulatu nahi ditugu. Horretarako, atal honetako azken kapituluan, hainbat integrazio metodo eta aplikazio batzuk ikusten dira.

Bigarren atalari dagokionez, hemen ere, hasieratik oinarrizko kontzeptuetatik abiatuko gara: matrizeak. Matrize baten ideia intuitiboa oso erraza da; matrize bat zenbaki ordenatuen taula gisa definitzeko gai da, esperimentu, inkesta, analisi ekonomiko eta abarretatik etor daitezkeen zenbakien gisa, hain zuzen. Matrizeak erabiltzearen arrazoi nagusiak hauexek dira: problemak ebaztea, datuak elkarren artean erlazionatzea eta kalkulu bektorialak egitea. Are gehiago, arazo bat matrize baten bidez irudika daiteke, eta, kasu horretan, informazio-matrizea dela esaten dugu.

Aljebra abstraktuan, espazio bektoriala multzo hutsetik sortutako egitura aljebraikoa da; barneragiketa (*batura*, multzoko elementuetarako definitua) eta kanpoko eragiketa (*biderkadura eskalarra*, multzo horren eta beste multzo baten artean definitua, (gorputzaren egiturarekin) propietate batzuk betetzen dituena. Kontzeptu horiek guztiak erabili eta definitu egin behar dira,

zazpigarren kapituluaren egiten den moduan. Esate baterako, garrantzitsua izaten da aipatuak ditugun matrizeen elementuak zein multzo motatan dauden jakitea.

Hurrengo kapituluaren aplikazio bikaina izan duen tresnetako bat matrizeak izan dira; arazo baten enuntziatutik aurrez lortutako ekuazio linealen sistemari irtenbide optimoa ematen diote.

Diagonalizazioari dagokion kapituluaren hasiera batean bi kasu bereizten dira: bata, endomorfismo bati elkartutako matrizea oinarri batean; eta bestea, matrize karratu bati dagokiona. Azken finean, kasu bakar bat aztertzea besterik ez da izango: matrize karratuarena. Kontuan hartu behar dugu endomorfismo bat aplikazio lineal bat besterik ez dela, non hasierako espazioa eta horren irudia berdinak diren. Endomorfismo horri elkartutako matrizea matrize karratu bat izango da. Matrize baten diagonalizazioaren kontzeptua oso erraza da; A matrize bat izanik, jakin nahiko genuke horren ordez beste matrize errazago batekin lan egiteko modurik egongo litzatekeen. Hau da, D matrize diagonal bat erabili gure A matrizearen ordez. Diagonalizagarria den kasuan, $D = P^{-1} A P$ berdintza izango genuke, eta, ondorioz, A matrizearen eragiketak erraztu egingo lirateke. Hori guztia azaltzeko, aljebra mekanismo guztia agertzen da. Biozientziatarako arlo askotan, kontzeptu edo gai hau ulertzea zailegia izan daiteke, baina ondo iruditu zaigu azalpena jartzea, matrize bat diagonalizatzerakoan erabiltzen diren tresna guztien garrantziaz jabetu gaitezen, ez bakarrik ariketa bat egiteko errezetaz.

Azkenik, diagonalizazioaren adibide bat ematen da, Leslie-ren eredua, populazioen dinamikan eredu garrantzitsu bat aztertzen du; Patrick Holt Leslie (1900-1974) fisiologoaren metodoaren egilearen omenez du izen hori. Leslie-ren matrizea biztanleriaren hazkundera (eta adin banaketa) deskribatzeko modu ezagunenetako bat da, biztanleria-migrazioari itxita dagoelarik; ingurune mugagabeen hazten da, eta sexu bakarra hartzen da kontuan, oro har emea.

Dena den, esan beharra dago, lan honetan agertzen diren emaitzen frogapen gutxi egiten direla. Lana ez dago ildo horretatik zuzenduta, baizik eta oinarritzko kontzeptuetatik abiatuta ulertze-maila oinarritzera bideratu da. Irakurleak, nahi izanez gero, izango du denbora bere jakin-mina asetzeko.

I

ALDAGAI BATEKO KALKULU
DIFERENTZIALA

1

Funtzioak

1.1 Hastapenak

Naturan gertatzen diren hainbat fenomeno, formula matematikoen bitartez adierazten dituzte zientziak, eta Matematika da arrazonomendu eta prozesu deduktiboa arrazoitzeko modu nagusia. Atal honetan, era labur eta eskematiko batean, matematikako oinarrizko ezaugarri batzuk ikusiko ditugu. Bere ezaguera eta erabiltzeko erraztasuna ezinbestekoak izango ditugu hurrengo ataletan.

1.2 Idazkera matematikoa

Matematikaren idazkeran ohituta ez daudenentzat, ikur batzuen esanahia emango dugu:

- ▷ \forall : denak, oro, edozein.
- ▷ \exists : existitzen da (gutxienez bat).
- ▷ $\exists!$: existitzen da bakar bat.
- ▷ \in : barne.
- ▷ \notin : ez barne.
- ▷ \Rightarrow : orduan, halaberharrez (inplikazioa da).
- ▷ \Leftrightarrow : baldin eta soilik baldin.
- ▷ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$: limite, x a -rantz eskuinetik doanean, $f(x)$, berdin b ahoskatzen da. Era berean, ezker limitea adierazteko $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$ erabiltzen da.
- ▷ $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$: batukari, i berdin batetik n -ra, i ahoskatzen da.

1.3 Oinarrizko eragiketak

Ikus ditzagun oinarrizko eragiketa batzuk:

- ▷ $\frac{a}{b} = c \Leftrightarrow a = bc$, ($b \neq 0$ denean).
- ▷ $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$, baina $\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ da.
- ▷ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, baina $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ da.

Berdintzen eta desberdintzen arteko eragiketen propietate batzuk berrikustea interesgarria izango dugu.

$$1. \ a \cdot b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{edota} \\ b = 0. \end{cases}$$

$$2. \frac{a}{b} = 0 \iff a = 0.$$

3. Berdintzaren (hurrenez hurren, desberdintzaren) ataletan, zenbaki bat gehitu edo kentzen bada, beste berdintza (hurrenez hurren, desberdintza) baliokide bat lortzen da. Adibidez,

$$5 + 2 \leq 3 + 5.$$

4. Berdintzaren (hurrenez hurren, desberdintzaren) ataletan zenbaki ez-nulu eta positibo batez biderkatu edo zatitzen bada, beste berdintza (hurrenez hurren, desberdintza) baliokide bat lortzen da. Adibidez,

$$7 \cdot 2 \leq 3 \cdot 7.$$

5. Berdintzaren (hurrenez hurren, desberdintzaren) ataletan, zenbaki ez-nulu eta negatibo batez biderkatu edo zatitzen bada, beste berdintza (hurrenez hurren, desberdintza) baliokide bat lortzen da, baina noranzkoa aldatzen da. Adibidez,

$$(-6) \cdot 2 \geq 3 \cdot (-6).$$

Tarteak eta multzoen aipamena ere kontuan hartzekoak direnez, hastapen txiki bat egingo dugu honen gainean. Kapitulu hauetan zehar, \mathbb{R} -ren gainean egingo dugu lan.

\mathbb{R} gaineko multzoak edo tarteak erabiliko ditugu. *Multzo bat* objektu fisiko edo abstraktuen bilduma da, eta letra maiuskulen bidez adierazten dira horiek, hots A, B, \dots . Multzo baten objektuak *elementuak* dira eta letra xeheen bidez adierazten dira. Multzoen adierazpenak bai hedaturaz $\{2, 3, 5, 7\}$, bai deskribapenez $\{x \mid x \leq 7 \text{ eta lehena}\}$ adieraz daitezke.

Elementu eta multzo baten arteko erlazioak hauek izan daitezke:

$a \in A$: a barne A , a , A -ren elementua da.

$a \notin A$: a ez barne A , a , ez da A -ren elementua.

Multzo hutsa, \emptyset , elementurik ez duena da.

Multzoen arteko erlazioak.

$A = B$: A eta B multzoek elementu berdinak dituzte.

$A \subset B$: A -ren elementu guztiak B -n ere badaude, eta A, B multzoaren azpimultzoa dela diogu.

$A \subsetneq B$: A ez da B -ren berdina, baina bere azpimultzoa da.

Multzoen bildura eta ebakidura.

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ edo } x \in B\}$, A eta B multzoen bildura.

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ eta } x \in B\}$, A eta B multzoen ebakidura.

Bi multzo, A eta B , disjuntuak direla diogu, baldin $A \cap B = \emptyset$ bada.

\mathbb{R} -ren azpimultzoen artean garrantzitsuenak ikusiko ditugu:

1. Zenbaki arrunten multzoa: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Batzuetan, 0 zenbakia zenbaki arrunten barnean hartzen da; hau da, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

2. Zenbaki osoen multzoa:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

3. Zenbaki arrazionalen multzoa:

$$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ eta } q \neq 0\}.$$

Aipatutako hiru multzoen arteko erlazioa honako hau da:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

4. Adibidez, $13/11 = 1,181818\dots$ da, baina infinitu zifra hamartar ez-errepikakorren bidez adierazitako zenbakiak ez dira arrazionalak, zenbaki irrazionalak baizik; multzo hori \mathbb{I} -rekin denotatuko dugu. Eta $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ da.

Zenbaki konplexuen multzoa \mathbb{C} -rekin adierazten da, eta honako inklusio hauek ditugu:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Kontuan hartu behar dugu \mathbb{Q} , \mathbb{R} eta \mathbb{C} multzoek batuketa eta biderketa barne-eragiketak dituztela; hots, zenbaki arrazionalen batuketa eta biderketa zenbaki arrazionala dela (hurrenez hurren, zenbaki erreal eta konplexuekin ere betetzen da). Ezaugarri mota horiek dituzten multzoei *gorputzak*; horrez gain, multzo hauek gorputz trukakorrak dira, biderketa trukakorra baita.

Ez ditugu zenbaki konplexuen gorputzak aipatuko Leslie-ren eredura heldu arte; beraz, \mathbb{R} gorputzean landuko ditugu kontzeptuak.

Tarteak: itxiak, irekiak, erdi-itxiak eta erdi-irekiak izan daitezke. Adibidez,

$$[a, b], (a, b), [a, b), (a, b] \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Horien esanahia honako hau da:

$$x \in [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad x \in (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

$$x \in [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \quad x \in (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$$

Puntu honetara heldu garenez gero, aipatzekoa dugu tarte horietako muturren bat ∞ denean sinbolo horrek ez duela zenbaki bat adierazten; hori dela eta, batzuetan $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ikusiko dugu idatzita.

1.4 Funtzioak

Funtzio bat, bi zenbaki elkarrarazten dituen erregela bat besterik ez da. Funtzio bat definitzen denean, x puntu bakoitzari $f(x)$ irudi bakarra elkarrarazten zaio.

Izan bitez A, B eta D multzoak; tarteak dira, eta \mathbb{R} -ren barne daudela kontuan hartuko dugu.

DEFINIZIOA. Aldagai errealeko funtzio erreala honako korrespondentzia mota hau da:

$$\begin{aligned} f: A \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow B \subseteq \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

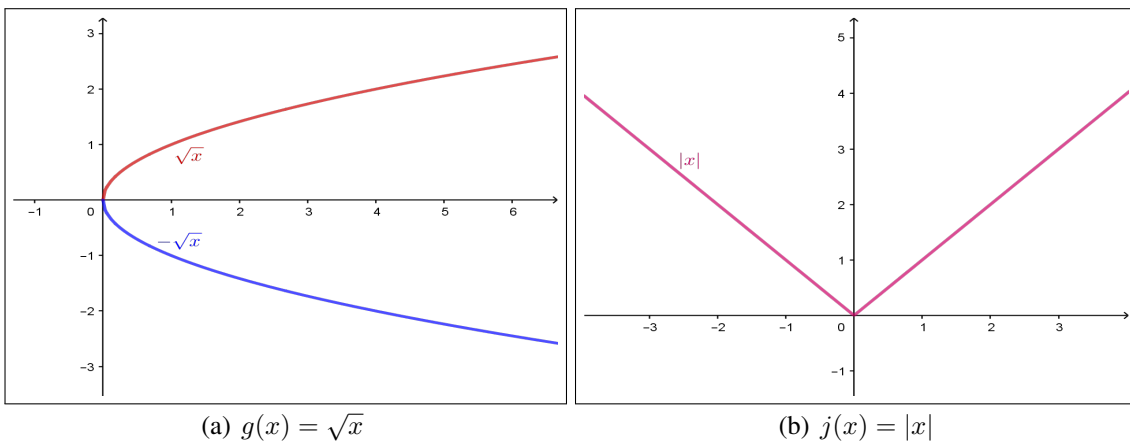
non A multzoko x balio bakoitzari zenbaki erreal bakarria elkarrarazten baitzaio, hots, $y = f(x)$. A multzoari, $f(x)$ funtzioaren *definizio-eremua* esaten zaio, eta, era berean, $f(A)$ multzoari $f(x)$ funtzioaren *irudia* esaten zaio.

Adibideak

1. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, non $f(x) = x^2$ den.
2. $g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, non $g(x) = \sqrt{x}$ den.
3. $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, non $h(x) = \frac{x^3 + ax + b}{x^2 + 1}$ den.
4. $j: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, honako era honetan definitzen dena: $j(x) = \begin{cases} x & \text{baldin } x \geq 0 \text{ denean,} \\ -x & \text{baldin } x < 0 \text{ denean.} \end{cases}$

Honako irudi honetan, adibideetan aipaturiko bi funtzio ezagunen grafikoak agertzen dira.

1.1 irudia . Bi funtzio ezagunen grafikoak



Lehenengo eta behin, funtzioak zentzua duen tokia bilatu behar dugu; hau da, bere *definizio-eremua* D , hots, $f(x)$ -ren balioa existitzen den x aldagaiaren balio erreal guztiek osatzen duten multzoa.

Funtzioekin ere eragiketak egin daitezke, eta horiek egiteko erabiltzen diren legeak honako proposizio honetan batuko dira.

1.4.1 proposizioa. Izan bitez $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$ hiru funtzio erreal. Honako propietate hauek betetzen dituzte:

1. *Elkartze-legea:* $(f + g) + h = f + (g + h)$, $(fg)h = f(gh)$.
2. *Trukatze-legea:* $f + g = g + f$, $fg = gf$.
3. *Banatzte-legea:* $(f + g)h = fh + gh$.

Proposizio honetako notazioan, $f(x)$, $g(x)$ eta $h(x)$ idatzi ordez f , g eta h notazioa erabili da agertzen diren legeak argitzeko, ez nahasteko.

Funtzioekin badago beste eragiketa bat, *konposaketa* deritzona.

DEFINIZIOA. Izan bitez $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eta $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ bi funtzio, non $f(A) \subset B$ den. Orduan, $h : A \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = g(f(x))$ funtzioa g -ren eta f -ren *konposaketa* dugu, eta $h = g \circ f$ eran adierazten da.

Bi funtzioen konposaketa egiterakoan, garrantzitsua da $f(A) \subset B$ baldintza betetzea; hots, f funtzioaren irudia g funtzioaren definizio-eremuan egon behar du. Funtzioen konposaketak elkartze-legea betetzen du. Orokorrean, funtzioen konposaketa ez da trukakorra.

Adibidea Konposaketaren adibide erraz bat $(g \circ f)(x) = \sin(2x)$ funtzioa litzateke, oraintxe bertan ikusi dugun moduan deskonposatuko duguna.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f(x)=2x} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g(x)=\sin(x)} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x & \longmapsto & g(f(x)) = (g \circ f)(x) = \sin(2x). \end{array}$$

Orain, zenbait funtzioen azterketa egingo dugu. Funtzio hauek garrantzi handia dutelako aukeratuak dira, ez bakarrik Matematikan baizik eta eguneroko jardueran ere bai.

1.4.1 Polinomioak

Polinomioak ditugu dauden funtziorik erabilgarri eta errazenetarikoak ditugu, eta honako itxura hau dute:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= \sum_{k=0}^n a_k x^k \end{aligned}$$

non a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 zenbaki errealak diren; horiei *polinomioaren koefizienteak* esaten zaie. Polinomioaren maila da aldagai askearen berretzailerik handiena; kasu honetan, $a_n \neq 0$ bada, maila n dugu. Zero mailako polinomioak konstanteak ditugu. Funtzio polinomikoen definizio-eremua \mathbb{R} osoa da; oso erabilgarriak dira, eta baita jarraituak eta deribagarriak ere, geroago ikusiko ditugun propietateak.

Polinomioen batuketa, biderketa eta konposaketa beste polinomio bat da. Polinomioen zatiketari *funtzio arrazionala* esaten zaio, mota honetako funtzioak dira:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

non zenbakitzailea, $P(x)$, eta izendatzailea, $Q(x)$, polinomioak baitira. Kasu honetan, $f(x)$ funtzioaren definizio-eremua $\{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$ da.

Polinomioen adierazpen arrazional batean, zenbakitzaile eta izendatzaileetan agertzen diren bi polinomio horien mailari begiratu behar diegu, ahal denean deskonposizio faktoriala edota zatiketa egiteko.

1. Polinomio baten deskonposizio faktoriala ondoko era honetan jartzea da:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) \\ P_2(x) &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)Q(x) \end{aligned}$$

Hemen, $P_1(x)$ polinomioak n erro ditu: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; $P_2(x)$, bigarren polinomioak, aldiz, bi erro ditu, eta $Q(x)$ polinomioa laburtezina da (hau da, ez du erro errealik). Laburtezina den bigarren mailako polinomio baten adibidea $x^2 + x + 1$ da.

2. $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ adierazpenean, $P(x)$ polinomioaren maila $Q(x)$ polinomioarena baino handiagoa edo berdina baldin bada, orduan zatiketa egin daiteke: $P(x) = H(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$. Non $R(x)$ polinomioaren maila $Q(x)$ polinomioaren maila baino txikiagoa den.

Polinomioen artean badago aipatu beharrekoa den bat, *Newton-en binomioa*, hau definitu baino lehen zenbaki kombinatorioa eta faktoriala zeintzuk diren esan behar da.

DEFINIZIOA. Zenbaki arrunt baten *faktoriala*, $n!$ -rekin adieraziko duguna, n -ren eta hura baino txikiagoak diren zenbaki guztien biderkadura da.

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1 \\ 0! &= 1. \end{aligned}$$

Oharra. Aurrerago, Taylor-en polinomioak agertuko zaizkigu; une horretan, berriro agertuko dira faktorial hauek. Ondoko adibide errazean idazkeraren kontua lantzen da.

$$\begin{aligned} 5! &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 5 \cdot 4! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!. \end{aligned}$$

DEFINIZIOA. Izan bitez m eta n bi zenbaki oso positiboak eta $m \geq n$ baldintza betetzen dutenak. Orduan, m elementu ezberdinetatik n elementuren bilduma bakoitzari *zenbaki konbinatorioa* esaten zaio. Kopuru horrek honako adierazpen hau du:

$$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}.$$

Elementuak hautatzerakoan ez dira errepikatzen, eta ordena ez da kontuan hartzen. Zenbaki konbinatorioak irakurtzerakoan, m n -ren *gainean* ahoskatzen da.

Zenbaki konbinatorioen propietateak.

- ▷ $\binom{m}{0} = 1 = \binom{m}{m}$.
- ▷ $\binom{m}{1} = m = \binom{m}{m-1}$.
- ▷ $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$.
- ▷ $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$.

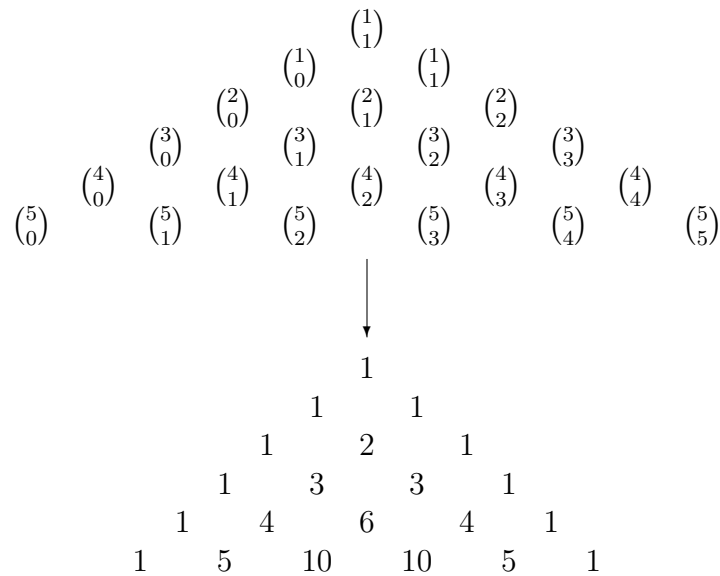
Bi definizio horiek kontuan hartuta, Newton-en binomioa azaltzeko gai gara. Zenbaki konbinatorioen propietateak kontuan hartuta, honela idatz daiteke binomioen berreturen adierazpena:

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \end{aligned}$$

Adierazpen horri *Newton-en binomioa* esaten zaio, eta hainbat erabilera ditu konbinatorian eta serie garapenetan.

TARTAGLIA-REN TRIANGELUA

Niccolo Fontana, ezizenez Tartaglia, XVI. mendeko matematikaria izan zen, hirugarren mailako ekuazioen ebazpena lortzeko metodoa aurkitu zuelako ezaguna da. Beste ekarri ezagun batzuen artean, artilleriarako matematikaren aplikazioa dugu, jaurtigaien ibilbideak kalkulatzeko, eta baita tetraedro baten, aldeen luzeren arabera, bolumenaren kalkulurako adierazpen matematikoa ere. Zenbaki konbinatorioen propietateak argiago ikusteko, honako modu honetan kokatzea bururatu zitzaion:



Tartaglia-ren polinomioa binomioaren berreturen garapenarekin lotuta dago.

			1				$n = 0$
			1	1			$n = 1$
		1	2	1			$n = 2$
	1	3	3	1			$n = 3$
1	4	6	4	1			$n = 4$
1	5	10	10	5	1		$n = 5$

Triangeluari begiratzuz gero, $(a + b)^n$ -ren koefizienteak dira. Adibidez:

$$\begin{aligned}
 n = 2 & \quad (a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\
 n = 3 & \quad (a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\
 n = 4 & \quad (a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4.
 \end{aligned}$$

Hemen, beste oinarritzko eragiketa batzuk aipatzeko unea heldu da:

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Komenigarria izango litzateke irakurlearentzat $(a \pm b)^4$ garatzea; horrela, zenbaki konbinatorioak landuko lituzke, eta aukera ona litzateke zeinua nola dabilen ikusteko.

Newton-en binomioaren erabileraren adibide bat 3^{12} kalkulatzeko litzateke: kontuan hartu beharrezkoa da, honelako kalkuluak egiteko, Newton-en sasoian kalkulagailurik ez zela erabiltzen. Batukaria nola dabilen ikusteko, nahikoa litzateke 3^5 egitea, eta hori da egingo duguna.

Adibidea Erabili Newton-en binomioa 3^5 kalkulatzeko.

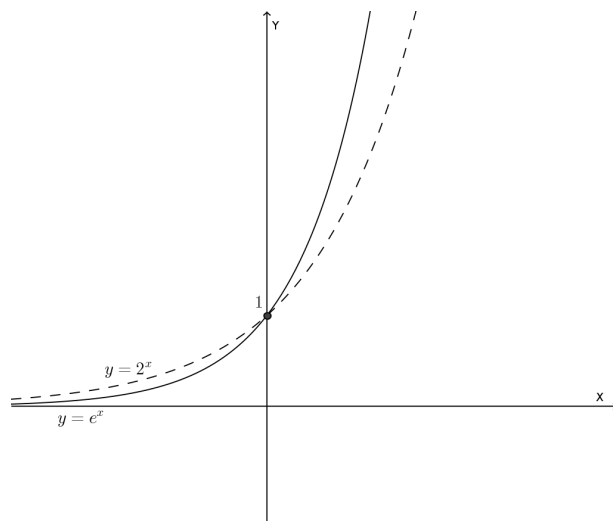
$$\begin{aligned}
 3^5 &= (1 + 2)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} 1^k 2^{5-k} \\
 &= \underbrace{\binom{5}{0} 1^0 2^{5-0}}_{k=0} + \underbrace{\binom{5}{1} 1^1 2^{5-1}}_{k=1} + \underbrace{\binom{5}{2} 1^2 2^{5-2}}_{k=2} + \underbrace{\binom{5}{3} 1^3 2^{5-3}}_{k=3} \\
 &\quad + \underbrace{\binom{5}{4} 1^4 2^{5-4}}_{k=4} + \underbrace{\binom{5}{5} 1^5 2^{5-5}}_{k=5} \\
 &= \underbrace{\binom{5}{0} 2^5}_{k=0} + \underbrace{\binom{5}{1} 2^4}_{k=1} + \underbrace{\binom{5}{2} 2^3}_{k=2} + \underbrace{\binom{5}{3} 2^2}_{k=3} + \underbrace{\binom{5}{4} 2^1}_{k=4} + \underbrace{\binom{5}{5} 2^0}_{k=5} \\
 &= 2^5 + 5 \cdot 2^4 + 10 \cdot 2^3 + 10 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 1 = 243.
 \end{aligned}$$

Bi polinomioen zatiketa egiteko, zenbakiekin egiten den moduan egiten da; adibidez:

$$x^3 - x + 1 = (x - 1)(x^2 + x) + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.4.2 Funtzio esponentziala

Funtzio esponentziala esate zaio a oinarrian $f(x) = a^x$ forma generikoa duen funtzioari; a , 1 zenbakiaren desberdina den zenbaki positiboa izanik. Funtzio esponentzial ororen definizio-eremua zenbaki arrunten multzoa da, \mathbb{R} .



1.2 irudia . Funtzio esponentziala

Funtzio esponentziala logaritmikoaren alderantzizkoa dela esan daiteke, honako hau betetzen baita:

$$a^x = b \iff \log_a b = x.$$

Bereziki interesgarria da $f(x) = e^x$ funtzio esponentzialaren kasua.

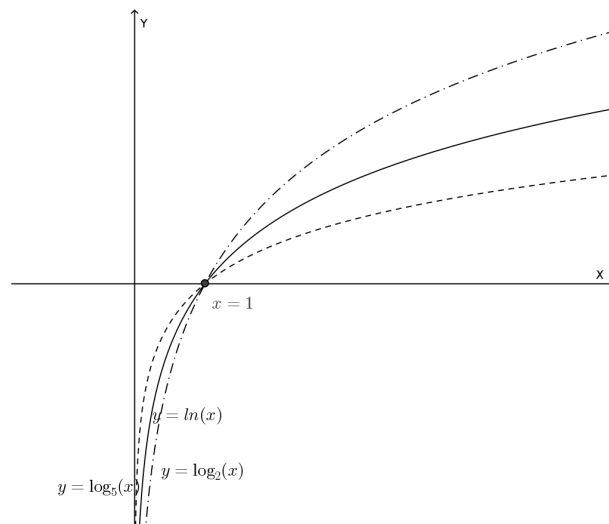
Berreturen propietateak.

1. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.
2. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, $(b \neq 0)$.
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.
4. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.
5. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $(a \neq 0)$.
6. $a^n = a^m \iff n = m$.

1.4.3 Funtzio logaritmikoa

Funtzio logaritmikoa, generikoki $f(x) = \log_a x$ adierazten da, a funtzio horren oinarria izanik, positiboa eta 1-en desberdina izan behar duena.

Funtzio logaritmikoa, funtzio esponentzialaren alderantzizkoa da. Hemen dugu bere grafikoa:



1.3 irudia . Logaritmo funtzioa

Logaritmoen propietateak.

1. $\log_a b = c \iff a^c = b$.
2. $\log_a a = 1$.
3. $\log_a 1 = 0$.
4. $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

5. $\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c.$
6. $\log_a b^c = c \log_a b.$
7. $\log_a \sqrt[c]{b} = \frac{1}{c} \log_a b.$
8. $\log_a b = \log_a c \iff b = c.$
9. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$ Oinarri-aldaketa.
10. $\log_a a^b = b.$

Logaritmoaren oinarria e denean, *logaritmo nepertarra* esaten zaio. Notazio moduan, nahiko orokortua dago logaritmoa nepertarra $\ln x = \log x$ eran adieraztea.

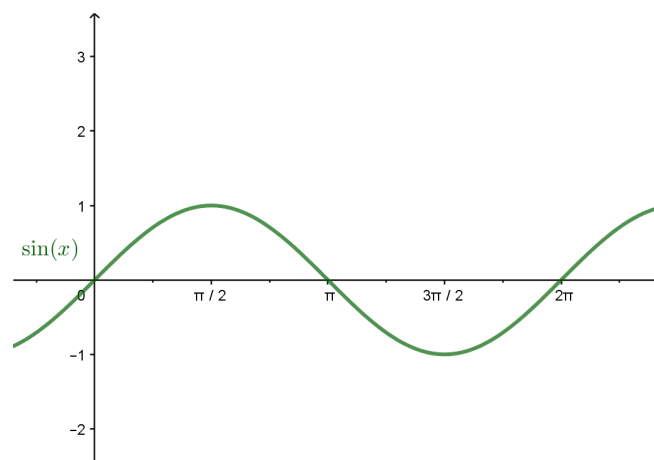
1.5 Funtzio trigonometrikoak

Funtzio trigonometrikoa edo zirkularra da, aldagai independentearen balio ezberdinei arrazoi trigonometrikoa eragitea, radianetan adierazita.

Sei motatako funtzio trigonometrikoak daude: sinua eta bere alderantzizkoa, kosekantea; kosinua eta bere alderantzizkoa, sekantea; eta tangentea eta bere alderantzizkoa, kotangentea. Haie-tako bakoitzarentzat alderantzizko funtzio zirkularra defini daiteke: sinu arkua, kosinu arkua, eta abar.

1.5.1 Sinu funtzioa

Sinu funtzioa deitzen zaio, sinu arrazoi trigonometrikoa radianetan adierazten den independen-teari eragiteari, eta honela adierazten da: $f(x) = \sin x$. Sinu funtzioak 2π periodikotasuna du; jarraitua eta deribagarria da bere izate-eremuan, hots, \mathbb{R} osoan.



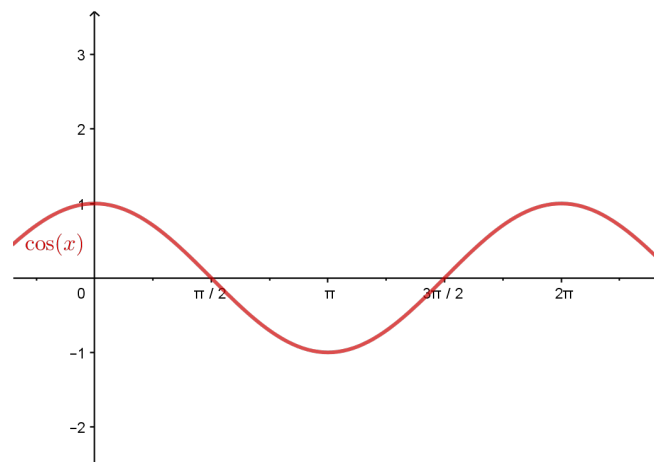
1.4 irudia . Sinu funtzioa

Propietateak, laburbilduta:

- ▷ Funtzioaren irudia $[-1, 1]$ tartean dago.
- ▷ Funtzinoa bakoitia da, hots, $\sin(-x) = -\sin(x)$ baita $\forall x \in \mathbb{R}$.
- ▷ OX ardatzarekiko ebaki-puntuak $x = n\pi$ abzisa-puntuetan $\forall n \in \mathbb{Z}$.
- ▷ Funtzioaren balio maximoa 1 eta minimoa -1 dira. Funtzioaren anplitudea 1 da.

1.5.2 Kosinu funtzioa

Kosinu funtzioa honela adierazten da: $f(x) = \cos x$, eta kosinu arrazoi trigonometrikoa radianetan adierazten den aldagai independente bati eragitean sortzen da. Kosinu funtzioak 2π periodikotasuna du; jarraitua eta deribagarria da bere izate-eremuan, hots \mathbb{R} osoan.



1.5 irudia . Kosinu funtzioa

Propietateak laburbilduta:

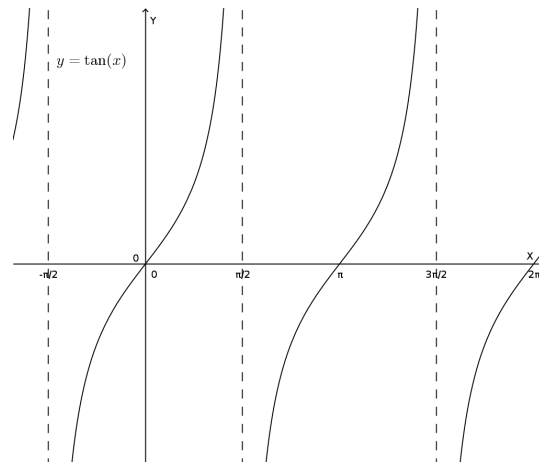
- ▷ Funtzioaren irudia $[-1, 1]$ tartean dago.
- ▷ Funtzinoa bikoitia da, hots, $\cos(-x) = \cos(x)$ baita $\forall x \in \mathbb{R}$.
- ▷ OX ardatzarekiko ebaki-puntuak $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ abzisa-puntuetan dira $\forall n \in \mathbb{Z}$.
- ▷ Funtzioaren balio maximoa 1 eta minimoa -1 dira. Funtzioaren anplitudea 1 da.

1.5.3 Tangente funtzioa

Tangente funtzioa honela adierazten da: $f(x) = \tan x$. Tangente funtzioak π periodikotasuna du; jarraitua eta deribagarria da bere izate-eremuan, hots, $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{N}\}$ osoan.

Propietateak, laburbilduta:

- ▷ Funtzioaren irudia \mathbb{R} tartean dago.
- ▷ Funtzinoa bakoitia da, hots, $\tan(-x) = -\tan(x)$ baita.
- ▷ OX ardatzarekiko ebaki-puntuak $x = n\pi$ abzisa-puntuetan dira $\forall n \in \mathbb{Z}$.

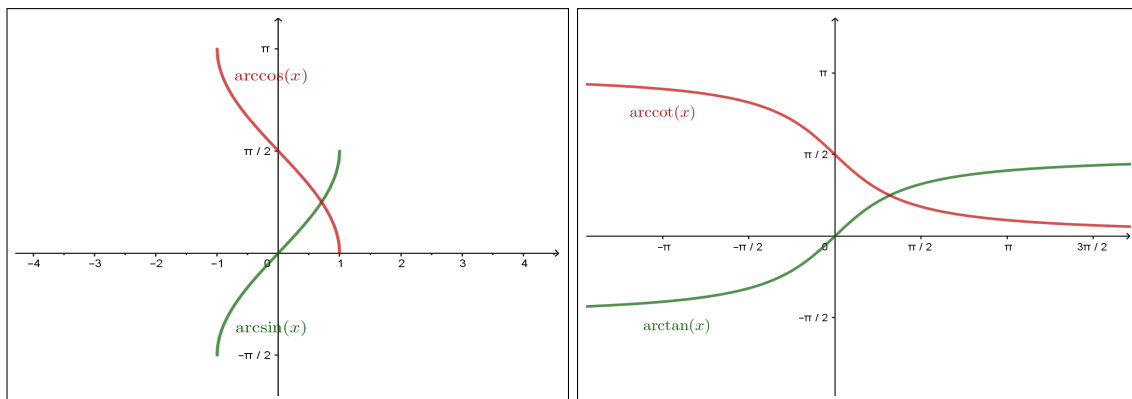


1.6 irudia . Tangente funtzioa

$\sin x$, $\cos x$ eta $\tan x$ funtzioek funtzio zirkular elkarkaria dituzte; hau da, funtzio trigonometrikoen ekintza deuseztatzen dute.

- ▷ Sinuaren funtzio elkarkaria arku sinua da, $\arcsin x$.
- ▷ Kosinuaren funtzio elkarkaria arku kosinua da, $\arccos x$.
- ▷ Tangentearen funtzio elkarkaria arku tangentea da, $\arctan x$.

1.7 irudia . funtzio zirkular elkarkariak

(a) $\arcsin(x)$ eta $\arccos(x)$ (b) $\arctan(x)$ eta $\text{arccot}(x)$

1.5.4 Funtzioen transformazioak

Askotan, interesgarria izaten da funtzio bat mugitzeko erregelak; hau da, dilatatzeari. Horrelako transformazioak egiterakoan, lagungarri izan dezakegu honako eskema hau:

$$y(x) = A f(Bx + C) + D.$$

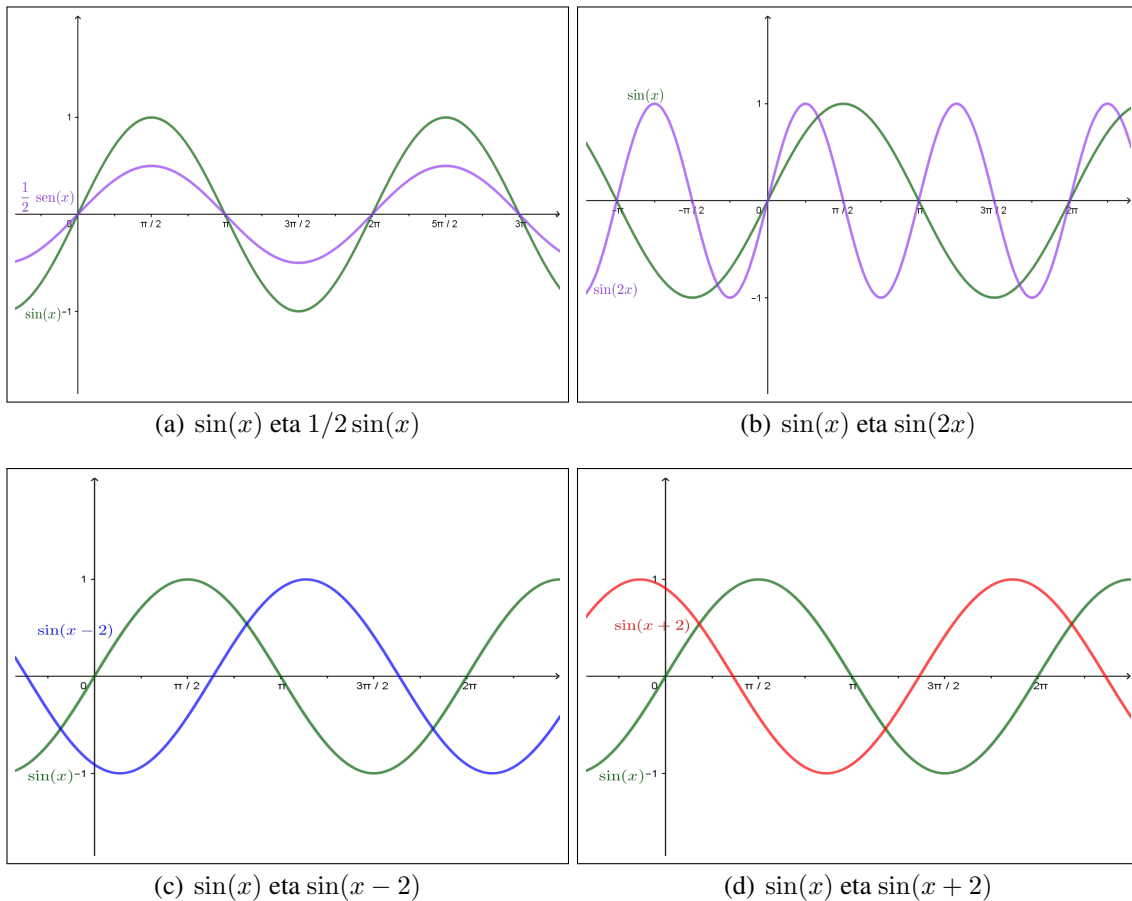
non

- ▷ ▷ $A > 0$: dilatazio bertikala.
- ▷ $A < 0$: simetria X -rekiko eta dilatazio bertikala.

- ▷ ▷ $B > 0$: dilatazio horizontala.
- ▷ ▷ $B < 0$: simetria Y -rekiko eta dilatazio horizontala.
- ▷ C : desplazamendu horizontala.
- ▷ D : desplazamendu bertikala.

Ikus ditzagun sinu funtzioari aplikatutako transformazio erraz batzuen grafikoak.

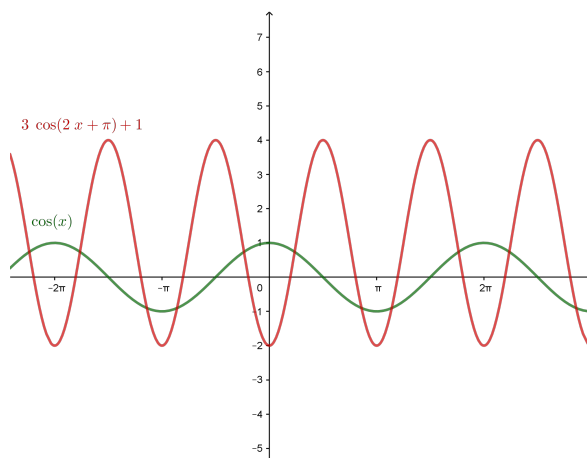
1.8 irudia . $\sin(x)$ funtzioaren transformazio batzuk



Transformazio horiei begiratuta, honako laburpen hau atera dezakegu:

- ▷ Anplitudea: $|A|$, balio maximo eta minimoen arteko batez bestekoa.
- ▷ Periodikotasuna: $\frac{2\pi}{B}$.
- ▷ Desfasea: $-\frac{C}{B}$ unitateko desplazamendu horizontala eskuinera edo ezkerrera, C negatiboaren edo positiboaren arabera, hurrenez hurren, $y(x) = Af(Bx)$ grafikoan.
- ▷ Desplazamendu bertikala: D unitateko translazio bertikala $y(x) = Af(Bx + C)$ grafikoan.

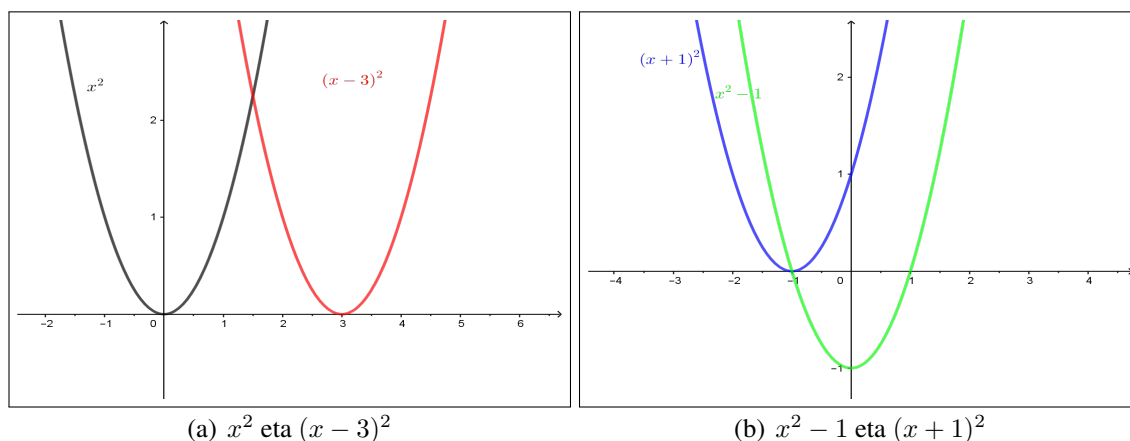
Adibidea Izan bedi $f(x) = 3 \cos(2x + \pi) + 1$ funtzioa. Erraz ikus daiteke funtzio honetan: anplitudea=3, periodikotasuna= $\frac{2\pi}{2} = \pi$, desfasea= $-\frac{\pi}{2}$ eta desplazamendu bertikala 1.



1.9 irudia . $f(x) = 3 \cos(2x + \pi) + 1$ funtzioa

Era berean, edozein beste funtzio batekin ere antzeko transformazioak egin daitezke; honako irudi hauetan $f(x) = x^2$ funtzioarekin egindakoak agertzen dira:

1.10 irudia . x^2 funtzioaren transformazio batzuk



(a) x^2 eta $(x - 3)^2$

(b) $x^2 - 1$ eta $(x + 1)^2$

1.6 Funtzio jarraituak

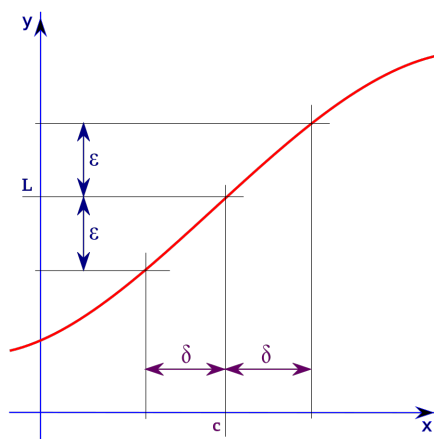
Funtzio jarraitu baten azalpena XIX. mendean agertu zen *Bolzano* eta *Cauchy* matematikariei esker, baina matematikan erabiltzen den funtzio jarraitu baten definizioa ε eta δ erabilita *Weierstrass* matematikariari dagokio.

Funtzio baten jarraitutasunaren definizioa eman baino lehen, limitearen kontzeptua azaldu behar da. Limiterako joerak helmugara hurbiltzea esan nahi du, beti lortzen ez dena. Ereku matematikoan, ideia hori infinitesimoa eta infinituki handia (infinitua) kontzeptuak konbinatzen dituen definizio zehatzean egiten da.

DEFINIZIOA. Izan bedi f funtzioa. Orduan, f funtzioaren *limitea* x aldagaiak c puntura jotzen duenean L balioa dela diogu, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$, honako hau betetzen denean:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - c| < \delta(\varepsilon) \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Oharra. Garrantzitsua da jakinaraztea limitearen definizioan f funtzioaren balioak c puntuan ez duela garrantzirik. Are gehiago, ez da beharrezkoa $f(c)$ definituta egotea.



1.11 irudia . Limitea

DEFINIZIOA. Izan bedi f funtzioa. Orduan:

f funtzioaren *eskuin-limitea* x aldagaiak c puntura eskuinetik jotzen duenean L balioa dela diogu, $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$, honako hau betetzen denean:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < x - c < \delta(\varepsilon) \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

f funtzioaren *ezker-limitea* x aldagaiak c puntura ezkerretik jotzen duenean L balioa dela diogu, $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$, honako hau betetzen denean:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < c - x < \delta(\varepsilon) \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Puntua emanda, eta aurreko definizioaren arabera, $x = c$ puntura hurbiltzeko bi era daude: bata balioaren eskuinaldetik eta bestea balioaren ezkerretik. Definizioz, funtzioaren limitea existitzeko bete beharreko baldintza da ezker-limitea eta eskuin-limiteak existitzea eta berdinak izatea. Hots,

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x).$$

DEFINIZIOA. Izan bitez f aldagai errealeko funtzio erreala, D bere definizio-eremua eta $c \in D$. Orduan, f funtzioa c puntuan *funtzio jarraitua* dela diogu honako hau betetzen denean:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

hau da,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |x - c| < \delta(\varepsilon) \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Funtzio baten jarraitutasun-tartea A bada, orduan A multzo horretako puntu guztietan jarraitua da. Honako definizio honetan eskuin eta ezker-jarraitutasunaren definizioak ikusiko ditugu.

DEFINIZIOA. Izan bitez f aldagai errealeko funtzio erreala, D bere definizio-eremua eta $c \in D$. Orduan,

- (i) f funtzioa c puntuan *eskuin-jarraitua* dela diogu, baldin $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$ betetzen bada.
- (ii) f funtzioa c puntuan *ezker-jarraitua* dela diogu, baldin $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$ betetzen bada.

Oharra. Definizio hori kontuan hartuta, f funtzioa jarraitua da c puntuan, baldin eta soilik baldin eskuin-jarraitua eta ezker-jarraitua bada puntu horretan.

Adibidea Izan bedi honako funtzio hau:

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & x < 0 \text{ denean,} \\ 0, & x \geq 0 \text{ denean.} \end{cases}$$

Funtzio honen jarraitutasuna aztertuko dugu $x = 0$ puntuan aurreko definizioak kontuan hartuta. Hau da,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0, \end{aligned}$$

beraz, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ eta $f(0) = 0$ funtzioa jarraitua da $x = 0$ puntuan.

Funtzio jarraituen propietate batzuk honako teorema honetan batzen ditugu.

1.6.1 teorema. Izan bitez f eta g funtzio jarraituak c puntuan. Orduan,

1. $f + g$ jarraitua da $x = c$ puntuan.
2. $f \cdot g$ jarraitua da c puntuan.
3. $g(c) \neq 0$ denean, orduan $\frac{f}{g}$ jarraitua da c puntuan. Bereziki, $\frac{1}{g}$ jarraitua da c puntuan.

1.6.2 teorema. Izan bitez f funtzio jarraitua c puntuan eta g funtzio jarraitua $f(c)$ puntuan. Orduan, $g \circ f$ funtzio konposatua jarraitua da c puntuan.

DEFINIZIOA. Izan bitez f aldagai errealeko funtzio erreala, D bere definizio-eremua eta $c \in D$. Orduan, f funtzioak *etena* duela esaten da c puntuan, jarraitutasunik ez duenean puntu horretan.

DEFINIZIOA. Izan bitez f funtzioa eta c bere eten-puntu bat; ikus ditzagun eten-puntu motak.

- ▷ f funtzioaren limitea c puntuan existitzen bada, $\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x)$, baina $f(c)$ balioaren desberdina bada, orduan funtzioak *eten gaindigarria* duela esango dugu. Zeren, kasu horretan, beste funtzio bat defini baitezakegu non

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq c, x \in D \\ \lim_{x \rightarrow c} f(x), & x = c \end{cases}$$

den, hasierako f funtzioaren ia berdina eta jarraitua c puntuan, $F(x) = f(x)$, $\forall x \neq c$ eta $\lim_{x \rightarrow c} F(x) = F(c)$ betetzen direlako.

- ▷ f funtzioak c puntuan *eten esentziala* duela diogu honako limite hau existitzen ez denean: $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$. Bi arrazoi egon daitezke:

- (a) Bi albo-limiteak existitzen direla, baina desberdinak dira. Kasu horretan, funtzioak c puntuan *lehenengo espezieko etena* duela esaten da.

Kenketari, *jauzia* esaten zaio.

$$\left| \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \right|.$$

- (b) Albo-limiteren bat existitzen ez denean edo $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$ edo $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$, funtzioak $x = c$ puntuan *bigarren espezieko etena* duela esaten da.

1.7 Funtzio deribagarriak

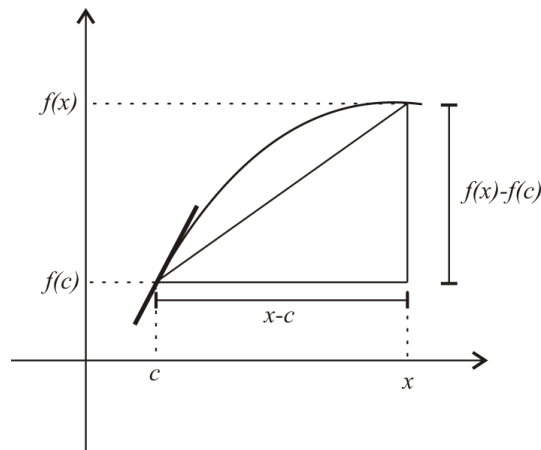
Atal honetan f funtzio baten deribagarritasunari buruz arituko gara. Hasteko, f funtzioa definituta dagoen multzoan harituko gara, D multzo horri f funtzioaren definizio-eremua esaten diogu. Horrela izan ezik, definizio-eremu horretan ez dagoen puntu batean deribagarritasuna aztertzea alferrikako gauza litzateke. Adibidez, $f(x) = \frac{1}{x}$ funtzioa dugu; $x = 0$ puntuan ez dago definituta, eta deribagarritasuna aztertzeak ez du zentzurik.

DEFINIZIOA. Izan bedi $f(x)$ D definizio-eremu batean definituriko funtzio bat; $f(x)$ *deribagarria* dela diogu $x = c \in D$ puntuan, $f'(c)$ eran adieraziko dugu, honako limite hau existitzen denean:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{edo} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}.$$

Oharra. Argi dago oraintxe ikusitako bi limiteak baliokideak direla; hau da, $x = c + h$ al-daketa besterik ez da egin behar. Definizioa kontuan harturik, $f(x)$ funtzioa deribagarria dela diogu A multzo batean, A multzo horretako puntu guztietan deribagarria denean.

Interesgarria da jakitea $f(x)$ funtzioaren $x = c$ puntuan deribagarria izatearen esanahi geometrikoa. Hau da, $x = c$ puntuko zuzen ukitzailearen malda da.



1.12 irudia . Deribatua

Hori dela eta, f funtzioaren grafikoaren $(a, f(a))$ puntuko zuzen ukitzailearen ekuazioa honako hau da:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Ikus dezagun orain definizioaren adibidea.

Adibidea Izan bedi $f(x) = x^2 + 3$ funtzioa; frogatu $x = 2$ puntuan deribagarria dela definizioa erabiliz.

Horretarako, definizioan gure kasua ordezkatu dugu.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3 - 7}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4. \end{aligned}$$

Zer esanik ez dago, $f(x)$ funtzioa polinomioaenez nahi beste aldiz deriba daitekeela. Geroago ikusiko ditugun tauletan argi gelditzen da polinomio honen deribatua $f'(x) = 2x$ dela, eta, horrez gain, $x = 2$ puntuan ordezkatu $f'(2) = 4$, definizioz egindakoaren berdina.

Funtzio bat deribagarria izaterakoan, baditu beste propietate batzuk ere; hona hemen bat.

1.7.1 teorema. Izan bedi $f(x)$ funtzioa deribagarria $x = c$ puntuan; orduan, $f(x)$ jarraitua da $x = c$ puntuan.

Teorema honek esaten diguna garrantzitsua da, zeren $f(x)$ funtzioa jarraitua ez bada, orduan ezin daiteke deribagarria izan, honako ohar honek adierazten duen bezalaxe.

Oharra. Teoremaren alderantzizkoa ez da betetzen. Ikus dezagun kontraadibide bat.

Izan bedi $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Ikus dezagun jarraitua dela $x = 0$ puntuan, baina ez dela deribagarria puntu horretan.

Deribagarritasuna.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty.$$

Jarraitutasuna.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow 0^-}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow 0^-}} \sqrt[3]{x} = 0 = f(0).$$

1.7.2 teorema. Izan bitez f eta g bi funtzio deribagarriak c puntu batean, orduan

1. $(f \pm g)$ deribagarria da c puntuan, eta $(f \pm g)'(c) = f'(c) \pm g'(c)$.
2. $f \cdot g$ deribagarria da c puntuan, eta $(f \cdot g)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$.
3. $g(c) \neq 0$ bada $\frac{f}{g}$ deribagarria da c puntuan, eta $\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g^2(c)}$.

Gogora dezagun bi funtzioen konposaketaren azalpena. Izan bitez f eta g bi funtzio, non

$$\begin{array}{ccc} A \subseteq \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & f(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ c \mapsto & & f(c) \mapsto & & g(f(c)) = (g \circ f)(c) \end{array}$$

betetzen duten; hemen daukaguna, f eta g funtzioen konposaketa da, $(g \circ f)$ -rekin adieraziko duguna. Kontuan hartu behar da, f funtzioaren irudia, $f(A)$, g funtzioaren izate-eremuaren, B , barne egon behar duela.

Izan bitez f funtzio deribagarria c puntuan eta g funtzio deribagarria $f(c)$ puntuan; orduan, $(g \circ f)$ funtzioa deribagarria da c puntuan, eta $(g \circ f)'(c) = f'(c)g'(f(c))$ da; horri *kate-erregela* esaten zaio.

Adibidea Har dezagun aurreko atalean ikusitako konposaketaren adibidea, $(g \circ f)(x) = \sin(2x)$; gogora dezagun deskonposaketa:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f(x)=2x} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g(x)=\sin(x)} & \mathbb{R} \\ x \mapsto & & 2x \mapsto & & g(f(x)) = (g \circ f)(x) = \sin(2x). \end{array}$$

Orduan, kate-erregela aplikatuta, honako hau dugu:

$$(g \circ f)'(c) = f'(c) \cdot g'(f(c)) = 2 \cdot \cos(2c).$$

Funtzioak deribatzerakoan ez dugu definizioa erabili behar izango, zeren funtzio ezagunen deribatua kalkulatu eta taularatuta baititugu. Kontuan hartu behar dugu hurrengo taulan agertzen diren funtzioak aldagai errealeko funtzioak direla, hots,

$$u = u(x), v = v(x), w = w(x)$$

eta a , c , m eta e konstanteak.

Oinarrizko funtzioen deribatuak honako hauek dira.

FUNTZIOA	DERIBATUA	FUNTZIOA	DERIBATUA
$y = c \cdot u$	$y' = c \cdot u'$	$y = \cot u$	$y' = -u' \cdot \csc^2 u$
$y = u + v + w$	$y' = u' + v' + w'$	$y = \sec u$	$y' = u' \cdot \tan u \cdot \sec u$
$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$	$y = \csc u$	$y' = -u' \cdot \cot u \cdot \csc u$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	$y = \arcsin u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = f(u); u = g(x)$	$y' = f'(u) \cdot g'(x)$	$y = \arccos u$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = u^m$	$y' = m \cdot u^{m-1} u'$	$y = \arctan u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
$y = \sqrt[m]{u}$	$y' = \frac{u'}{m \sqrt[m]{u^{m-1}}}$	$y = \operatorname{arctg} u$	$y' = -\frac{u'}{1+u^2}$
$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y = \operatorname{arcsec} u$	$y' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$
$y = a^u$	$y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	$y = \operatorname{arccsc} u$	$y' = -\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$
$y = e^u$	$y' = e^u \cdot u'$	$y = \sinh u$	$y' = u' \cdot \cosh u$
$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u} \log_a e$	$y = \cosh u$	$y' = u' \cdot \sinh u$
$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$	$y = \tanh u$	$y' = \frac{u'}{\cosh^2 u}$
$y = \sin u$	$y' = u' \cdot \cos u$	$y = \operatorname{artanh} u$	$y' = \frac{u'}{1-u^2}$
$y = \cos u$	$y' = -u' \cdot \sin u$	$y = \operatorname{arsinh} u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$
$y = \tan u$	$y' = u' \cdot \sec^2 u$	$y = \operatorname{arcosh} u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$

Notazioa. Izan bedi $y = f(x)$ n aldiz deribagarria den funtzioa $I \subseteq \mathbb{R}$ tarte batean. Orduan, deribatueterako erabiltzen diren notazioak honako hauek izaten dira:

$$\begin{aligned}
 1. \text{ deribatua: } & f'(x), \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{dy}{dx}. \\
 2. \text{ deribatua: } & f''(x), \quad \frac{d^2f}{dx^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}. \\
 3. \text{ deribatua: } & f'''(x), \quad \frac{d^3f}{dx^3}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}. \\
 4. \text{ deribatua: } & f^{(4)}(x), \quad \frac{d^4f}{dx^4}, \quad \frac{d^4y}{dx^4}. \\
 5. \text{ deribatua: } & f^{(5)}(x), \quad \frac{d^5f}{dx^5}, \quad \frac{d^5y}{dx^5}. \\
 & \dots\dots\dots \\
 n. \text{ deribatua: } & f^{(n)}(x), \quad \frac{d^nf}{dx^n}, \quad \frac{d^ny}{dx^n}.
 \end{aligned}$$

Ikus dezagun orain zuzen ukitzailearen kalkuluaren adibideren bat.

Adibidea Kalkulatu A, B eta C , non $y = Ax^2 + Bx + C$ funtzioa $(1, 3)$ puntutik pasatu eta $(2, 3)$ puntuan $x - y + 1 = 0$ funtzioarekiko ukitzailea den.

Behintzat hiru ezezagun agertzen dira, hots, A, B eta C ; beraz, $y = y(x)$ funtzioa lortzeko hiru baldintza behar ditugu. Lehenengo biak errazak dira, zeren $(1, 3)$ eta $(2, 3)$ puntuetatik pasatzen baita. Beste alde batetik, $x - y + 1 = 0$ zuzena $(2, 3)$ puntuan y -rekiko ukitzailea izatearen esanahia: $x = 2$ puntuko deribatua $x - y + 1 = 0$ zuzenaren maldaren berdina da. Beraz, baditugu behar genituen hiru baldintzak:

$$\begin{cases} y(1) = 3, & A + B + C = 3 \\ y(2) = 3, & 4A + 2B + C = 3 \\ y'(2) = 1, & 4A + B = 1 \end{cases}$$

Sistema hau ebatziz gero, $A = 1$, $B = -3$ eta $C = 5$ dira.

Ariketa.

1) Izan bitez $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$ eta $h(x) = \sin x$. Kalkulatu:

- | | | |
|----------------------|----------------------|------------------------------|
| (a) $(f \circ g)(x)$ | (d) $(h \circ f)(x)$ | (g) $(f \circ g \circ h)(x)$ |
| (b) $(g \circ f)(x)$ | (e) $(h \circ g)(x)$ | |
| (c) $(f \circ h)(x)$ | (f) $(g \circ h)(x)$ | |

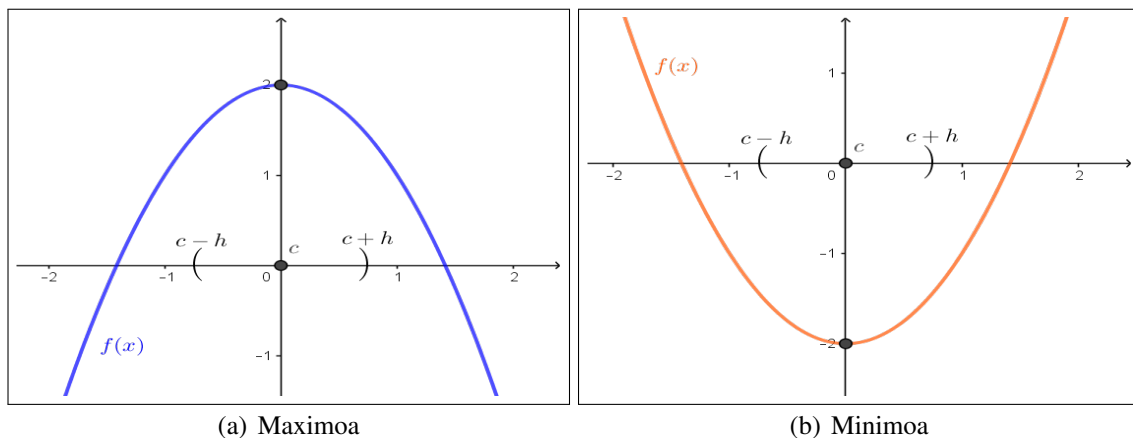
1.8 Batez besteko balioaren teoremak

DEFINIZIOA. Izan bitez $f(x)$ funtzio bat, D bere definizio-eremua eta $x_1, x_2 \in D$. Orduan, $f(x)$ funtzioa *gorakorra* dela diogu, $x_1 \leq x_2$ izanik $f(x_1) \leq f(x_2)$ betetzen denean. $f(x)$ funtzioa *beherakorra* dela diogu, $x_1 \leq x_2$ izanik $f(x_1) \geq f(x_2)$ betetzen denean.

DEFINIZIOA. Izan bitez $f(x)$ funtzio bat, D bere definizio-eremua eta $x_1, x_2 \in D$. Orduan, $f(x)$ *hertsiki gorakorra* dela diogu, $x_1 < x_2$ izanik $f(x_1) < f(x_2)$ betetzen denean. $f(x)$ *hertsiki beherakorra* dela diogu, $x_1 < x_2$ izanik $f(x_1) > f(x_2)$ betetzen denean.

DEFINIZIOA. Izan bitez $f(x)$ funtzio bat, D bere definizio-eremua eta $c \in D$. Orduan, $f(x)$ funtzioak $x = c$ puntuan *maximo lokal* bat duela esaten da, existitzen denean $h > 0$, zeinekiko edozein $x \in (c - h, c + h)$ tartean egonik, $f(x) \leq f(c)$ desberdintza betetzen bada. Era berean, $f(x)$ funtzioak $x = c$ puntuan *minimo lokal* bat duela esaten da, existitzen denean $h > 0$, zeinekiko edozein $x \in (c - h, c + h)$ tartean egonik, $f(x) \geq f(c)$ desberdintza betetzen bada. Maximo eta minimo lokalak *mutur lokalak dira*, eta mutur lokalak maximo eta minimo lokalak dira.

1.13 irudia . Funtzio baten maximoa eta minimoa



1.8.1 teorema (Fermat-en teorema). *Izan bedi $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funtzioa. $f(x)$ funtzioak $x = c$ puntuan mutur lokala baldin bada eta deribagarria bada puntu horretan, orduan $f'(c) = 0$ da.*

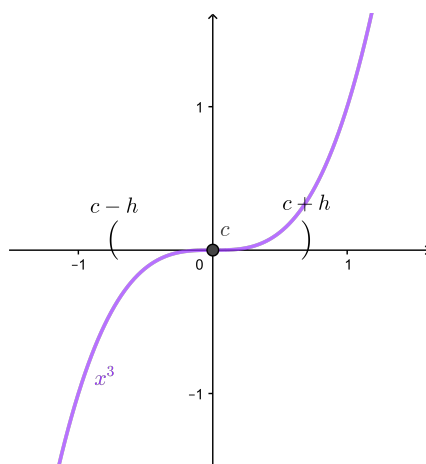
Oharra. Alderantzizkoa ez da betetzen. Kontraadibide bat jarriko dugu. Izan bitez $f(x) = x^3$ eta $[-1, 1]$ tartea. Deribatuak kalkulatuko ditugu.

$$f(x) = x^3, \quad f'(x) = 3x^2, \quad f''(0) = 6x$$

$f(x)$ funtzioa deribagarria da $(-1, 1)$ tartean; horrez gain, $(-1, 0)$ eta $(0, 1)$ tartetean gorakorra da. Beraz, $x = 0$ puntua ez da ez maximoa ez minimoa, *inflexio-puntua* da. Definizioz ikusita:

$$\nexists h > 0 \mid \forall x \in (-h, h) \quad \text{non} \quad f(0) = 0 \leq f(x) \quad \text{den.}$$

$$\nexists h > 0 \mid \forall x \in (-h, h) \quad \text{non} \quad f(0) = 0 \geq f(x) \quad \text{den.}$$



1.14 irudia . Inflexio-puntua

1.8.2 teorema (Rolle-ren teorema). *Izan bedi $f(x)$ funtzioa jarraitua $[a, b]$ tartean eta deribagarria (a, b) tartean. Demagun $f(x)$ -ren balioak a eta b puntuetan berdinak direla; hau da, $f(a) = f(b)$. Orduan, existitzen da (a, b) tarteko c puntu bat, $c \in (a, b)$, non $f'(c) = 0$ den.*

Oharra. Ez da beharrezkoa suposatzea $f(a)$ eta $f(b)$ zero direnik.

Ondorioa. f funtzioaren bi erro errearen artean, f' funtzioaren erro bat dago. Horrek ez du esan nahi f funtzioak f' funtzioak baino erro bat gehiago duenik. Horren guztiaren esanahia da badagoela puntu bat non zuzen ukitzaila horizontala den.

Adibidea *Izan bedi $f(x) = x^2 - 3x + 2$ funtzioa. Frogatu $f'(x) = 0$ dela.*

Rolle-ren teorema erabiliko dugu.

Faktore sinpleetako deskonposaketa eginda, $f(x) = (x - 1)(x - 2)$ dugu. Beraz, $f(1) = f(2) = 0$ da, eta f jarraitua da $[1, 2]$ tartean eta deribagarria $(1, 2)$ tartean. Horrekin guztiarekin Rolle-ren teoremaren baldintzak betetzen ditu; orduan, badago $c \in (1, 2)$ non $f'(c) = 0$ den. Deribatuz gero, $f'(x) = 2x - 3$ eta $f'(x) = 0$ da $x = \frac{3}{2}$ denean; horrez gain, puntu horretan zuzen ukitzaila OX ardatzarekiko paraleloa da.

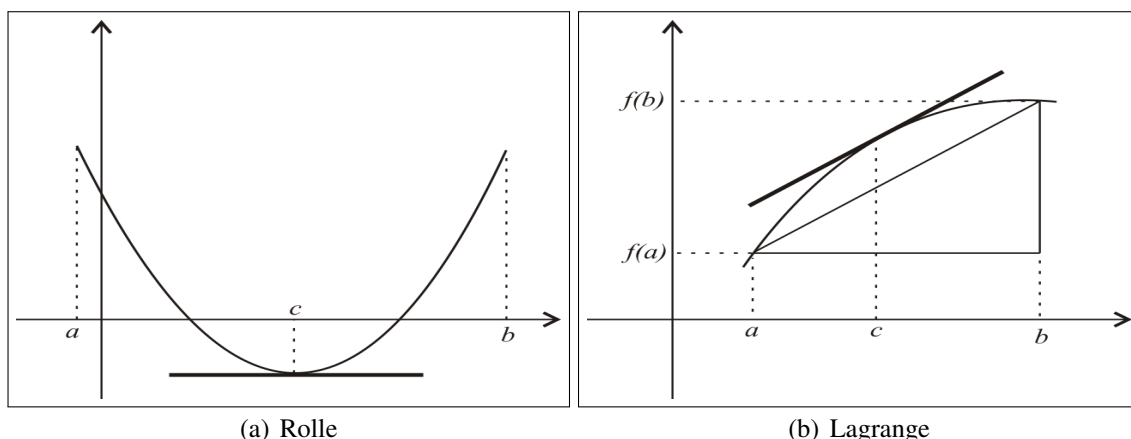
1.8.3 teorema (Lagrange-ren teorema). *Izan bedi $f(x)$ funtzio jarraitua $[a, b]$ tartean eta deribagarria (a, b) tartean. Orduan, existitzen da (a, b) tarteko c puntu bat non*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

den.

Honako irudi honetan aurreko bi teoremen esanahi geometrikoa ikus daiteke. Rolle-ren teoremaren esanahia da deribatua existitzen den puntu horretan zuzen ukitzaila OX ardatzarekiko paraleloa dela. Eta Lagrange-ren teorema esaten du gutxienez badagoela puntu bat tarte horretan non puntu horretatik pasatzen den zuzen ukitzaila $(a, f(a))$ eta $(b, f(b))$ puntuak lotzen dituen segmentuaren paraleloa den.

1.15 irudia . Rolle-ren eta Lagrange-ren teoremen esanahi geometrikoa



Adibidea *Autobide batean bi radar ditugu, beren arteko distantzia 5 kilometrokoa da. Kamioi trailer batek lehenengo radarretik bigarrenera joaten 4 minutu ematen ditu. Lehenengo radarretik pasatzerakoan, trailerrak 55 km/h abiadura darama eta bigarrenean 50 km/h. Batez besteko abiadura 60 km/h-a baino handiagoa da?*

Izan bitez s espazioa, t denbora. lehenengo radarreko denbora t_1 -ekin adieraziko dugu, eta, era berean, t_2 -rekin bigarreneko. Espazioarekin, s , beste horren beste egingo dugu. Honako formula hau dugu:

$$\text{Batez besteko abiadura} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Abiapuntutzat lehenengo radarra hartuz gero, onar dezakegu $t_1 = 0$ dela eta $t_2 = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$.

Horrez gain, $s_1(0) = 0$ eta $s_2(1/15) = 5$ km dira.

Baditugu datu guztiak; beraz, ordezka ditzagun formulari:

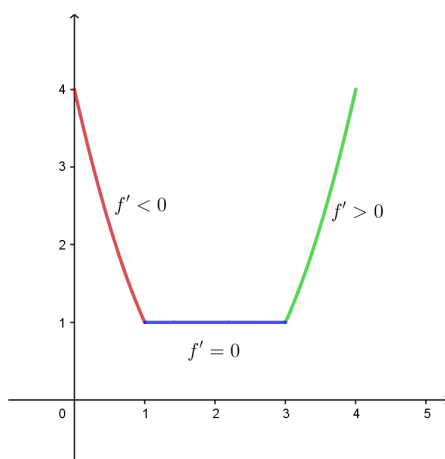
$$\text{Batez besteko abiadura} = \frac{5 - 0}{(1/15) - 0} = 75 \text{ km/h.}$$

Orain arte ikusitako bakarra, funtzio baten deribatuari buruzkoa zen; orain interesgarria zaigu jakitea $f(x)$ funtzio baten eta $f'(x)$ bere deribatuen arteko erlazioa, honako teorema honetan ikusiko duguna.

1.8.4 teorema. *Izan bedi $f(x)$ funtzioa deribagarria (a, b) tartean. Orduan,*

1. $f'(x) > 0$ baldin bada $x \in (a, b)$ dagoelarik, orduan $f(x)$ hertsiki gorakorra da (a, b) tartean.
2. $f'(x) < 0$ baldin bada $x \in (a, b)$ dagoelarik, orduan $f(x)$ hertsiki beherakorra da (a, b) tartean.
3. $f'(x) \geq 0$ baldin bada $x \in (a, b)$ dagoelarik, orduan $f(x)$ gorakorra da (a, b) tartean.
4. $f'(x) \leq 0$ baldin bada $x \in (a, b)$ dagoelarik, orduan $f(x)$ beherakorra da (a, b) tartean.
5. $f'(x) = 0$ baldin bada $x \in (a, b)$ dagoelarik, orduan $f(x)$ konstantea da (a, b) tartean.

Teorema honek funtzioaren eta bere deribatuen arteko erlaziotik atera daitekeen informazioa ematen digu. Hau da, honako irudi honetan ikus daitekeen moduan:



1.16 irudia . Teoremaren azalpena

DEFINIZIOA. Izan bitez $f(x)$ funtzio deribagarria (a, b) tartean eta $c \in (a, b)$ tarte horretako puntua. Orduan, $f'(c) = 0$ denean, $x = c$ puntua *puntu kritikoa* dela diogu.

1.8.5 teorema (Weierstrass). *Izan bedi f funtzio jarraitua $[a, b]$ tartean; orduan, existitzen dira α, β balioak non*

$$\alpha = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \quad \text{eta} \quad \beta = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \quad \text{diren.}$$

Teorema horrek funtzioaren maximoa eta minimoa hartzen direla esaten digu.

1.8.6 teorema. *Izan bitez $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funtzioa eta $c \in (a, b)$ tarteko puntua. Demagun $f(x)$ bi aldiz deribagarria dela, hots, $f''(x)$ existitzen dela eta $x = c$ puntua puntu kritikoa dela. Orduan,*

1. $f''(c) > 0$ bada, orduan $x = c$ puntua minimo lokala da.
2. $f''(c) < 0$ bada, orduan $x = c$ puntua maximo lokala da.

Adibidea Izan bedi $f(x) = x^3 - x$ funtzioa. Aztertu puntu kritikoak $(-2, 2)$ tartean.

Deribatu dezagun funtzioa bi aldiz, eta, puntu kritikoak bilatu ondoren, azter ditzagun.

$$f'(x) = 3x^2 - 1, \quad f''(x) = 6x$$

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Orduan, $f(x)$ -ren puntu kritikoak $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ dira, eta

$$f''\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) > 0 \implies x = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ minimo lokala da}$$

eta

$$f''\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) > 0 \implies x = -\sqrt{\frac{1}{3}} \text{ maximo lokala da.}$$

DEFINIZIOA. Izan bedi $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funtzioa. $f(x)$ *ahurra* dela esaten da (a, b) tarteko edozein x_1, x_2 puntutarako, $(x_1, f(x_1))$ eta $(x_2, f(x_2))$ puntuak lotzen dituen segmentua funtzioaren gainetik dagoenean.

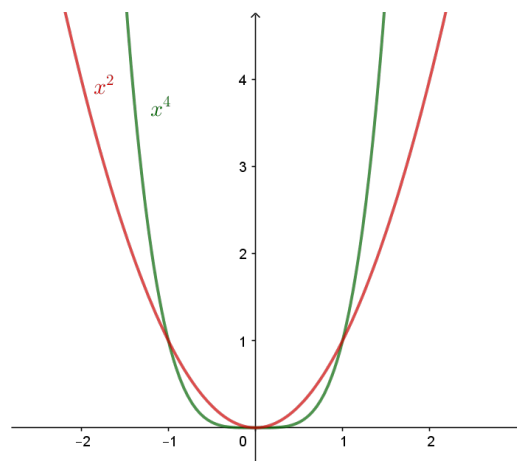
DEFINIZIOA. Izan bedi $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funtzioa. $f(x)$ *ganbila* dela esaten da (a, b) tarteko edozein x_1, x_2 puntutarako, $(x_1, f(x_1))$ eta $(x_2, f(x_2))$ puntuak lotzen dituen segmentua funtzioaren azpitik dagoenean.

Oharra. $f(x)$ ganbila da, baldin eta soilik baldin $-f(x)$ ahurra bada.

1.8.7 teorema. Izan bedi $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funtzioa, eta demagun bigarren deribatua existitzen dela. Orduan,

1. $f''(c) > 0$, baldin eta soilik baldin $f(x)$ ahurra bada.
2. $f''(c) < 0$, baldin eta soilik baldin $f(x)$ ganbila bada.
3. $c \in (a, b)$ inflexio-puntua denean, $f''(c) = 0$ da.

Oharra. Teorema honen hirugarren atalaren kontraadibide bat $f(x) = x^4$ funtzioa da.



1.17 irudia . $f(x) = x^4$, $g(x) = x^2$

DEFINIZIOA. Aldagai errealeko funtzio batean funtzioa ahurra izatetik ganbila izatera (edo alderantziz), igarotzen den aldagaiaren balioari *inflexio-puntua* esaten zaio.

Inflexio-puntuaren irudia aurrerago ikusi dugu; begiratu (??) irudia.

Beste alde batetik, inflexio-puntu baten existentziarako bigarren deribatua ezeztatzea da, baina ez nahikoa. Hots, aurreko oharreko adibidean gertatzen den gauza bera.

1.9 Funtzio baten irudikapen grafikoa

Gaur egun, garrantzitsua izan daiteke $y = f(x)$ funtzio baten irudikapen grafikoa egitea. Hori lortu nahi izanez gero, $f(x)$ funtzio baten grafikoa egiteko (x, y) bikoteka egin daiteke; baina horrek lan handiegia eman dezake, eta, aldi berean, puntuz puntu marrazten dugunez, grafikoa behar den moduan edo era kaxkarrean egin daiteke. Hori dela eta, pauso simple batzuk segituko ditugu $f(x)$ funtzioaren irudikapen grafikoa lortzeko. Lehenengo honako puntu hauek aztertuko ditugu.

1. DEFINIZIO-EREMUA. Multzo hau da, $f(x)$ -ren balioa existitzen deneko x aldagaiaren balio guztiek osatzen duten multzoa.
2. PERIODIKOTASUNA. $f(x)$ funtzioak T periodikotasuna duela diogu, baldin eta soilik baldin $f(x) = f(x+T)$ betetzen bada, non T aipaturako baldintza betetzen duen zenbaki positibo eta txikiena den.
3. EBAKI-PUNTUAK. $f(x)$ funtzioak ardatz kartesiarrak ebakitzen dituen puntuak dira.
4. SIMETRIAK. Bi simetria mota daude:
 - (a) OY ardatzarekiko. $f(x) = f(-x)$ betetzen denean.
 - (b) Jatorriarekiko. $f(x) = -f(-x)$ betetzen denean.

Kontuan eduki beharrekoa da OX ardatzarekiko ez dagoela simetriarik, zeren funtzio bat definitzen denean x puntu bakoitzari $f(x)$ irudi bakarra elkarrarazten baitzaio.

5. ASINTOTAK. Funtzio baten asintotak zuzenak dira. Izan daitezke horizontalak, bertikalak edo zehiarrak. Kontuan hartu beharrekoa da funtzioa eta asintota gero eta gehiago hurbiltzen direla.
 - (a) Bertikalak. OY -rekiko paraleloak diren zuzenak dira; hori dela eta, beren ekuazioa $x = a$ motakoa da. x -ren balioak a baliora hurbiltzen direnean, funtzioak eztanda egiten du, honako limite honek adierazten duen modura:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{edo} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty.$$

- (b) Horizontalak. OX -rekiko paraleloak diren zuzenak dira; hori dela eta, beren ekuazioa $y = b$ motakoa da. x -ren balioak nahiko handiak direnean, funtzioak $y = b$ zuzenera hurbiltzen dira, honako limite honek adierazten duen modura:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad \text{edo} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

- (c) Zehiarrak. Izan bedi $a \neq 0$; $y = ax + b$ motako zuzena asintota zeharra dela diogu,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0 \quad \text{edo} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (ax + b) = 0.$$

limiteak existitzen direnean. Praktikan, a eta b balioak honako era honetan kalkulatzen dira:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - a \cdot x].$$

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - a \cdot x].$$

Oharra. Kontuan hartu beharreko gauza garrantzitsua da asintotak kalkulatzeko orduan albo-limiteak desberdinak izan daitezkeela.

Puntu horiekin eta funtzioaren lehenengo eta bigarren deribatuak ematen diguten informazioarekin, gai izan beharko ginateke funtzioa irudikatzeke.

Adibidea Izan bedi $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ funtzioa. Egin funtzioaren irudikapena. Zehaztu hazkuntza-, jaitsiera-, beherakortasun-, ganbiltasun- eta ahurtasun-tarteak, muturrak, inflexio-puntuak, asintotak eta abar.

1. Funtzioaren definizio-eremua $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ da.

2. Ebaki-puntuak:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0,$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 0.$$

3. Simetriarik ez du:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{-x+2} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$$

4. Ez du periodikotasunik.

5. Asintotak.

(a) Bertikalak.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2}{x+2} = \infty \implies x = -2; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2}{x+2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{x+2} = -\infty.$$

(b) Horizontala.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x+2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+2} = +\infty.$$

(c) Zeiharrek. $y = ax + b = x - 2$. Zatiketa eginda edota definizioa erabilita, hots,

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x+2)} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x+2)} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x(x+2)}{(x+2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{(x+2)} = -2.$$

6. Hazkuntza- eta jaitsiera-tarteak.

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}.$$

Puntu kritikoak bilatzeko $f'(x) = 0 \iff x(x+4) = 0$, $x = 0$ eta $x = -4$.

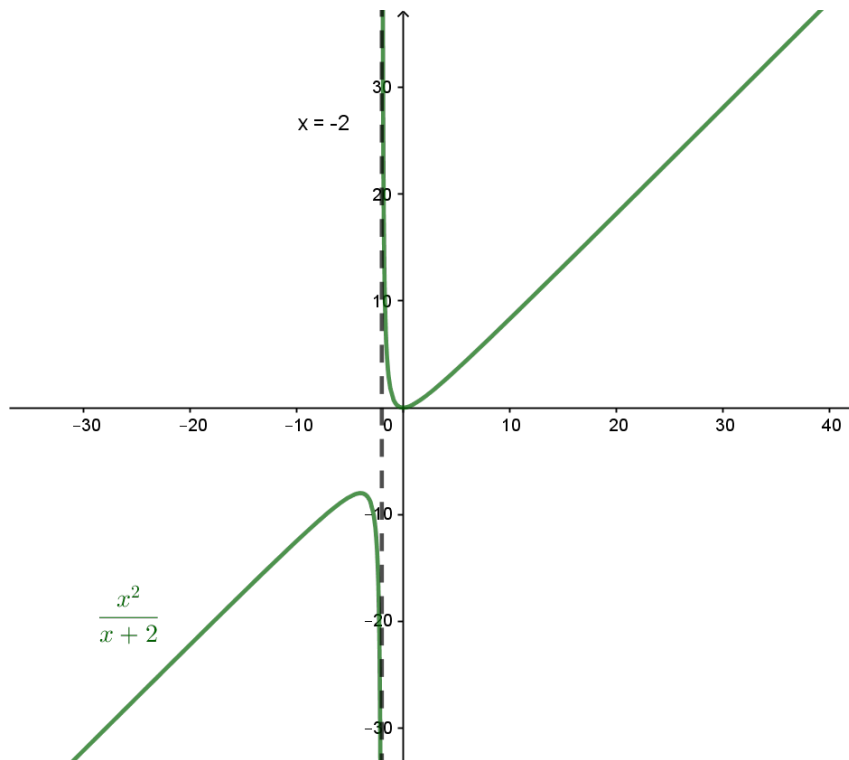
Beharorra da $[-4, -2) \cup (-2, 0]$ tartean, eta gorakorra beste guztian.

7. Ganbeltasun- eta ahurtasun-tarteak.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x+4)(x+2)^2 - (x^2+4x)2(x+2)}{(x+2)^4} \\ &= \frac{(x+2)[(2x+4)(x+2) - 2(x^2+4x)]}{(x+2)(x+2)^3} = \frac{8}{(x+2)^3}. \end{aligned}$$

Beraz, funtzioa ahurra da $(-2, +\infty)$ tartean, eta ganbila da $(-\infty, -2)$ tartean.

Irudikapen grafikoa honako hau da:



Adibidea Izan bedi $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ funtzioa. Egin funtzioaren irudikapena. Zehaztu hazkuntza-, jaitsiera-, ganbeltasun- eta ahurtasun-tarteak, muturrak, inflexio-puntuak, asintotak eta abar.

1. Funtzioaren definizio-eremua $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ da.

2. Ebaki-puntuak:

$$\begin{aligned} x = 0 &\implies f(0) = 0, \\ y = 0 &\implies x = 0. \end{aligned}$$

3. OY ardatzarekiko simetria du:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -f(x)$$

4. Ez du periodikotasunik.

5. Asintotak.

(a) Bertikalak.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \infty \implies x = -1; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \infty \implies x = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty.$$

(b) Horizontala. Ez du.

(c) Zeiharrik. $y = ax + b$. Zatiketa eginda edota definizioa erabilita. Zatiketa egiten badugu

$$x^3 = (x^2 - 1) \cdot x + x, \quad \text{asintota } y = x \quad \text{da.}$$

6. Hazkuntza- eta jaitsiera-tarteak.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}.$$

Puntu kritikoak bilatzeko $f'(x) = 0 \iff x^2(x^2 - 3) = 0$, $x = 0$ eta $x = -\pm\sqrt{3}$ dira.

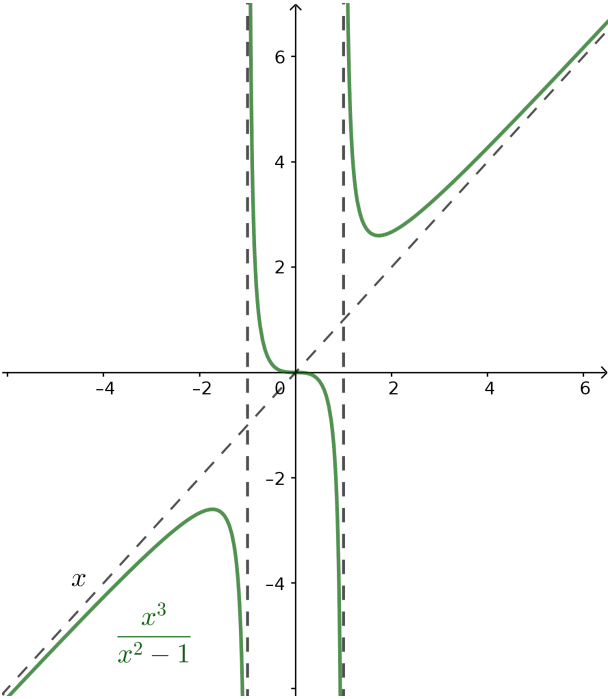
Beraz, funtzioa gorakorra $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$ da, eta beherakorra beste guztian.

7. Ganbiltasun- eta ahurtasun-tarteak.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{[2x(x^2 - 3) + x^2 \cdot 2x](x^2 - 1)^2 - x^2(x^2 - 3) \cdot 2(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} \\ &= \frac{(x^2 - 1)([2x(x^2 - 3) + x^2 \cdot 2x](x^2 - 1) - 2x^2(x^2 - 3))}{(x^2 - 1)(x^2 - 1)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}. \end{aligned}$$

Orduan, funtzioa $(-1, 0] \cup (1, +\infty)$ tartean ahurra eta $(-\infty, -1) \cup [0, 1)$ tartean ganbila izango da.

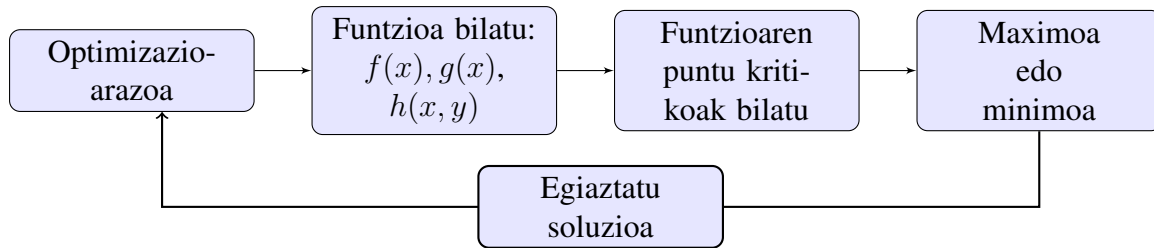
Irudikapen grafikoa honako hau da:



2

Optimizzazioa

Optimizazioaren arazoa maiz agertzen zaigu bizitzan; izan ere, honako grafiko honetan adierazten den moduan ere azaldu dezakegu horren ebazpena.



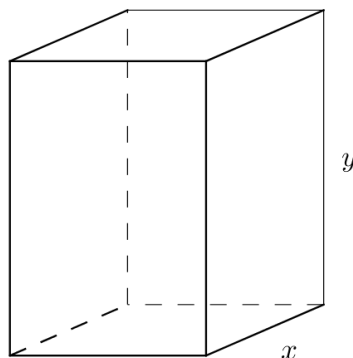
Optimizazioak ekintza bat aurrera eramateko erarik onena bilatzen du. Ekintza hori modelizatu ahal bada funtzio baten bitartez, optimizazioak eskatzen duena funtzio horren balio maximoa edo minimoa bilatzea besterik ez da.

1. Ekintzari elkarrarazten diogun funtzioa aldagai bakarrekoa edo anitzekoa izan daiteke. Ez du zertan funtzio bakar bat egon, asko egon daitezke. Gerta daiteke optimizazioko ekintza horrek soluziorik ez edukitzea ere; adibidez, $f(x) = \frac{1}{1-x}$ funtzioarekin $[0, 1)$ tartean gertatzen dena (ez da existitzen $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$).
2. Behin funtzioa dugula, balio optimoa bilatzen dugu; hots, maximoak eta minimoak bilatzen ditugu. (Mutur globaletan interesaturik gaude, ez lokaletan).
3. Emaizak lortzen ditugunean, berriro hasierara jo behar dugu egiaztatzeko, gure arazoaren konponbideak ote diren jakiteko.

Hemen, aldagai bakarreko funtzioekin besterik ez gara arituko. Hori kontuan hartuta, ezezagun bat baino gehiago agertuz gero ezezagun horiek lotzen dituen ekuazioren bat bilatu behar izango dugu. Optimizazio-ariketa mota horiek ebazteko orduan, gakoa funtzioa bilatzea da. Ikus ditzagun adibide batzuk.

Ariketa. *Taparik gabeko eta oinarri karratua duen kaxa baten bolumena 50 cm^3 izan behar da. Aurkitu kaxaren dimentsioak, erabiltzen den materialaren kantitatea minimoa izan dadin.*

Honako irudi honek gure arazoa ebazten lagunduko digu.



Kaxaren bolumena $B = x^2 y = 50$ eta kaxaren azalera taparik gabe $A = x^2 + 4xy$. Lehenengo ekuaziotik y askatzen dugu, eta bigarrenean ordezkatzuz gero honako hau dugu:

$$A(x) = x^2 + 4x \left(\frac{50}{x^2} \right) = x^2 + \frac{200}{x}.$$

Deribatuak kalkulatzeko ditugu:

$$A'(x) = 2x - 200x^{-2} = \frac{2x^3 - 200}{x^2},$$

$$A''(x) = 2 + \frac{400}{x^3}.$$

Puntu kritikoak kalkulatzeko:

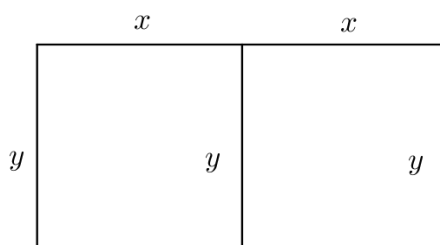
$$A'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 200 = 0 \Rightarrow x^3 = 100 \Rightarrow x = \sqrt[3]{100}.$$

Puntu kritiko hori minimo absolutua da, zeren $A''(\sqrt[3]{100}) > 0$ baita. Beste aldagaiaren balioa kalkulatzeko:

$$y = \frac{50}{(\sqrt[3]{100})^2} = \frac{1}{2} 100^{1/3}.$$

Ariketa. Baserritar batek 300 metro sare ditu bi eskorta angeluzuzen berdinak eta aldamenekoak hesitzeko. Zehaztu eskorten dimentsioak, azalera maximoa izan dadin.

Honako irudi honek gure arazoa ebazten lagunduko digu.



Aurrekoa kontuan hartuta, eskortaren perimetroa $P = 4x + 3y = 300$ eta azalera $A = 2xy$ dira. Lehenengo ekuaziotik y askatuz gero eta azaleraren ekuazioan ordezkatzuta, honako funtzio hau dugu:

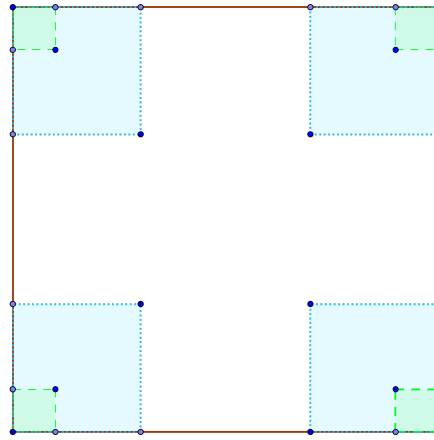
$$A(x) = \frac{2x(300 - 4x)}{3} = 200x - \frac{8}{3}x^2,$$

puntu kritikoak bilatzeko deribatu eta gero zerora berdinduko dugu,

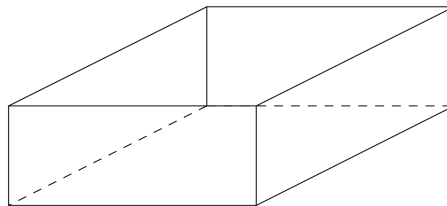
$$A'(x) = 200 - \frac{16x}{3}, \quad A'(x) = 0 \iff \frac{16}{3}x = 200 \iff x = \frac{75}{2}.$$

Funtzioaren bigarren deribatua $A''(x) = -\frac{16}{3} < 0$ enez, $x = \frac{75}{2}$ puntua maximoa da. Hortaz, azalera maximoa $x = \frac{75}{2}$ eta $y = 50$ direnean lortzen da.

Adibidea Kartoi karratu bat dugu. Izkina bakoitzetik karratutxo bat, lauretan berdina, kentzen zaio taparik gabeko kaxa bat egiteko. Kaxa honen bolumena maximizatu nahi dugu. Kalkulatu kaxaren dimentsioak.



Irudian argi ikusten da, kaxari kentzen zaion karratutxo bakoitzaren tamainaren arabera bolumen desberdina lortzen dela. Beraz, kentzen zaion karratuaren oinarria izango da gure funtzioaren ezezaguna. Hori egiterakoan lortzen den kaxak honako itxura hau izango luke.



Arazo hori planteatzeko orduan, badakigu kartoia ematen digutela; halaber, luzeraren bat izango du; izan bedi luzera hori L . Hori kontuan edukita, kaxaren bolumena honako funtzio honek ematen digu:

$$B(x) = x \cdot (L - 2x)^2.$$

Funtzio horren lehenengo eta bigarren deribatuak kalkulatuko ditugu:

$$\begin{aligned} B'(x) &= (L - 2x)^2 + x \cdot 2(L - 2x) \cdot (-2) = (L - 2x) [(L - 2x) - 4x] \\ &= (L - 2x)(L - 6x), \\ B''(x) &= (-2)(L - 6x) + (L - 2x)(-6) = 24x - 8L. \end{aligned}$$

Puntu kritikoak kalkulatzeko, $B'(x) = 0$ noiz den begiratu behar dugu; hots, $x = \frac{L}{2}$ eta $x = \frac{L}{6}$ balioetarako hain zuzen.

Azter dezagun zer gertatzen den bi balio horietarako, bigarren deribatua kontuan hartuta:

$$B(L/2) = 4L > 0 \quad \text{eta} \quad B''(L/6) = -4L < 0.$$

Halaber, $x = L/2$ puntua minimoa da, eta $x = L/6$ puntua maximoa.

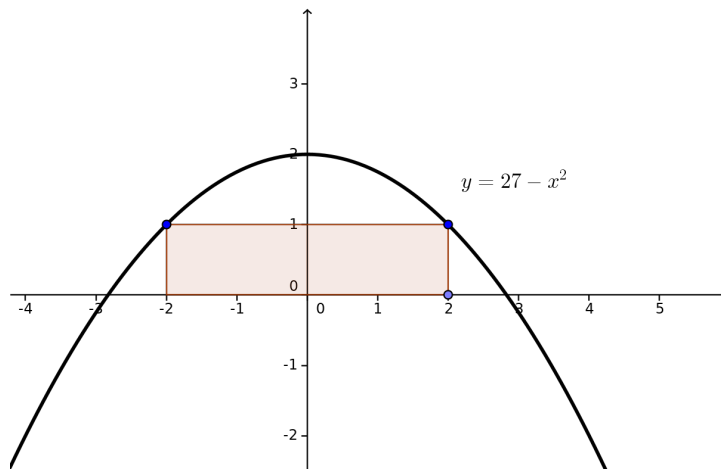
Horrez gain, lehenengo balioaren kasuan, hau da, $x = L/2$ balioetarako ohar gaitzen kaxarik

ez genukeela edukiko; beraz, bilatzen ari garen balioa $x = L/6$ puntua da. Balio horretarako kaxaren dimentsioak honako hauek dira:

$$\text{altuera} = \frac{L}{2}, \quad \text{oinarria} = \frac{2L}{3}.$$

Ariketa honetan, kartoiaren luzera L -rekin adierazi dugu, eta ebatzi ondoren edozein baliorako aplika daiteke. Ohar gaitezen aurretik egindako ariketaren kasu orokortua dela.

Adibidea Kalkulatu gainazal maximoa duen laukizuzenaren dimentsioak, non laukizuzen horren bi erpin OX ardatzaren gainean eta beste bi erpinak $y = 27 - x^2$ kurbaren goialdean dauden.



Irudian argi ikusten da OY ardatzarekiko simetria dagoela. Ikus daiteke beste gauza bat ere, $x = 2$ baliorako kurban dagoen beste erpinaren balioa $y = f(2) = 27 - 2^2$ dela. Hau da, x edozein izanda, kurban dagoen erpinaren balioa $27 - x^2$ da. Hori kontuan hartuta eta x izanik gure laukizuzenaren zati positiboaren oinarriaren balioa, gure arazoari elkarrazaziko diogun funtzioa honako hau da:

$$A(x) = 2x(27 - x^2) = 54x - 2x^3.$$

Orain, optimizazio-ariketa gauzatzeko, deribatuak kalkulatuak ditugu.

$$A'(x) = 54 - 6x^2$$

$$A''(x) = -12 < 0$$

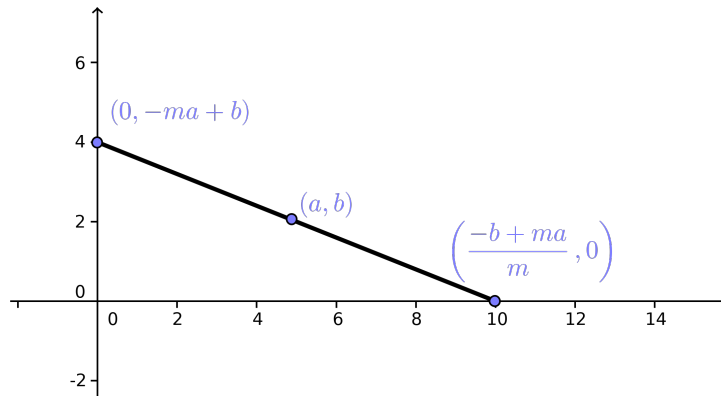
Puntu kritikoak $x = \pm 3$ dira, eta funtzioaren bigarren deribatuaren zeinua beti negatiboa denez gero, bilatzen ari garen balioa $x = 3$ da. Horrez gain, $x = -3$ balioa ezin izango litzateke erabili, negatiboa baita.

Beraz, laukizuzenaren dimentsioak honako hauek dira:

$$\text{oinarria} = 6 \quad \text{eta} \quad \text{altuera} = 18.$$

Adibidea Zehaztu (a, b) puntutik pasatzen den eta lehenengo koadrantean dagoen zuzenaren malda, zuzen honek bi ardatz kartesiarrekin azalera txikiena duen hirukia osa dezan. (Hartu aldagai gisa zuzenaren malda).

Honako irudi honek gure arazoa ebazten lagunduko digu.



Lehenengo egin behar duguna da (a, b) puntutik pasatzen den eta m malda duen zuzenaren ekuazioa lortzea. Zuzen horren ekuazioa

$$y - b = m(x - a)$$

dela ikustea oso erraza da.

Irudian jarrita daude jada zuzen horren ebaki-puntuak OX eta OY ardatzekin, orain kalkulatu ditugunak.

OX ardatzarekiko ebaki-puntuak:

$$\begin{cases} y - b = m(x - a) \\ y = 0 \end{cases}$$

ordezkatuta,

$$-b = mx - ma \Rightarrow mx = -b + ma \Rightarrow x = \frac{-b + ma}{m}.$$

OY ardatzarekiko ebaki-puntuak:

$$\begin{cases} y - b = m(x - a) \\ x = 0 \end{cases}$$

ordezkatuta,

$$y - b = -ma \Rightarrow y = -ma + b.$$

Orain, triangeluaren azaleraren formula jarriko dugu, kontuan hartuta m malda ezezaguna izan-go dela.

$$\begin{aligned} A(m) &= \frac{\left(\frac{-b+ma}{m}\right)(-ma+b)}{2} = \frac{1}{2} \frac{bma - b^2 - m^2a^2 + mab}{m} \\ &= \frac{-m^2a^2 + 2mab - b^2}{2m} = -\frac{ma^2}{2} + ab + \frac{b^2}{2m}. \end{aligned}$$

Lehenengo eta bigarren deribatuen kalkulua egingo dugu:

$$A'(m) = \frac{dA}{dm} = -\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} \left(-\frac{1}{m^2}\right) = -\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2m^2},$$

$$A''(m) = \frac{d^2A}{dm^2} = \frac{d}{dm} \left(-\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2m^2}\right) = \frac{b^2}{2} \left(-\frac{2}{m^3}\right) = -\frac{b^2}{m^3}.$$

Puntu kritikoak kalkulatzeko, lehenengo deribatua zero non egiten den begiratuko dugu, hots,

$$A'(m) = 0 \iff -\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2m^2} = 0 \iff 2m^2a^2 = 2b^2 \iff m^2a^2 = b^2 \iff m^2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Beraz, bi puntu kritiko daude:

$$m = \pm \frac{b}{a}.$$

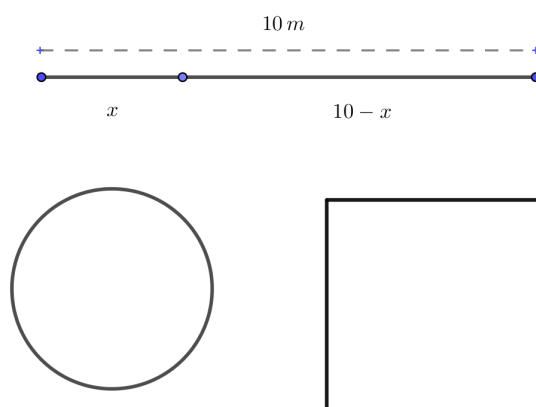
Irudian ikus daitekeen moduan, a eta b balioak positiboak dira; horrez gain, argi ikusten da zuzenaren maldak negatiboa izan behar duela. Halaber, bigarren deribatuarekin aztertuko dugun balio bakarra negatiboa izango da.

$$A''\left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{-b^2}{(-b/a)^3} > 0.$$

Kalkulatutako balioa positiboa denez gero, $m = -\frac{b}{a}$ balioa azalera txikiena egiten duen zuzenaren malda da.

Adibidea Izan bedi 10 m luzerako alanbre bat, bi zatitan zatitzen duguna. Zati batekin zirkulu bat egiten da, eta bestearekin karratu bat. Bi irudien azalaren batura minimoa bada; orduan, eman zirkuluaren erradioa eta karratuaren alboaren neurriak.

Honako irudi honek gure arazoa ebazten lagunduko digu.



Irudiari begiratuta ateratzen diren datuak honako hauek dira:

- zirkuluaren perimetria $2\pi r = x$ da, eta bere azalera A_{zir} eran adieraziko dugu.
- karratuaren perimetria $(10 - x) = 4l$ da, non l karratuaren albo baten neurria den, eta bere

azalera A_{kar} eran adieraziko dugu.

Orduan, minimizatu beharreko azalera honako hau da:

$$\begin{aligned} A(x) &= A_{zir} + A_{kar} = \pi r^2 + l^2 \\ &= \pi \left(\frac{x^2}{4\pi^2} \right) + \frac{(10-x)^2}{16} = \left(\frac{x^2}{4\pi} \right) + \frac{(10-x)^2}{16}. \end{aligned}$$

Orain, puntu kritikoak bilatzeko funtzioa deribatu eta zerora berdinuko dugu.

$$A'(x) = \frac{2x}{4\pi} + \frac{2(10-x)(-1)}{16} = \frac{2x}{4\pi} - \frac{(10-x)}{8}$$

eta

$$A'(x) = 0 \iff \frac{2x}{4\pi} = \frac{(10-x)}{8} \implies 8x = 2\pi(10-x) \implies x = \frac{10}{4+\pi}.$$

Behin x -ren balioa dugula, eskatzen dizkiguten neurriak honako hauek dira:

$$r = \frac{5}{4+\pi} \quad \text{eta} \quad l = \frac{5}{2} \left(\frac{3+\pi}{4+\pi} \right).$$

3

Newton-Raphson-en metooda

Gai honetan ekuazioen ebazpenaren gainean arituko gara, Matematikan agertzen den arazo garrantzitsuenetariko bat baita. Gai honi buruz, irakurleak emaitza batzuk ezagutzen ditu; adibidez, lehenengo eta bigarren mailako ekuazio aljebraikoen ebazpenak nola lortu (bigarren mailako ekuazioetan dagoen formula bakarra erabilia). Baita Ruffini-ren metodoa nola erabili ere edozein mailatako ekuazio aljebraikoren erro osoak lortzeko. Horiez gain, ekuazio ez-aljebraiko batzuk ere ikusiak ditu agian: esponentzialak, logaritmikoak eta trigonometrikoak.

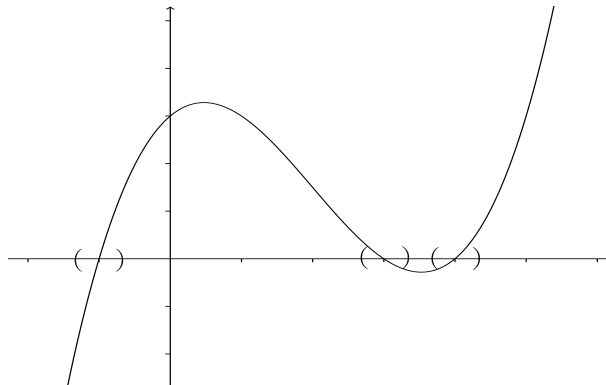
DEFINIZIOA. Izan bedi $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Orduan, α $f(x)$ funtzioaren *erroa* edo *zeroa* dela diogu $f(\alpha) = 0$ bada.

Geometrikoki, $f(x) = 0$ ekuazioaren soluzioa bilatzea da funtzioarekiko eta OX ardatzarekiko ebaki-puntuak bilatzea. Orokorrean, soluzio zehatza lortzea ezinezkoa izaten da; beraz, erroaren hurbilketak lortzen saiatzen gara egindako errorearen kota bat zehaztuta.

Ekuazio baten erroak lortzerakoan, bi arazo ditugu:

1. *Erroak banandu.* Ekuazio batek erro bat baino gehiago baldin badu, erro bakoitzarentzat tarte bat bereizi beharko dugu, tarteen arteko ebakidura disjuntua izanik.

3.1 irudia . Erroen bereizpena tartetean



2. *Erroen hurbilketa.* Honetarako, hainbat metodo daude: regula falsi, erdibitze-metodoa, Newton. Baina, aukeratutako metodoa edozein izanda ere, ezinbestekoa da hurbilketa egiterakoan egiten den erroa ezagutzea.

3.1 Erdibitze-metodoa

Erdibitze-metodoa, $f(x) = 0$ funtzioaren soluzioa hurbiltzeko, Bolzano-ren teoreman oinarritzen da, horrek ziurtatzen baitu $f(x)$ funtzioak $[a, b]$ tartean gutxienez erro bat duela baldintza batzuk betetzen direnean.

3.1.1 teorema (Bolzano-ren teorema). *Izan bedi $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funtzio jarraitua $[a, b]$ tartean, non $f(a) \cdot f(b) < 0$ betetzen den. Orduan, existitzen da $c \in (a, b)$, non $f(c) = 0$ den.*

Ekuazio ez-linealetako erroren baten bilaketa egiteko, metodo honekin, tartean erroa dagoen azpitarteak aukeratuz egiten da, eta prozesua errepikatu egiten da geldialdi-irizpideren bat egiaztatu arte.

Metodo honekin $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ segida bat eraikitzen dugu, gure funtzioaren errora hurbiltzen dena. Orain, erdibitze-metodoaren deskribapena ikusiko dugu.

Metodoaren deskribapena.

1. $a_1 = a, b_1 = b$.
2. $n = 1, 2, \dots$ denean, honako hau egiten da:
 - ▷ $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$,
 - ▷ $f(a_n) \cdot f(c_n) < 0$ denean, $a_{n+1} = a_n$ eta $b_{n+1} = c_n$; alderantziz gertatzen bada, $a_{n+1} = c_n$ eta $b_{n+1} = b_n$ hartzen dira.

Erroaren hurbilketa bat lortzerakoan beti egiten da erroren bat, honako teorema honek azaltzen duen moduan.

3.1.2 teorema. *Izan bitez $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funtzio jarraitua $[a, b]$ tartean, non $f(a) \cdot f(b) < 0$ eta $f(\alpha) = 0$ baitira $\alpha \in (a, b)$ tartean dagoelarik, $\{c_n\}_{n \geq 0}$ erdibitze-metodoarekin lortutako hurbilketen segida eta $E_n = |\alpha - c_n|, n \geq 0$ denean. Orduan,*

$$E_n \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Halabeharrez, $E_n < \varepsilon$ izan dadin, honako baldintza hau bete behar da:

$$n \geq \frac{\log \frac{b-a}{\varepsilon}}{\log 2} - 1.$$

Orain, metodoaren adibide erraz bat ikusiko dugu.

Adibidea *Izan bedi $f(x) = x^2 - 3$ funtzioa; $(0, 2)$ tartean dagoen erroa bilatuko dugu erdibitze-metodoa erabilita. Tarte horretan erro bakarra dugula egiaztatzen dugu funtzioaren grafikoa eginez.*

Funtzioa parabola bat dugu, eta OX ardatza bi puntutan ebakitzen du. Orain, $f(x) = x^2 - 3$ funtzioaren erro positiboaren hurbilketaren kalkulua egingo dugu erdibitze-metodoa erabilita. Horretarako, $(0, 2)$ tartean isolatzen dugu erro positiboa, Bolzano-ren teoremaren baldintzapean baikaude, eta, metodoarekin hasteko, $a_1 = 0$ eta $b = 2$ balioak hartuko ditugu. Kontuan har dezagun pauso bakoitzean dagokion tartean Bolzano-ren teorema aplikatzen dugula, eta c_n erdiko puntuaren zeinuari begiratu behar diogula.

Hori guztia egiteko, taula bat eraikitzea da erarik errazena.

3.1 taula. Erdibitze-metodoa. $f(x) = x^2 - 3$, $c_1 = 1$

n	a_n	b_n	c_n	$\text{sgn}(f(c_n))$
1	0	2	1.0	-
2	1.0	2	1.500000000	-
3	1.500000000	2	1.750000000	+
4	1.500000000	1.750000000	1.625000000	-
5	1.625000000	1.750000000	1.687500000	-
6	1.687500000	1.750000000	1.718750000	-
7	1.718750000	1.750000000	1.734375000	+
8	1.718750000	1.734375000	1.726562500	-
9	1.726562500	1.734375000	1.730468750	-
10	1.730468750	1.734375000	1.732421875	+
11	1.730468750	1.732421875	1.731445312	-
12	1.731445312	1.732421875	1.731933594	-
13	1.731933594	1.732421875	1.732177734	+
14	1.731933594	1.732177734	1.732055664	+
15	1.731933594	1.732055664	1.731994629	-
16	1.731994629	1.732055664	1.732025146	-

Taulan agertzen den moduan, 16 iterazio egin behar izan ditugu errorea 10^{-2} baino txikiagoa izan dadin; hots, iterazio batetik hurrengora komaren ostean lehenengo bi digituak bakarrik errepikatzen direla. Adibide hori hurrengo metodoarekin eginez gero, 5 iteraziorekin hurbilketa askoz hobea lortzen dugu.

3.2 Newton-Raphson-en metodoa

Newton-Raphson-en metodoa $f(x) = 0$ funtzioaren soluzioa hurbiltzeko metodo erabilgarri-
netarikoa da. Demagun:

- ▷ funtzioaren erroak dauden tartek bereizi ditugula eta tarte bakoitzean erro bakarra dugu-
la;
- ▷ funtzioa, aukeratutako tartean, bi aldiz deribagarria dela;
- ▷ funtzioaren lehenengo deribatua ez dela ezeztatzen monotonia baitu.

Orduan, tarte horretan, Newton-en metodoa aplika daiteke.

Metodoaren deskribapena

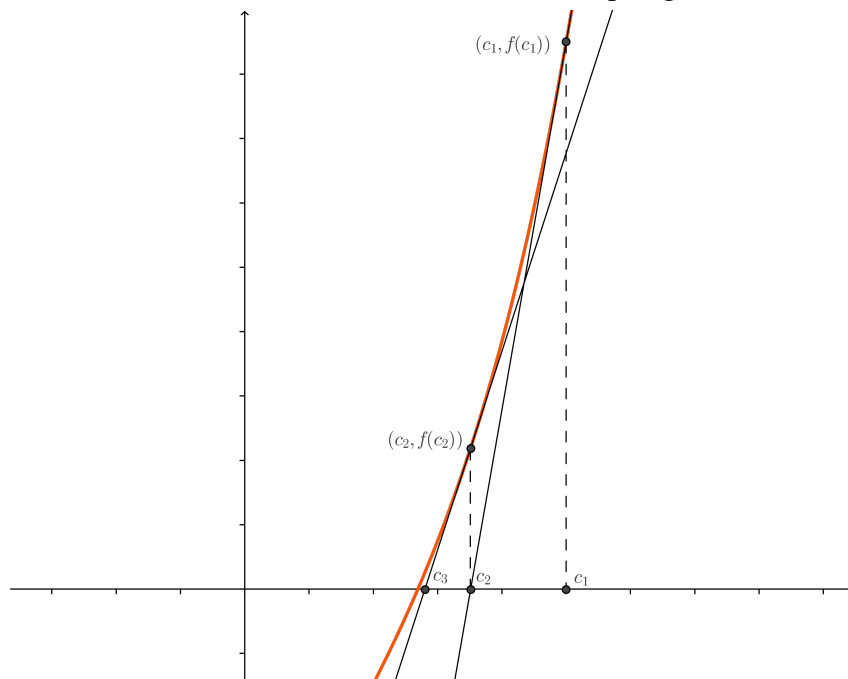
1. $c_0 \in [a, b]$ hasierako balio bat hartzen da.
2. Segida bat, $\{c_n\}$, eraikitzen da honako errepikapen-formula hau erabilita:

$$c_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_n)} \quad n \geq 0 \quad (3.1)$$

funtzioaren erroa hurbiltzeko.

Ikus dezagun nondik ateraten den (3.1) ekuazioa.

3.2 irudia . Newton-en metodoaren azalpen grafikoa



Irudian ikus daitekeenez, abiapuntutzat c_1 hartzen dugu; orduan, $(c_1, f(c_1))$ puntutik pasatzen den zuzen ukitzailaren ekuazioa eraikitzen dugu, hots,

$$y - f(c_1) = f'(c_1)(x - c_1)$$

eta OX ardatzarekiko, $y = 0$, ebaki-puntua bilatzen dugu; x askatzerakoan eta $c_2 = x$ berrizendatzerakoan, honako hau lortzen dugu:

$$c_2 = x = c_1 - \frac{f(c_1)}{f'(c_1)}$$

c_2 puntuarekin prozedura errepikatzen dugu: $(c_2, f(c_2))$ puntutik pasatzen den zuzen ukitzailaren ekuazioa eraiki eta OX ardatzarekiko ebaki-puntua bilatzen dugu; berriro, x askatzerakoan eta $c_3 = x$ berrizendatzerakoan

$$c_3 = x = c_2 - \frac{f(c_2)}{f'(c_2)}$$

lortzen dugu. Hori hainbat aldiz errepikatuz gero, erraz ikusten dugu (3.1) formula ateratzen dela.

Honako teorema honek Newton-en metodoaren konbergentzia aztertuko du, zeren konbergitzen duenean azkar egiten baitu.

3.2.1 teorema (Fourier-en erregela). *Izan bedi $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funtzio jarraitua eta bi aldiz deribagarria $[a, b]$ tartean, eta honako baldintza hauek betetzen dituena:*

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$,
2. $\forall x \in [a, b], f'(x) \neq 0$,
3. $\forall x \in [a, b], f''(x) \neq 0$.

Orduan, Newton-en metodoa konbergentea da $x_0 = a$ edo $x_0 = b$ hartuz gero, non

$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ den.

Teorema honek esaten digu Newton-en metodoa aplikatzerakoan zein izan daiteken abiapunturik onena. Newton-en metodoa oso eraginkorra da; konbergitzen duenean, iterazio bakoitzean hurbilketaren zifra zehatzen kopurua bikoiztu egiten da.

3.2.2 teorema. Demagun Fourier-en erregelaren hipotesia betetzen dela. Orduan, n . iterazioan egiten den errorearen kota, $|E_n| = |x - \alpha|$, honako hau da:

$$|E_n| \leq \frac{M_2}{2m_1} (c_n - c_{n-1})^2,$$

non $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ eta $m_1 = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|$ diren.

Ondoren ikusiko ditugun adibideetan, Newton-en metodoa aplikatzeko funtzioa jarraitua eta deribagarria dela aztertu behar da tarte batean; ez dugu ahaztu behar tarte horretan Bolzano-ren teorema ere bete behar dela.

Oharra. Hurrengo adibideetan, Newton-en metodoa erabiltzen denean taularatuta agertzen diren emaitzak erabiltzen diren datuak besterik ez dira agertzen: funtzioaren, deribatuaren eta bilatzen ari garen segidaren balioak. Horiek, pausoz pauso ere atera daitezkeen datuak dira. Irakurleak hauta dezala ondoen datorkion era emaitzak jakinarazteko.

Adibidea Izan bedi $f(x) = x^5 + 5x + 1 = 0$ funtzioa. Aurkitu $f(x)$ funtzioaren erroaren hurbilketa Newton-en metodoa erabilita.

Ekuazio honek gutxienez soluzio bat du, zeren $f(x) = x^5 + 5x + 1$ jarraitua baita \mathbb{R} -n, eta $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ eta $\lim_{n \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ baitira. Horrez gain, funtzioaren lehenengo deribatua $f'(x) = 5x^4 + 5 > 0$ denez gero, gehienez soluzio bakarra izan dezake.

Erraz ikus daiteke honako hau:

- $f(x)$ jarraitua da $[-1, 0]$ tartean,
- $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$ dira,
- $\forall x \in [-1, 0], f'(x) > 0$,
- $\forall x \in [-1, 0], f''(x) = 20x^3 < 0$.

Bolzano-ren teorema eta monotoniak erro bakar bat dagoela ziurtatzen digute. Abiapuntutzat $c_0 = -1$ hartzen dugu, eta formula erabiltzen dugu:

$$c_{n+1} = c_n - \frac{c_n^5 + 5c_n + 1}{5c_n^4 + 5} = \frac{4c_n^5 - 1}{5c_n^4 + 5}.$$

egiten dugun erroa zein den jakiteko era erraz bat da $|c_{n+1} - c_n|$ estimatzea. Horrez gain, 10^{-j} erroa eskatzen badigute, c_n eta c_{n+1} zenbakiei begiratu eta komaren ostean j zifra berdina izanez gero, bilatzen ari garen lehenengo hurbilketa c_{n+1} izango litzateke.

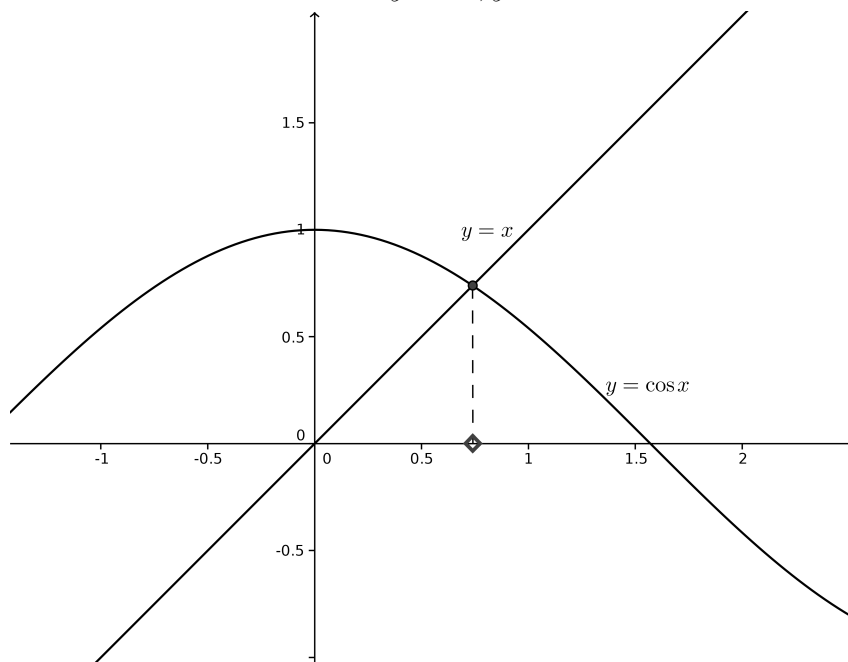
Eta emaitzak honako taula honetan batzen ditugu.

3.2 taula. Newton. $f(x) = x^5 + 5x + 1, c_0 = -0.5$

n	$f(c_n)$	$f'(c_n)$	c_{n+1}
0			- 0.5
1	- 1.531250000	5.312500000	- 0.2117647059
2	- 0.05924939100	5.010055052	- 0.1999386101
3	- 0.00001256000000	5.007990182	- 0.1999361021
4	0.0000000004000000000	5.007989781	- 0.1999361022
5	0.0	5.007989781	- 0.1999361022
6	0.0	5.007989781	- 0.1999361022
7	0.0	5.007989781	- 0.1999361022

Adibidea Izan bedi $f(x) = x - \cos x$ funtzioa. Aurkitu $f(x)$ funtzioaren erroaren hurbilketa Newton-en metodoa erabilita. Hartu hiru puntu desberdinak abiapuntutzat, eta azaldu desberdintza.

$x - \cos x = 0$ bilatzen ari gara; orduan, $x = \cos x$ betetzen duten x -ren balioak bilatzen ari gara. Honako irudi honetan, $y_1 = x$ eta $y_2 = \cos x$ funtzioak aldi berean irudikatzen dira; irudikapenean ikus daitekeenez, puntu bakarrean mozten dira, beraz, $f(x)$ funtzioaren erroa puntu horren abzisa izango da. Horrez gain, $f(x)$ funtzioak erro bakarra duela ikusten da.

3.3 irudia . $y_1 = x, y_2 = \cos x$ 

Argi dago $f(x)$ funtzioa jarraitua eta deribagarria dela \mathbb{R} osoan. Orain, Newton-en metodoa erabiltzeko tarte bat aukeratu dugu, eta metodoarekin hasteko abiapuntu bat. Tarte bilatzeko egindako irudikapen grafikoa lagungarri dugu; izan ere, $[0, \pi/2]$ tarte aukeratu $f(0) < 0$ eta $f(\pi/2) > 0$ balioak ditugu, eta erro bat tarte horretan dugula ziurtatuta dugu.

Honako taula hau, metodoarekin hasteko $c_1 = 0, 0.5$ eta $c_1 = 1$ puntuak hartuko ditugu.

3.3 taula. Newton. $f(x) = x - \cos x$, $c_1 = 0.5$

n	$f(c_n)$	$f'(c_n)$	c_{n+1}
1			0.5
2	- 0.3775825619	1.479425539	0.7552224170
3	0.02710331170	1.685450632	0.7391416661
4	0.00009461530000	1.673653811	0.7390851339
5	0.000000001100000000	1.673612030	0.7390851332
6	0.0	1.673612029	0.7390851332
7	0.0	1.673612029	0.7390851332
8	0.0	1.673612029	0.7390851332

3.4 taula. Newton. $f(x) = x - \cos x$, $c_1 = 0$

n	$f(c_n)$	$f'(c_n)$	c_{n+1}
1			0.0
2	- 1.0	1.0	1.0
3	0.4596976941	1.841470985	0.7503638679
4	0.01892307390	1.681904953	0.7391128909
5	0.00004645590000	1.673632544	0.7390851334
6	0.0000000003000000000	1.673612029	0.7390851332
7	0.0	1.673612029	0.7390851332
8	0.0	1.673612029	0.7390851332

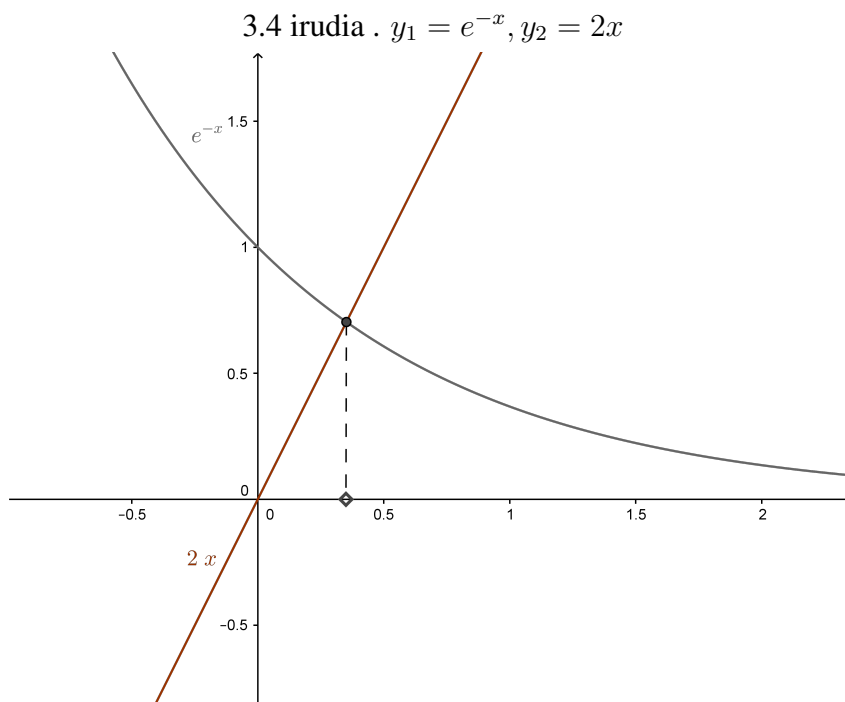
3.5 taula. Newton. $f(x) = x - \cos x$, $c_1 = 1$

n	$f(c_n)$	$f'(c_n)$	c_{n+1}
1			1.0
2	0.4596976941	1.841470985	0.7503638679
3	0.01892307390	1.681904953	0.7391128909
4	0.00004645590000	1.673632544	0.7390851334
5	0.0000000003000000000	1.673612029	0.7390851332
6	0.0	1.673612029	0.7390851332
7	0.0	1.673612029	0.7390851332
8	0.0	1.673612029	0.7390851332

Abiapuntuak desberdinak izanda ere, ikus dezakegu Newton-en metodoak konbergitzen duenean azkar egiten duenez gero, iterazio bat gehiago besterik ez dugula egin behar izango errorea hiru kasuetan berdintzeko.

Adibidea Izan bedi $h(x) = e^{-x} - 2x$ funtzioa. Aurkitu $h(x)$ funtzioaren erroaren hurbilketa Newton-en metodoa erabilita.

$e^{-x} - 2x = 0$ bilatzen ari gara; orduan, $2x = e^{-x}$ betetzen duten x -ren balioak bilatzen ari gara. Honako grafiko honetan $y_1 = 2x$ eta $y_2 = e^{-x}$ funtzioak aldi berean irudikatuko ditugu; grafikoan ikus daitekeenez, puntu bakarrean mozten dira, beraz $h(x)$ funtzioaren erroa puntu horren abzisa izango da.



3.6 taula. Newton. $h(x) = e^{-x} - 2x, c_1 = 0.5$

n	$h(c_n)$	$h'(c_n)$	c_{n+1}
1			0.5
2	- 0.3934693403	- 2.606530660	0.3490448064
3	0.007271912100	- 2.705361525	0.3517327696
4	0.000002545700000	- 2.703468085	0.3517337112
5	0.0000000001000000000	- 2.703467422	0.3517337112
6	0.0000000001000000000	- 2.703467422	0.3517337112
7	0.0000000001000000000	- 2.703467422	0.3517337112
8	0.0000000001000000000	- 2.703467422	0.3517337112

4

Taylor-ren polinomioa

4.1 Hurbilketak

Polinomioak erabiltzen ditugunean, nahiko errazak azaltzen zaizkigu. Baina, beste funtzio batzuetan, adibidez $f(x) = \sin x$, $\cos x$, funtzio horien balioen bat bilatu nahi izanez gero kalkulagailua edo taulak erabili ezean, zaila egingo zaigu.

Gure asmoa da $f(x)$ funtzio bat *polinomio* baten bitartez $x = c$ puntu baten ingurune batean hurbiltzea, kontuan hartzekoa da polinomioak dauden funtziorik errazenak direla. Polinomio horri baldintza batzuk betetzea eskatuko zaio; ikus ditzagun zein:

1. $f(x)$ funtzioak eta $P(x)$ polinomioak puntu beretik pasatu behar dute:

$$f(c) = P(c).$$

Baina kontuan eduki behar dugu baldintza hori betetzen duten infinitu polinomio daudela.

2. $f(x)$ eta $P(x)$ funtzioen grafikoek antzekoak izan behar dute; horretarako, malda bera edukitzea eskatuko zaie $x = c$ puntuan, hau da:

$$f'(c) = P'(c).$$

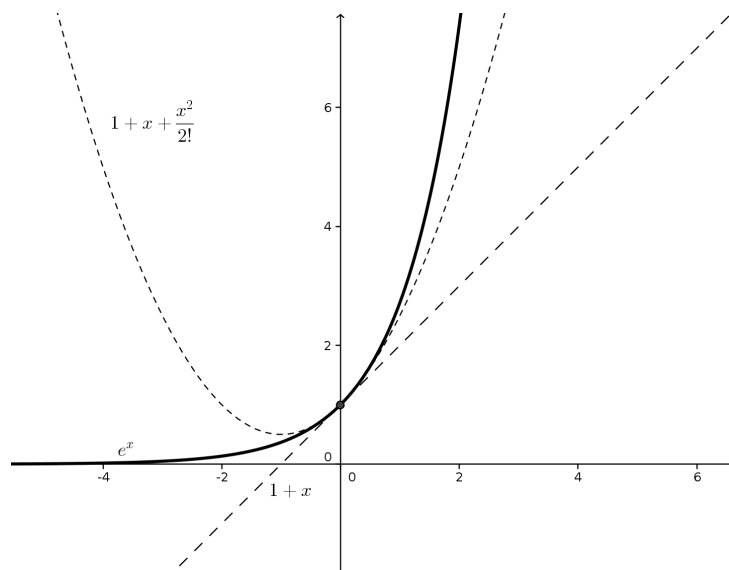
Bi baldintza horiek eskatuz, *hurbilketa lineal sinplea* lortuko dugu.

Adibidea Izan bedi $f(x) = e^x$ funtzioa. Kalkula dezagun funtzio honen hurbilketa lineal sinplea $x = 0$ puntuan.

Horretarako, gogora dezagun zein den lehenengo mailako polinomio baten itxura orokorra: $P(x) = a_0 + a_1x$. Bete behar dituen bi baldintzak honako hauek dira:

$$\begin{aligned} f(0) = e^0 = 1 & \quad P(0) = a_0 & \implies a_0 = 1 \\ f'(0) = e^0 = 1 & \quad P'(0) = a_1 & \implies a_1 = 1 \end{aligned}$$

beraz, $P(x) = x + 1$ da.



Irudian ikus dezakegunez, $(0,1)$ tartean $P(x) \sim f(x)$, baina tarte horretatik urrunterakoan hurbilketa txarra lortzen dugu; horrela:

3. Eska dezagun $f''(x) = P''(x)$ baldintza bete dezaten. Hiru baldintza horiek betetzen dituen maila txikienetarikoko polinomioaren itxura honako hau da: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Orduan,

$$f''(0) = 1, \quad P''(0) = 2a_2.$$

Halabeharrez, $a_2 = 1/2$ eta $P(x) = 1 + x + 1/2x^2$ dira.

4. Orokorrean, n ordenako (mailako) eta $x = c$ puntuan zentratutako polinomioaren itxura honako hau da:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \dots + a_n(x - c)^n.$$

Argi dago jarri beharreko baldintzak honako hauek direla:

$$f^{(k)}(c) = P^{(k)}(c), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Hurbilketa-metodo bat erabiltzerakoan, beti agertzen zaizkigu bi galdera: bata, noiz bukatu metodoa eta bestea, zein den egiten den errorea. Horiek guztiak apurka ikusiko ditugu honako adibide hauetan.

DEFINIZIOA. Izan bedi $f(x)$ $x = c$ puntuan n aldiz deribagarria den funtzio bat; orduan,

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n$$

polinomioari $x = c$ puntuan zentratutako n ordenako Taylor-en polinomioa esaten zaio. Polinomio hori $x = 0$ puntuan zentratutakoa dagoenean, McLaurin-en polinomioa esaten zaio.

Honako bi ariketa hauetan, Taylor-en bi funtzioen garapena egiten da hurbilketa bera lortzeko.

Adibidea Kalkulatu $f(x) = \log x$ funtzioaren $x = 1$ puntuan zentratutako Taylor-en 4. ordenako polinomioa.

$$\begin{array}{ll} f(x) = \log x & f(1) = 0 \\ f'(x) = x^{-1} & f'(1) = 1 \\ f''(x) = -x^{-2} & f''(1) = -1 \\ f'''(x) = 2!x^{-3} & f'''(1) = 2 \\ f^{(4)}(x) = -3!x^{-4} & f^{(4)}(1) = -6 \end{array}$$

beraz,

$$\begin{aligned} P_4(x) &= f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{f''(1)}{2!}(x - 1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x - 1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x - 1)^4 \\ &= (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4. \end{aligned}$$

Adibidea Izan bedi $f(x) = \log(1 + x)$. Kalkulatu $\log(1, 1)$, Taylor-en 4. ordenako polinomioaren garapena erabiliz.

Kontuan hartu beharrekoa da $x = 0$ puntuan zentratu behar dugula.

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1+x) & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= (1+x)^{-1} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -(1+x)^{-2} & f''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= 2(1+x)^{-3} & f'''(0) &= 2 \\ f^{(4)}(x) &= 2 \cdot 3 \cdot (1+x)^{-4} & f^{(4)}(0) &= -6 \end{aligned}$$

4. ordenako polinomioa honako hau da:

$$\begin{aligned} P_4(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 \\ &= 0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4. \end{aligned}$$

Beraz, $\log(1+x) \sim P_4(x)$ eta $\log(1, 1)$ kalkulatu behar ditugu,

$$\begin{aligned} \log(1, 1) &= \log(1+0, 1) \sim P_4(0, 1) \\ &= (0, 1) - \frac{1}{2}(0, 1)^2 + \frac{1}{3}(0, 1)^3 - \frac{1}{4}(0, 1)^4 \\ &= 0.0953083. \end{aligned}$$

Azter ditzagun aurreko bi adibideak aldi berean. Bereizteko, izan bitez honako funtzio hauek eta atera ditugun bi polinomioak hurrenez hurren: $f(x) = \log x$ funtzioa $x = 1$ puntuan zentratu- turikoa.

$$P(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4.$$

$$\log(x) = \log(1.1) \Rightarrow x = 1.1,$$

$$P(1.1) = (1.1-1) - \frac{1}{2}(1.1-1)^2 + \frac{1}{3}(1.1-1)^3 - \frac{1}{4}(1.1-1)^4$$

$$P(1.1) = (0.1) - \frac{1}{2}(0.1)^2 + \frac{1}{3}(0.1)^3 - \frac{1}{4}(0.1)^4.$$

Eta bigarren funtzioarekin berdintsu, $g(x) = \log(1+x)$ funtzioa $x = 0$ puntuan zentratu- turikoa.

$$Q(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4.$$

Orain, $\log(1.1)$ kalkulatu dugu:

$$\log(1+x) = \log(1.1) \Rightarrow x = 0.1,$$

$$Q(0.1) = 0.1 - \frac{1}{2}(0.1)^2 + \frac{1}{3}(0.1)^3 - \frac{1}{4}(0.1)^4.$$

Beraz, bi funtzioekin hurbilketa bera lortu dugu.

$$P(1.1) = (0.1) - \frac{1}{2}(0.1)^2 + \frac{1}{3}(0.1)^3 - \frac{1}{4}(0.1)^4,$$

$$Q(0.1) = 0.1 - \frac{1}{2}(0.1)^2 + \frac{1}{3}(0.1)^3 - \frac{1}{4}(0.1)^4.$$

Laburbilduta, kontuan hartu behar da zein puntutan zentratzen dugun, eta ordezkatu egin behar dugula puntu horren ingurune txiki batean. Hau da, $f(x) = \log x$ funtzioa $c = 1$ puntuan zentratuz, $x = 1.1$ ordezkatzeko dugu.

$$P(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4.$$

eta bigarren funtzioarekin, $g(x) = \log(1 + x)$ funtzioa $c = 0$ puntuan zentratuz, $x = 0.1$ ordezkatzeko dugu.

$$Q(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4.$$

Azter dezagun honako taula

x	1.0	1.1	1.5	1.75
$\log x$	0.000000	0.0953102	0.4054651	0.5596158
$P_4(x)$	0.000000	0.095383	0.4010417	0.5302734

argi ikusten da $x = 1$ puntutik zenbat eta urrunago, hainbat eta hurbilketa txarragoa dugula.

Aurreko taulan ikusitakoa kontuan hartuta:

1. Zenbat eta handiagoa den polinomioaren maila, hainbat eta hobea da hurbilketa.
2. $x = c$ puntuaren hurbilen gaudenean, hurbilketa hobea lortzen dugu.

Ez digutenean ezer esaten, ahal izanez gero, $c = 0$ puntua hartzen da. Batzuetan, notazio moduan, polinomioan bertan adieraz daiteke maila eta zentratzen den puntua $P_{n,c}$ eran.

Adibidea Izan bedi $f(x) = \sin x$ funtzioa C^∞ motakoa \mathbb{R} osoan; hau da, infinitu aldiz deribagarria eta bere deribatuak jarraituak direnekoa. Deribatuak kalkulatzeko baditugu:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0, \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x, & f^{(3)}(0) &= -1, \\ f^{(4)}(x) &= \sin x = f(x). \end{aligned}$$

Sinu funtzioa launaka errepikatzen da; beraz, 5. ordenako Taylor-en polinomioa eraikitzeko:

$$\begin{aligned} P_{5,0}(x) &= 0 + \frac{1}{1!}(x - 0) + \frac{0}{2!}(x - 0)^2 + \frac{-1}{3!}(x - 0)^3 + \frac{0}{4!}(x - 0)^4 + \frac{1}{5!}(x - 0)^5 \\ &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \end{aligned}$$

Taylor-en polinomioaren egiturari begiratuta, honako emaitza hau berehalakoa da.

4.1.1 proposizioa. Izan bedi $P(x)$ f funtzio baten c puntuan zentratutako Taylor-en n ordenako polinomioa. Orduan, $P'(x)$ f' funtzioaren c puntuan zentratutako Taylor-en $(n - 1)$ ordenako polinomioa da.

Adibidea Izan bedi $f(x) = \cos x$ funtzioa; sinu funtzioaren deribatua da, eta aurreko proposizioak esaten duena egiaztatzeko honako hau dugu:

$$P_{4,\cos x} = P'_{5,\sin x}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

eta

$$P_{5,\sin x}(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Oinarritzko funtzioen arteko eragiketa aljebraikoekin ere Taylor-en polinomioak lortzearen esparrua handiagotzen da.

PROPIETATEAK.

Izan bitez f eta g bi funtzio; $P_{n,c}$ eta $Q_{n,c}$ c puntuan zentraturiko funtzio bakoitzaren Taylor-en n ordenako polinomioak, hurrenez hurren. Orduan,

- ▷ $f + g$ funtzioaren c puntuan zentraturiko n ordenako Taylor-en polinomioa $P_{n,c} + Q_{n,c}$ da.
- ▷ $f \cdot g$ funtzioaren c puntuan zentraturiko n ordenako Taylor-en polinomioa, $P_{n,c}$ eta $Q_{n,c}$ polinomioen biderkaduraren n mailarainoko polinomioa da.
- ▷ f/g funtzioaren c puntuan zentraturiko n ordenako Taylor-en polinomioa $P_{n,c}$ eta $Q_{n,c}$ polinomioen zatidura eginda lortzen da. Zatiduran n mailaraino helduta, eta berretura txikienetik handieneraino hartutako ordenarekin.

Konposaketarentzat ere badago antzeko enuntziatua.

4.1.2 proposizioa. *Izan bitez f eta g bi funtzio; $P_{n,c}$ eta $Q_{n,f(c)}$ c eta $f(c)$ puntuetan zentraturiko funtzio bakoitzaren Taylor-en n ordenako polinomioak, hurrenez hurren. Orduan, $g \circ f$ konposaketa funtzioaren c puntuan zentraturiko n ordenako Taylor-en polinomioa n mailarainoko $Q_{n,f(c)}[P_{n,c}(x)]$ polinomioa da.*

Adibidea Izan bitez $f(x) = x^2$ eta $g(x) = e^x$ funtzioak. $c = 0$ puntuan Taylor-en 4. ordenako polinomioak honako hauek dira, hurrenez hurren:

$$P(x) = x^2 \quad \text{eta} \quad Q(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

orduan, konposaketa funtzioaren Taylor-en polinomioa honako hau dugu:

$$Q(P(x)) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!},$$

hots,

$$1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!}.$$

4.1.1 Hondarra

Hurbilketa bat egiten den guztietan errore bat dago; $f(x)$ funtzio bat bere Taylor-en n ordenako garapenagatik hurbiltzen badugu, hau da $P_n(x)$ polinomioagatik lortzen dena honako hau da:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Zehatza Hurbilketa Hondarra

Hau da, hondarra $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ da.

Balio zehatza ez dugu inoiz lortuko, horretarako egiten baitugu polinomioaren hurbilketa. Hurbilketa egiterakoan egiten den errorea zein den jakiteko, honako Taylor-en teoremak azalduko digu hori.

4.1.3 proposizioa. *Izan bedi $f(x)$ funtzioa C^{n-1} motakoa c puntu baten ingurunean; demagun existitzen dela, eta $P_{n,c}(x)$ bere n ordenako Taylor-en polinomioa dela c puntuan; orduan:*

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - P_{n,c}(x)}{(x - c)^n} = 0.$$

4.2 Taylor-en teorema

Ikus dezagun Taylor-en teoremak zer esaten duen, eta baita teoremaren ondorio interesgarri bat ere polinomioekin.

4.2.1 teorema (Taylor). *Izan bedi $f(x)$ funtzio deribagarria, non bere lehen n deribatuak jarraituak baitira $I = [a, b]$ tarte batean. Demagun bere $(n + 1)$. deribatua existitzen dela tarte irekian, (a, b) eta $c \in I$ dagoela; orduan, edozein $x \in I$ tartean dagoelarik, badago $z \in I$ non*

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + R_n(x)$$

den, eta hondarraren adierazpena

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n + 1)!} (x - c)^{n+1}$$

da.

Oraintxe ikusitako teoremaren baliokidea dugu honako hau; bertan, bi hondar mota bereizten dira.

4.2.2 teorema (Taylor-en formula). *Izan bedi $f(x)$, non $f', f'', \dots, f^{(n)}$ eta $f^{(n+1)}$ existitzen diren $[c, x]$ tartean. Orduan,*

$$f(x) - P_{n,c}(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n + 1)!} (x - c)^{n+1} \text{ da, non } z \in (a, x) \text{ dagoen}$$

eta Lagrange-ren hondarra deritzona, edo

$$f(x) - P_{n,c}(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!} (x - c)^n (x - c) \text{ da, non } z \in (c, x) \text{ dagoen,}$$

eta Cauchy-ren hondarra deritzona.

4.2.1 korolaria. *Edozein n mailako polinomio, $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, honako era honetan adieraz daiteke:*

$$P(x) = P(c) + \frac{P'(c)}{1!}(x - c) + \dots + \frac{P^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n, \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Kontuan hartuz gero n mailako polinomio baten $(n + 1)$. deribatua nulua dela eta Taylor-en formula, korolararioaren bi polinomioen berdintasuna bermatzen du.

Ikus ditzagun adibide batzuk.

Adibidea Aurkitu e zenbakiaren hurbilketa egokia Taylor-en 3. ordenako polinomio bat erabilita.

Izan bedi $f(x) = e^x$ funtzioa, eta $c = 0$ puntuan zentratutako Taylor-en polinomioa kalkulatu dugu

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x, & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= e^x, & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= e^x, & f''(0) &= 1, \\ f^{(3)}(x) &= e^x, & f^{(3)}(0) &= 1. \end{aligned}$$

Polinomioa honakoa hau da:

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

Badakigu $e = e^1 = f(1)$ dela; beraz, e zenbakiaren hurbilketa lortzeko, $x = 1$ balioa polinomioan ordezkatu besterik ez dugu egin behar:

$$P_3(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3}.$$

Lagrange-ren hondarra aztertuz gero, e zenbakia $8/3$ zenbakiarekin hurbiltzean egiten den errore absolutua izango dugu, hau da:

$$\frac{f^{(4)}(z)}{4!}(1 - 0) = \frac{e^z}{24}, \quad \text{non } z \in (0, 1) \text{ dagoen.}$$

$f(z) = e^z$ funtzio positiboa eta gorakorra dugu $z \in (0, 1)$ balioetarako, eta egiten den errorea honako hau da:

$$\frac{e}{24} < \frac{3}{24} = \frac{1}{8}.$$

Egin duguna n ordenako polinomio batekin orokortu nahi izanez gero, hondarra honako hau izango litzateke:

$$\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(1 - 0)^{n+1} = \frac{e^z}{(n+1)!}, \quad \text{non } z \in (0, 1) \text{ dagoen.}$$

Lehenago egin dugun moduan, $e^z < e < 3$, $z \in (0, 1)$ egonik. Halaber, beraz,

$$\frac{e^z}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Esate baterako, egindako errorea 10^{-4} baino txikiago nahi bada

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-4}$$

eta $n \geq 7$ nahikoa litzateke.

Oharra. Errorea estimatu nahi denean, Lagrange-ren errore absolutuarekin egiten da.

Adibidea Izan bitez $f(x) = \sin x$ eta $P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$. Hurbildu $\sin(0.1)$ $P_3(0.1)$ erabiliz, eta hurbilketa egiterakoan eman egindako errorearen estimazioa.

Funtzioaren hurbilketa lortzeko enuntziatuan polinomioa ematen digute, eta Taylor-en teorema erabilia

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(z)}{4!}x^4$$

dela esaten digu. (Kontuan har dezagun, garapenetan ezer ez denean esaten, ahal denean $c = 0$ puntuan zentratzen dugula garapena)

Non $0 < z < 0.1$ den, beraz:

$$\sin(0.1) \sim (0.1) - \frac{(0.1)^3}{3!} = (0.1) - 0.000167 = 0.099833.$$

Orain, $f^{(4)}(z) = \sin z$ funtzio hau gorakorra da $(0,0.1)$ tarte positiboan; $0 < \sin z < 1$ dago eta

$$0 \leq R_n(x) = \frac{\sin z}{4!} (0.1)^4 < \frac{0.0001}{4!} \sim 0.000004$$

guztira

$$0.099833 \leq \sin(0.1) \leq 0.099837.$$

Adibidea Aurkitu $c = 1$ puntuan zentratutako Taylor-en polinomioaren maila, $\log(1.2)$ kalkulatzeko egindako errorea 0.001 baino txikiagoa izan dadin.

Har dezagun $f(x) = \log(x)$ funtzioa, eta kalkula dezagun bere $(n+1)$. deribatua hondarraren adierazpenean jartzeko. Horrela, egiten dugun errorearen estimazioa egingo dugu.

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

da, eta, Taylor-en teorema aplikatuz, honako hau dugu

$$\begin{aligned} |R_n(1.2)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (1.2 - 1)^{n+1} \right| = \frac{n!}{z^{n+1}} \frac{1}{(n+1)!} (0.2)^{n+1} \\ &= \frac{(0.2)^{n+1}}{z^{n+1} (n+1)}. \end{aligned}$$

non $1 < z < 1.2$ den; konturatu gaitzen $(1,1.2)$ tarte positiboa dela eta $\frac{1}{z^{n+1}}$ funtzioa tarte horretan beherakorra dela $n \geq 1$ balioetarako. Hortaz, gorena hartzen du $z = 1$ puntuan, eta desberdintzaren ezker aldean $\frac{1}{z^{n+1}}$, 1 balioaz ordezkatzeko dugu. Erroreak 0.001 baino txikiagoa izan behar badu, orduan

$$\frac{(0.2)^{n+1}}{z^{n+1} (n+1)} < 0.001 \Rightarrow 1000 < (n+1) 5^{n+1}$$

daukagu, eta horretarako n -ri balioak emanaz, erraz ikus daiteke $n \geq 3$ izan behar duela.

Adibidea Izan bedi $f(x) = 1/(1-x)$. Kalkulatu bere n . ordenako Taylor-en garapena $x = c = 0$ puntuaren ingurune batean.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} \\ f''(x) &= 2(1-x)^{-3} \\ f^{(3)}(x) &= 2 \cdot 3(1-x)^{-4} \\ f^{(4)}(x) &= 2 \cdot 3 \cdot 4(1-x)^{-5} \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f^{(n)}(x) &= n!(1-x)^{-(n+1)} \end{aligned}$$

Ikus dezakegunez, f ez da deribagarria $x = 1$ puntuan, ezta f', f'', \dots funtzioak ere. Har dezagun $(-1/2, 1/2)$ tartea, Taylor-en polinomioa

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \frac{(n+1)!/(1-z)^{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1} \end{aligned}$$

da.

Adibidea Frogatu honako desberdintza hau betetzen dela $\forall x \geq 0$.

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

Ohar gaitezen bi desberdintza ditugula eta, horrez gain, bi polinomio eta funtzio bat agertzen direla. Polinomioei begiratzen badiegu, gai batean izan ezik berdinak dira. Horri guztiari begiratuta, funtzio baten eta bi polinomioen arteko desberdintzak frogatu behar ditugu; beraz, egin beharrekoa funtzioaren Taylor-en polinomioa garatzea eta polinomioen arteko desberdintzak aztertzea litzateke.

$\sqrt{1+x}$ funtzioaren Taylor-en garapena egiten dugu.

$$\begin{aligned} \triangleright f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \\ \triangleright f''(x) &= -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} \\ \triangleright f'''(x) &= \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2} \end{aligned}$$

Deribatuen balioak $c = 0$ puntuan honako hauek dira:

$$f'(0) = \frac{1}{2}, \quad f''(0) = -\frac{1}{4}, \quad f'''(0) = \frac{3}{8}.$$

Lehenengo mailako polinomioa kontuan hartuz gero:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + R_1(x)$$

non

$$R_1(x) = \frac{f''(z)}{2!} x^2$$

negatiboa den, hots

$$R_1(x) = \frac{f''(z)}{2!} x^2 = -\frac{1}{4}(1+z)^{-3/2} \frac{x^2}{2!} < 0$$

beraz, $R_1(x)$ faktorea kenduta

$$\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

Bigarren mailako polinomioa kontuan hartuz gero:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + R_2(x)$$

non

$$R_2(x) = \frac{f'''(z)}{3!} x^3$$

positiboa den, hots

$$R_2(x) = \frac{f'''(z)}{3!} x^3 = \frac{3}{8}(1+z)^{-5/2} \frac{x^3}{3!} > 0$$

beraz, $R_2(x)$ faktorea kenduta

$$\sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

Adibidea Kalkulatu $\sqrt[3]{30}$, 10^{-5} baino errore txikiagorekin. Hartu kontuan:

$$\sqrt[3]{30} = 3 \cdot \sqrt[3]{1 + 1/9}.$$

Ariketa hau egiteko, $\sqrt[3]{1+x}$ funtzioaren Taylor-en garapena egingo dugu. 10^{-5} baino errore txikiagorekin eskatzen dutenez gero, lehenengo bost deribatuak egingo ditugu. Laugarren mailako polinomioa osatuko dugu, eta bosgarren deribatua hondarraren adierazpenerako erabiliko dugu.

- ▷ $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $f(0) = 1$.
- ▷ $f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}$, $f'(0) = \frac{1}{3}$.
- ▷ $f''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-5/3}$, $f''(0) = -\frac{2}{9}$.
- ▷ $f'''(x) = \frac{10}{27}(1+x)^{-8/3}$, $f'''(0) = \frac{10}{27}$.
- ▷ $f^{(4)}(x) = -\frac{80}{81}(1+x)^{-11/3}$, $f^{(4)}(0) = -\frac{80}{81}$.
- ▷ $f^{(5)}(x) = \frac{880}{243}(1+x)^{-14/3}$.

Taylor-en garapena erabilia, honako hau lortuko dugu:

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3} \frac{x}{1!} + \frac{-2}{9} \frac{x^2}{2!} + \frac{10}{27} \frac{x^3}{3!} - \frac{80}{81} \frac{x^4}{4!} + R_4(x)$$

eta teoremak dio $\exists z \in (0, x)$, non honako hau dugun:

$$R_4(x) = \frac{1}{5!} x^5 \frac{880}{243} (1+z)^{-14/3}.$$

Orain, $x = \frac{1}{9}$ baliorako errorearen estimazioa egiten dugu,

$$\frac{1}{5!} \left(\frac{1}{9}\right)^5 \frac{880}{243} \cdot 1 < \frac{1}{3} \cdot 10^{-5}$$

hau da,

$$5.11 \cdot 10^{-7} < \frac{1}{3} \cdot 10^{-5}$$

Hurbilketa, polinomioa 3-z biderkatuz gero lortzen da:

$$\sqrt[3]{30} \sim 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{27} - \frac{1}{729} + \frac{5}{59049} - \frac{10}{1594323}\right) = \frac{1651312}{1594323} \sim 1.035743698.$$

Ohar gaitezen polinomioaren hurbilketa lortzeko 3 faktoreaz biderkatu dugula, eta errorea estimatzeko $\frac{1}{3}$ faktoreaz. Horren zergatia da guk hartutako funtzioa $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ izatea eta ariketa $g(x) = 3\sqrt[3]{1+x}$ funtzioarekin ez lantzea. Irakurlearen esku gelditzen da kontuak $g(x)$ funtzioarekin egitea eta berdina ematen duela egiaztatzea.

4.3 Erabilpenak

Baina, Taylor-en formulak proposatutako berdintasunak ere, funtzioaren limitearen kalkuluan, Taylor-en polinomioaz ordezkatzeari baimenduko liguke; ordezkapen horrek infinitesimoen baliokideen erabilera handitzen du (Taylor-en polinomioen kasu sinpleak dira), bere erabilerearen murrizketa biderketara eta zatiduretara ezabatuz.

Adibidea Kalkulatu honako limite hau:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

x-ren laugarren mailarainoko berreturak soilik erabiliz.

Taylor-en laugarren ordenako garapen erabilgarrienak erabiliz, honako hau dugu:

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}, \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}, \\ e^{-\frac{x^2}{2}} &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}.\end{aligned}$$

Limiteak hartuz

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \left[\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \left(-\frac{1}{12} x^4 \right) = -\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Adibidea Kalkulatu $\sin(\sin x)$, x -ren hirugarren mailarainoko berreturak soilik erabiliz.

Taylor-en hirugarren ordenako garapen erabilgarrienak erabiliz, honako hau dugu:

$$\begin{aligned}\sin(\sin x) &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{6} \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3!} \right) - \frac{1}{6} (x^3) \\ &= x - \frac{x^3}{3}.\end{aligned}$$

5

Integrazioa

5.1 Integral mugagabea

5.1.1 Jatorrizkoak.

Funtzio baten jatorrizkoa deribatuaren alderantzizko eragiketa da, eta ez dago modu unibokoan definituta.

DEFINIZIOA. $F(x)$, $f(x)$ funtzioaren *jatorrizko funtzioa* edo $f(x)$ -ren *integral mugagabea* dela I tartean esaten da, $F'(x) = f(x)$ denean I tarteko x puntu guztietan. $f(x)$ funtzioaren edozein jatorrizko funtzio, honako ikur honen bidez adierazten da:

$$F(x) = \int f(x) dx.$$

5.1.1 teorema. *Izan bitez $F(x)$ eta $G(x)$, $f(x)$ funtzio baten jatorrizko bi funtzio. Orduan, konstante batean, K , baino ez dira desberdintzen.*

$$F(x) = G(x) + K.$$

5.1.2 Berehalako jatorrizkoak.

Ondoren, berehalako integral mugagabea edo berehalako jatorrizko funtzio batzuen zerrenda aurkezten da. Formula bakoitzaren frogapena deribazioa eginez lortzen da.

$$\triangleright \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\triangleright \int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + K \quad (x \neq 0)$$

$$\triangleright \int e^x dx = e^x + K$$

$$\triangleright \int \sin x dx = -\cos x + K$$

$$\triangleright \int \cos x dx = \sin x + K$$

$$\triangleright \int \tan x dx = -\ln(|\cos x|) + K \quad \left(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\triangleright \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + K$$

$$\triangleright \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + K \quad (-1 < x < 1)$$

$$\triangleright \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + K \quad (-1 < x < 1)$$

5.2 Integrazio-metodoak

Hemendik aurrera, integral bat ebatzi behar dugunean sailkatu egin beharko dugu, eta sailkapenaren arabera aldaketak egin ebaizteko.

5.2.1 Zatikako integrazioa

Zatikako integrazioaren metodoak, biderketa baten deribatuari dagokion formula erabiltzen du; hau da,

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

berdintzan integratuta

$$f(x)g(x) = \int (f(x)g(x))' dx = \int g(x)f'(x) dx + \int f(x)g'(x) dx$$

eta azkenengo integrala askatuta

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx.$$

Berdintza horri *zatikako integrazioaren formula* esaten zaio, eta $u = f(x)$, $v = g(x)$ izendatuz, honako hau dugu:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Adibidea Kalkulatu honako integral hau:

$$\int xe^x dx.$$

Zatikako integrazioaren formula erabil daiteke honako aldaketa hauek kontuan hartuta,

$$\begin{cases} u = x, & du = dx \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{cases}$$

Orduan,

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + K.$$

Adibidea Kalkulatu honako jatorrizko hau:

$$\int x \ln x dx.$$

Zatikako integrazioa aplikatzen da honako eskema hau jarraituz:

$$\begin{cases} u = \ln x, & v = \frac{x^2}{2}, \\ du = \frac{dx}{x}, & dv = x dx. \end{cases}$$

Orduan,

$$\begin{aligned}\int x \ln x \, dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + K = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + K.\end{aligned}$$

Ariketa. Kalkulatu $\int \ln |x| \, dx$.

5.2.2 Aldagai-aldaketa

Integraziozko metodo hau honako honen gainean oinarritzen da: izan bedi F , f funtzioaren jatorrizkoa; orduan, definizioz: $F'(x) = f(x)$. Gainera, $x = g(t)$ bada, hau da, x , t -ren funtzioa bada, F eta g funtzioen konposaketari kate-erregela aplikatuz, honako hau lortzen da:

$$(F(g(t)))' = F'(g(t)) g'(t) = f(g(t)) g'(t)$$

Beraz, $F(x) = F(g(t))$ berdintza honako formula honen bidez adieraz daiteke:

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt$$

integralean, $x = g(t)$ eta $dx = g'(t) dt$ ordezkatzuz lortzen dena.

Aldagai berrian integrazioa lortu ondoren, aldaketa desegin egiten da, lortutako jatorrizko funtzioa aldagai zaharrean adierazita gera dadin.

Adibidea Kalkulatu honako integral hau:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 3} \, dx.$$

Honako aldagai-aldaketa hau aukeratzen dugu:

$$t = x^2 + 3 \quad \text{eta} \quad dt = 2x dx.$$

Kasu honetan, alde batetik $x = \sqrt{t - 3}$ da, eta bestetik

$$\int f(t) \, dt = \int f(g(x)) g'(x) \, dx.$$

Formula honako hau da:

$$\int \frac{dt}{t} = \log |t| + K = \log(x^2 + 3) + K.$$

Adibidea Kalkulatu honako jatorrizko funtzio hau:

$$\int x^2 e^{x^3} \, dx.$$

$$\int x^2 e^{x^3} \, dx = \left\{ \begin{array}{l} e^{x^3} = t \\ 3x^2 e^{x^3} dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} t + K = \frac{e^{x^3}}{3} + K.$$

5.3 Funtzio arrazionalen integrazioa

Integral arrazionalak deitzen zaie, integrakizunean agertzen den funtzioa koefiziente errealak dituzten bi polinomioen zatidura diren integral haiei. Hau da,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad \text{non } P(x) \text{ eta } Q(x) \text{ polinomioak diren.}$$

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ funtzioa arrazionala integratzeko pausoak honako hauek dira:

1. Lehenengo, bi polinomioen arteko zatiketa egiten da, zenbakitzailearen maila izendatzailearen maila baino txikiagoa izan arte, zatiketaren hondarra izateagatik. Hau da, $P(x) = Q(x) \cdot H(x) + R(x)$, non $R(x)$ polinomioaren maila $Q(x)$ polinomioaren maila baino txikiagoa den; orduan:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{Q(x) \cdot H(x) + R(x)}{Q(x)} dx = \int H(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx.$$

$H(x)$ polinomio bat da, eta bere jatorrizkoa berehalakoa da.

2. Bigarren batugaia integratzeko, bere deskonposizio faktoriala egiten da honako era honetan; demagun izendatzaileak honako faktORIZAZIO hau onartzen duela:

$$Q(x) = (x - \alpha_1)^{r_1} \dots (x - \alpha_k)^{r_k} (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{s_1} \dots (x^2 + \beta_l x + \gamma_l)^{s_l}$$

$(x - \alpha_i)$ faktore linealak eta $(x^2 + \beta_j x + \gamma_j)$ laburtezinak diren faktore karratuak izanik. Orduan, $R(x)/Q(x)$ honako era honetan idatz daiteke:

$$\begin{aligned} R(x)/Q(x) = & \left[\frac{a_{1,1}}{(x - \alpha_1)} + \dots + \frac{a_{1,r_1}}{(x - \alpha_1)^{r_1}} \right] + \dots \\ & + \left[\frac{a_{k,1}}{(x - \alpha_k)} + \dots + \frac{a_{k,r_k}}{(x - \alpha_k)^{r_k}} \right] \\ & + \left[\frac{b_{1,1}x + c_{1,1}}{(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)} + \dots + \frac{b_{1,s_1}x + c_{1,s_1}}{(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{s_1}} \right] + \dots \\ & + \left[\frac{b_{l,1}x + c_{l,1}}{x^2 + \beta_l x + \gamma_l} + \dots + \frac{b_{l,s_l}x + c_{l,s_l}}{(x^2 + \beta_l x + \gamma_l)^{s_l}} \right]. \end{aligned}$$

Funtzio arrazional baten deskonposizio faktoriala egin ondoren, integralaren kalkulua honako integral hauen kalkulura murrizten da:

$$\begin{aligned} & \frac{A}{x - \alpha}, \\ & \frac{A}{(x - \alpha)^n}, \\ & \frac{Bx + C}{x^2 + \beta x + \gamma}, \\ & \frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^n}. \end{aligned}$$

- ▷ Lehenengo integral biak berehalako integralak dira:

$$\int \frac{A}{x - \alpha} dx = A \log |x - \alpha|,$$

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^n} dx = \frac{1}{1 - n} (x - \alpha)^{1-n}.$$

- ▷ Hirugarren integrala egiteko bi era daude, bata honako formula hau aplikatuta:

$$\int \frac{Bx + C}{x^2 + \beta x + \gamma} dx = \frac{B}{2} \int \frac{2x + \beta}{x^2 + \beta x + \gamma} dx + \frac{2C - B\beta}{2} \int \frac{1}{x^2 + \beta x + \gamma} dx.$$

Eta bestean, zenbakitzaileak izendatzailearen deribatuaren itxura har dezan ahalegintzen gara. Lehenengo batugaia berehalako integrala denez gero,

$$\int \frac{1}{x^2 + \beta x + \gamma} dx$$

motako integralak kalkulatzeko baino ez zaigu falta.

$x^2 + \beta x + \gamma$ faktore laburtezin karratua da, eta $x^2 + \beta x + \gamma = (x + a)^2 + b^2$ moduan idatz daiteke; hau da,

$$\int \frac{1}{(x + a)^2 + b^2} dx,$$

eta integrala kalkulatu behar da. Aldagai-aldaketa erraz baten ondorioz, integral hori honako integral honetan bihurtzeko:

$$\int \frac{1}{t^2 + 1} dt.$$

- ▷ Laugarren integrala, aurreko prozedura berdina erabiliz, beste integral honetan bihurtzeko:

$$\int \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt.$$

Bi modu daude integral hau askatzeko: bata $t = \tan z$ aldagai-aldaketa erabiltzea, edo bestea zenbakitzailean honako aldaketa hau jartzea $1 = (x^2 + 1) - x^2$.

Adibidea Kalkulatu honako integral hau:

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = \tan t \\ dx = \sec^2 t dt \end{array} \right\} = \int \frac{1}{(\tan^2 t + 1)^2} \sec^2 t dt = \int \frac{\sec^2 t}{\sec^4 t} dt \\ &= \int \frac{1}{\sec^2 t} dt = \int \cos^2 t dt = \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \int 2 \cos 2t dt \\ &= \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin(2t) + K \\ &= \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{4} \sin t \cos t + K \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} + K. \end{aligned}$$

$$(*) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 1 = \tan^2 t + 1 = \sec^2 t \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 t} = x^2 + 1 \Rightarrow \cos^2 t = \frac{1}{x^2 + 1} \\ \sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^2}{x^2 + 1} \end{array} \right\}$$

Beste era batean:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx &= \int \frac{(x^2 + 1) - x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} dx - \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx \\ &= \int \frac{1}{(x^2 + 1)} dx - \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx \\ &\stackrel{(*)}{=} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \arctan x + K \\ &= \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} + K. \end{aligned}$$

Non (*)-an agertzen den integrala honako eran ebazten den:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx &= \int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} x dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = x \quad \quad \quad du = dx \\ dv = \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx \quad v \stackrel{(*)}{=} \int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 1} \end{array} \right\} \\ &= uv - \int v du = x \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 1} \right) - \int \frac{(-1/2)}{x^2 + 1} dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \arctan x + K. \end{aligned}$$

Eta kasu honetan, (*) ebazteko:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 1 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{(1/2)}{t^2} dt = \frac{1}{2} \int t^{-2} dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{t^{-1}}{(-1)} + K = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 1} + K. \end{aligned}$$

Oharra. Funtzio arrazional bat integratzeko orduan, izendatzailearen deskonposizio faktoriala lortu behar da, baina zoritxarrez hori ez da beti posiblea izaten. Kontuan hartu behar dugu polinomio baten maila 5 baino handiagoa izanik ez dela formula orokorrik existitzen erroak kalkulatzeko. Hala eta guztiz ere, kasu batzuetan erabil daitezkeen trikimailu batzuk existitzen dira.

5.3.1 teorema. Izan bedi $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ koefiziente osoak dituen polinomio bat, hau da; $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Orduan, $r = p/q$ zenbakia $f(x)$ funtzioaren erro bat baldin bada, orduan, p eta q , a_0 eta a_n -ren zatitzaileak dira, hurrenez hurren.

Oharra. Teorema honek ez du esan nahi p/q zatiki laburtezin guztiak, p , a_0 -ren zatitzailea eta q , a_n -ren zatitzailea izanik, f funtzioaren erroak direnik.

Esaten duen bakarra zera da: f funtzioak erro zatikiarren bat baldin badu, mota zehatz honetako izan behar duela.

Baina f funtzioak ez du derrigorrez erro zatikiarrik izan behar.

Ariketa. Aurkitu $2x^3 + 3x^2 - 1$ polinomioaren erroak. Eman $x^4 + 1$ polinomioaren deskonposizio faktoriala.

Adibidea Integratu honako adierazpen arrazional hau

$$\int \frac{3x + 1}{x^2 + x - 2} dx$$

integrakizunean deskonposizio faktoriala lortuz.

Izendatzailearen erroak 1 eta -2 dira, eta biak bakunak dira. Hau da, $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$. Erabili behar diren frakzio sinpleak, honako hauek dira:

$$\frac{A}{x + 2}, \quad \frac{B}{(x - 1)}$$

eta bete behar duten identitatea honako hau da:

$$\frac{3x + 1}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{(x - 1)} = \frac{A(x - 1) + B(x + 2)}{(x + 2)(x - 1)}$$

Beraz, $A(x - 1) + B(x + 2) = 3x + 1$ berdintza dugu, eta, koefizienteak berdintzerakoan,

$$\begin{aligned} A + B &= 3, \\ -A + 2B &= 1. \end{aligned}$$

Sistema honen soluzioa $A = \frac{5}{3}$ eta $B = \frac{4}{3}$ da. Hona hemen eskatutako integrala:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 1}{(x + 2)(x - 1)} dx &= \frac{5}{3} \int \frac{dx}{x + 2} + \frac{4}{3} \int \frac{dx}{(x - 1)} \\ &= \frac{5}{3} \ln |x + 2| + \frac{4}{3} \ln |x - 1| + K. \end{aligned}$$

Adibidea Kalkulatu honako jatorrizko funtzio hau:

$$\int \frac{3x + 8}{x^3 + 4x} dx.$$

Izendatzailearen deskonposizio faktoriala: $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$; hau da, $x = 0$ erro erreal bakun bat eta $x^2 + 4$ erro erreal gabeko gai karratu bat ditu. Erabili behar diren frakzio sinpleak honako hauek dira:

$$\frac{A}{x}, \quad \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

eta polinomioen propietateak erabilia:

$$\frac{3x + 8}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4} = \frac{A(x^2 + 4) + x(Bx + C)}{x^3 + 4x}.$$

Izendatzaile komuna jartzen dugu, eta

$$3x + 8 = A(x^2 + 4) + x(Bx + C) = x^2(A + B) + xC + 4A$$

ekuazioan koefizienteak berdinduta,

$$\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 3 &= C \\ 8 &= 4A \end{aligned}$$

Hau da, $A = 2$, $B = -2$ eta $C = 3$ dira.

Beraz, honako hau lortzen da:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 8}{x^3 + 4x} dx &= 2 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x + 3}{x^2 + 4} dx = 2 \ln|x| - \int \frac{2x}{x^2 + 4} dx + \int \frac{3}{x^2 + 4} dx \\ &= 2 \ln|x| - \ln(x^2 + 4) + 3 \int \frac{dx}{x^2 + 4}. \end{aligned}$$

Azkenik, izan bedi:

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x/2)^2 + 1}$$

eta $t = \frac{x}{2}$ aldagai-aldaketa eginda, $dt = \frac{dx}{2}$ eta $dx = 2dt$ da. Orduan:

$$I_1 = \frac{1}{4} \int \frac{2dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \arctan t + K = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + K.$$

Amaitzeko, dena batzen dugu

$$\int \frac{3x + 8}{x^3 + 4x} dx = 2 \ln|x| - \ln(x^2 + 4) + \frac{3}{2} \arctan \frac{x}{2} + K.$$

5.4 Integral trigonometrikoak

Integral trigonometriko bat ebazteko orduan, ahal den neurrian, aldagai-aldaketaren bat aukeratu saiatuko gara integral arrazional bihurtzeko. Hemen hiru integral trigonometriko mota aztertuko dira:

1. $\int \sin^n x \cos^m x dx$,
2. $\int \sin(nx) \cos(mx) dx$,
3. $\int R(\sin x, \cos x) dx$.

Bigarren kasuko integral mota horretan, $\cos(nx) \cos(mx)$ edo $\sin(nx) \sin(mx)$ integralak ere aztertuko dira.

Integral trigonometrikoetan oso erabilgarriak izaten dira trigonometriako identitate batzuk:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x, \quad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x.$$

Batuketa, kenketa eta angelu bikoitzen formula batzuk honako hauek dira:

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, & \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y, & \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x, \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x. \end{aligned}$$

Beste identitate trigonometriko batzuk ere behar izango ditugu integral mota hauek ebazteko, baina geroago ikusiko ditugu.

5.4.1 $\int \sin^n x \cos^m x dx$

Kasu honetan, $\sin x$ eta $\cos x$ -en berretura naturalen biderkadura aztertuko da.

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx = \int (\sin x)^n \cdot (\cos x)^m dx$$

Bi kasu bereizten dira:

1. m bakoitia edo n bakoitia:

Demagun m bakoitia dela, hots, $m = 2k + 1$. Orduan,

$$\cos^m x = \cos^{2k+1} x = (\cos^2 x)^k \cdot \cos x = (1 - \sin^2 x)^k \cos x.$$

Adierazpenean $\sin x$ -en polinomio bat eta $\cos x$ bat agertzen dira. Berehala ikusten da $\sin x = t$ aldagai-aldaketarekin integrakizuna polinomio bihurtzen dela.

Gauza bera gertatzen da n bakoitia den kasuan.

2. m eta n bikoitiak.

Kasu honetan, angelu bikoitzaren formulak erabili behar dira:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \tag{5.1}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}. \tag{5.2}$$

Formula hauek erabilita, $\cos x$ eta $\sin x$ gaietan berreturak murrizten ditugu. Batzuetan, batean baino gehiagotan erabili beharko dira angelu bikoitzaren formulak.

Adibidea Kalkulatu honako jatorrizko funtzio hau:

$$\int \cos^5 x \sin^2 x dx.$$

Berretura bat bakoitia denez gero, honako identitate hau erabiliko dugu:

$$\cos^5 x = \cos^4 x \cos x = (\cos^2 x)^2 \cos x = (1 - \sin^2 x)^2 \cos x$$

hori integralean ordezkatur eta $\sin x = t$ aldagai-aldaketa eginda:

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x \sin^2 x dx &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \int t^2 (1 - t^2)^2 dt \\ &= \int (t^2 - 2t^4 + t^6) dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7. \end{aligned}$$

Alderantzizko aldaketa eginda:

$$\int \cos^5 x \sin^2 x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + K.$$

Adibidea Kalkulatu honako integral mugagabe hau:

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx.$$

Kasu honetan, berretura biak bikoitiak dira, eta (5.1) eta (5.2) identitateak erabiliz,

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

honako hau lortzen da:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \int \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \left(\frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \right)^2 dx \\ &= \int \frac{1}{8} (1 + \cos(2x) - \cos^2(2x) - \cos^3(2x)) dx \\ &= \int \frac{1}{8} (1 + \cos(2x) - \cos^3(2x)) dx - \int \frac{1}{8} \cos^2(2x) dx. \end{aligned}$$

Bigarren integralean (5.2) berdintza berriro erabiltzen da, eta honako hau lortzen da:

$$\cos^2(2x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(4x))$$

eta

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos(2x) dx - \frac{1}{8} \int (1 - \sin^2(2x)) \cos(2x) dx \\ &\quad - \frac{1}{16} \int (1 + \cos(4x)) dx \\ &= \frac{1}{8}x + \frac{1}{8} \int \sin^2(2x) \cos(2x) dx - \frac{1}{16}x - \frac{1}{16} \int \cos(4x) dx \end{aligned}$$

$\sin 2x = u$ aldagai-aldaketa eginez, lehenengo integrala berehalako bihurtzen da, non $du = 2 \cos 2x dx$ den, eta:

$$\int \sin^2(2x) \cos(2x) dx = \int \frac{u^2}{2} du = \frac{u^3}{6} = \frac{\sin^3(2x)}{6}.$$

Eragiketak egin ondoren:

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{x}{16} + \frac{1}{48} \sin^3(2x) - \frac{1}{64} \sin(4x) + K.$$

Ariketa. Kalkulatu $\int \sin^4 x dx$.

5.4.2 $\int \tan^n x dx$ eta $\int \sec^n x dx$

Tangentearen berreturak osoak direnean, $(\tan x)' = \sec^2 x$ eta $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ direla erabiliko dugu.

$$\tan^n x = \tan^{n-2} x \tan^2 x = \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) = \tan^{n-2} x (\sec^2 x) - \tan^{n-2} x.$$

Integratzen badugu:

$$\begin{aligned} \int \tan^n x dx &= \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x) dx - \int \tan^{n-2} x dx. \end{aligned}$$

Lehenengo integrala berehalakoa da, eta bigarrenetan n -tik $n - 2$ mailara murriztu dugu berretura. Eta horrela jarraitzen dugu, $\tan x$ edo $\tan^2 x$ funtzioetaraino heldu arte.

Adibidea Kalkulatu $\int \tan^4 x dx$.

$$\begin{aligned} \int \tan^4 x dx &= \int \tan^2 x \tan^2 x dx = \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int \tan^2 x dx = \frac{1}{3} \tan^3 x - \int (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \frac{1}{3} \tan^3 x - \int \sec^2 x dx + \int dx \\ &= \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + K. \end{aligned}$$

Ariketa. Kalkulatu $\int \tan^6 x dx$.

Sekantearen berreturekin era berean jokatzen dugu; hau da, berretura horretan bi aske uzten ditugu, eta $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ dela erabiliko dugu.

$$\sec^n x = \sec^{n-2} x \sec^2 x = \sec^{n-2} x (1 + \tan^2 x) = \sec^{n-2} x + \sec^{n-2} x \tan^2 x.$$

Integralaren ebazpena era horretan egiten da $n \geq 4$ den kasuetarako, zeren $n \leq 3$ diren kasuak beste era batean egin behar baitira.

Adibidea Kalkulatu $\int \sec^4 2x \, dx$.

$$\begin{aligned} \int \sec^4 2x \, dx &= \int \sec^2 x \sec^2 x \, dx = \int \sec^2 x (1 + \tan^2 2x) \, dx \\ &= \int \sec^2 2x \, dx + \int \sec^2 2x \tan^2 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \tan 2x + \frac{1}{6} \tan^3 2x + K. \end{aligned}$$

Ariketa. Kalkulatu $\int \sec x \, dx$ eta $\int \sec^3 x \, dx$.

5.4.3 $\int \sin(mx) \cos(nx) \, dx$

Mota hauetako integraletan honako formula hauek erabil ditzakegu:

$$\sin(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

$$\cos(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

$$\sin(mx) \sin(nx) = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

Horrela, ia berehalako integraletan bananduta gelditzen diren integralak besterik ez ditugu egin behar.

Adibidea Kalkulatu honako integral hau:

$$\int \sin(3x) \cos(5x) \, dx.$$

Kasu honetan, lehenengo identitatea aplikatu behar da $m = 3$, $n = 5$ izanik, eta

$$\sin(3x) \cos(5x) = \frac{1}{2} [\sin(8x) + \sin(-2x)] = \frac{1}{2} [\sin(8x) - \sin(2x)]$$

lortzen da. Honako berdintza hau betetzen da:

$$\int \sin(3x) \cos(5x) \, dx = \frac{1}{2} \int \sin(8x) \, dx - \frac{1}{2} \int \sin(2x) \, dx = -\frac{1}{16} \cos(8x) + \frac{1}{4} \cos(2x) + K.$$

5.4.4 $\int R(\sin x, \cos x) \, dx$

Integral trigonometriko hauen integrakizuna sinu eta kosinu funtzioen funtzio arrazionala da. Kasu hauetan, aukeratzeko den aldagai-aldaketa

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

da, eta integral trigonometrikoa arrazional bihurtzen da. Aukeratu dugun aldagai-aldaketaren arabera funtzioa arrazionalan agertzen diren sinu eta kosinu funtzioak eta dx aldatu egin behar dira. Hori egiteko ezagutzen ditugun formula trigonometrikoak erabiliko ditugu:

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin\left(2\frac{x}{2}\right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1} = 2 \frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} \\ &= 2 \frac{\frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = 2 \frac{\tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}.\end{aligned}$$

Modu berdinean honako hauek lortzen dira:

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{1} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\end{aligned}$$

eta

$$t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \arctan t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Aldaketa horri *aldaketa unibertsala* esaten zaio.

Batzuetan, $R(\sin x, \cos x)$ funtzioak simetria batzuk aurkezten dituenean, beste aldagai-aldaketa errazago batzuk egin daitezke. Kasu hauek aztertzeko, $u = \sin x$ eta $v = \cos x$ izendatuz, R funtzioa u eta v -ren arabera funtzio arrazional moduan jarriko dugu:

1. $R(-u, v) = -R(u, v)$ bada, orduan $t = \cos x$ aldagai-aldaketa egiten da.
2. $R(u, -v) = -R(u, v)$ bada, orduan $t = \sin x$ aldagai-aldaketa egiten da.
3. $R(-u, -v) = R(u, v)$ bada, orduan $t = \tan x$ aldagai-aldaketa egiten da.

Kasu guztietan, berari dagokion gaineratutako baldintzarekin, t aldagai berriaren arabera funtzio arrazionala lortzen da. Hirugarren aldagai-aldaketari begiratzen badiogu, sinu eta kosinu karratu funtzioak t aldagai berriarekiko berridatzi behar ditugu honako era honetan:

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{t^2}{1 + t^2},$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{t^2}{1 + t^2} = \frac{1 + t^2 - t^2}{1 + t^2} = \frac{1}{1 + t^2},$$

$$dt = \sec^2 x dx = (1 + \tan^2 x) dx = (1 + t^2) dx.$$

Ariketa. Kalkulatu $\int 1/(a \sin x + b \cos x)^2 dx$.

Adibidea Kalkulatu honako integral trigonometriko hau:

$$\int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx.$$

Lehenengo, $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ aldagai-aldaketa eginda,

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

lortzen da. Bestalde, $x = 2 \arctan t$ da, orduan:

$$dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Izendatzailean,

$$1 + \cos x = 1 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2} = \frac{2}{1 + t^2}.$$

Aldagai-aldaketa egin ondoren,

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{1-t^2}{1+t^2} dt = \int \frac{2-1-t^2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{1+t^2} dt - \int dt \\ &= 2 \arctan t - t + K = 2 \arctan(\tan x/2) - \tan x/2 + K \\ &= x - \tan x/2 + K. \end{aligned}$$

Ariketa. Kalkulatu $\int 1/(a \sin x + b \cos x) dx$.

5.5 Integral irrazionalak

Oinarrizko integrala onartzen duten integral irrazional guztien artean, p eta q positiboak diren kasuak eta R bere aldagai bietako funtzio arrazionala den kasuak aipatuko ditugu. Horietako bakoitzarentzat beharrezkoak diren aldaketak aplikatzen dira:

$$A) \quad \int R(t, \sqrt{p^2 t^2 + q^2}) dt \quad \text{hartzen da} \quad t = \frac{q \tan(u)}{p}$$

$$B) \quad \int R(t, \sqrt{p^2 t^2 - q^2}) dt \quad \text{hartzen da} \quad t = \frac{q}{p \cos(u)}$$

$$C) \quad \int R(t, \sqrt{q^2 - p^2 t^2}) dt \quad \text{hartzen da} \quad t = \frac{q \sin(u)}{p}$$

Kalkula ditzagun $\int \sqrt{1-x^2} dx$, $\int \sqrt{1+x^2} dx$ eta $\int \sqrt{x^2-1} dx$ integralak.

Adibidea

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right\} = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt \\ &= \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \int \cos 2t dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin 2t}{2} + K \\ &\quad \left\{ \sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2x \sqrt{1-x^2} \right\} \\ &= \frac{1}{4} 2x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + K. \end{aligned}$$

Adibidea

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = \cos t \\ dx = -\sin t dt \end{array} \right\} = - \int \sqrt{1-\cos^2 t} \cos t dt = - \int \sin^2 t dt \\ &= - \int \frac{1-\cos 2t}{2} dt = -\frac{t}{2} + \frac{1}{2} \int \cos 2t dt = -\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \frac{\sin 2t}{2} + K \\ &\quad \left\{ \sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2x \sqrt{1-x^2} \right\} \\ &= \frac{1}{4} 2x \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \arccos x + K. \end{aligned}$$

Adibidea

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = \tan t \\ dx = \sec^2 t dt \end{array} \right\} = \int \sqrt{1+\tan^2 t} \sec^2 t dt = \int \sin^3 t dt \\ &= \frac{1}{2} (\sec t \tan t + \ln(\sec t + \tan t)) \\ &\quad \left\{ x = \tan t, 1+x^2 = \sec^2 t \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{1+x^2} + x \right| + K. \end{aligned}$$

Adibidea

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2-1} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = \sec t \\ dx = \sec t \tan t dt \end{array} \right\} = \int \sqrt{\sec^2-1} \sec t dt \\ &= \int \tan^2 t \sec t dt = \int (\sec^2 t - 1) \sec t dt \\ &= \int \sec^3 t dt - \int \sec t dt \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{1+x^2} + x \right| + K. \end{aligned}$$

Behin hiru integral horiek kalkulatu ditugula, baditugu A), B) eta C) mota horietan agertzen diren integralak, beste era batean egiteko formula aplikatu gabe. Gogora dezagun integral arrazionalen egiten zena, izendatzailean bigarren mailako polinomio laburtezina agertzen zenean, $\frac{1}{1+t^2}$ itxurara eramaten zen. Hemen ere, gauza bera aplikatu daiteke.

Adibidea Kalkulatu $\int \sqrt{5-7x^2} dx$.

$$\int \sqrt{5-7x^2} dx = \int \sqrt{5 \left(1 - \frac{7}{5}x^2\right)} dx = \int \sqrt{5} \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}x\right)^2} dx.$$

Eta integrala ebazteko egiten den aldagai-aldaketa $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}x = \sin t$ da.

Adibideak

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4-x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \sin t, dx = 2 \cos t \\ \sqrt{4-x^2} = 2 \cos t, \sin 2t = 2 \sin t \cos t = \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} \end{array} \right\} \\ &= 4 \int \cos^2 t dt = 4 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = 2t + \sin 2t + K \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \sin t = \frac{x}{2} \\ \cos t = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \end{array} \right\} = 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + K. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} &= \left\{ \begin{array}{l} x = \sec t, dx = \sec t \tan t dt \\ \sqrt{x^2-1} = \tan t, \sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \end{array} \right\} \\ &= \int \cos t dt = \sin t + K = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + K. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} &= \left\{ \begin{array}{l} x = \tan t, dx = \sec^2 t dt \\ \sqrt{1+x^2} = \sec t \end{array} \right\} = \int \frac{\sec^2 t}{\tan^4 t \sec t} dt \\ &= \int \frac{\cos^3 t}{\sin^3 t} dt = \left\{ \begin{array}{l} \sin t = s, dt = \cos s ds \\ \cos t = \sqrt{1-s^2} \end{array} \right\} = \int \frac{1-s^2}{s^3} ds \\ &= -\frac{1}{2s^2} - \ln |s| + K = -\frac{1}{2\sin^2 t} - \ln |\sin t| + K \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 t = \frac{1}{1+x^2} \\ \sin^2 t = \frac{x^2}{1+x^2} \end{array} \right\} = -\frac{1+x^2}{2x^2} - \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + K. \end{aligned}$$

5.5.1 $\int R\left(x, x^{\frac{r_1}{s_1}}, \dots, x^{\frac{r_k}{s_k}}\right) dx$

Azter dezagun honako integral mota hau:

$$\int R\left(x, x^{\frac{r_1}{s_1}}, \dots, x^{\frac{r_k}{s_k}}\right) dx.$$

Izan bedi $s = \text{mkt}(s_1, \dots, s_k)$; orduan, aurreko integrala integral arrazional batera eraman daiteke honako aldaketa hau eginez:

$$x = t^s, \quad dx = st^{s-1} dt.$$

Adibidea

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \sqrt[6]{x}}{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x})\sqrt[4]{x^3}} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = t^{12} \\ dx = 12t^{11} dt \end{array} \right\} = \int \frac{1 + t^2}{(t^4 - t^3)t^9} 12t^{11} dt = 12 \int \frac{1 + t^2}{t^2 - t} dt \\ &= 12 \int \left(1 + \frac{t+1}{t^2 - t} \right) dt = 12 \int \left(1 + \frac{2}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt \\ &= 12t + 24 \ln |t-1| - 12 \ln |t| + K \\ &= 12 \sqrt[12]{x} + 24 \ln |\sqrt[12]{x} - 1| - 12 \ln |\sqrt[12]{x}| + K. \end{aligned}$$

$$5.5.2 \quad \int R \left(x, \left(\frac{ax + b}{px + q} \right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \dots, \left(\frac{ax + b}{px + q} \right)^{\frac{r_k}{s_k}} \right) dx$$

Beste integral irrazional batzuen mota honako hau da:

$$\int R \left(x, \left(\frac{ax + b}{px + q} \right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \dots, \left(\frac{ax + b}{px + q} \right)^{\frac{r_k}{s_k}} \right) dx$$

Izan bedi $s = \text{mkt}(s_1, \dots, s_k)$; orduan, aurreko integrala integral arrazional batera eraman daiteke honako aldaketa hau eginez:

$$\left(\frac{ax + b}{px + q} \right) = t^s, \quad x = \frac{qt^s - b}{a - pt^s}, \quad dx = \frac{qst^{s-1}(a - pt^s) + pst^{s-1}(qt^s - b)}{(a - pt^s)^2} dt$$

Adibidea

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}} dx &= \left\{ \begin{array}{l} 2x-1 = t^4 \\ dx = 2t^3 dt \end{array} \right\} = \int \frac{2t^3}{t^2-1} dt = 2 \int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt \\ &= t^2 + 2t + 2 \ln |t-1| + K \\ &= \sqrt{2x-1} + 2\sqrt[4]{2x-1} + 2 \ln |\sqrt[4]{2x-1} - 1| + K. \end{aligned}$$

5.5.3 Integral binomikoak

Integral binomikoaren itxura honako hau da:

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}.$$

Froga daiteke aurreko motako integral batek oinarritzko funtzio bidezko soluziorik baduela honako hiru baldintza hauetariko bat betetzen bada:

1. $p \in \mathbb{Z}$.
2. $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$.
3. $p + \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$.

Horrela izanik, aurreko integrala honako aldageta hau eginez ebatzen da:

$$x^n = t, \quad x = t^{\frac{1}{n}}.$$

Lortuko dugun integrala (5.5.2) motakoa izango da.

Adibideak

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3} &= \int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{-3} dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{4}, p = -3 \\ p = -3 \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x^{\frac{1}{4}} = t, x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array} \right\} \\ &= \int t^{-2}(1+t)^{-3}4t^3 dt = 4 \int \frac{t}{(1+t)^3} dt \\ &= 4 \int \left(-\frac{1}{(1+t)^3} + \frac{1}{(1+t)^2} \right) dt = \frac{2}{(1+t)^2} - \frac{4}{1+t} + K \\ &= \frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2} - \frac{4}{1+\sqrt[4]{x}} + K. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}} &= \int x^{-3}(1+x^{-1})^{-\frac{1}{5}} dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} m = -3, n = -1, p = -\frac{1}{5} \\ p \notin \mathbb{Z}, \frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x^{-1} = t, x = t^{-1} \\ dx = -t^{-2} dt \end{array} \right\} \\ &= \int t^3(1+t)^{-\frac{1}{5}}(-t^{-2}) dt = - \int t(1+t)^{-\frac{1}{5}} dt \\ &= \left\{ \begin{array}{l} 1+t = s^5, t = s^5 - 1 \\ dt = 5s^4 ds \end{array} \right\} = - \int (s^5 - 1)s^{-1} 5s^4 ds = -5 \int (s^8 - s^3) ds \\ &= -\frac{5}{9}s^9 + \frac{5}{4}s^4 + K = -\frac{5}{9}(1+t)^{\frac{9}{5}} + \frac{5}{4}(1+t)^{\frac{4}{5}} + K \\ &= -\frac{5}{9} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{9}{5}} + \frac{5}{4} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{4}{5}} + K. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} &= \int x^{-2}(-1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \left\{ p \notin \mathbb{Z}, \frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}, p + \frac{m+1}{n} = -1 \in \mathbb{Z} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} x^2 = t, \quad x = t^{\frac{1}{2}} \\ dx = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} dt \end{array} \right\} = \int t^{-1}(-1+t)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} dt \\
&= \frac{1}{2} \int t^{-2} \left(\frac{t}{-1+t} \right)^{\frac{1}{2}} dt = \left\{ \begin{array}{l} \frac{t}{-1+t} = s^2, \quad t = \frac{-s^2}{1-s^2} \\ dt = \frac{-2s}{(1-s^2)^2} ds \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int \left(\frac{-s^2}{1-s^2} \right)^{-2} s \frac{-2s}{(1-s^2)^2} ds = - \int \frac{ds}{s} = \frac{1}{s} ds + K \\
&= \left(\frac{-1+t}{t} \right)^{\frac{1}{2}} + K = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} + K.
\end{aligned}$$

5.5.4 Euler-en integralak

Euler-en integralak honako itxura hau dute:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx.$$

Integral mota hauek ebazteko, honako aukera hauei begiratu behar zaie:

- ▷ $a > 0$ denean, honako aldaketa hau egiten da:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}x + t.$$

- ▷ $c > 0$ denean, honako aldaketa hau egiten da:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}.$$

- ▷ Demagun $ax^2 + bx + c$ polinomioak bi erro erreal dituela, α eta β ; orduan, honako aldaketa hauek egin daitezke:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t \quad \text{edo} \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \beta)t.$$

Ikus ditzagun kasu bakoitzaren adibideak, hurrenez hurren.

Adibideak

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2+2x} = x+t, \quad x^2+2x = x^2+2xt+t^2, \quad 2x = 2xt+t^2 \\ x = \frac{t^2}{2(1-t)}, \quad dx = \frac{2t-t^2}{2(1-t)^2} dt, \quad \sqrt{x^2+2x} = \frac{t^2}{2(1-t)} + t = \frac{2t-t^2}{2(1-t)} \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{\frac{2t-t^2}{2(1-t)^2}}{\left(\frac{t^2}{2(1-t)} + 2 \right) \left(\frac{2t-t^2}{2(1-t)} \right)} dt = \int \frac{t}{2(1-t)} dt \\
&= -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \log(-1+t) + K = \frac{x}{\sqrt{x^2+2x}} + K.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{4-3x^2} = xt + 2, 4-3x^2 = x^2t^2 + 4xt + 4, -3x = xt^2 + 4t \\ x = \frac{-4t}{t^2+3}, dx = \frac{4t^2-12}{(t^2+3)^2} dt, \sqrt{4-3x^2} = \frac{t^2}{2(1-t)} + t = \frac{2t-t^2}{2(1-t)} \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{\frac{4t^2-12}{(t^2+3)^2}}{\frac{2t-t^2}{2(1-t)}} dt = -2 \int \frac{dt}{t^2+3} = -\frac{2}{3} \int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 + 3} \\
&= -\frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} + K = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{\sqrt{4-3x^2} - 2}{x\sqrt{3}} + K.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-x}} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2-x} = (x-1)t, x^2-x = (x-1)^2t^2, x = (x-1)t^2 \\ x = \frac{-t^2}{1-t^2}, dx = \frac{-2t}{(1-t^2)^2} dt, \sqrt{x^2-x} = \frac{-t^2}{1-t^2}t = \frac{-t^3}{1-t^2} \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{\frac{-2t}{(1-t^2)^2}}{\left(\frac{-t^2}{1-t^2}\right)^2 \frac{-t^3}{1-t^2}} dt = \int \frac{2(1-t^2)}{t^6} dt = -\frac{2}{5t^5} + \frac{2}{3t^3} + K \\
&= -\frac{2(x-1)^5}{5(\sqrt{x^2-x})^5} + \frac{2(x-1)^3}{3(\sqrt{x^2-x})^3} + K.
\end{aligned}$$

5.6 Integral mugatua

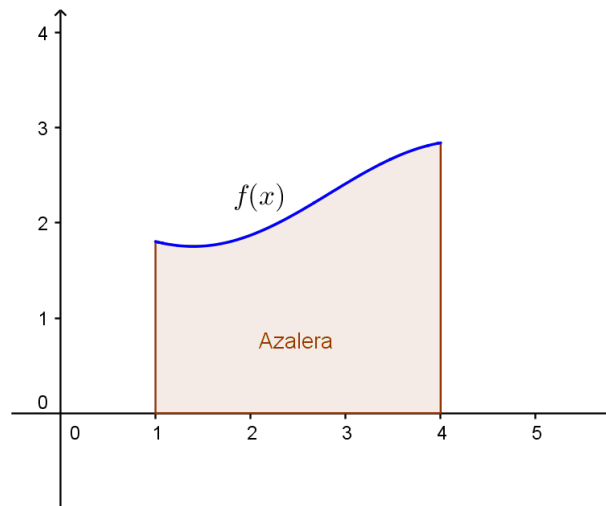
Integral mugatua da kurbek eta zuzenek mugatutako eremuen balioa zehazteko erabiltzen den kontzeptua. Teorian, batuketa partzialen mugen bidez defini daiteke; praktikan, Barrow-en erregela erabiliz kalkulatzen da.

DEFINIZIOA. Izan bedi $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funtzio bornatua eta positiboa; hau da, $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$ dagoenean eta jarraitua $[a, b]$ tartean edo eten puntu kopuru finitu batean.

OX ardatzak, $x = a$, $x = b$ zuzenek eta $f(x)$ funtzioak zehazten duten azalerari a -tik b -ra $f(x)$ funtzioaren *integral mugatua* esaten zaio.

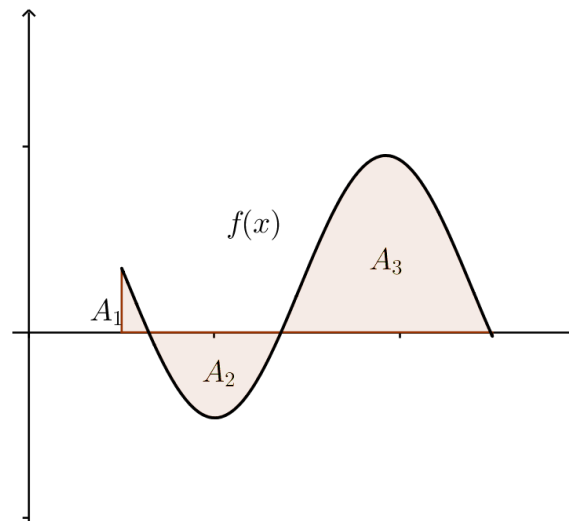
Definizioa ulertzeko, honako irudi hau dugu:

5.1 irudia . Azalera



$f(x)$ funtzioa positiboa ez denean, azalera kalkulatzeko, OX ardatzaren gainetik eta funtzioaren azpitik dauden azalera gehituz eta OX ardatzaren azpitik eta funtzioaren gainetik geratzen diren azalera kenduz egiten da; hots, $A_1 - A_2 + A_3$.

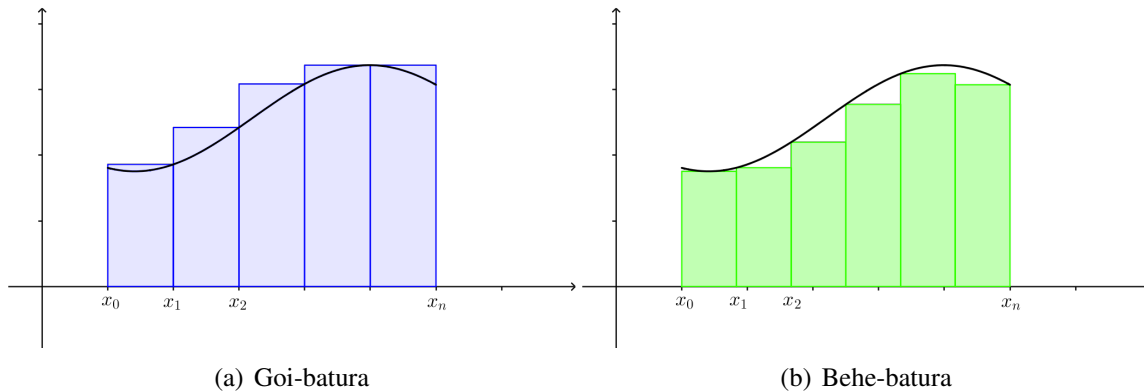
5.2 irudia . Azalera



Oharra. $[a, b]$ tartean partizio bat egiten dugu: x_0, x_1, \dots, x_n , non partizioko puntuak $a = x_0 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$ betetzen duten. Kontuan hartu behar da partizio bat egi-terakoan azpitarteek ez dutela zertan neurri bera eduki.

Har ditzagun kontuan honako laukizuzen hauek, $[x_{i-1}, x_i]$ oinarritzat eta $f(x)$ luzeratzat (edo altueratzat) dituztenak.

5.3 irudia . Riemann-en baturak



Lehenengo irudiko, (5.3(a)), laukizuzen guztien azaleren batura egiteko, $[x_{i-1}, x_i]$ tarte bakoitzean $f(x)$ funtzioak hartzen duen baliorik handiena hartzen da; azalera horri U deituko diogu. Era berean, bigarren irudiko, (5.3(b)), laukizuzen guztien azaleren batura egiteko, $[x_{i-1}, x_i]$ tarte bakoitzean $f(x)$ funtzioak hartzen duen baliorik txikiena hartzen da; azalera horri L deituko diogu. Argi dago $L < A < U$ dela. Zenbat eta azpitarte txikiagotan zatitu $[a, b]$ tarte, $L - U$ txikiagoa da eta hainbat eta integralaren hurbilketa hobea lortzen da.

Funtzio batzuetan, aurreko hurbilketa egitea eta gero limitera pasatzea ez da erraza izaten. Integral mugatuak kalkulatzeko erabiltzen den beste metodo bat *Barrow-en erregela* deritzona da.

5.6.1 teorema (Kalkuluaren oinarritzko teorema). *Izan bedi $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funtzio jarraitua. Orduan, $F = \int_a^b f(x) dx$ bitartez definituta dagoen funtzioa, $f(x)$ funtzioaren jatorrizko funtzioa da.*

5.6.2 teorema (Barrow-en erregela). *Izan bedi $F(x)$, $f(x)$ funtzioaren jatorrizko funtzioa; orduan*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

PROPIETATEAK

Integral mugatuaren propietate garrantzitsuenak honako hauek dira:

- 1. Funtzio batekiko linealtasuna.** Izan bitez $f(x)$ eta $g(x)$, $I = [a, b]$ tartean integra daitezkeen bi funtzio, eta λ, μ edozein bi zenbaki; orduan, $\lambda f(x) + \mu g(x)$ funtzioa, I tartean integra daiteke, eta honako berdintza hau betetzen da:

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

2. **Tartearekiko linealtasuna.** Demagun $f(x)$ funtzioa $I = [a, b]$ tartean integragarria dela, eta $c \in [a, b]$. Orduan, $f(x)$ integra daiteke $[a, c]$ eta $[c, b]$ azpitarteetan, eta, horrez gain, ondokoa betetzen da:

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

3. **Bornapena eta monotonia.** Izan bitez $f(x)$ eta $g(x)$, $[a, b]$ tartean integra daitezkeen bi funtzio, non $f(x) \leq g(x)$ den, $x \in [a, b]$ edozein baliotarako; orduan:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

4. Izan bedi $f(x)$, $[a, b]$ tartean integra daitekeen funtzioa; orduan, $|f(x)|$ funtzioa ere integragarria da, eta:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

5. Izan bedi $f(x)$, $[a, b]$ tartean integra daitekeen funtzio bat, non $m \leq f(x) \leq M$ desberdintzak betetzen baititu, $x \in [a, b]$ edozein baliotarako; orduan:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

6. **Aldagai-aldaketa.** Izan bedi u deriba daitekeen funtzio bat, u' funtzioa jarraitua izanik. Demagun, baita ere, u funtzioak alderantzizko funtzioa duela (u' funtzioaren zeinua konstantea izanik). Baldin eta f funtzioa jarraitua bada, eta $x = u(t)$ idazten baldin bada, honako hau betetzen da:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))u'(t) dt$$

u^{-1} funtzioa, u funtzioaren alderantzizkoa izanik.

Adibidea Adierazi honako integral hau aipatzen den aldagai-aldaketaren bitartez.

$$\int_1^6 \frac{\ln x}{x} dx, \quad x = u(t) = e^t.$$

Proposatutako aldaketa $x = u(t) = e^t$, deribagarria den funtzio bat da, bere deribatuak $u'(t) = e^t$ berdintza betetzen du, eta horrek ez du zeinua aldatzen. Beraz, integral mugatuaren aldagai-aldaketaren teoremaren hipotesi guztiak betetzen ditu. Bestalde, aldagai-aldaketaren alderantzizko funtzioa $t = u^{-1}(x) = \ln x$ da. Ondorioz, aldagai-aldaketaren teorematik, honako berdintza hau dugu:

$$\int_1^6 \frac{\ln x}{x} dx = \int_{u^{-1}(1)}^{u^{-1}(6)} f(u(t))u'(t) dt = \int_{\ln 1}^{\ln 6} \frac{\ln(e^t)}{e^t} e^t dt = \int_0^{\ln 6} t dt.$$

5.7 Kalkuluaren oinarriko teorema

Ondoren aurkezten den teorema garrantzitsua da, bere lehenengo zatian integral mugatuaren eta deribatuaren arteko erlazioa aurkezten delako, eta bigarren zatian, jatorrizko funtzioaren nozioa erabilia, integral mugatuen kalkulurako erabilgarria den metodo bat aurkezten delako. Teorema horri *kalkuluaren oinarriko teorema* esaten zaio, eta berari dagokion atal bat da *Barrow-en erregela*.

5.7.1 proposizioa. *Izan bedi $f(x)$ funtzio integragarria $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ tartean. Orduan, honako era honetan definituta dagoen G funtzioa*

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

jarraitua da $[a, b]$ tartean.

Frogapena. Izan bedi $x_0 \in [a, b]$. Froga dezagun G funtzioa jarraitua dela x_0 puntuan. Horretarako, froga dezagun honako hau:

$$\lim_{h \rightarrow 0} G(x_0 + h) = G(x_0)$$

edo horren baliokidea dena

$$\lim_{h \rightarrow 0} |G(x_0 + h) - G(x_0)| = 0.$$

Azken hori frogatzeko, lehenengo honako hau ikusiko dugu:

$$\begin{aligned} |G(x_0 + h) - G(x_0)| &= \left| \int_a^{x_0+h} f(x) dx - \int_a^{x_0} f(x) dx \right| = \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(x)| dx \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} M(|f|) dx \right| = M(|f|) |h| \end{aligned}$$

non $M(|f|) = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$ den. Hori dela eta, $h \rightarrow 0$ jotzen duenean $|G(x_0 + h) - G(x_0)| \rightarrow 0$ jotzen du, eta frogapena eginda dago.

□

5.7.1 teorema (Kalkuluaren oinarriko lehenengo teorema). *Izan bitez $f(x)$ funtzio jarraitua $I \subseteq \mathbb{R}$ tarte batean eta $a \in I$; orduan, honako funtzio hau:*

$$G(x) = \int_a^x f(x) dx$$

deribagarria da $\text{int}(I)$ tartean, eta $G'(x) = f(x)$ da $\text{int}(I)$ tartean.

Frogapena. Izan bedi $x_0 \in \text{int}(I)$, $G(x)$ funtzioa x_0 puntuan deribagarria dela frogatzeko honako limite hau

$$G'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h} \quad (5.3)$$

existitu eta $f(x_0)$ balio duela frogatu behar da. Lehenik eta behin, honako honetaz konturatuko gara:

$$|G(x_0 + h) - G(x_0)| = \left| \int_a^{x_0+h} f(x) dx - \int_a^{x_0} f(x) dx \right| = \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx \right|.$$

Demagun $h > 0$ dela. $f(x)$ funtzioa jarraitua denez $[x_0, x_0 + h]$ tartean, existitzen dira x_1 eta x_2 tarte horretan, non honako hau betetzen den:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \forall x \in [x_0, x_0 + h]$$

beraz, $[x_0, x_0 + h]$ tartean integratuta,

$$f(x_1)h \leq G(x_0 + h) - G(x_0) \leq f(x_2)h,$$

hots,

$$f(x_1) \leq \frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h} \leq f(x_2).$$

Argi dago, $h \rightarrow 0^-$ jotzen badu, orduan $x_1 \rightarrow x_0$ eta $x_2 \rightarrow x_0$ jotzen dutela, eta $f(x)$ jarraitua denez gero $f(x_i) \rightarrow x_0$, $i = 1, 2$ balioetarako, hortaz

$$G'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h}. \quad (5.4)$$

Azkenik, (5.3) eta (5.4) ekuazioak elkartuta, frogapena lortzen da.

□

Oharra. Ohar gaitzen $G'(x) = f(x)$ dela; $\forall x \in \text{int}(I)$ adierazpena gehi $G(x)$ funtzioaren jarraitutasuna I tartean kontuan hartuta, erakusten digute

$$G(x) = \int_a^x f(x) dx$$

funtzioa $f(x)$ funtzioaren jatorrizko bat dela I tartean. Beraz, kalkuluaren lehenengo oinarriko teorema ziurtatzen digu edozein funtzio jarraituk tarte batean jatorrizkoak dituela. Adibidez, x^2 edo $\sin(x)$ funtzioen jatorrizkoa berehala kalkulatu dugu; baina, esate baterako, e^{x^2} edo $\frac{\sin(x)}{x}$ funtzioekin, hasiera batean ez genekien beraien jatorrizkoak existitzen ote ziren. Orain ikusitako teorema jatorrizko horien existentzia frogatzen digu.

5.7.1 korolaria. Izan bedi $F(x)$ funtzioa, jarraitua I tartean, $f(x)$ funtzioaren jatorrizkoa I tartean; orduan:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad \forall a, b \in I.$$

Frogapena. Izan bitez $a, b \in I$ eta $G(x) = \int_a^b f(x) dx$. Kalkuluaren oinarriko lehenengo teorema kontuan hartuta, $G'(x) = f(x)$, da $x \in I$ balioetarako; beraz, existitzen da $K \in \mathbb{R}$ non $G(x) = F(x) + K$ den. Baina $G(a) = 0$ denez gero, konstante horren balioa $K = -F(a)$ da eta $G(x) = F(x) - F(a)$; hori dela eta, $G(b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. □

Notazioa. Normalean, integral mugatu baten kalkulua egiterakoan $F(b) - F(a)$ egiten da; funtzioa bi aldiz ez errepikatzeke, honako notazio hau erabiliko dugu:

$$F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a).$$

5.7.2 teorema (Kalkuluaren oinarrizko bigarren teorema). *Izan bedi $f(x)$ funtzio integragarria $[a, b]$ tartean. Existitzen bada $F(x)$ funtzio jarraitua $[a, b]$ tartean eta deribagarria (a, b) tartean non $F'(x) = f(x)$ den (a, b) tarteko puntuetarako, orduan:*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Oharra. Kalkuluaren bigarren oinarrizko teoremaren edukia arinago ikusitako korolarioaren berdina dugu, eta desberdintasuna hipotesia da; azken hori zabalagoa da, f integragarria izatea eskatzen du baina ez du, zertan jarraitua izan.

Frogapena. Izan bedi $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ $[a, b]$ tartearen edozein partizio; orduan, $[x_{i-1}, x_i]$ tarte bakoitzean $F(x)$ funtzioak batez besteko teoremaren baldintzak betetzen ditu, hau da, $\exists \psi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ non

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\psi_i)(x_i - x_{i-1})$$

den. Eta: $F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b] \Rightarrow F'(\psi_i) = f(\psi_i)$; horrez gain,

$$m_i(f) \leq f(\psi_i) \leq M_i(f).$$

Beraz, $\Delta(x_i)$ faktoreaz biderkatuta, honako hau dugu:

$$m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq f(\psi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq M_i(f)(x_i - x_{i-1}),$$

hots,

$$m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq F(x_i) - F(x_{i-1}) \leq M_i(f)(x_i - x_{i-1}).$$

Batu egiten dugu i batetik n -raino:

$$s(f, P) \leq F(b) - F(a) \leq S(f, P).$$

Azken desberdintza hori egia da P edozein partiziotarako, eta gorena eta behearena hartuta:

$$\int_a^b f \leq F(b) - F(a) \leq \int_a^b f.$$

Eta f funtzioa $[a, b]$ tartean integragarria denez gero, halaberharrez:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

□

Adibidea Kalkulatu honako integral mugatu hau:

$$\int_1^2 \frac{x}{x^2 + 1} dx.$$

$\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$ funtzioa, $\frac{x}{x^2 + 1}$ funtzioaren jatorrizko bat da, eta, ondorioz, kalkuluaren oinarriko teorema aplikatuz honako hau dugu:

$$\int_1^2 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{2} \ln(2^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln(1^2 + 1) = \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 2).$$

5.8 Integral mugatuaren aplikazioak

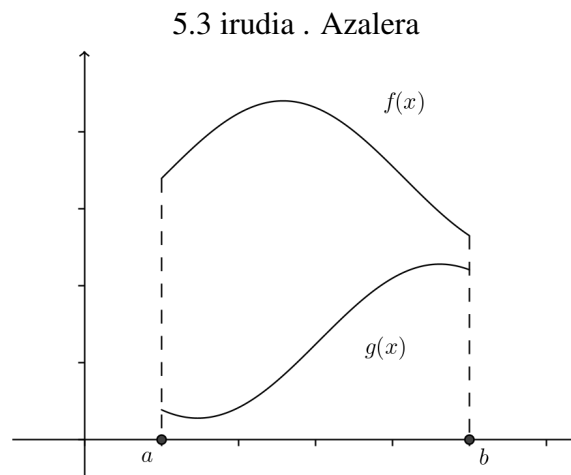
Zentzu geometriko batean, definiziotik, baldin eta $f(x) \geq 0$ bada, $f(x)$ funtzioaren integral mugatua bat dator $y = f(x)$ kurbak, $x = a$ eta $x = b$ zuzenak eta OX ardatzak osatzen duten eremuaren azalerarekin.

Integral mugatuaren zentzu geometrikoak, integral mugatuaren aplikazioen artean, eskualde planoen azalaren kalkulua dagoela barne ondorioztatzen du. Integral mugatuak onartzen du bolumenak, biraketa-gorputzen azalera eta baita ere kurben luzerak kalkulatzeko.

Integralaren nozioaren orokortasunak, fisikan eta beste zientzia batzuetan ere, aplikazio garrantzitsuak ditu, adibidez, energia, lana eta beste magnitude batzuen kalkulurako.

5.8.1 Irudi planoen kalkulua

Izan bitez $f(x)$ eta $g(x)$ bi funtzio jarraituak. Demagun $[a, b]$ tartean, $f(t) \geq g(t)$ dela edozein $x \in [a, b]$ baliotarako.



Orduan, bi funtzio horien grafikoak eta $x = a$ eta $x = b$ zuzenek, zehazten duten eremuaren azalera honako integral mugatua honen berdina da:

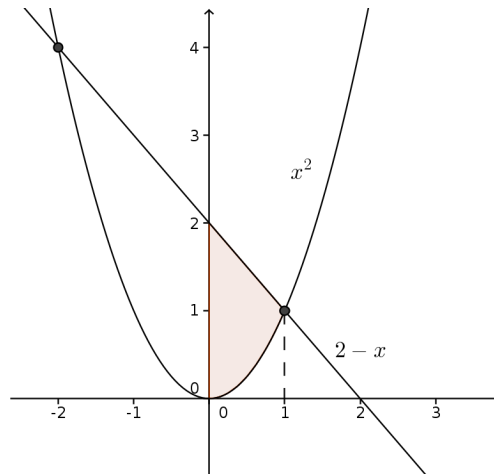
$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Adibidea Kalkulatu $y = 2 - x$ eta $y = x^2$ kurbek zehazten duten azalera, $x > 0$ denean.

Ematen dizkiguten bi kurben ebaki-puntuak $x = 1$ eta $x = -2$ dira, $x^2 = 2 - x$ ekuazioak bi emaitza horiek dituelako. Baina enuntziatuan $x > 0$ tartea hartzen da. Hau da, $x \in [0, 1]$ izanik, eremua $y = 2 - x$ eta $y = x^2$ kurbek zehazten dute. Beraz, bilatutako azalera honako hau da:

$$\int_0^1 (2 - x - x^2) dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{7}{6}.$$

5.4 irudia . Azalera



5.8.2 Kurben luzeren kalkulua

Izan bitez $y = f(x)$ ekuazioa duen kurba bat eta $x \in [a, b]$ tartean. $f(x)$ funtzioaren deribatua existitzen bada eta funtzio hori integragarria bada, orduan kurbaren luzera honako hau da:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Adibidea Kalkulatu $y^2 = x^3$ kurbaren arku-luzera $[0, \frac{4}{3}]$ tartean.

Emandako kurbak bi adar ditu, bata positiboa eta bestea negatiboa, eta OX ardatzarekiko simetrikoa da; beraz, nahikoa da arku-luzera kalkulatzeko adar bateko luzera kalkulatzea eta hau bider bi egitea.

$$L = 2 \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Kasu honetan, funtzioa eta bere deribatua honako hauek dira

$$y = x^{\frac{3}{2}}, \quad y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

beraz,

$$L = 2 \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = 2 \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1 + \frac{9x}{4}} dx = \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{4 + 9x} dx.$$

Integrala ebazteko, honako aldagai-aldaketa hau egiten da:

$$4 + 9x = t^2, \quad x = \frac{t^2 - 4}{9}, \quad dx = \frac{2t}{9} dt.$$

Bilatutako jatorrizko funtzioa honako hau da:

$$\int \sqrt{4 + 9x} dx = \int \frac{2t^2}{9} dt = \frac{2t^3}{27} + K = \frac{2(\sqrt{4 + 9x})^3}{27} + K$$

eta eskatutako luzera honakoa da:

$$L = \left[\frac{2(\sqrt{4+9x})^3}{27} \right]_{x=0}^{x=\frac{4}{3}} = \frac{112}{27}.$$

5.8.3 Biraketa-gorputzen bolumenen kalkulua

Kontuan har dezagun $y = f(x)$, $x = a$ eta $x = b$ kurbek mugatzen duten eremua $x \in [a, b]$ tartean OX ardatzarekiko biraraziko dugula. Orduan, honela sortutako biraketa-gorputzaren bolumenaren balioa honako integral honek ematen du:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

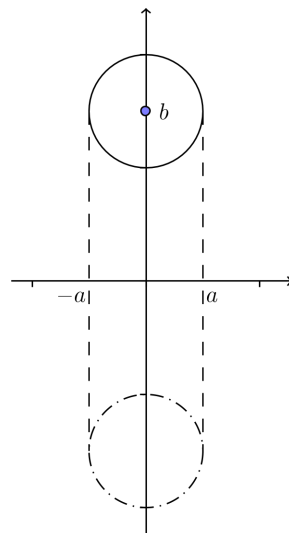
Biraketa OY ardatzarekiko egiten baldin bada, bolumena honako formula honen bidez adierazten da:

$$V = 2\pi \int_a^b |xf(x)| dx.$$

Adibidea Kalkulatu $(0, b)$ zentroa eta a erradioa duen zirkunferentzia OX ardatzarekiko biratzerakoan lortzen den bolumena (demagun $b > a$ dela).

Lortutako gorputza *toro* bat da. Bigarren irudian, toro bat adierazten da zentzu horizontalean.

5.5 irudia . Zirkunferentzia: $(0, b)$ zentroa, a erradioa



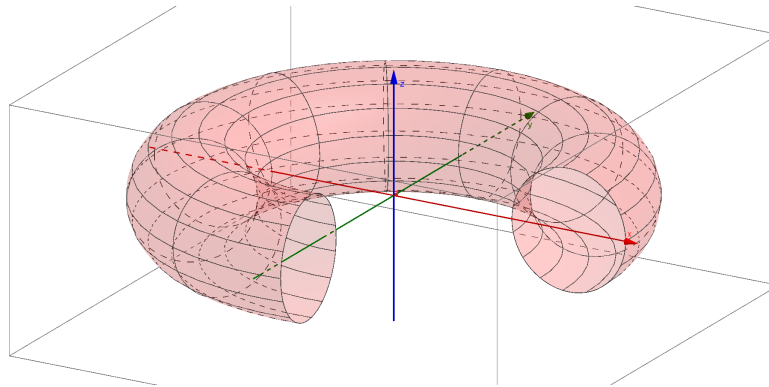
Biratzen den zirkunferentziak $x^2 + (y - b)^2 = a^2$, $y = b \pm \sqrt{a^2 - x^2}$ ekuazioa du. **+** ikurra goiko zirkunferentzierdiari dagokio, eta **-** ikurra behekoari. Beraz, eskatutako bolumena kalkulatzeko kenketa bat egin behar da. Orduan:

$$V = \pi \int_{-a}^a \left((b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2 \right) dx.$$

Karratuak garatuz eta simetriak kontutan hartuz, honako hau lortzen da:

$$V = 8b\pi \int_0^a (\sqrt{a^2 - x^2}) dx.$$

5.6 irudia . Toroa



Integralean

$$\begin{cases} x = a \sin t \\ dx = a \cos t dt \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = a \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

aldagai-aldaketa egiten da, eta honako integral honen ebazpena erabiltzen da:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos(2t)) dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Beraz,

$$V = 8b\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = 8b\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 8ba^2\pi \frac{\pi}{4} = 2\pi^2 a^2 b.$$

5.8.4 Biraketa-gainazalen kalkulua

Demagun $y = f(x)$ funtzioak $x \in [a, b]$ balioetarako goiko erdi-planoan kurba bat adierazten duela. Horrez gain, demagun $f(x)$ funtzioaren deribatua existitzen dela eta funtzio deribatu hori integra daitekeen funtzioa dela.

$y = f(x)$ kurba OX ardatzarekiko biratzerakoan lortzen den biraketa-gainazalaren kalkulua honako formula honek ematen digu:

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

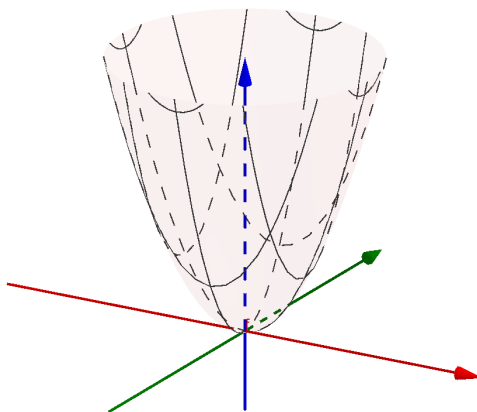
Eta OY ardatzarekiko biratzerakoan, biraketa-gainazala lortzeko, honako formula honek ematen digu:

$$A = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Adibidea Kalkulatu $y = x^2$ parabola $x \in [0, a]$ denean, OY ardatzarekiko biratzerakoan sortzen den gainazalaren azalera.

Honako irudia honek adierazten du zein den gainazala.

5.7 irudia . Paraboloidea



Kasu honetan, $f'(x) = 2x$ da, eta, ondorioz, biraketa-gainazala honako formula hau erabilita kalkulatzen da:

$$S = 2\pi \int_0^a |x| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_0^a x \sqrt{1 + 4x^2} dx.$$

Honako aldagai-aldaketa hau eginda: $t = 1 + 4x^2$, $dt = 8x dx$ integrala berehalako bihurtzen da, eta funtzioaren jatorrizkoa honako hau da:

$$\frac{1}{12} \cdot (1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Hortaz, biraketa-gainazalaren balioa:

$$S = 2\pi \left[\frac{1}{12} \cdot (1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{x=0}^{x=a} = \frac{\pi}{6} \cdot ((1 + 4a^2)^{\frac{1}{2}} - 1).$$

Oharra. Kontuan eduki behar dugu aurreko bi sekzioetan erabiltzen ditugun formuletan, bai OX ardatzarekiko, bai OY ardatzarekiko biratzerakoan, x aldagaiarekiko integratzen ari garela. Beste era batera ere egin daiteke, baina hemen azaldutako metodoarekin x -rekiko integratzen da.

II

ALJEBRA

6

Matrizeak eta ekuazio linealetako sistemak

6.1 Oinarrizko definizioak

DEFINIZIOA. Errenkadetan eta zutabeetan jarritako zenbakiak osatutako taula angeluzuzenari *matrize* esango diogu.

Izan bedi A m errenkada eta n zutabeko matrizea; orduan, a_{ij} notazioa erabiliko dugu i . errenkada eta j . zutabearen kokatuta dagoen elementua adierazteko; orokorrean, A matrizea honako era honetan idatziko dugu:

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Bi matrize berdinak direla diogu, baldin eta soilik baldin tamaina berekoak badira, eta dagozkien elementuak berdinak direnean.

A matrizea *karratua* dela diogu $m = n$ denean, *errenkada matrizea* dela diogu $m = 1$ denean, eta *zutabe matrizea* dela diogu $n = 1$ denean. A matrizearen diagonal nagusiko elementuak $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ dira.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrize karratuaren diagonal nagusiko osagaien baturari *aztarna* esaten zaio; hau da,

$$\text{azt}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Matrize karratu bat *goi-triangeluarra* dela esaten da diagonal nagusiaren azpian dauden elementu guztiak zero badira; hots, $a_{ij} = 0, \forall i > j$. Era berean, *behe-triangeluarra* dela esaten da diagonal nagusiaren gainean dauden elementu guztiak zero badira; hau da, $a_{ij} = 0, \forall i < j$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{goi-triangeluarra}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{behe-triangeluarra}}$$

Identitate-matrizean diagonal nagusiko elementuak 1ak dira, eta beste guztiak nuluak; n ordenako identitate-matrizea I_n -rekin adieraziko dugu:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

6.2 Eragiketak matrizeekin

Matrize errealekin arituko gara, hots, beren elementuak errealak dituztenekin. Baina hemen ikusiko ditugun emaitzak konplexuen gorputzean ere baliagarriak dira.

Batura. Izan bitez $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ eta $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ tamaina bereko matrizeak, $m \times n$; orduan, batura $A + B$, $m \times n$ tamainako beste matrize bat da, non $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ den. Matrizeen elementu neutroa *matrize nulua* da, eta A matrizearen aurkako matrizea $-A = (-a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ da.

Biderketa eskalarra. Izan bitez A , $m \times n$ tamainako matrizea eta $k \in \mathbb{R}$ eskalarra; orduan, kA tamaina bereko matrizea da, non $kA = (ka_{ij})_{m \times n}$ den.

- ▷ $\forall k_1 \in \mathbb{R}: k_1(A + B) = k_1A + k_1B$.
- ▷ $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}: (k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$.
- ▷ $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}: (k_1 k_2)A = k_1(k_2A)$.

Halaber, $-A = (-1)A$ eta $A - B = A + (-B)$ direla betetzen da.

Matrizeen biderketa. Izan bitez $A_{n \times p}$ eta $B_{p \times q}$; orduan, $C = AB$, $n \times q$ tamainako matrize bat da. Bi matrizeren arteko biderketa posiblea izateko, A -ren errenkada kopuruak eta B -ren zutabe kopuruak berdinak izan behar dute. Biderketa-matrizea honako hau da:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nq} \end{pmatrix}$$

Matrizeen biderketa ez da trukakorra, eta $AB = BA$ betetzen bada, orduan, A eta B *trukakorra* direla esaten da.

Matrizeen arteko biderketak honako propietate hauek betetzen ditu:

- ▷ $A + B = B + A$ (trukakorra).
- ▷ $A + (B + C) = (A + B) + C$; $A(BC) = (AB)C$ (ezkerretik baturarekiko banakorra da).
- ▷ $A(B + C) = AB + AC$; $(A + B)C = AC + BC$ (elkarkorra).
- ▷ $\forall a \in \mathbb{R}: a(B + C) = aB + aC$.

Oro har, ez da gertatzen $AB = 0$ bada $A = 0$ edota $B = 0$ izatea, ezta $AB = AC$ bada $B = C$ izatea ere.

Adibideak

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.3 Matrizen karratuen berreturak

Matrizen karratuen berreturak matrizeen biderketen kasu berezi bat dira. A matrize karratu baten k . berretura, non $k \in \mathbb{Z}^+$ dagoen, A matrizea k aldiz berarekin biderkatzen denean lortzen den matrizeari esaten diogu.

$$\begin{aligned} A^1 &= A \\ A^2 &= A \cdot A \\ A^3 &= A \cdot A \cdot A \\ &\vdots \\ A^k &= A \cdot \dots \cdot A \end{aligned}$$

PROPIETATEAK:

- ▷ $\forall p, q \in \mathbb{Z}^+ : A^p A^q = A^{p+q}$.
- ▷ $\forall p, q \in \mathbb{Z}^+ : (A^p)^q = A^{pq}$.
- ▷ $A^0 = I$, non I identitate matrizea den.

Matrizea diagonalaren denean, hots, nuluak izan daitezkeen elementuak diagonal nagusikoak besterik ezin direnean izan, berreturak egitea oso erraza izaten da,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \implies A^k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^k \end{pmatrix}$$

diagonal nagusiko elementuetan besterik ez baitute eragina.

6.4 Matrizen iraulia

A matrizearen errenkadak eta zutabeak trukatzuz lortzen den matrizeari A -ren matrize iraulia esaten zaio, eta A^t -rekin adieraziko dugu. A matrizea $m \times n$ ordenakoa bada, orduan bere

irauliaren ordena $n \times m$ izango da.

$$(a_{11} \ a_{12} \ a_{13})^t = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}$$

Propietateak:

- ▷ $(A^t)^t = A$.
- ▷ $(A + B)^t = A^t + B^t$.
- ▷ $(kA)^t = kA^t$.
- ▷ $(AB)^t = B^t A^t$, orokorrean: $(A_1 A_2 \cdots A_n)^t = A_n^t \cdots A_2^t A_1^t$.

Matrize karratu bat *simetrikoa* dela esaten da, matrizea eta bere matrize iraulia berdinak direnean. Baldintza hori gerta daiteke soilik diagonalaren bi aldeetan simetrikoki kokatuak dauden balioak berdinak badira, hau da:

$$A = A^t \iff a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Matrize karratu bat *antisimetrikoa* dela esaten da bere irauliaren aurkakoaren berdina denean. Baldintza hori gerta daiteke soilik diagonal nagusiko elementu guztiak zero badira eta diagonalaren bi aldeetan simetrikoki kokatuak dauden balioak aurkakoak badira, hau da:

$$A = -A^t \iff a_{ij} = -a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n.$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{simetrikoa}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{\text{antisimetrikoa}}$$

Matrize bat bere simetriko eta antisimetrikoen baturaren moduan ere deskonposa daiteke.

6.5 Determinanteak

Matrize baten determinante aplikazio bat besterik ez da, matrize bati zenbaki bat elkarrarazten diona.

Lehenengo eta behin, 2 eta 3 ordenako matrize karratuen determinanteen formulak gogoratuko ditugu:

- 2. ordenako determinantea:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

- 3. ordenako determinantea (Sarrus-en erregela):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{33}a_{21}a_{12} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Adibidea Sarrus-en erregelarekin, lehenengo eta bigarren zutabeak matrizearen 3. zutabearen ostean jartzen baditugu, honako determinante hau egiterakoan argi ikusten da zeinuak nola dabilzan.

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & | & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & | & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

DEFINIZIOA. Izan bedi A n ordenako matrize karratua, a_{ij} elementuaren *minor nagusia* α_{ij} -rekin denotatuko duguna; A matrizean i . errenkada eta j . zutabea kenduta gelditzen den azpi-matrizearen determinantea da.

Literaturan, batzuetan, matrizea karratua dela adierazteko, $A \in M_n(\mathbb{R})$ eran egiten da. Hau da, A matrizea \mathbb{R} gorputzaren gaineko $n \times n$ tamainako matrizeen multzoan dago.

$$\begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{6} & \cancel{0} & \cancel{4} \\ 3 & 5 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Determinante baten minorra lehenengo r zutabeaz eta lehenengo r errenkadaz osatua badago, r ordenako *minor nagusia* dela esaten da. Honako irudi honetan ondo nabaritzen dira matrizearen minor nagusiak.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

→ 2. ordenakoa
→ 3. ordenakoa
→ 4. ordenakoa

DEFINIZIOA. Izan bedi $A = (a_{ij})$ matrizea. Orduan, a_{ij} matrizearen elementuaren *adjuntua* $A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$ beste determinante bat izango da; hots, a_{ij} elementuari dagokion minorraren balioari, + edo - zeinuarekin a_{ij} kokatua dagoen lekuaren arabera.

Hau da,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ohar gaitzen azken determinante honetan A matrizeari i . errenkada eta j . zutabea kenduz lortzen dela, a_{ij} elementua dagoen errenkada eta zutabeak, hain zuzen ere.

Ikus ditzagun orain determinanteen propietateak.

Determinanteen balioak kalkulatzeko, horien balioa aldatzen ez duten eragiketak egin beharko dira, jatorrizko determinantea beste errazago bat bihurtuz (zero asko dituena edo triangeluarra dena). Honako propietate hauek ez ditugu frogatuko.

1. Matrize baten eta bere irauliaren determinanteen balioak berdinak dira: $|A| = |A^t|$.
2. Matrize baten errenkada edo zutabe baten osagai guztiak zero badira, determinantearen balioa zero da.
3. Matrize baten bi errenkada (edo zutabe) berdinak edo proportzionalak dituen determinantearen balioa zero da.
4. Matrize baten bi errenkada (zutabe) trukutzen badira, orduan determinantearen zeinua aldatzen da.
5. Matrize baten errenkada (zutabe) bat eskalar batez biderkatzen bada, orduan determinante berria aurreko determinantea bider eskalar hori da.
6. Baldin errenkada (edo zutabe) baten osagai guztiak bider k eskalarrarekin biderkatzen baditugu, determinantearen balioa eskalar horrekin biderkatu da.

7.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & \cdots & a'_{in} + a''_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a''_{i1} & \cdots & a''_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Antzeko propietatea betetzen da zutabeekin.

Matrize bat *erregularra* edo *ez-singularra* dela diogu bere determinantea ez-nulua denean.

6.6 Determinante baten garapena errenkada edo zutabe baten elementuez

Matrize karratu baten tamaina 2 edo 3 bada, ikusi dugu nola egiten den matrize horren determinantearen kalkulua; baina tamaina handiagoetarako ezin da Sarrus-en erregela erabili; beraz, honako teorema honek azaltzen digu nola garatu determinantea errenkada edo zutabe batetik.

6.6.1 teorema. 1. *Determinantearen garapena i. errenkada erabiliz:*

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

2. *Determinantearen garapena j. zutabea erabiliz:*

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

Adibidea Vandermonde-ren determinantea. n ordenako Vandermonde-ren determinantea honako hau da:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}^t.$$

Oso ezaguna da determinante honen balioa honako hau dela:

$$V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i). \quad (6.1)$$

Irakurlearen esku gelditzen da determinante honen kalkuluak egitea $n = 2, 3$ eta 4 tamainetan.

DEFINIZIOA. Izan bedi $A \in M_n(\mathbb{R})$. Orduan, A -ren matrize *adjuntua*, $\text{adj}(A)$ -rekin adieraziko duguna, A -ko elementuen adjuntuek osatutakoa da: $\text{adj}(A) = (A_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$.

6.6.2 teorema. *Izan bedi $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrize erregular bat. Orduan, bere alderantzizkoa honako hau da:*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{adj}(A))^t.$$

Adibidea *Izan bedi*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Alderantzikagarria da? Horrela bada, zein da bere alderantzizkoa?

Bere determinantea kalkulatu badugu, $|A| = -1 \neq 0$ da; beraz, matrizea alderantzikagarria da. Alderantzizkoa kalkulatzeko, aurreko teorema erabiliko dugu:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

DEFINIZIOA. Matrize baten minor ez-nulu handienaren ordenari, matrizearen *heina* esaten zaio. Determinanteen propietateak kontuan hartuz, matrizearen errenkada (edo zutabe) linealki independenteren kopuru handiena da. Matrizearen heina $\text{rg}(A) = h(A) = \text{hein}(A)$ notazioekin adieraz daiteke.

A matrizearen heina r bada, horrek gutxienez r ordenako minor ez-nulu bat existitzen dela esan nahi du, r baino ordena handiagoko minor guztiak nuluak izanik. Hots, A matrizearen heina r da, baldin eta soilik baldin $r + 1$ ordenako A matrizearen minor guztiak zero badira eta nulu ez den r ordenako minor bat gutxienez existitzen bada.

Garbi ikusten denez, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 3$; beraz, sistema bateragarria da, eta matrize hedatu horri lotutako sistema honako hau da:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ -3x_3 = -2 \end{cases}$$

Soluzioa honako hau da:

$$x_1 = -1/3, \quad x_2 = 1/3, \quad x_3 = 2/3.$$

6.8 Gauss-en metodoa

Matrize bat kontuan hartuta, *oinarrizko eraldaketak* edo *transformazioak* dira ekuazio linealetako sistemak baliokide bihurtzen dituztenak. Honako hauek dira:

- Matrizearen errenkada bat, k zenbaki ez-nulu batez biderkatzea; hau da, $E_i \rightarrow kE_i$.
- Errenkada bati beste k zenbaki ez-nulu batez biderkatuta dagoen errenkada bat gehitzea; hots, $E_i \rightarrow E_i + kE_j$.
- Bi errenkaden ordena aldatzea; hau da, $E_i \rightarrow E_j$.

Oraintxe bertan ikusitako oinarrizko eraldaketak sistema baten matrize zabalduari aplikatuz gero, beste sistema baliokide bat bihurtzen dute.

Adibidea

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{E_1 \rightarrow 2E_1 \\ E_2 \rightarrow -3E_2}]{} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -6 & 3 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2 \rightarrow E_1 + E_2} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

Gauss-en metodoak ekuazio linealetako sistema bat bateragarria edo bateraezina den aztertzen du; horrez gain, sistema bateragarria denean ebatzi egiten du. Metodo horrek emandako sistema beste baliokide eta triangeluar bat bihurtzen du. Horretarako, lehenengo errenkadan dagoen elementu bat *pibotetzat* hartzen du. Hau da, pibote hori zenbaki ez-nulua da, eta berarekiko egiten dira oinarrizko eraldaketak bere azpian eta zutabe berean dauden elementuak zero bihurtzeko. Prozedura hori era berean aplikatzen zaie beste errenkada guztiei matrize behe-triangeluar bat lortu arte. Ikus dezagun adibide bat.

Adibidea Ebatzi honako ekuazio lineal hauetako sistema.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{cases}$$

Matrizeen idazkera erabilia,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & 9 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 6 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{E_3 - 2E_1 \\ E_2 - 2E_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & \boxed{-3} & 8 & -14 \\ 0 & -3 & 10 & -19 \end{array} \right) \xrightarrow{E_3 - E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & \boxed{-3} & 8 & -14 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{array} \right)$$

Orduan, emandako sistema eta honako hau

$$\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ -3y + 8z = -14 \\ 2z = -5 \end{cases}$$

baliokideak dira. Sistema bateragarri zehaztua da, eta soluzioa honako hau da:

$$x = 6, y = -2, z = -\frac{5}{2}.$$

DEFINIZIOA. Algebra linealean matrize bat *eskalonatu*a edo *mailakatua* dela esaten da:

- Zero errenkada guztiak matrizearen behealdean daude.
- Errenkada bakoitzeko lerro bakoitzeko lehenengo elementu ez-nulua aurreko errenkadako elementu ez-nuluaren eskuinean dago.
- Errenkada bakoitzeko 0 eta 1 ez den elementua 0 ez den lehenengo elementuaren eskuinean dago.
- Zero diren errenkada guztiak matrizearen behealdean daude.
- Errenkada bakoitzean pibotea bere zutabeko elementu ez-nulu bakarra bada, errenkaden arabera mailakatuta dagoela esaten da.

Ikus ditzagun matrize eskanolatu batzuen adibideak.

Adibideak

$$\begin{pmatrix} \boxed{4} & -2 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Badaude matrize eskalonatu berezi batzuk, honako definizio honetan ikus daitekeen moduan.

DEFINIZIOA. Algebra linealean matrize bat *eskalonatu*a edo *mailakatua* dela esaten da:

- Zero errenkada guztiak matrizearen behealdean daude.
- Errenkada bakoitzeko lerro bakoitzeko lehenengo elementu ez-nulua aurreko errenkadako elementu ez-nuluaren eskuinean dago.
- Errenkada ez-nulu bakoitzean zeroren desberdina den lehenengo elementua 1 da.
- Pibotearen zutabean, bere gainetik dauden elementuak nuluak dira.

Adibideak

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

6.9.1 teorema (Cramer-en erregela). *Izan bedi $AX = B$ Cramer-en sistema bat. Orduan, sistema bateragarri zehaztua da, eta soluzioa honako hau da:*

$$x_i = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|} \Delta_{x_i} \quad i = 1, \dots, n.$$

Frogapena.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinantearen propietateak erabiliz, azken determinantea honako honen berdina da:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11}x_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1}x_1 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}x_n & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}x_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ohar gaitezen determinante hauetan guztietan x_j kanpora atera daitekeela, eta, i . batugaietan izan ezik, beste determinante guztiak nulua direla zeren bi zutabe berdinak baitituzte.

□

Adibidea Eztatidatu honako ekuazio lineal hauetako sistemaren ebazpena a parametroaren balioen arabera. Ebatzi $a = -1$ eta $a = 2$ parametroaren balioetarako.

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$

► Koefiziente-matrizea eta zabaldua honako hauek dira: $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a & 1 \end{array} \right)$

$\text{rg}(A) \geq 2$, zeren $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, 2$. ordenako minorra ez-nulua baita.

Azter dezagun $\text{rg}(A) = 3$ noiz izan daitekeen; horretarako, $\det(A) = 0$ ebatziko dugu

$$\det(A) = a - 2 + 2 + a^2 = a^2 + a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \end{cases}$$

1. *kasua* $a \neq 0$ eta $a \neq -1$ denean. Kasu honetan, $\text{rg}(A) = 3$ eta $\text{rg}((A|B)) = 3$ dira; beraz, sistema bateragarri zehaztua da.

2. *kasua* $a = 0$ denean. Kasu honetan, $\text{rg}(A) = 2$ da, eta

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 4 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}((A|B)) = 3.$$

Sistema bateraezina da.

3. *kasua* $a = -1$ denean. Kasu honetan, $\text{rg}(A) = 2$ da, eta

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 4 = 0 \Rightarrow \text{rg}((A|B)) = 2$$

Sistema bateragarri zehaztugabea da.

▷ $a = -1$ denean, sistema honako honen baliokidea da:

$$\begin{cases} -y & = & -x + 2 \\ y + 2z & = & x \end{cases} \iff \begin{cases} y = x - 2 \\ 2z = 2 \iff z = 1 \end{cases}$$

Soluzioa honako hau da:

$$\begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda - 2, \\ z = 1. \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

▷ $a = 2$ denean, $\det(A) = 2^2 + 2 = 6$ denez gero, Cramer-ekin ebazten dugu.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 + 4 = 6 \Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\det(A)} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 - 8 = -6 \Rightarrow y = \frac{\Delta_y}{\det(A)} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 - 2 + 2 = -3 \Rightarrow z = \frac{\Delta_z}{\det(A)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Soluzio parametrikoa:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = -1, \\ z = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

7

Espazio bektorialak

Historikoki, espazio bektorial modernoetara gidatu zituzten lehen ideiak XVII. mendekoak dira: geometria analitikoa, matrizeak eta ekuazio linealetako sistemak. Baina lehenengo formulazio moderno eta axiomatikoa Giuseppe Peano-ren ondorioa da, XIX. mendearen amaieran. Espazio bektorialen jatorria geometria afinetik dator, planoko koordenatuak eta hiru dimentsioko espazioa kontuan hartuta. Bektoreen definizioaren jatorria Giusto Bellavitis-en definizioa izan zen: zer da orientatutako segmentua? Espazio bektorialek matematikako beste adar batzuetako aplikazioak badituzte, zientzian eta ingeniartzan. Adibidez, Fourier-en irudi-kompresioko ohitura modernoetan, eta soinuan erabiltzen diren serieak bezalako metodoetan aplikatzen dira, baita ere deribatu partzialetako ekuazioak ebazteko. Aljebra abstraktuan, espazio bektoriala edo baita ere espazio lineala esaten zaiona da, multzo ez-huts batetik, barne-operazio bat (batuketa) eta beste kanpo-operazio bat (eskalar batez biderkatzea) kontuan hartuta, sortutako estruktura aljebraikoa da. Aipatutako barne-operazioa.

7.0.1 Multzoak

Atal honetan kontuan hartu behar ditugu (5) orrialdean emandako multzoen definizioak eta eragiketak. Han aipatutakoez aparte, gai hau borobiltzeko behar izango ditugun beste definizio batzuek ere kontuan hartu behar izango ditugu.

Gogora dezagun multzo bat definitzeko bi eratan egin daitekeela: bata, multzoaren elementuak zerrendatuta, eta bestea, multzoko elementuek bereizten dituzten propietateak emanda.

Multzoen arteko eragiketei begiratuta, hiru eragiketa mota daude: (5) orrialdean horietariko bi agertzen dira; orain, hirugarrena ere aipatuko dugu:

Izan bitez A eta B bi multzo; multzo horien arteko eragiketak honako hauek dira:

1. *Ebakidura*: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.
2. *Bildura*: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.
3. *Biderkadura kartesiarra*: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

Oharra. Gogora ditzagun \wedge ikurraren esanahia *eta* dela, eta \vee ikurrarena *edo*.

Adibidea Izan bitez $A = B = \mathbb{R}$; orduan, $A \times B = \mathbb{R}^2$ *planoa* da.

Oharra.

- ▷ $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \iff a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$.
- ▷ $|A| = n$ eta $|B| = m$ badira, orduan $|A \times B| = n m$ da.
- ▷ Orokorrean, $A \times B \neq B \times A$ da.
- ▷ Izan bitez A_1, A_2, \dots, A_k multzoak; orduan, beren biderkadura kartesiarra honako hau da:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_k \in A_k\}.$$

7.1 Oinarrizko egitura aljebraikoak

Oinarrizko egitura aljebraikoak aipatu baino lehen, behar diren definizio batzuk ikusiko ditugu.

7.1.1 Eragiketa

DEFINIZIOA. Izan bedi A multzo bat; $*$ eragiketa A -ren barne-konposizioko legea dela esaten da, baldin eta soilik baldin

$$\forall a, b \in A : a * b = c \in A.$$

Oharra. $*$ eragiketa A multzoaren barne-konposizioko legea dela esaten da, baldin eta soilik baldin

$$\begin{aligned} * : A \times A &\longrightarrow A \\ (a, b) &\longmapsto a * b \end{aligned}$$

aplikazioa bada. Notazio aldetik, normalean, eragiketa funtzio moduan idatzi beharrean, $a * b$, $a \circ b$, $a \cdot b$ eran egiten da.

Adibideak

1. Ohiko batuketa, eragiketa da \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} eta \mathbb{R} multzoetan.
2. $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a * b = \sqrt{ab}$, ez da \mathbb{Z} -ko eragiketa.

DEFINIZIOA. Izan bedi $*$ A multzoaren barne-konposizioko legea; orduan, $*$ *elkartze-legea* dela esaten da, baldin eta soilik baldin:

$$\forall a, b, c \in A : a * (b * c) = (a * b) * c.$$

Adibideak

1. Ohiko biderketa, eragiketa elkarkorra da \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} eta \mathbb{R} multzoetan.
2. Batuketa \mathbb{Z} -n elkarkorra da.
3. Izan bedi $a * b = a + 3 \cdot b$ eran definitutako eragiketa \mathbb{R} multzoan. Ikus dezagun ez dela elkarkorra.

$$\begin{aligned} 2 * (5 * 3) &= 2 * (5 + 3 \cdot 3) = 2 * (14) \\ &= 2 + 3 \cdot 14 = 44 \\ (2 * 5) * 3 &= (2 + 3 \cdot 5) * 3 = 17 * 3 = 17 + 3 \cdot 3 = 26 \end{aligned}$$

eta $44 \neq 26$ da.

DEFINIZIOA. Izan bitez $*$ eta \cdot A multzoaren bi barne-konposizioko lege; orduan, $*$ legea \cdot legearekiko *banakorra* dela esaten da, baldin eta soilik baldin honako bi baldintza hauek betetzen dituzten:

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in A : a * (b \cdot c) &= (a * b) \cdot (a * c). \\ \forall a, b, c \in A : (b \cdot c) * a &= (b * a) \cdot (c * a). \end{aligned}$$

Oharra. Banatze-legearen definizioan argi ikusten da eskuin eta ezker banakorra izatea.

Adibideak

1. Zenbaki errealeen biderketa batuketarekiko banakorra da.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c).$$

2. Zenbaki errealeen batuketa biderketarekiko ez da banakorra. Esate baterako,

$$2 + (5 \cdot 4) \neq (2 + 5) \cdot (2 + 4).$$

DEFINIZIOA. Izan bedi $*$ A multzoaren barne-konposizioiko legea; orduan, $e \in A$ *elementu neutroa* dela esaten da:

$$\forall a \in A : a * e = e * a = a.$$

7.1.1 proposizioa. *Izan bedi $*$ A multzoaren barne-konposizioiko legea; orduan, elementu neutroa existitzen bada, bakarra da.*

DEFINIZIOA. Izan bedi $*$ A multzoaren barne-konposizioiko legea; orduan, $*$ *trukakorra* dela esaten da, baldin eta soilik baldin:

$$\forall a, b \in A : a * b = b * a.$$

DEFINIZIOA. Izan bedi $*$ A multzoaren barne-konposizioiko legea, non $e \in A$ elementu neutroa existitzen den. Orduan, $a \in A$ elementuaren *alderantzizkoa*, a' -rekin denotatuko duguna, honako hau betetzen duen elementua da:

$$\forall a \in A : a * a' = a' * a = e.$$

7.2 Egitura aljebraikoak

Multzo bati konposizio-lege bat edo gehiago ematen dizkiogunean, multzo horri egitura jakin bat ematen ari gara. Egitura bat, beraz, dituen erlazio eta eragiketak zuzentzen dituzten axiomek definitzen dute.

Jarraian, aljebraiko oinarriko egiturak aztertuko ditugu: taldeak, eraztunak, gorputzak eta bektore-espazioak.

7.2.1 Taldea

DEFINIZIOA. Izan bitez A multzoa eta $*$ A -ko eragiketa. $(A, *)$ taldea dela esaten dugu, hiru baldintza hauek betetzen direnean:

- i) Propietate elkarkorra.
- ii) Elementu neutroa existitzen da.
- iii) A multzoko elementu guztiak alderantzikagarriak dira.

Gainera, propietate trukakorra betetzen bada, $(A, *)$ talde abeldarra edo talde trukakorra dela esaten da.

Adibideak

1. (\mathbb{R}, \cdot) multzoko x elementua alderantzikagarria da, baldin eta soilik baldin $x \neq 0$.
2. $(\mathbb{Z}, +)$ talde abeldarra da, (\mathbb{Z}, \cdot) ez da taldea.
 $(\mathbb{Q}, +)$ talde abeldarra da, (\mathbb{Q}, \cdot) ez da taldea.
 $(\mathbb{R}, +)$ talde abeldarra da, (\mathbb{R}, \cdot) ez da taldea,
3. Matrizeak.

$$M_{n \times m}(\mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{array} \right) \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

$(M_{n \times m}(\mathbb{R}), +)$ talde abeldarra da.

7.2.2 Eraztuna

DEFINIZIOA. Izan bitez A multzoa eta $+, \cdot$ A gaineko bi eragiketa. $(A, +, \cdot)$ eraztuna dela esaten da honako baldintza hauek betetzen direnean:

- i) $(A, +)$ talde abeldarra da.
- ii) \cdot eragiketa elkarkorra da.
- iii) Banatze-legea betetzen da.

Oharra.

1. $(A, +, \cdot)$ eraztuna eraztun trukakorra dela esaten da, trukakorra denean.
2. $(A, +, \cdot)$ eraztun bat *identitadedun eraztuna* dela esaten da, eragiketak elementu neutroa duenean; elementu neutro horri *identitate* esaten zaio.

Adibideak

- (a) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ez da eraztuna.
- (b) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ eta $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ identitadedun eraztun trukakorrak dira.
- (c) $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ identitadedun eraztuna da, baina ez da trukakorra.

7.2.3 Gorputza

DEFINIZIOA. Izan bedi $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ eraztuna, eta demagun honako propietate hauek betetzen direla:

- i) $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ez da nabaria.
- ii) $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ identitadeduna eta trukakorra da.
- iii) $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ multzoko elementu guztiak alderantzikagarriak dira \cdot eragiketarekiko.

Orduan, $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ gorputza dela esaten da.

Adibideak

- (a) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ eta $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ez dira gorputzak.
- (b) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ eta $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ gorputzak dira.
- (c) $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ez da gorputza.

Guk erabiliko dugun gorputza zenbaki errealekoa izango da, hots, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

7.3 Espazio bektorialak

DEFINIZIOA. Izan bitez $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ gorputza eta V multzoa. V \mathbb{K} -espazio

bektoriala dela esango dugu, baldin eta honako baldintza hauek betetzen badira:

1. V -n eragiketa bat definiturik dago, $+$ denotatuko duguna, eta $(V, +)$ talde abeldarra da.
2. Existitzen da aplikazio bat:

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times V &\longrightarrow V \\ (k, v) &\longmapsto kv \end{aligned}$$

kanpoko biderketa deitzen dena, honako propietate hauek betetzen ditu:

- (a) $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{K}, \forall v \in V: (k_1 + k_2)v = k_1v + k_2v.$
- (b) $\forall v_1, v_2 \in V, \forall k \in \mathbb{K}: k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2.$
- (c) $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{K}, \forall v \in V: (k_1k_2)v = k_1(k_2v).$
- (d) $\forall v \in V: 1_{\mathbb{K}} \cdot v = v.$

V -ko elementuak *bektoreak* direla esaten da, eta \mathbb{K} -koak, berriz, *eskalarrak*.

Adibideak

(a) \mathbb{R}^n \mathbb{R} -espazio bektoriala da, honako batuketa eta kanpoko biderketa hauekin:

Eragiketa:

$$\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n: (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

Kanpoko biderketa:

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{R}: k(x_1, \dots, x_n) = (kx_1, \dots, kx_n).$$

$$(b) M_{n \times m}(\mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{array} \right) \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\} \right\}$$

\mathbb{R} -espazio bektoriala da, honako eragiketa eta kanpoko biderketa hauekin:

$$\forall (a_{ij}), (b_{ij}) \in M_{n \times m}(\mathbb{R}): (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

$$\forall (a_{ij}) \in M_{n \times m}(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{R}: k(a_{ij}) = (ka_{ij}).$$

7.4 Azpiespazioak

Espazio bektoriala definitu dugun moduan, azpiespazio bektorialaren kontzeptua ere garrantzitsua da aljebran eta matematikako hainbat arlotan.

DEFINIZIOA. Izan bedi V \mathbb{K} espazio bektoriala. $W \subseteq V$ azpimultzo bat V -ren *azpiespazio bektoriala*, edo azpiespazioa, dela esaten da, eta $W \leq V$ denotatuko dugu, honako baldintza hauek betetzen baditu:

i) V -ko eragiketa W -n ere eragiketa da,hots,

$$\forall w_1, w_2 \in W: w_1 + w_2 \in W.$$

ii) V -ko kanpoko biderketa W -n ere kanpoko biderketa da; hots,

$$\forall k \in \mathbb{K}, \forall w \in W: kw \in W.$$

iii) W eragiketa eta kanpoko biderketa horiekin, \mathbb{K} -espazio bektoriala da.

Adibidea V \mathbb{K} -espazio bektoriala bada, $\{0_V\}$ eta V azpiespazioak dira beti; azpiespazio horiei *nabariak* esaten zaie.

DEFINIZIOA. Izan bitez V \mathbb{K} -espazio bektoriala eta $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ bektoreak; orduan,

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{k_1 v_1 + \dots + k_n v_n \mid k_i \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, n\}$$

V -ren azpiespazioa da. Azpiespazio hori v_1, \dots, v_n bektoreek sortutako azpiespazioa da.

Adibideak

(a) Izan bedi \mathbb{R}^2 \mathbb{R} - espazio bektoriala; orduan, $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$ azpiespazioa da, baina $W' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 1\}$ ez da.

(b)

$$\langle (1, 2, 3), (1, 0, -1) \rangle = \{(x + y, 2y, -x + 3y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

da.

(c) Izan bedi $M_2(\mathbb{R})$ \mathbb{R} -espazio bektoriala; orduan, matrize diagonalen multzoa

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

azpiespazioa da.

DEFINIZIOA. Izan bitez W_1 eta W_2 V -ren azpiespazioak. W_1 eta W_2 -ren *batura*, $W_1 + W_2$ denotatuko duguna, honela definitzen da:

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_i \in W_i, i = 1, 2\}$$

Batura zuzena dela esaten da, baldin eta $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$ betetzen bada, eta, kasu horretan, $W_1 \oplus W_2$ moduan denotatuko dugu.

Adibidea Izan bedi \mathbb{R}^3 \mathbb{R} -espazio bektoriala. Orduan, batura honako hau da:

$$\langle (1, 0, 0) \rangle + \langle (1, 2, 0) \rangle = \{(x, 2y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Ikus dezagun aurreko definizioari dagokion definizio orokortua, eta, horrez gain, azpiespazioen batura, ebakidura eta batura zuzena noiz diren esaten digun teorema.

DEFINIZIOA. Izan bitez W_1, W_2, \dots, W_n V -ren azpiespazioak. W_1, W_2, \dots, W_n -ren batura, $W_1 + W_2 + \dots + W_n$ denotatuko duguna, honela definitzen da:

$$W_1 + W_2 + \dots + W_n = \{w_1 + w_2 + \dots + w_n \mid w_i \in W_i, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Batura zuzena dela esaten da, baldin eta $W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_n) = \{0_V\}$ bada $i = 1, \dots, n$, eta, kasu horretan, $W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n$ denotatuko dugu.

7.4.1 teorema. *Izan bitez W_1, W_2, \dots, W_n V -ren azpiespazioak. Orduan,*

i) $\bigcap_{i=1}^n W_i$ eta $W_1 + W_2 + \dots + W_n$ V -ren azpiespazioak dira.

ii) W_1, W_2, \dots, W_n -ren arteko batura zuzena da, baldin eta soilik baldin

$$\forall w \in W_1 + W_2 + \dots + W_n, \exists! w_i \in W_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

non $w = w_1 + w_2 + \dots + w_n$ den.

Adibideak

1. Izan bedi \mathbb{R}^3 \mathbb{R} -espazio bektoriala. Orduan, $W_1 = \langle(1, 0, 0)\rangle$, $W_2 = \langle(1, 1, 0)\rangle$ eta $W_3 = \langle(1, 1, 1)\rangle$ azpiespazioen batura zuzena da.
2. Izan bitez $W_1 = \langle(1, 1, 0)\rangle$, $W_2 = \langle(1, 0, 1)\rangle$ eta $W_3 = \langle(0, 1, 1)\rangle$ azpiespazioak. Orduan, $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \{(0, 0, 0)\}$ eta $W_1 + W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3$ dira.

7.5 Oinarriak eta dimentsioa

7.5.1 Konbinazio lineala

DEFINIZIOA. Izan bitez $v_1, \dots, v_n \in V$ bektoreak. Beste bektore bat, $v \in V$ v_1, \dots, v_n bektoreen *konbinazio lineala* dela esaten da, existitzen badira $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{K}$ non

$$v = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n$$

betetzen den. k_1, \dots, k_n eskalarrak konbinazio linealaren koefizienteak direla diogu.

Oharra. (7.4) definizioan agertzen den notazioari begiratuta, aurreko definizio horretan $v \in V$ v_1, \dots, v_n bektoreen konbinazio lineala izatearen baliokidea $v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ da.

Adibideak

- (a) Izan bedi \mathbb{R}^3 \mathbb{R} -espazio bektoriala. $v = (1, 0, -1)$ bektorea $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ eta $(0, 0, 1)$ bektoreen konbinazio lineala da.
- (b) Izan bedi \mathbb{R}^3 \mathbb{R} -espazio bektoriala. $v = (1, 0, -1)$ bektorea $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ eta $(1, 1, 1)$ bektoreen konbinazio lineala da.

Oraintxe bertan ikusitako adibideak geroago espazio bektorial baten dimentsioan agertuko zai-gun ezaugarri bat erakusten digu. (Ikus (7.5.3), 129. or.)

7.5.2 Sistema askea

DEFINIZIOA. Izan bitez $v_1, \dots, v_n \in V$ bektoreak. v_1, \dots, v_n *linealki askeak* direla esango da, baldin eta honako inplikazio hau betetzen badute:

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n = 0_{\mathbb{K}} \Rightarrow k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0_{\mathbb{K}}.$$

Beste kasuan, *sistema lotua* dela esango da.

Adibideak

- (a) Izan bedi \mathbb{R}^3 \mathbb{R} -espazio bektoriala; orduan, $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ sistema askea da.
- (b) Izan bedi $M_2(\mathbb{R})$ \mathbb{R} -espazio bektoriala; orduan,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

sistema askea da.

DEFINIZIOA. Izan bedi $\emptyset \neq T \subseteq V$ azpimultzoa. T askea dela esango dugu, baldin eta bere azpimultzo finitu bakoitza sistema askea bada; hau da:

$$\{v_1, \dots, v_n\} \text{ sistema askea} \quad \forall \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq T.$$

Beste kasuan, T lotua dela esango dugu.

7.5.3 Sortzaile-sistema

DEFINIZIOA. Izan bedi $S \subseteq V$ azpimultzoa. S V -ren *sortzaile-sistema* dela esango dugu, baldin eta $V = \langle S \rangle$ betetzen bada; hau da, V -ko edozein bektore S -ko bektoreen konbinazio lineal moduan adieraz daiteke.

Adibidea Izan bedi \mathbb{R}^3 \mathbb{R} -espazio bektoriala. Orduan, $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ eta $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ bektore-sistemak \mathbb{R}^3 -ren sortzaile-sistemak dira.

7.5.1 lema. Izan bedi S V espazioaren sortzaile-sistema. Demagun existitzen dela $w \in S$ bektorea, $S \setminus \{w\}$ multzoko bektoreen konbinazio lineal moduan adieraz daitekeena. Orduan, $S \setminus \{w\}$ ere V -ren sortzaile-sistema bat da.

7.5.4 Oinarria

DEFINIZIOA. β V -ren *oinarria* dela diogu, baldin eta β V -ren sortzaile-sistema eta sistema askea bada.

Adibideak

(a) Izan bedi \mathbb{R}^n \mathbb{R} -espazio bektoriala, $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, 1-a i . tokian $i = 1, \dots, n$ balioetarako definituko ditugu; orduan, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ \mathbb{R}^n -ren oinarri bat da, eta oinarri honi *kanoniko* esaten zaio.

(b) Izan bedi $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ \mathbb{R} -espazio bektoriala; orduan,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

espazioaren oinarri bat da.

(c) Izan bedi $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$, \mathbb{R}^3 -ren azpiespazioa; orduan, $\{(1, 0, 1), (0, 1, 2)\}$ W -ren oinarri bat da.

7.5.1 teorema. Izan bedi $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ V -ren oinarria. Orduan, V -ko edozein bektore β -ko bektoreen konbinazio lineal moduan era bakar batean adieraz daiteke. Hau da, $v \in V$ bada, orduan existitzen dira $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ bakarrak non $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ betetzen den.

DEFINIZIOA. V finituki sortua dela esaten da, existitzen bada S V -ren sortzaile-sistema finitua ($|S|$ finitua, hots, S -ren kardinala finitua da).

Honako teorema hauek esaten dutena oso emaitza garrantzitsuak dira.

7.5.2 teorema. *Izan bedi V finituki sortutako espazio bektoriala. Orduan, V -k oinarri finitu bat du.*

7.5.3 teorema. *Izan bedi $\{0_V\} \neq V$ finituki sortua. Orduan, oinarri guztiek kardinal berbera dute.*

DEFINIZIOA. Izan bedi $\{0_V\} \neq V$ finituki sortua. Orduan, V -ren *dimentsioa* bere oinarri baten kardinala da, eta $\dim_{\mathbb{K}} V$ eran adierazten da.

Oharra. Aurreko teoremaren arabera, berdin dio zein oinarri aukeratu.

Adibideak

(a) Izan bedi \mathbb{K}^n \mathbb{K} -espazio bektoriala; orduan, $\dim \mathbb{K}^n = n$ da.

(b) Izan bedi $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ \mathbb{R} -espazio bektoriala; orduan, $\dim M_{n \times m}(\mathbb{R}) = nm$ da.

7.5.4 teorema. *Izan bitez V n dimentsioko \mathbb{K} -espazio bektoriala eta $S \subseteq V$ V -ren sortzaile-sistema. Orduan, honako baldintza hauek betetzen dira:*

i) *Existitzen da β V -ren oinarria, non $\beta \subseteq S$ betetzen den.*

ii) $|S| \geq n$.

iii) $|S| = n$ bada; orduan, S V -ren oinarria da.

7.5.5 teorema. *Izan bitez V , n dimentsioko \mathbb{K} -espazio bektoriala eta $T \subseteq V$ sistema askea. Orduan, honako baldintza hauek betetzen dira:*

i) *T V -ren oinarri bateraino luza daiteke; hau da, existitzen da β V -ren oinarria, non $T \subseteq \beta$ betetzen den.*

ii) $|T| \leq n$.

iii) $|T| = n$ bada; orduan, T V -ren oinarria da.

7.5.5 Azpiespazioen dimentsioa

Atal honetan, dimentsio finituko azpiespazio bektorialen emaitzarik garrantzitsuenak aipatuko dira.

7.5.6 teorema. *Izan bitez V dimentsio finituko \mathbb{K} -espazio bektoriala eta $W \leq V$. Orduan, W ere dimentsio finitukoa da, eta $\dim W \leq \dim V$. Gainera:*

$$\dim W = \dim V \iff W = V.$$

DEFINIZIOA. Izan bitez V \mathbb{K} -espazio bektoriala eta $W \leq V$. Beste azpiespazio bat U W -ren betegarri bat dela esango dugu, baldin eta $V = W \oplus U$ betetzen bada. Hau da, W -ren eta U -ren arteko batura zuzena da, eta, gainera, $W + U = V$ da.

7.5.7 teorema. *Izan bitez V dimentsio finituko \mathbb{K} -espazio bektoriala eta $W \leq V$. Orduan, W azpiespazio bektorialak betegarri bat du.*

Adibidea Izan bedi \mathbb{R}^3 \mathbb{R} -espazio bektoriala. $W = \langle (1, 0, 2), (1, 0, 1) \rangle$ azpiespazioaren betegarri bat lortuko dugu.

Argi dago W -ko bi bektoreak linealki askeak direla. Oinarri bat lortzeko, horiekiko askea den beste bektorearen bat bilatu behar da. Har dezagun $(0, 1, 0)$ bektorea. Azkar ikusten da hiru bektore horiek \mathbb{R}^3 -ko sortzaile-sistema direla eta askeak; beraz, W -ren sortzaile-sistema \mathbb{R}^3 -ko oinarri bateraino luzatu dugu.

Beraz, $U = \langle (0, 1, 0) \rangle$ W -ren betegarri bat da. Ohar gaitezen betegarriak ez direla bakarrak.

Azpiespazio bektorialen dimentsioari begiratuta, Grassmann-en teorema emaitza interesgarria azaltzen digu. Matrize baten diagonalizazioa aztertzerakoan aplikatuko da.

7.5.8 teorema (Grassmann). *Izan bitez U eta W V -ren dimentsio finituko azpiespazio bektorialak. Orduan, $U + W$ ere dimentsio finitukoa da, eta, gainera:*

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

7.5.9 teorema. *Izan bitez U_1, \dots, U_n V -ren dimentsio finituko azpiespazio bektorialak eta $\beta_{U_1}, \dots, \beta_{U_n}$ U_1, \dots, U_n -ren oinarriak, hurrenez hurren. Orduan,*

$U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ da $\iff \beta_{U_1} \cup \dots \cup \beta_{U_n}, U_1 + \dots + U_n$ azpiespazioaren oinarria da.

Teorema honek matrize baten diagonalgarritasuna aztertzeko orduan agertuko zaizkigun azpiespazio propioen oinarriekin zer gertatzen den ulertzen lagunduko digu.

7.5.6 Koordenatuak

DEFINIZIOA. Izan bedi $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ V -ren oinarri bat, $v \in V$ bektorearentzat existitzen dira n eskalar bakarrak $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, non $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ den. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ v -ren

koordinatuak β oinarriarekiko deitzen dira, eta $M_\beta(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ eran denotatuko ditugu.

Adibideak Izan bitez \mathbb{R}^3 \mathbb{R} -espazio bektoriala eta $v = (a, b, c)$ bektorea.

(a) Har dezagun $\beta_k = \{e_1, e_2, e_3\}$ oinarri kanonikoa; orduan,

$$(a, b, c) = \lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 0) + \lambda_3(0, 0, 1)$$

eta eskalarrak askatuta: $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = b$ eta $\lambda_3 = c$ dira. Beraz,

$$M_{\beta_k}(a, b, c) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

da.

(b) Har dezagun $\beta = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ oinarria; orduan,

$$(a, b, c) = \lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(1, 1, 0) + \lambda_3(1, 1, 1)$$

eta eskalarrak askatuta: $\lambda_1 = a - b$, $\lambda_2 = b - c$ eta $\lambda_3 = c$ dira. Beraz,

$$M_{\beta}(a, b, c) = \begin{pmatrix} a - b \\ b - c \\ c \end{pmatrix}$$

da.

Aurreko adibideetan argi gelditzen da bektore baten adierazpena bi oinarri desberdinetan desberdina dela. Halaber, egon beharko du eraren bat adierazpen batetik bestera pasatzeko; hots, oinarri-aldaketa egiteko. Ikus dezagun.

Izan bitez $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ eta $\beta' = \{w_1, \dots, w_n\}$ V -ren bi oinarri. Orduan, $v \in V$ bektorea-
rentzat $M_{\beta}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ eta $M_{\beta'}(v) = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}$ desberdinak dira.

Bi matrize horien arteko erlazioa lortuko dugu. Horretarako, v bi matrizeen biderkadura moduan adieraziko dugu:

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Bestalde, $v_i \in V$ eta β' ere V -ren oinarria denez gero, existituko dira a_{1i}, \dots, a_{ni} eskalar bakar-
rrak non $v_i = a_{1i} w_1 + \dots + a_{ni} w_n$ betetzen den $i = 1, \dots, n$ balioetarako.

Aurrekoan bezala, matrizeen biderkadura moduan adieraz dezakegu $v_i = (w_1, \dots, w_n) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$,
 $i = 1, \dots, n$. Biderkadura horiek aurreko berdintzan ordezkatzan baditugu, honako hau lortuko
dugu:

$$v = (w_1, \dots, w_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Orduan, adierazteko modua bakarra denez gero:

$$\begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Hemen lortutakoa oinarri-aldaketaren matrizearen adierazpena dugu. Hori guztia hurrengo definizioan batuko dugu.

DEFINIZIOA. Izan bitez $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ eta $\beta' = \{w_1, \dots, w_n\}$ V -ren bi oinarri. Orduan,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrizeari β oinarritik β' oinarritako *aldaketa-matrizea* esaten zaio, eta $M_{\beta}^{\beta'}$ eran adierazten da.

Horrekin guztiarekin, honako teorema hau frogatu dugu.

7.5.10 teorema. Izan bitez $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ eta $\beta' = \{w_1, \dots, w_n\}$ V -ren bi oinarri. Orduan,

$$M_{\beta}^{\beta'} M_{\beta}(v) = M_{\beta'}(v).$$

Adibidea Izan bedi \mathbb{R}^3 \mathbb{R} -espazio bektoriala. Har ditzagu kontuan orain arte beste adibideetan erabilitako bi oinarriak, hau da, $\beta = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ eta $\beta_k = \{e_1, e_2, e_3\}$ Oinarri kanonikoa. oinarrien arteko aldaketa-matrizeak honako hauek dira:

$$M_{\beta}^{\beta_k} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad M_{\beta_k}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oharra. Izan bitez $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ eta $\beta' = \{w_1, \dots, w_n\}$ V -ren bi oinarri; orduan:

- ▷ $M_{\beta}^{\beta'} M_{\beta'}^{\beta}$, β' oinarritik β' oinarritako aldaketaren matrizea da; hots, identitate-matrizea.
- ▷ Era berean, $M_{\beta'}^{\beta} M_{\beta}^{\beta'}$, β oinarritik β oinarritako aldaketaren matrizea da; hau da, identitate-matrizea.
- ▷ $M_{\beta}^{\beta'}$ matrizea alderantzikagarria da, eta bere alderantzizkoa $M_{\beta'}^{\beta}$ da.

7.6 Aplikazioak

Hastapenetan ikusitako funtzioen edo aplikazioen definizio batzuk burura ekarriko ditugu, beste idazkera matematiko zehatzago batean diagonalizazio kapitulua hobeto ulertzeko.

DEFINIZIOA. Izan bitez A eta B bi multzo. Orduan, $f : A \rightarrow B$, A -tik B -ra doan *aplikazio* edo *funtzio* bat $a \in A$ bakoitzari B -ren elementu bakar bat egokitzen dion erregela da, non A f aplikazioaren *definizio-eremua* eta B bere *koeremua* diren.

Oharra. Izan bedi $f : A \rightarrow B$ aplikazioa, non $f(a) = b$ den; orduan, a b -ren *aurreirudia* dela esaten da.

A -ren elementuek irudi bakar bat baino ezin dezakete izan, eta B -ren elementuei buruz ezin dugu ezer esan, aurreirudi bat izanez gero ez baitu zertan bakarra izan.

Honako definizio honetan bi funtzio berdinak noiz diren eta multzo baten irudia eta aurreirudia zein diren esaten da.

DEFINIZIOA. Izan bitez $f : A \rightarrow B$ eta $g : C \rightarrow D$ bi aplikazio. f eta g berdinak dira, baldin eta soilik baldin $A = C$, $B = D$ eta $f(a) = g(a)$ betetzen badira $\forall a \in A$ balioetarako.

Izan bitez $f : A \rightarrow B$ funtzioa eta $S \subseteq A$; orduan, S -ren *irudia*, $f(S)$ denotatzen duguna, B -ren azpimultzoa da:

$$f(S) = \{f(a) \mid a \in S\}.$$

Izan bitez $f : A \rightarrow B$ funtzioa eta $T \subseteq B$; orduan, T -ren *aurreirudia*, $f^{-1}(T)$ denotatzen duguna, A -ren azpimultzoa da:

$$f^{-1}(T) = \{a \mid f(a) \in T\}.$$

Oharra.

- ▷ Ez-hutsa den azpimultzo baten aurreirudiak ez du zertan ez-hutsa izan.
- ▷ Izan bedi $\{b\} \subseteq B$ elementu batez osaturiko multzoa; orduan, bere aurreirudia, $f^{-1}(b)$ -rekin denotatuko duguna honako hau da: $f^{-1}(\{b\}) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$.

Adibidea Izan bitez $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, non $f(x) = x^2$ den, eta $S = \{0, 1, 2\}$ \mathbb{R} -ko multzoak. Kalkulatu $f(S)$ eta $f^{-1}(S)$.

Lehenengo, irudia zein den ikusiko dugu:

$$\text{Im } f = \{f(a) \mid a \in A\} = \{a^2 \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$$

Orain, erraz ikus daiteke $f(S) = \{0, 1, 4\}$ eta $f^{-1}(S) = \{0, 1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ direla.

Aplikazioen artean honako definizio honi begiratzen badiogu, sailkapen txiki bat ere egin dezakegu.

DEFINIZIOA. Izan bedi $f : A \longrightarrow B$ aplikazioa; orduan:

1. f aplikazioa *injektiboa* dela diogu, irudi berbera duten elementu desberdinak ez daudenean, hots,

$$a \neq a' \implies f(a) \neq f(a').$$

2. f aplikazioa *surjektiboa* dela diogu, irudi multzoa eta koeremua multzo bera direnean, $f(A) = B$. Hau da,

$$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b.$$

3. f aplikazioa *bijektiboa* dela diogu, aldi berean injektiboa eta surjektiboa denean. Hau da,

$$\forall b \in B \exists! a \in A : f(a) = b.$$

Adibideak

- ▷ A edozein multzo izanda, 1_A identitate-aplikazioa bijektiboa da.

$$\begin{aligned} 1_A : A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto 1_A(a) = a \end{aligned}$$

- ▷ Izan bedi

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, \infty) \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Orduan, f ez da injektiboa, eta surjektiboa da.

- ▷ Izan bedi

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto 3n \end{aligned}$$

Orduan, f injektiboa da, eta ez da surjektiboa.

DEFINIZIOA. Izan bedi $f : A \longrightarrow B$ aplikazio bijektiboa. Orduan, f -ren *alderantzizkoa*, f^{-1} -ekin denotatuko duguna, B -tik A -rako aplikazioa da, non $b \in B$ elementuaren irudia f -ren bidez b -ren aurreirudi bakarra baita.

7.6.1 Aplikazio linealak

Aplikazioen artean badago aipamen berezia behar duen mota bat, *aplikazio lineala* deritzona, zeren konbinazio linealak mantentzen baitituzte.

DEFINIZIOA. Izan bitez V eta W \mathbb{K} -espazio bektorialak. $f : V \longrightarrow W$ aplikazioa *lineala* dela diogu, honako baldintza hauek betetzen dituztenean:

- i) $\forall v_1, v_2 \in V : f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$.
- ii) $\forall v \in V, \forall k \in \mathbb{K} : f(kv) = kf(v)$.

Definizioaren bi puntuen baliokidea honako hau da:

$$\forall v_1, v_2 \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : f(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2).$$

Oharra.

- ▷ Oso erraz ikus daiteke f aplikazio bat lineala dela, baldin eta soilik baldin:

$$\forall k_i \in \mathbb{K}, \forall v_i \in V, i = 1, \dots, n : f(k_1 v_1 + \dots + k_n v_n) = k_1 f(v_1) + \dots + k_n f(v_n).$$

- ▷ Demagun $\{v_1, \dots, v_n\}$ oinarria dela; orduan, $f(v_1), \dots, f(v_n)$ irudiak jakinik, espazioko edozein bektoreren irudia jakin daiteke.

Aplikazio lineal baten ezaugarriak honako teorema honek emango ditu.

7.6.1 teorema. *Izan bedi $f : V \rightarrow W$ aplikazio lineala; orduan, honako propietate hauek betetzen dira:*

1. $f(0_V) = 0_W$.
2. W, V -ren azpiespazio bada, orduan $f(W) = \{f(w) \mid w \in W\}$ W -ren azpiespazioa da.
3. T, W -ren azpiespazio bada, orduan $f^{-1}(T) = \{v \in V \mid f(v) \in T\}$ V -ren azpiespazioa da.

Adibideak

1. Izan bitez $V = W = \mathbb{R}$ eta $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

- (a) Izan bedi

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 5x \end{aligned}$$

Orduan, f aplikazio lineala da.

- (b) Izan bedi

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Kasu honetan, g ez da aplikazio lineala.

2. Izan bitez $V = W = \mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x^2 - y, 5x + y) \end{aligned}$$

Orduan, f aplikazioa ez da lineala.

Ikus dezagun $\{v_1, \dots, v_n\}$ oinarria den kasuaren adibidea.

Adibidea Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, non

$$f(1, 0, 0) = (1, 0, -1), f(0, 1, 0) = (1, 1, 1) \quad \text{eta} \quad f(0, 0, 1) = (1, 2, 1)$$

diren. Edozein $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ bektorearentzat lor dezagun $f(x, y, z)$.

Ohar gaitezen

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

dela; beraz,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) \\ &= xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) \\ &= (x + y + z, y + 2z, -x + y + z). \end{aligned}$$

Horrez gain, \mathbb{R}^3 -ko oinarri kanonikoekiko f aplikazioari elkartutako matrizea honako hau da:

$$M_{\beta}^{\beta}(f) = M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Edozein v bektorearen irudia ikusteko, $M \cdot v$ eragiketa besterik ez da egin behar.

Aplikazio linealen multzoak espazio bektorial bat osatzen du honako definizio eta teorema hauek adierazten duten moduan.

DEFINIZIOA. Izan bitez V eta W \mathbb{K} -espazio bektorialak. Orduan,

$$L(V, W) = \{f : V \longrightarrow W \mid f \text{ aplikazio lineala}\}.$$

7.6.2 teorema. Izan bitez V eta W \mathbb{K} -espazio bektorialak. Orduan,

1. $f, g : V \longrightarrow W$ aplikazio linealak badira, orduan, $f + g : V \longrightarrow W$ ere aplikazio lineala da, non $\forall v \in V$, $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$ den.
2. $f : V \longrightarrow W$ aplikazio lineala bada eta $\lambda \in \mathbb{K}$, orduan, $\lambda f : V \longrightarrow W$ ere aplikazio lineala da, non $\forall v \in V$, $\forall k \in \mathbb{K}$: $(\lambda f)(v) = \lambda f(v)$ den.

Aplikazio lineal bati elkartutako matrizea

Aurreko azpiataleko adibidean agertzen zen aplikazio linealari elkartutako matrizearen kalkulu egin da (ikusi, 136. or.); orain, orokorrean aplikazio lineal bati elkartutako matrize baten kalkuluaren azalpena ematen da.

Izan bitez V eta W bi \mathbb{K} -espazio bektorial, non $\dim V = n$ eta $\dim W = m$ diren, $f : V \longrightarrow W$ aplikazio lineala, $\beta_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ eta $\beta_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ V eta W -ren oinarriak, hurrenez hurren. Orduan, $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ bektorea bada, halaberrez $f(v) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$ da. Era matritzian adierazita:

$$f(v) = (f(v_1), \dots, f(v_n)) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dakigunez, $f(v_i) \in W$, $i = 1, \dots, n$ guztietarako; beraz, $\exists! a_{1i}, \dots, a_{mi} \in \mathbb{K}$, non $f(v_i) = a_{1i}w_1 + \dots + a_{mi}w_m$ den. Era matritzialean adierazita:

$$f(v_i) = (w_1, \dots, w_m) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}.$$

Hori dela eta,

$$f(v) = (w_1, \dots, w_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

DEFINIZIOA. Aurreko egoeran, honako matrize honi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

f -ri elkartutako matrizea β_V eta β_W oinarriekiko esaten zaio, eta $M_{\beta_V}^{\beta_W}$ -rekin denotatuko dugu.

Endomorfismoak

Aplikazio linealei buruz ikusi ditugun emaitza guztiak oso interesgarriak eta beharrezkoak izango dira honako teoria honen zatia ulertzeko. Kontuan hartu beharrekoa zer da gehienetan erabiliko ditugun aplikazioen gorputza $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ izango dela eta $V = W$ espazio bektorialak berdinak izango direla; beraz, $f : V \rightarrow V$ aplikazio lineala *endomorfismo* bat izango da, eta $f \in \text{End}(V)$ eran adieraziko dugu. Hortaz, endomorfismo bati, β V -ko oinarri bat izanik, elkartutako matrizea karratua da. Hots,

$$M_{\beta}^{\beta}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

8

Diagonalizazioa

Matrize baten diagonalizazioaren kontzeptua oso erraza da. Guk $A \in M_n(\mathbb{K})$ matrize bat izanik, jakin nahiko genuke horren ordez beste matrize errazago batekin lan egiteko modurik ba ote legokeen. Hau da, D matrize diagonal bat erabili gure A matrizearen ordez. Hori egiteko, A matrizeari eraldaketak egin behar zaizkio, bai errenkadaz bai zutabez, matrize diagonal bihurtzeko. Gai honetan, hori egiteko baldintzak aztertuko ditugu.

Zer esanik ez dago matrizeak ez direla bat-batean agertzen; aurreko kapituluaren ikusi dugun matrize karratuak endomorfismo bati elkartutakoak direla. Hori kontuan hartuta, planteatzen dugu ea existitzen den β V -ren oinarri bat, non $f \in \text{End}(V)$ izanik

$$M_{\beta}^{\beta}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

den. Hau da, non matrize elkartua diagonal den.

Galdera baliokidea planteatu dezakegu matrizeen kasuan ere. Izan bedi $A \in M_n(\mathbb{K})$ matrize karratua. Existitzen al da P matrize alderantzikagarririk, non $P^{-1}AP = D$ matrize diagonal den? Demagun endomorfismoen kasuan galderaren erantzuna lortu dugula. Orduan, matrizeen kasuan ere erantzuna lortuko genuke. Dakigunez, A matrizeari f endomorfismo bat elkartu daioke. Aukeratzen dugu \mathbb{K}^n eta β_k oinarri kanonikoa, eta eskatzen dugu $M_{\beta_k}(f) = A$ izatea. Orduan, existituko balitz β oinarri bat non $M_{\beta}(f) = D$ matrize diagonal den, A eta D endomorfismo berdinari elkartutako matrizeak izango dira. Beraz, existitzen da $P = M_{\beta}^{\beta_k}$ matrize alderantzikagarria, non $P^{-1}AP = D$ matrize diagonal den.

Sarrera honetan bi galdera planteatu ditugun arren, ikusi dugu azkenean galdera bakar bihurtzen direla.

Oharra.

- ▷ Hemendik aurrera, $M_{\beta}^{\beta}(f)$ idatzi beharrean $M_{\beta}(f)$ idatziko dugu.
- ▷ $P^{-1}AP = D$ diagonal izatean betetzen duen P matrize alderantzikagarriari *aldaketa matrizea* deitzen zaio.

8.1 Azpiespazio f -aldagaitzak

Batzuetan, ariketak ebazteko orduan konplikatua izan daiteke ulertzea kontzeptu batzuen garrantzia. Hona hemen horietako kontzeptu bat.

DEFINIZIOA. Izan bitez $W \leq V$ eta $f \in \text{End}(V)$. W f -aldagaitza dela esaten da baldin eta $f(W) \leq W$ betetzen bada; hau da, $\forall w \in W: f(w) \in W$.

Adibidea

1. Izan bedi f endomorfismo bat; orduan, $\{0\}$ eta V beti dira azpiespazio f -aldagaitzak.
2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aplikazioa, non $f(x, y) = (x, -y)$ den. Orduan,

$$W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} \quad \text{eta} \quad W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$$

azpiespazio f -aldagaitzak dira, baina $W_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ ez da azpiespazio f -aldagaitza.

8.1.1 teorema. *Izan bedi $f \in \text{End}(V)$; orduan, baliokideak dira:*

(i) $V = W_1 \oplus W_2$ da, W_1 eta W_2 azpiespazio f -aldagaitzak izanik.

(ii) Existitzen da β V -ren oinarria, non

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

den.

Oharra. Oinarriarena gogoratzeko, ikus 7.5.9.

8.2 Endomorfismo baten balio eta bektore propioak

DEFINIZIOA. Izan bedi $f \in \text{End}(V)$. $\lambda \in \mathbb{K}$ f -ren balio propioa dela esaten da, existitzen bada $v \in V \setminus \{0\}$ non $f(v) = \lambda v$ betetzen den. Kasu horretan, v λ -ri elkartutako bektore propioa dela esaten da.

Adibidea *Izan bedi honako \mathbb{R}^3 -ko endomorfismo hau:*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (x + y, y, y + z).$$

Aztertu $\lambda = 0$ eta $\lambda = 1$ balio propioak ote diren.

Lehenengo eta behin, ikus dezagun $\lambda = 0$ f -ren balio propioa ote den. Definizioaren arabera, existitu behar da $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ non $f(x, y, z) = 0 \cdot (x, y, z)$ den. Hots, honako sistema homogeneo honen soluzio ez-nulu bat aurkitu behar da:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

ikusten den moduan, sistemaren soluzio bakarra $(0, 0, 0)$ da; beraz, $\lambda = 0$ ez da f -ren balio propioa. Baina $0 \in V(\lambda)$ dago.

Bestalde, $\lambda = 1$ f -ren balio propio izateko, existitu behar da $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, non $f(x, y, z) = 1 \cdot (x, y, z)$ den. Hots, honako sistema honen soluzio ez-nulu bat bilatu behar da.

$$\begin{cases} x + y = x \\ y = y \\ y + z = z \end{cases}$$

Sistemaren soluzioen multzoa $\{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$ da. Hori dela eta, existitzen dira bektore ez-nuluak, non $f(x, y, z) = 1 \cdot (x, y, z)$ den, eta $\lambda = 1$ balio propioa dugu.

8.2.1 teorema. *Izan bitez $f \in \text{End}(V)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ f -ren balio propioa, eta honako multzo hau definituko dugu:*

$$V(\lambda) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda \cdot v\}.$$

Orduan, $V(\lambda)$ azpiespazio f -aldagaitza da, eta $\beta_{V(\lambda)}$ $V(\lambda)$ -ren oinarri bat bada, azpiespazio horretan f -ri elkartutako matrizeak honako itxura hau du:

$$M_{\beta_{V(\lambda)}}(f|_{V(\lambda)}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

8.2.2 teorema. *Izan bedi $f \in \text{End}(V)$. $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ f -ren balio propio desberdinak badira eta v_1, \dots, v_r balio propioei elkartutako bektore propioak, hurrenez hurren, orduan:*

$$\{v_1, \dots, v_r\} \quad \text{система askea da.}$$

Oharra. Bi emaitza hauen esanahia honako hau da:

- ▷ Azpiespazio propioak aldagaitzak dira.
- ▷ f aplikazioari elkartutako matrizea azpiespazio hauetan murriztuta diagonal da.
- ▷ Balio propio desberdinei elkartutako bektore propioak askeak dira.

8.3 Matrize karratu baten balio eta bektore propioak

DEFINIZIOA. Izan bedi $A \in M_n(\mathbb{K})$ karratua. Orduan, $\lambda \in \mathbb{K}$ f -ren balio propioa dela esaten da, baldin eta existitzen bada $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, non

$$A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

den. Kasu horretan, (a_1, \dots, a_n) λ -ri elkartutako bektore propioa dela esaten da.

Oharra. Ohar gaitzen $f \in \text{End}(V)$ bada eta β V -ren oinarria bada; orduan, definizioaren arabera, f -ren balio propioak eta $M_\beta(f)$ matrizearen balio propioak berberak direla.

Adibidea Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ matrizea. Kalkulatu A -ren balio propioak.

λ A -ren balio propioa izateko, existitu behar da (a_1, a_2) bektore ez-nulua non

$$A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

den; orduan, honako sistema hau lortuko dugu:

$$\begin{cases} (\lambda - 1)a_1 - 4a_2 = 0 \\ -2a_1 + (\lambda - 3)a_2 = 0 \end{cases}$$

Sistema homogeneoaren soluzio ez-nulu bat behar dugu. Hau da, sistema bateragarri zehaztugabea izan behar du, eta, horretarako, derrigorrezkoa da $\det(\lambda I_2 - A) = 0$ izatea. Hau da,

$$\det \begin{pmatrix} (\lambda - 1) & -4 \\ -2 & (\lambda - 3) \end{pmatrix} = 0.$$

Beraz, λ balioa $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda + 1)(\lambda - 5)$ polinomioaren erroa izan behar da. Halabeharrez, $\lambda = -1$ eta $\lambda = 5$ balio propioak dira.

Aurreko adibidea jarraituz, honako polinomio hau definituko dugu:

DEFINIZIOA. Izan bedi $A \in M_n(\mathbb{K})$ matrize karratua. Orduan, A -ren *polinomio karakteristikoa* honako determinante hau da:

$$\chi_A(x) = |xI_n - A| = \det(xI_n - A).$$

8.3.1 teorema. *Izan bitez $A \in M_n(\mathbb{K})$ eta $\lambda \in \mathbb{K}$. Orduan,*

λ A -ren balio propioa da, baldin eta soilik baldin λ , $\chi_A(x)$ polinomioaren erroa bada.

DEFINIZIOA. Izan bitez $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. A eta B antzekoak direla esaten da, baldin eta soilik baldin existitzen bada P matrize alderantzikagarria, non $P^{-1}AP = B$ den.

Ohar gaitezen endomorfismo bati elkartutako matrizea $M_\beta(f)$ modukoa bada, orduan matrize mota horiek antzekoak direla.

8.3.2 teorema. *Izan bitez A eta B antzekoak; orduan, $\chi_A(x) = \chi_B(x)$.*

Aurreko definizioak eta oharrak honako definizio hau motibatzen du.

DEFINIZIOA. Izan bitez $f \in \text{End}(V)$ eta β V -ren oinarria. f -ren *polinomio karakteristikoa*, $\chi_f(x)$ moduan adieraziko duguna, $M_\beta(f)$ matrizearen polinomio karakteristikoa da. Hau da:

$$\chi_f(x) = |xI_n - M_\beta(f)| = \det(xI_n - M_\beta(f)).$$

Adibidea Kalkulatu $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ honako era honetan definitutako endomorfismoari elkartutako polinomio karakteristikoa:

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (x + y, y, y + z).$$

Definizioaren arabera, f -ren polinomio karakteristikoa kalkulatzeko honako determinante hau kalkulatu behar dugu:

$$\chi_f(x) = \chi_{M_{\beta_k}(f)} = \begin{vmatrix} x - 1 & -1 & 0 \\ 0 & x - 1 & 0 \\ 0 & -1 & x - 1 \end{vmatrix} = (x - 1)^3.$$

Eta f endomorfismoaren balio propio bakarra $\lambda = 1$ da.

8.3.1 korolaria. *Izan bitez $f \in \text{End}(V)$ eta $\lambda \in \mathbb{K}$. Orduan, λ f -ren balio propioa da, baldin eta soilik baldin λ $\chi_f(x)$ polinomioaren erroa bada.*

DEFINIZIOA. Izan bedi λ balio propioa; orduan, λ -ren anizkoiztasuna $\chi_f(x)$ polinomioaren erro moduan $m(\lambda)$ adieraziko dugu.

8.3.3 teorema. *Izan bedi λ f -ren balio propioa. Orduan,*

$$\dim V(\lambda) \leq m(\lambda).$$

Teorema honen emaitzak azkar ikus daitezke adibideetan.

8.4 Endomorfismo diagonalizagarria

DEFINIZIOA. Izan bedi $f \in \text{End}(V)$. f diagonalizagarria dela esango dugu, baldin eta existitzen bada β V -ren oinarri bat, non $M_\beta(f)$ matrize diagonalala den.

8.4.1 teorema. *Izan bedi $f \in \text{End}(V)$. Orduan, f diagonalizagarria da, baldin eta soilik baldin honako bi baldintza hauek betetzen badira:*

- (i) $\chi_f(x)$ polinomioaren erro guztiak \mathbb{K} gainean daude.
- (ii) λ f -ren balio propio bakoitzarentzat:

$$\dim V(\lambda) = m(\lambda)$$

Adibidea Izan bedi $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$,

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (2x, x + y, 3x + z).$$

Aztertu f diagonalizagarria den.

Lehenengo, polinomio karakteristikoa lortuko dugu:

$$\chi_f(x) = \chi_{M_{\beta_k}(f)}(x) = \det \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ -1 & x-1 & 0 \\ -3 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-2)(x-1)^2.$$

Orduan, polinomioaren erroak: $2, 1 \in \mathbb{R}$ gorputzean daude, eta teoremaren (i) baldintza betetzen da.

Bestalde, teoremaren (ii) baldintzaren egiaztapenean, kontuan eduki behar da $m(2) = 1$ eta $m(1) = 2$ direla; beraz, ziurtatuta dago $m(2) = \dim V(2)$ berdintza. Bestea ikusteko, $V(1)$ azpiespazio propioa kalkulatu behar da:

$$V(1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = (x, y, z)\} = \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle.$$

Orduan, $\dim V(1) = 2 = m(1)$ eta (ii) ere betetzen dira. Beraz, f diagonalizagarria da, eta forma diagonalala ematen duen oinarria lortzeko $V(2)$ kalkulatu behar da:

$$V(2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 2(x, y, z)\} = \langle (1, 1, 3) \rangle.$$

Bukatzeko, $\beta = \beta_{V(1)} \cup \beta_{V(2)} = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 3)\}$ \mathbb{R}^3 -ren oinarria da, eta

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

diagonalala da.

8.4.1 korolaria. *Izan bedi $f \in \text{End}(V)$, non*

$$\chi_f(x) = (x - \lambda_1)^{t_1} \cdots (x - \lambda_s)^{t_s}$$

den. Hau da, polinomio karakteristikoaren erroak $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ gorputzaren gainean daude. Orduan, honako propietate hauek betetzen dira:

- (i) *f diagonalizagarria da, baldin eta soilik baldin existitzen bada bektore propioekin osatutako V -ren oinarri bat.*
- (ii) *f diagonalizagarria da, baldin eta soilik baldin $V = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_s)$ bada.*

8.5 Matrize diagonalizagarria

DEFINIZIOA. Izan bedi $A \in M_n(\mathbb{K})$. Orduan, A diagonalizagarria dela esaten da, existitzen bada P matrize alderantzikagarri bat, non $P^{-1}AP$ matrize diagonalala den.

Oharra. Izan bitez $f \in \text{End}(V)$ eta β V -ren oinarria; orduan:

$$f \text{ diagonalizagarria da} \iff M_\beta(f) \text{ diagonalizagarria da.}$$

8.5.1 korolaria. *Izan bedi $A \in M_n(\mathbb{K})$ matrizea. Orduan, A diagonalizagarria da, baldin eta soilik baldin honako bi baldintza hauek betetzen badira:*

- (i) $\chi_A(x)$ polinomioaren erro guztiak \mathbb{K} gainean daude.
- (ii) λ A -ren balio propio bakoitzarentzat:

$$\dim V(\lambda) = m(\lambda).$$

Adibidea Kalkulatu A matrizearen balio eta bektore propioak. A matrizea diagonalizagarria da?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lehenengo, polinomio karakteristikoa kalkulatu dugu.

$$\chi_A(x) = |x I_2 - A| = \begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)(x-3) + 1 = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

$\chi_A(x)$ -ren erroak, hots, 2 A matrizearen balio propioak dira. Kasu honetan, balio bikoitza dugu. (Azpiespazio propioaren dimentsioa 2 izan behar da, diagonalizagarria izateko)

Orain, balio horri dagokion azpiespazio propioa kalkulatu dugu:

$$\begin{aligned} V(2) &= \{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^2 \mid A \mathbf{X} = 2 \mathbf{X} \} \\ &= \left\{ \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Hori kalkulatzeko egindako kalkuluak ikusiko ditugu:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

Orain, hemen dugun ekuazio-sistema ebatzi behar dugu.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2x_1; & x_1 = x_2 \\ x_1 + x_2 = 2x_2; & x_1 = x_2 \end{cases}$$

A matrizeak bektore propio bakarra duenez, $A \approx D$.

Izan ere, P matrizearen determinantea nulua da.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \longleftrightarrow \{2, 2\}$$

eta

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Adibidea Kalkulatu A matrizearen balio eta bektore propioak. A matrizea diagonalizagarria al da?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Lehenengo, polinomio karakteristikoa kalkulatu dugu.

$$\chi_A(x) = |x I_3 - A| = \begin{vmatrix} x-1 & 3 & -3 \\ -3 & x+5 & -3 \\ -6 & 6 & x-4 \end{vmatrix} = x^3 - 12x - 16 = (x+2)^2(x-4)$$

$\chi_A(x)$ -ren erroak, $\{-2, 4\}$ A matrizearen balio propioak dira.

Orain, balio horiei dagozkien azpiespazio propioak kalkulatu ditugu:

$$\begin{aligned} V(-2) &= \{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3 \mid A \mathbf{X} = (-2) \mathbf{X} \} \\ &= \left\{ \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Hori kalkulatzeko egindako kontuak ikusiko ditugu:

$$A \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 \\ 6x_1 - 6x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \\ -2x_3 \end{pmatrix}$$

Orain, hemen dugun ekuazio-sistema ebatzi behar dugu.

$$\{x_1 - x_2 + x_3 = 0; \quad x_1 = x_2 - x_3\}$$

$$\begin{aligned} V(4) &= \{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3 \mid A \mathbf{X} = 4 \mathbf{X} \} \\ &= \left\{ \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Dugun sistema:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

Lehenengo bi ekuazioetatik ateratzen dena: $x_3 = 2x_1$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \longleftrightarrow \{-2, -2, 4\}$$

Orduan, A diagonalizagarria da, zeren $|P| \neq 0$ baita eta $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bi ariketa horietan bi gauza ikus ditzakegu, matrizea diagonalizagarria den kasuan: alde batetik, korolararioaren baldintzak betetzen direla; eta bestetik, $D = P^{-1} A P$ berdintza betetzen dela, hots, aurkitutako P matrizea alderantzizagarria dela ($|P| \neq 0$).

Berbarako, matrize baten diagonalizagarritasuna aztertzen dugunean, bai endomorfismo batetik bai matrize karratu batetik datorrena, helburua $D = P^{-1} A P$ berdintza lortzea da. Behin puntu honetara helduta, gure buruari galde diezaiokegu zertarako hainbeste lan. Hain zuzen, erabilpen bat A -ren berreturak kalkulatzeko da:

$$D = P^{-1} A P \implies A = P D P^{-1}$$

orduan,

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A = (P D P^{-1}) \cdot (P D P^{-1}) = P D^2 P^{-1}, \\ A^3 &= A^2 \cdot A = (P D^2 P^{-1}) \cdot (P D P^{-1}) = P D^3 P^{-1}, \\ A^4 &= A^3 \cdot A = (P D^3 P^{-1}) \cdot (P D P^{-1}) = P D^4 P^{-1}, \\ &\dots\dots\dots \\ A^n &= A^{n-1} \cdot A = (P D^{n-1} P^{-1}) \cdot (P D P^{-1}) = P D^n P^{-1}. \end{aligned}$$

9

Matrizeen aplikazioak. Leslie

9.1 Erreakzio kimikoak

Ekuazio linealetako sistemen ebazpenaz aparte, beste zientziako arlo batzuetan ere badaude matrizeekin egin daitezkeen aplikazio asko. Baina, aipatzekoa dugu bai Biozientzietan bai Kimikan maiz erabiltzen den estekiometria. Estekiometria erreakzio kimikoak doitzeko erabiltzen da; matematikoki hori, ekuazio linealetako sistemen ebazpenaren bitartez egin daiteke. Ikus dezagun adibideren bat.

Adibidea Doitu honako erreakzio kimiko hau:



Elementu bakoitzaren atomo kopurua berdina izan behar da berdintzaren alde bietan:

$$\begin{cases} \text{Fe} & : & 2a_1 = a_3 \\ \text{O} & : & 3a_1 = a_4 \\ \text{C} & : & a_2 = a_4 \end{cases}$$

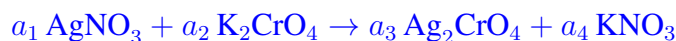
Ikus daitekeenez, $a_2 = a_4$ eta sistemaren soluzioa a_4 -ren menpe jarriko dugu; hau da,

$$a_2 = a_4, \quad a_1 = \frac{a_4}{3}, \quad a_3 = 2\frac{a_4}{3}.$$

Erreakzio kimikoaren ekuazioak koefiziente osoak izan daitezzen behar dugu, zeren erreaktibo desberdinen molekula kopurua adierazten baitute; hortaz, $a_4 = 3$ denean,

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 2.$$

Adibidea Doitu honako erreakzio kimiko hau:



Elementu bakoitzaren atomo kopurua berdina izan behar da berdintzaren alde bietan:

$$\begin{cases} \text{Ag} & : & a_1 = 2a_3 \\ \text{N} & : & a_1 = a_4 \\ \text{O} & : & 3a_1 + 4a_2 = 4a_3 + 3a_4 \\ \text{K} & : & 2a_2 = a_4 \\ \text{Cr} & : & a_2 = a_3 \end{cases}$$

Ikus daitekeenez, $a_2 = a_3$ eta sistemaren soluzioa a_3 -ren menpe jarriko dugu; hau da,

$$a_2 = a_3, \quad a_1 = 2a_3, \quad a_4 = 2a_3.$$

Erreakzio kimikoaren ekuazioak koefizienteak osoak izan daitezzen behar dugu, zeren erreaktibo desberdinen molekula kopurua adierazten baitute; hortaz, a_3 -ri edozein balio emanda, soluzioa honako hau da:

$$a_1 = 2a_3, \quad a_2 = a_3, \quad a_3 = a_3, \quad a_4 = 2a_3.$$

9.2 Leslie-ren eredua

Balio numeriko bakar batez adierazita gelditzen ez diren populazioak hartuko ditugu kontuan. Talde, bloke, eta geruzen arabera sailkatzen dira; adibidez, izan daitezke adinak, aroak, ugaltze-ahalmena, bizi-ezaugarriak, eta abar.

- ▷ Aldagai desberdina erabiltzen da talde bakoitzerako, aipaturiko taldean denbora-une bakoitzean dagoen banako kopurua adierazten duena.
- ▷ Talde bakoitzaren bilakaera kopurua ematen duen ekuazio errekurtsiboaren bitartez deskribatuta etorriko da.
- ▷ Talde bakoitzak ekuazio errekurtsiboa izango du; hots, ekuazio errekurtsiboen sistema dugu.
- ▷ Matematikoki hitz eginez, ereduak dimentsio bat baino gehiago izango ditu.
- ▷ Eredu multidimentsionalen artean sinpleenak ekuazio errekurtsiboak, forma lineala dutenak, dira.
- ▷ Populazio-dinamikaren eredu ospetsuenetarikoa eta zabal erabilitakoa *Leslie-ren eredua* deritzona da, Patrick Holt Leslie fisiologoaren omenez izendatutakoa (1900-1974).

Ikus dezagun adibide batekin Leslie-ren eredua zertan datzan.

Intsektu baten estadioak hiru dira: arrautza, larba eta heldua. Intsektuaren zikloa (denbora kontuan hartuta) arrautzatik larbara pasatzen da; era berean, larbatik heldura, eta helduak arrautzak berriro jartzean hil egiten da.

Izan bedi t denbora,

- A_t = arrautza kopurua t denboran.
- L_t = larba kopurua t denboran.
- H_t = helduen kopurua t denboran.

Ditugun datuen arabera, estadio batetik bestera pasatzeko probabilitateak honako hauek dira:

- %4 arrautzatik larbara,
- %39 larbatik heldura,
- heldu bakoitzak 73 arrautza jartzen ditu batez beste.

Ekuazio linealetako sistema bat agertzen zaigu, honako era matrizial honetan adieraz daitekeena:

$$\begin{pmatrix} A_t \\ L_t \\ H_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 73 \\ 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0.39 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{t-1} \\ L_{t-1} \\ H_{t-1} \end{pmatrix}$$

errepikapena kontuan hartuta

$$\begin{pmatrix} A_t \\ L_t \\ H_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 73 \\ 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0.39 & 0 \end{pmatrix}^t \underbrace{\begin{pmatrix} A_0 \\ L_0 \\ H_0 \end{pmatrix}}_{\text{Hasierako datuak}}$$

Leslie-ren eredua populazio-ekologian gehien erabiltzen denetarikoa da.

- ▷ Tarte zuhurretan, kontuan hartutako adinarekiko egituratutako populazioa hartzen du kontuan.
- ▷ Banakoen bizirik irautea eta ugaltze-ahalmena hartzen ditu kontuan.
- ▷ Populazioarekiko aldaketa denboran kalkulatzen du.

Honako hau kalkulatzen du:

- Gehikuntza-tasa intrintsekoa: r .
- Egoera egonkorreko adin-klase bakoitzaren proportzioak.

Honako formula hau dugu:

$$E_{t+1} = A \cdot E_t$$

non E populazio baten adin-klasearen banaketa deskribatzen duen bektorea eta A transizio-matrizea edo Leslie-ren matrizea diren.

Adibidez, hiru tamainako matrize batean:

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Orduan, 0 belaunalditik 1 belaunaldira honako egoera hau dugu:

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{1,0} \\ n_{2,0} \\ n_{3,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{1,1} \\ n_{2,1} \\ n_{3,1} \end{pmatrix}$$

$$E_2 = A \cdot A \cdot E_0 = A^2 \cdot E_0$$

beraz, t belaunaldian:

$$E_t = A \cdots A \cdot E_0 = A^t \cdot E_0$$

Kontuan hartzen dira emankortasun-tasa (f_i , frekuentziak), eta klase batetik beste batera pasatzerakoan ditugun iraunkortasun-probabilitateak (p_i).

- ▷ Leslie-ren matrizearen diagonalizazioa egiterakoan agertzen zaizkigun balio (λ) eta bektore propioak kontuan hartuko ditugu.
- ▷ Gehikuntza-tasa intrintsekoaren estimazioa honako hau da:

$$r = \log(\lambda).$$

- ▷ Egoera egonkor batean, adin-klase bakoitzean banakoen proportzioa V_p kalkulatzeko, λ balio propioari elkartutako \vec{v} bektoreari bere elementu bakoitzaren proportzioa elementu guztien batuketarekiko egingo da ($v_1 + v_2 + v_3$); hots,

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad V_{p,k} = \frac{v_k}{v_1 + v_2 + v_3}, \quad k = 1, 2, 3.$$

9.2.1 Zenbaki konplexuak

Existitzen da zenbaki berezi bat, i , non $i^2 + 1 = 0$ betetzen duen.

$$i = \sqrt{-1}.$$

DEFINIZIOA. Zenbaki konplexu bat honako era honetan idazten den zenbakia da:

$$z = a + i b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Adibidea $f(x) = x^2 - 4x + 13$ ekuazioaren erroak

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36} \sqrt{-1}}{2} = 2 \pm i 3.$$

Hau da, ekuazioak bi soluzio konplexu konjokatu ditu:

$$2 + i 3, \quad 2 - i 3.$$

DEFINIZIOA. $z = a + i b$ zenbaki konplexuaren *modulua* honako zenbaki erreal hau da:

$$|a + i b| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Zenbaki konplexua zenbaki erreal bada, hots, $z = a + i 0$ horren modulua eta balio absolutua berdinak dira.

9.2.2 Epe luzerako portaera

Populazio bat dugu, eta adineko baliokidetasun-klaseetan sailkatzen dugu. Tartea $[0, t]$

- $E^{(1)}$: lehenengo azpitartean sailkatuta dauden banakoak, $\left[0, \frac{t}{n}\right)$.
- $E^{(2)}$: bigarren azpitartean sailkatuta dauden banakoak, $\left[\frac{t}{n}, \frac{2t}{n}\right)$.
- ...
- $E^{(n)}$: azkenengo azpitartean sailkatuta dauden banakoak, $\left[\frac{(n-1)t}{n}, t\right]$.

DEFINIZIOA. Izan bedi λ_1 A matrizearen balio propioa, non bere balio absolutua beste edozein balio propioaren (autobalioren) modulua baino handiagoa den:

$$|\lambda_1| > |\lambda_i|, \quad \lambda_i \text{ balio propioa } \lambda_i \neq \lambda_1, (i \neq 1)$$

orduan, λ_1 balio propio *dominantea* dela diogu.

$$\begin{pmatrix} E^{(1)} \\ E^{(2)} \\ E^{(3)} \\ \vdots \\ E^{(n)} \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_n \\ p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^{(1)} \\ E^{(2)} \\ E^{(3)} \\ \vdots \\ E^{(n)} \end{pmatrix}_{t-1} \iff P_t = A P_{t-1}$$

9.2.1 teorema. Izan bitez A matrize bat, λ_1 balio propio positibo eta dominantea, eta \vec{v}_1 elkar-tutako bektore propioa; $P_t = A P_{t-1}$ eredian honako proposizio hauek betetzen dira:

\vec{v}_1 bektorearen osagai guztiak positiboak dira.

- (i) k -ren balio handietarako, $P_t \rightarrow r \vec{v}_1$ jotzen du. Populazioaren taldeen arteko proportzioak \vec{v}_1 bektorearen osagaien arteko proportzioetara jotzen duela esan nahi du.

Balio propio dominante horrek hazkundearen estabilizazioaren erritmoa ematen du. Denbora pasatu ondoren ematen digun informazioa populazio totalaren proportzioa da.

(ii)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t P_{t-1}^{-1} = \lambda_1 I_n.$$

- (iii) $\triangleright \lambda_1 > 1$ populazioa infinitura arte hazten da.
 $\triangleright \lambda_1 = 1$ populazioa egonkortu egiten da.
 $\triangleright \lambda_1 < 1$ populazioa desagertzen da.

9.2.2 teorema. A Leslie-ren matrizearen lehenengo errenkadako hurrenez hurren bi elementu ez-nuluak baldin badaude; orduan, A matrizeak balio propio dominante bat du.

Adibidea Baso batean animalia espezie baten populazioa bi taldetan sailkatuta dago: gazteak eta helduak. Dagokion Leslie-ren matrizea honako hau da:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1/2 & 1/5 \end{pmatrix}$$

azaldu matrizearen elementuen esanahia.

Izan bitez,

$$\begin{aligned} G_t &= \text{gazteen kopurua } t \text{ denboran} \\ H_t &= \text{helduen kopurua } t \text{ denboran.} \end{aligned}$$

Leslie-ren eredia honako hau da:

$$\begin{pmatrix} G_{t+1} \\ H_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1/2 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_t \\ H_t \end{pmatrix}$$

eta agertzen diren bi ekuazioen esanahia aztertuko dugu; hots,

$$G_{t+1} = 2H_t, \quad H_{t+1} = \frac{1}{2}G_t + \frac{1}{5}H_t.$$

Lehenengo ekuazioak argi uzten du heldu bakoitzak, batez beste, bi ume izaten dituela. Bigarren ekuazioak helduak nondik datozen argitzen digu; hau da, erdia aurreko urteko gazteek bizirik irautea lortu dutelako, eta bostena aurreko urteko helduek bizirik irautea lortu dutelako.

Adibidea Animalia emeen populazio bat hiru adinetan sailkatuta dago: urtebetekoak, bi urtekoak eta hiru urtekoak. Ditugun datuen arabera: urtebetekoek, batez beste, ez dute umerik izaten; urte bikoek sei eta hiru urtekoek hamar ume izaten dituzte. Horrez gain, lehenengo urtekoen biziraupena %20-koa da eta bi urtekoena %50-koa da. Zehaztu Leslie-ren matrizea eta populazioaren eboluzioa, hurrengo ugaltze-aldietan urtebeteko populazioa 1.000 alekoa izanik, eta bi eta hiru urtekoena, hurrenez hurren, 400 eta 100 alekoa izanik.

Izan bitez A_t , B_t eta C_t urtebeteko, bi urteko eta hiru urteko emeen sailkapena t denboran, hurrenez hurren. Leslie-ren matrizea kontuan hartuz gero, honako hau dugu:

$$\begin{pmatrix} A_{t+1} \\ B_{t+1} \\ C_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 0.20 & 0 & 0 \\ 0 & 0.50 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_t \\ B_t \\ C_t \end{pmatrix}$$

Behin erlazio hori lortuta, ikus dezagun hurrengo ugaltze-aldietan zer gertatzen den.

t	A_t	B_t	C_t
0	1000	400	100
1	3400	200	200
2	3200	680	100
3	5080	640	340

Datu horiek kalkulatzeko orduan egin ditugun kontuak honako hauek dira:

$$\begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \\ C_3 \end{pmatrix} = L^3 \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7.2 & 12 \\ 0.064 & 0.238 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix}$$

non hasierako balioen bektorea

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 400 \\ 100 \end{pmatrix}$$

den.

Adibide honetan, Leslie-ren matrizearen polinomio karakteristikoa kalkulatu gero:

$$\chi_L(x) = (-1)(-1.38615 + x)(0.721421 + 1.38625x + x^2)$$

eta polinomio horren balio propioak

$$\lambda_1 = 1.38615, \quad \lambda_2 = -0.693077 + i 0.490984, \quad \lambda_3 = -0.693077 - i 0.490984$$

dira. Balio propio horien balio absolutuak kalkulatu gero,

$$|\lambda_1| = 1.38615, \quad |\lambda_2| = |\lambda_3| = 0.849365$$

argi ikusten da balio propio dominantea λ_1 dela.

Adibidea Populazio baten emeak bi adin-klaseetan sailkatuta ditugu, A eta B hurrenez hurren, dagokion Leslie-ren matrizea honako hau izanik:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0.75 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aztertu populazioari buruz zer esan dezakegun, populazioaren portaera epe luzean, eta adin-klaseetako proportzioak zein diren.

(a) Matrize honi elkartutako Leslie-ren eredu honako hau da:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0.75 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_1$$

Interpretazioa:

- ▷ Leslie-ren matrizearen lehenengo errenkadak populazioaren emankortasuna adierazten du:

A klaseko indibiduen emankortasun-tasa 2-koa da. Orduan, A klaseko indibiduo bakoitzeko, batez beste, emankortasun-epealdi bakoitzean bi jaiotzen dira.

B klaseko indibiduen emankortasun-tasa 4-koa da. Orduan, B klaseko indibiduo bakoitzeko, batez beste, emankortasun-epealdi bakoitzean lau jaiotzen dira.

- ▷ Diagonal nagusiko azpiko diagonalak biziraupena azaltzen digu. Kasu honetan, A klasekoen biziraupena hurrengo klaseraino %75-koa dela esaten digu.

(b) Balio propioak honako ekuazio honen soluzioak dira:

$$\det(L - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 4 \\ 0.75 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(2 - \lambda) - 3 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3, \\ \lambda_2 = -1. \end{cases}$$

$\lambda_1 = 3$ balio propio dominantea dela ikusten da, zeren $|3| > |-1| = 1$ eta positiboa baita.

Balio dominante honi elkartutako bektorea kalkulatu dugu, hau da, honako ekuazio lineal hauetako sistemaren soluzioa:

$$(L - 3I) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0.75 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sistema bateragarri zehaztua da; agertzen diren bi ekuazioak baliokideak dira, beraietako edozeinetatik:

$$-v_1 + 4v_2 = 0 \Leftrightarrow v_1 = 4v_2 \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 4\alpha \\ v_2 = \alpha \end{cases}$$

edozein $\alpha \in \mathbb{R}$ baliotarako.

Beraz, $\alpha = 1$ aukeratuta, bektorea

$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

da.

(c) Teoriak esaten digu $\lim_{k \rightarrow \infty} P_{k+1} P_k^{-1} = 3 I_n$ non P_k populazio totala k unean den.

Horrek esan nahi du, asintotikoki, $P_{k+1} \approx 3P_k$ dela; hots, epe luzera, une bakoitzean populazioa hirukoiztu egiten dela. Ondorioz, populazioaren joera haztea da, zeren $3 > 1$ baita.

Beste alde batetik, teoriak esaten digu, baita ere, adin-klaseetako proportzioek populazio guztiarekiko honako hau betetzen dutela:

$$\frac{v_1}{v_1 + v_2} = \frac{4}{4 + 1} = \frac{4}{5} \approx 0.8,$$

$$\frac{v_2}{v_1 + v_2} = \frac{1}{4 + 1} = \frac{1}{5} \approx 0.2.$$

Hau da, epe luze batean, A adin-klasea populazioaren %80-a izango da, eta B adin-klasea populazioaren %20-koa.

Kontzeptuen aurkibidea

A

Aplikazioak, 132
 elkartutako matrizea, 137
 endomorfismoa, 137
Asintotak, 31
Azpiespazio bektoriala, 125
Azpiespazioak, 125
 batura, 126

B

Balio propioa, 141, 142
Barrow-en erregela, 93
Behe-batura, 91
Bektore propioa, 141, 142
Bektoreak, 124

C

Cramer-en sistemak, 116

D

Definizio-eremua, 31
Determinanteak, 107
Dimentsioa, 129

E

Ebaki-puntuak, 31
Ekuazio linealetako sistemak, 111
Elementuak, 5
Eragiketa, 121
Eraztuna, 123
Erdibitze-metodoa, 46
Eskalarrak, 124
Espazio bektoriala, 124

F

Faktoriala, 9
Funtzioa
 bornatua, 92
 erroa, 46

Funtzioak

ahurra, 30
arrazionalak, 9, 73
beherakorra, 26
 hertsiki, 26
definizio-eremua, 7
deribagarritasuna, 21
eskuin-jarraitua, 20
esponentziala, 12
etena, 20
 esentziala, 21
 jauzia, 21
ezker-jarraitua, 20
ganbila, 30
gorakorra, 26
 hertsiki, 26
inflexio-puntua, 30
irudia, 7
jarraitua, 19
konposaketa, 8
kosinua, 15
limitea, 19
logaritmikoa, 13
maximoa, 26
minimoa, 26
sinua, 14
tangentea, 15

G

Gauss-en metodoa, 114
Goi-batura, 91
Gorputza, 124

H

Hondarra, 60
Hurbilketa, 56

I

Integral mugagabea, 70

Integral mugatua, 90

K

Kanpoko biderketa, 124

Kate-erregela, 23

Konbinazio lineala, 127

Koordenatuak, 130

L

Leslie, 151

Linealki

askeak, 127

lotuak, 127

M

Matrizea

adjuntua, 108

alderantzizkoa, 110

antisimetrikoa, 107

aztarna, 104

behe-triangeluarra, 104

erregularra, 109

ez-singularra, 109

goi-triangeluarra, 104

heina, 110

identitate, 104

iraulia, 106

karratua, 104

mailakatua, 115

minor

nagusia, 108

minorra, 108

oinarrizko transformazioak, 114

pibotea, 114

simetrikoa, 107

trukakorra, 105

Multzoa, 5

Multzoak, 120

N

Newton-en binomioa, 9

Newton-Raphson-en metodoa, 48

O

Oinarria, 128

kanonikoa, 128

kardinala, 129

P

Partizioa, 91

Periodikotasuna, 31

Polinomio karakteristikoa, 143

Polinomioak, 8

Puntu kritikoa, 29

S

Sarrus-en erregela, 107

Simetriak, 31

Sistema

bateraezina, 112

bateragarria, 112

homogeneoa, 111

soluzioa, 112

Sortzaile-sistema, 128

T

Taldea, 123

Tartaglia-ren triangelua, 10

Taylor-en formula, 61

Taylor-en polinomioa, 57

Teorema

Bolzano, 46

Fermat, 26

Fourier, 49

Kalkuluaren oinarrikoa, 93

Lagrange, 27

Rolle, 27

Rouche-Frobenius, 112

Taylor, 61

Weierstrass, 29

Toroa, 98

Z

Zatikako integrazioa, 71

Zenbaki konbinatorioa, 10

Zuzen ukitzaila, 22

Bibliografía

- [1] James Stewart. *Cálculo de una variable*. Cengage Learning, 2008.
- [2] Saturnino L. Salas. *Calculus: una y varias variables*. Reverté, Barcelona, 2002 - 2003. ISBN 84-291-5156-7.
- [3] J. Burgos Román. *Algebra lineal y geometría cartesiana*. McGraw-Hill Interamericana de España, Madrid, 2006.
- [4] S.I. Grossman and J.J.F. Godoy. *Algebra Lineal*. McGraw-Hill, 2012. ISBN 9786071507600.
- [5] A. García López. *Cálculo I : teoría y problemas de análisis matemático en una variable*. Clagsa, Madrid, 1993. ISBN 8460468143.
- [6] A. Vera López. *Problemas y ejercicios de análisis matemático, I. lib*. Bilbo, 1994. ISBN 84-605-0697-5.
- [7] A. De la Villa. *Problemas de álgebra*. Clagsa, Madrid, 2010. ISBN 978-84-606-6054-5.