eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Enpresarako Matematika I

Mª Angeles Inchausti Irazabal
Mª Isabel Orueta Coria

EUSKARA ERREKTOREORDETZAREN SARE ARGITALPEN

AURKIBIDEA

I. gai multzoa: MATRIZEAK ETA EKUAZIO LINEALEZKO SISTEMAK

1. gaia: MATRIZEAK ETA DETERMINANTEAK

1.1. Matrize errealak. Matrize motak

1.2. Matrize-eragiketak. Propietateak

1.3. Determinanteak. Propietateak

1.4. Matrize baten alderantzizkoa

1.5. Matrize ortogonala

1.6. Matrize baten heina

2. gaia: EKUAZIO LINEALEZKO SISTEMAK

2.1. Definizioa. Matrize-adierazpena.

2.2. Ekuazio linealezko sistemen eztabaida eta ebazpena.

2.3. Ekuazio linealezko sistema homogeneoen adierazpena: azpiespazio bektoriala.

1. gaia: MATRIZEAK ETA DETERMINANTEAK

1.1. Matrize errealak. Matrize motak

1.2. Matrize-eragiketak. Propietateak

1.3. Determinanteak. Definizioa eta propietateak

1.4. Matrize baten alderantzizkoa

1.5. Matrize ortogonala

1.6. Matrize baten heina

1.1. Matrize errealak. Matrize motak

1.1.1. Definizioa.

Errenkadatan eta zutabetan ordenatuta dagoen zenbaki errealen multzoari matrizea deritzogu.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}} \qquad a_{ij} \in \mathrm{R}$$

a_{ij} osagaia, *i.* errenkadan eta *j.* zutabean dagoen zenbakia izango da.

A matrize batek m errenkada eta n zutabe dituenean, (m, n) ordenakoa dela esango dugu eta honela adieraziko dugu: $A \in M_{(m,n)}$.

Edozein matrizeren errenkadak eta zutabeak bektoreak direnez, aurreko matrizea honela ere irakur dezakegu:

$$A=\begin{pmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \overline{u}_m \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{c} \overline{u}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \\ \overline{u}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \\ \vdots \\ \vdots \\ \overline{u}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}) \end{array}\right\} \overline{u}_i \in \mathrm{R}^n \qquad i=1,2,\ldots,m$$

$$A=\begin{pmatrix} \overline{v}_1 & \overline{v}_2 & \cdots & \overline{v}_n \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{c} \overline{v}_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}) \\ \overline{v}_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}) \\ \vdots \\ \vdots \\ \overline{v}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}) \end{array}\right\} \overline{v}_j \in \mathrm{R}^m \qquad j=1,2,\ldots,n$$

A matrizearen azpimatrize bat lortzeko, errenkada edota zutabe batzuk kenduko ditugu.

1.1.2. Matrize motak

Matrize errektangeluarra: $A \in M_{(m,n)}$, $m \neq n$ denean.

Matrize karratua: $A \in M_{(m,n)}$ $m = n$ denean, orduan $A \in M_n$.

Errenkada-matrizea: $A \in M_{(1,n)} \Rightarrow A = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}]$.

Zutabe-matrizea: $A \in M_{(m,1)} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ : \\ : \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.

Matrize hutsa: matrize baten osagai guztiak zero direnean, alegia, $0 \in M_{(m,n)}$.

Matrize diagonala: matrize karratu baten elementu guztiak, diagonal nagusikoak izan ezik, 0 direnean:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrize eskalarra: matrize diagonal baten diagonal nagusiko osagai guztiak berdinak direnean eta besteak 0:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & a \end{pmatrix}$$

Unitate-matrizea: matrize eskalar baten diagonal nagusiko osagai guztiak 1 direnean, eta besteak 0.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Aurkako matrizea: $A \in M_{(m,n)}$ matrize bateko osagai guztien zeinua aldatzen denean, eta honela idazten dugu: $-A \in M_{(m,n)}$.

Matrize iraulia: $A \in M_{(m,n)}$ matrizearen iraulia, errenkadak zutabeekin ordeztuz lortzen da, eta honela idazten dugu: $A^T \in M_{(n,m)}$.

Matrize simetrikoa: $A \in M_n$ simetrikoa $\Leftrightarrow$ $A^T = A$.

Matrize antisimetrikoa: $A \in M_n$ antisimetrikoa $\Leftrightarrow$ $A^T = -A$.

1.2. Matrize-eragiketak. Propietateak

1.2.1. Matrizeen batuketa

$\forall A,B \in M_{(m,n)}$ $\qquad \exists C = A + B \in M_{(m,n)}$ $\qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ dela.

Propietateak:

- trukakorra: $\forall A,B \in M_{(m,n)}$, $\quad A + B = B + A$
- elkarkorra: $\forall A,B,C \in M_{(m,n)}$, $\quad (A + B) + C = A + (B + C)$
- elementu neutroa: $\forall A \in M_{(m,n)}$, $\quad \exists\, 0 \in M_{(m,n)} \,/\, A + 0 = 0 + A = A$
- elementu simetrikoa: $\forall A \in M_{(m,n)}, \exists -A \in M_{(m,n)} \,/\, A + (-A) = (-A) + A = 0$

1.2.2. Eskalarra bider matrizea

$\forall \lambda \in$ R eta $\forall A \in M_{(m,n)}$ $\qquad \exists C = \lambda \cdot A \in M_{(m,n)}$ $\qquad c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ dela.

Propietateak:

- elementu neutroa: $\forall A \in M_{(m,n)}$, $\quad \exists\, 1 \in \mathrm{R} \,/\, 1 \cdot A = A$
- elkarkorra: $\forall \lambda,\mu \in \mathrm{R} \quad \forall A \in M_{(m,n)}$, $\quad (\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$
- banakorra: $\forall \lambda,\mu \in \mathrm{R} \quad \forall A \in M_{(m,n)}$, $\quad (\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

  $\forall \lambda \in \mathrm{R} \quad \forall A,B \in M_{(m,n)}$, $\quad \lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$

1.2.3. Matrizeen biderketa

$\forall A \in M_{(m,n)} \quad \forall B \in M_{(n,p)} \qquad \exists C = A \cdot B \in M_{(m,p)} \qquad c_{ij} = < \bar{u}_i \,/\, \bar{v}_j >$ dela.

$\bar{u}_i$: A matrizearen errenkada-bektoreak $(i = 1,2,\ldots,m)$

$\bar{v}_j$: B matrizearen zutabe-bektoreak $(j = 1,2,\ldots,p)$

Propietateak:

- elementu neutroa: $\forall A \in M_{(m,n)}$, $\exists\ I_m \ / \ I_m \cdot A = A$

  $\exists\ I_n \ / \ A \cdot I_n = A$
- elkarkorra: $\forall A \in M_{(m,n)},\ B \in M_{(n,p)},\ C \in M_{(p,q)} \qquad (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- banakorra: $\forall A \in M_{(m,n)}$, $B,C \in M_{(n,p)} \qquad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

  $\forall A,B \in M_{(m,n)}$, $C \in M_{(n,p)} \qquad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- eskalar baten xurgapena: $\forall \lambda \in \mathrm{R} \quad \forall A \in M_{(m,n)}, B \in M_{(n,p)}$

  $$\lambda \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B)$$

1.2.4. Matrize irauliaren propietateak

$A \in M_{(m,n)}$ matrizea izanik, $A^T \in M_{(n,m)}$ izango da haren matrize iraulia, eta honako hau beteko da:

- $\forall A \in M_{(m,n)}: \quad (A^T)^T = A$
- $\forall A,B \in M_{(m,n)}: \quad (A + B)^T = A^T + B^T$
- $\forall \lambda \in \mathrm{R}$, $\forall A \in M_{(m,n)}: \quad (\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$
- $\forall A \in M_{(m,n)},\ B \in M_{(n,p)}: \quad (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

1.3. Determinanteak. Definizioa eta propietateak

Determinanteak oso tresna garrantzitsuak dira, besteak beste, ekuazio linealak ebazteko.

$A \in M_n$ matrize baten determinantea matrizea osatzen duten elementuekin egindako zenbait biderkaduraren batura da. Beraz, zenbaki erreal bat izango da eta honela idazten da: $|A|$.

Matrize baten determinantea nola kalkulatu:

$A \in M_1$ denean: $A = [a_{11}]$ $\qquad |A| = a_{11}$

$A \in M_2$ denean: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $\qquad |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$

$A \in M_3$ denean: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ Sarrus-en erregelari jarraituko diogu:

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}$$

$A \in M_n$ matrizeetan $n > 3$ denean, determinantea kalkulatzeko, matrizeen propietateaz baliatuko gara, eta determinante baten garapena landuko dugu lerro bateko elementuen bidez.

Propietateak:

1.- Matrize baten determinantea eta bere irauliarena berdinak dira: $|A| = |A^T|$.

2.- Matrize batean bi lerro ordezten badira, determinantearen zeinua aldatzen da.

3.- Matrize batean lerro bateko osagai guztiak zero badira, determinantearen balioa zero da.

4.- Matrize batean bi lerro berdinak badira, determinantearen balioa zero da.

5.- Matrize batean lerro bat besteen konbinazio lineala bada, bere determinantearen balioa zero da bestela, ez da zero izango.

6.- Matrize batean lerro bateko gaiak bi batugaitan zatitzen baditugu, matrize horren determinantea beste bi matrizeen determinanteen batuketa izango da, bakoitzak lerro horretako batugai bat duela.

7.- Matrize batean lerro bati beste lerroen konbinazio lineal bat gehitzen bazaio, determinantearen balioa ez da aldatzen.

8.- Matrize batean lerro bateko osagai guztiak eskalar batez biderkatzen badira, determinantearen balioa hasierako matrizearena bider eskalar hori izango da. Ondorioz, $A \in M_n$ eta $k \in$ R orduan $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$.

9.- Bi matrizeren biderketaren determinantea matrizeen determinanteen biderketa izango da.

$$\forall A,B \in M_n \qquad |A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

10.- Oro har, bi matrizeren batuketaren determinantea ez da izango matrizeen determinanteen batuketa.

$$\forall A, B \in M_n \qquad |A+B| \neq |A| + |B|$$

11.- Matrize baten berreturaren determinantea matrize horren determinantearen berretura izango da.

$$\forall A \in M_n \text{ eta } k \in \mathrm{R} \ (k \neq 0) \qquad |A^k| = |A|^k$$

Minor osagarria eta adjuntua

Demagun $A \in M_n$ matrizea dugula.

a_{ij} osagaiaren minor osagarria da *i.* errenkada eta *j.* zutabea kenduta geratzen den azpimatrizearen determinantea eta M_{ij} izendatzen da.

a_{ij} osagaiaren adjuntua $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ da.

Determinantearen garapena lerro bateko elementuen bidez.

Matrize baten determinantea kalkulatzeko, lerro (errenkada edo zutabe) bateko osagaiak biderkatzen dira haien adjuntuen baturaz.

Demagun $A \in M_n$ matrizea dugula,

i. errenkada aukeratzen badugu:

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

j. zutabea aukeratzen badugu:

$$|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

Propietatе gehiago

1.- Matrize triangeluar edo diagonal baten determinantea bere diagonal nagusiaren osagaien biderkadura da.

2.- Matrize batean errenkada edo zutabe bateko osagaien eta beste errenkada edo zutabe bateko adjuntuen biderkaduraren batura zero da.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ik} = 0 \qquad j \neq k$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{kj} = 0 \qquad i \neq k$$

1.4. Matrize baten alderantzizkoa

1.4.1. Matrize adjuntua

$A \in M_n$ matrizearen adjuntua $A^{\alpha} \in M_n$ izendatuko dugu, eta bere irauliaren osagai bakoitzak barik, horien adjuntuek osatuko dute.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{\alpha} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Eta honako hau betetzen da: $A \cdot A^{\alpha} = A^{\alpha} \cdot A = |A| \cdot I_n$

1.4.2. Alderantzizko matrizea

$A \in M_n$ matrizearen alderantzizkoa $A^{-1} \in M_n$ izendatuko dugu eta honako hau egiaztatzen du:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Proposizioa: Matrize bat alderantzikatu ahal izateko, nahikoa da, eta ezinbestekoa, determinantea, zero ez izatea:

$$A \text{ alderantzikagarria} \Leftrightarrow A \text{ erregularra}$$

Froga:

- A alderantzikagarria $\Rightarrow \exists A^{-1} \,/\, A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \Rightarrow \left|A \cdot A^{-1}\right| = |I| \Rightarrow$

  $|A| \cdot \left|A^{-1}\right| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$
- A erregularra $\Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow A \in M_n \,/\, A \cdot A^{\alpha} = A^{\alpha} \cdot A = |A| \cdot I_n \Rightarrow$

  $A \cdot \frac{1}{|A|} \cdot A^{\alpha} = \frac{1}{|A|} \cdot A^{\alpha} \cdot A = I_n \Rightarrow \exists A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^{\alpha}$

1.4.3. Propietateak

1.- Matrize erregular baten alderantzizko matrizea bakarra da.

Froga:

Demagun $A \in M_n$ matrize alderantzikagarria eta $B \in M_n$ eta $C \in M_n$ alderantzizko matrizeak ditugula. Hau da:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n \quad \text{eta} \quad A \cdot C = C \cdot A = I_n$$

Beraz, honela idatz dezakegu: $B = I \cdot B = (C \cdot A) \cdot B = C \cdot (A \cdot B) = C \cdot I = C$ $\Rightarrow B = C$

2.- A erregularra bada, orduan A^{-1} erregularra izango da eta $(A^{-1})^{-1} = A$.

Froga:

A erregularra $\Rightarrow$ $|A| \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \,/\, A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |I| \Rightarrow$

$|A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow$ $|A^{-1}| \neq 0$ $\Rightarrow$ A^{-1} erregularra.

A^{-1} erregularra denez, $\exists (A^{-1})^{-1} /(A^{-1}) \cdot (A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1} \cdot (A^{-1}) = I$

A matrizeaz aurretik biderkatuz $\Rightarrow$ $A \cdot A^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} = A \cdot I$

A alderantzikagarria denez$\Rightarrow$ $I \cdot (A^{-1})^{-1} = A \cdot I$ $\Rightarrow$ $(A^{-1})^{-1} = A$

3.- A erregularra bada eta $k \in \mathrm{R}$ $(k \neq 0)$, orduan $(k \cdot A)$ erregularra izango da eta $(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$.

Froga:

Demagun $A \in M_n$ matrize erregularra dugula:

$|k \cdot A| = k^n \cdot |A| \neq 0$ ($k \neq 0$ eta $A \in M_n$ erregularra) $\Rightarrow$ $(k \cdot A)$ erregularra.

$(k \cdot A)$ erregularra denez $\exists (k \cdot A)^{-1}$ / $(k \cdot A) \cdot (k \cdot A)^{-1} = (k \cdot A)^{-1} \cdot (k \cdot A) = I$

Beraz, $A \cdot (k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot I$

A^{-1} matrizeaz aurretik biderkatuz $\Rightarrow$ $A^{-1} \cdot A \cdot (k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$

A alderantzikagarria denez $\Rightarrow (k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$

4.- $A,B \in M_n$ matrize erregularrak badira, orduan $(A \cdot B)$ erregularra izango da eta $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Froga:

$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \neq 0$ (A eta B erregularrak baitira) $\Rightarrow$ $(A \cdot B)$erregularra

$(A \cdot B)$erregularra denez, $\exists (A \cdot B)^{-1} / (A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^{-1} = (A \cdot B)^{-1} \cdot (A \cdot B) = I$

A^{-1} matrizeaz aurretik biderkatuz $\Rightarrow$ $A^{-1} \cdot A \cdot B \cdot (A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot I$

A alderantzikagarria denez $\Rightarrow$ $B \cdot (A \cdot B)^{-1} = A^{-1}$

B^{-1} matrizeaz aurretik biderkatuz $\Rightarrow B^{-1} \cdot B \cdot (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

B alderantzikagarria denez $\Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

5.- $A \in M_n$ erregularra bada, orduan $A^T \in M_n$ erregularra izango da, eta $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Froga:

$|A^T| = |A| \neq 0$ (A erregularra baita) $\Rightarrow A^T$ erregularra $\Rightarrow$ A^T alderantzikagarria

A erregularra denez, $A \cdot A^{-1} = I$

Matrizeak irauliz $\Rightarrow (A \cdot A^{-1})^T = I^T \Rightarrow (A^{-1})^T \cdot A^T = I^T = I$

$(A^T)^{-1}$ matrizeaz atzetik biderkatuz $\Rightarrow (A^{-1})^T \cdot A^T \cdot (A^T)^{-1} = I \cdot (A^T)^{-1}$

A^T erregularra $\Rightarrow$ A^T alderantzikagarria$\Rightarrow$ $A^T \cdot (A^T)^{-1} = I$ $\Rightarrow$ $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

6.- $A \in M_n$ erregularra bada, $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

Froga:

A erregularra $\Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \in M_n / A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |I| \Rightarrow$

$\Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

1.5. Matrize ortogonala

$A \in M_n$ matrizea ortogonala izango da, $A^{-1} = A^T$ denean. Beraz:

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$$

Propietateak:

1.- $A \in M_n$ ortogonala bada, bere determinantearen balioa 1 edo -1 da.

Froga:

A ortogonala $\Rightarrow$ $A \cdot A^T = I \Rightarrow \left|A \cdot A^T\right| = |I| \Rightarrow |A| \cdot \left|A^T\right| = 1 \Rightarrow |A| \cdot |A| = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$

2.- $A, B \in M_n$ ortogonalak badira, $(A \cdot B)$ ortogonala izango da.

Froga:

$(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^T = A \cdot B \cdot B^T \cdot A^T =($$B$ ortogonala denez $B \cdot B^T = I$$) = A \cdot A^T =$

$($$A$ ortogonala denez $A \cdot A^T = I$$) = I$ $\Rightarrow$ $(A \cdot B)$ ortogonala

3.- Elementu neutroa: $\forall A \in M_n$ ortogonala $\exists I_n$ ortogonala eta $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

Froga:

$I_n \cdot I_n^T = I_n \cdot I_n = I_n$ $\Rightarrow$ I_n ortogonala

4.- Elementu simetrikoa: $\forall A \in M_n$ ortogonala $\exists A^{-1} \in M_n$ ortogonala eta $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Froga:

A ortogonala $\Rightarrow$ $|A| = \pm 1$ $\Rightarrow$ $|A| \neq 0 \Rightarrow$ $\exists A^{-1}$

$A^{-1} \cdot (A^{-1})^T = (A$ ortogonala denez $A^{-1} = A^T) = A^T \cdot (A^T)^T = A^T \cdot A =$

(A ortogonala denez, $A \cdot A^T = I$) $= I$

1.6. Matrize baten heina

1.6.1. Definizioa

Demagun $A \in M_{(m,n)}$ matrizea dugula.

A matrizearen p ordenako minorra deritzogu, matrize horren p ordenako azpimatrize baten determinanteari.

A matrizearen heina p dela esango dugu eta $r(A) = p$ idatziko dugu, honako hau egiaztatzen denean:

1.- p ordenako minor bat dago, 0 ez dena.

2.- p ordena baino handiagoak diren minor guztiak 0 dira edo ez dira existitzen.

Jakina, hauxe egiaztatzen da: $r(A) \leq min(m,n)$

1.6.2. Kalkulua.

1.- 0 ez den A matrizearen minor bat bilatzen da. Demagun r ordenakoa dela.

2.- $r+1$ ordenako beste minorrik ez bada, orduan matrizearen heina r izango da.

$r+1$ ordenako beste minorrik bada, geratzen diren errenkadak eta zutabeak r ordenako minorrari gehituz lortzen direnak hartuko ditugu kontuan. Prozesu horretan, ordenari jarraitzeko, lehenengo errenkada bat gehitzen zaio, eta banan-banan zutabeak gehituz joango gara, gero errenkadaz aldatzen da, eta beste horrenbeste egiten da.

- Horrela lortutako minor guztiak zero badira, matrizearen heina r izango da.
- Horrela lortutako minorren bat zero ez bada, orduan matrizearen heina gutxienez $r+1$ izango da, eta prozesua errepikatuko da errenkadak eta zutabeak gehituz.

2. gaia: EKUAZIO LINEALEZKO SISTEMAK

2.1. Definizioa. Matrize-adierazpena

2.2. Ekuazio linealezko sistemen eztabaida eta ebazpena.

2.3. Ekuazio linealezko sistema homogeneoen adierazpena: azpiespazio bektoriala.

2.1. Definizioa. Matrize-adierazpena

2.1.1. Definizioa

m ekuazio eta *n* ezezagun dituen ekuazio linealezko multzoari ekuazio linealezko sistema esaten zaio:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{array}\right\}$$

non $a_{ij} \in \mathrm{R} \quad i = 1,\ldots,m \;,\; j = 1,\ldots,n$ sistemaren koefizienteak

$b_i \in \mathrm{R} \quad i = 1,\ldots,m$ gai askeak

eta $x_j \in \mathrm{R} \quad j = 1,\ldots,n$ ezezagunak baitira.

2.1.2. Matrize-adierazpena

Aurreko ataleko ekuazio linealezko sistema matrizialki adieraz dezakegu:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot X = B$$

non $A \in M_{(m,n)}$ koefizienteen matrizea,

$X \in M_{(n,1)}$ ezezagunen matrizea,

$B \in M_{(m,1)}$ gai askeen matrizea,

eta $(A/B) \in M_{(m,n+1)}$ matrize zabaldua baitira.

2.2. Ekuazio linealezko sistemen eztabaida eta ebazpena

2.2.1. Sistemen eztabaida. Rouché-Frobenius-en teorema

Ekuazio linealezko sistemak honela sailka ditzakegu:

1.- Emaitzen kopuruaren arabera:

-- bateraezinak: emaitzarik ez dagoenean.

-- bateragarriak: emaitza dagoenean:

* zehaztua: emaitza bakarra denean
* zehaztugabea: emaitza bakarra ez denean

2.- Gai askeen arabera:

-- homogeneoa: $B=0$ denean

-- osoa: $B\neq 0$ denean

Ekuazio linealezko sistema bat nola sailkatu eztabaidatzeko, Rouché-Frobeniusen teorema erabiliko dugu:

Demagun $A\cdot X=B$ sistema dugula, non $A\in M_{(m,n)}$, $X\in M_{(n,1)}$, $B\in M_{(m,1)}$ baitira, orduan:

-- $r(A)\neq r(A/B)$ bada, sistema bateraezina izango da.

-- $r(A)=r(A/B)$ bada, sistema bateragarria izango da, eta

* $r(A)=r(A/B)=n$ bada, sistema bateragarri zehaztua izango da
* $r(A)=r(A/B)<n$ bada, sistema bateragarri zehaztugabea izango da ($n-r$ zehaztugabetasun maila da).

2.2.2. Sistemen ebazpena. Cramer-en erregela

$A \cdot X = B$ ekuazio linealezko sistema bat Cramerren sistema dela esango dugu:

a) $A \in M_n$ denean, hau da, ekuazio kopurua eta ezezagun kopurua berdinak direnean.

b) $|A| \neq 0$ denean, hau da, $r(A) = n$ denean.

Proposizioa: Cramerren sistema bat beti izango da bateragarri zehaztua.

Froga:

Cramerren sistema batean $A \in M_n$, $|A| \neq 0 \;\Rightarrow\; r(A) = n$

$$A/B \in M_{(n,n+1)} \;\Rightarrow\; r(A/B) = n$$

$r(A) = r(A/B) = n \;\Rightarrow$ sistema bateragarria zehaztua.

Soluzioa lortzeko:

$|A| \neq 0$ denez, orduan $\exists A^{-1}$, beraz:

$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

Soluzio hori bakarra dela frogatzeko (hau da, zehaztua dela frogatzeko), eman dezagun bi soluzio daudela: X eta Y. Beraz honela idatz dezakegu:

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot X = B \\ A \cdot Y = B \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \\ A^{-1} \cdot A \cdot Y = A^{-1} \cdot B \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} X = A^{-1} \cdot B \\ Y = A^{-1} \cdot B \end{array}\right\} \Rightarrow X = Y$$

Cramerren sistema baten soluzioa honako hau izango da:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{i1} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1i} & \dots & A_{ii} & \dots & A_{ni} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{in} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

hau da,

$$x_i = \frac{1}{|A|} \cdot (b_1 \cdot A_{1i} + b_2 \cdot A_{2i} + \dots + b_n \cdot A_{ni}) = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & b_i & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

Zenbakitzailean agertzen den matrizea lortzeko, A koefizienteen matrizean i. zutabea gai askeen zutabeaz ordeztu behar dugu.

Cramerren edozein sistema, sistema bateragarria izango da, baina bateragarria den edozein sistema ez da izango Cramerren sistema bat. Dena den, edozein sistema bateragarri egokitu dezakegu Cramerren sistema batera eta Cramerren erregela erabili.

Demagun $A \cdot X = B$ sistema dugula, non $A \in M_{(m,n)}$, $X \in M_{(n,1)}$, $B \in M_{(m,1)}$ baitira eta demagun $r(A) = r(A/B)$ dela, hau da, sistema bateragarria. Egoera horretan bi kasu izan daitezke:

- $r(A) = r(A/B) = n < m$. Kasu horretan, heina aurkitzeko erabili ditugun n errenkadei dagozkien ekuazioak hartzen dira, $(m-n)$ beste ekuazioak kendu, eta Cramerren sistema bat izango dugu.
- $r(A) = r(A/B) < n$. Kasu horretan, heina aurkitzeko erabili ez diren zutabeei dagozkien ezezagunak gai askeez ordezten dira eta Cramerren sistema bat izango dugu.

2.3. Ekuazio linealezko sistema homogeneoen adierazpena: azpiespazio bektoriala

Sistema bat homogeneoa dela esango dugu, gai askeak zero direnean:

$$A \cdot X = 0 \quad \text{non} \quad A \in M_{(m,n)},\ X \in M_{(n,1)},\ 0 \in M_{(m,1)}$$

Sistema homogeneo batean beti beteko da hau: $r(A) = r(A/0)$. Beraz, Rouché-Frobeniusen teoremaren arabera, beti izango da bateragarria.

Sistema horiek beti izango dute gutxienez soluzio bat: $X = 0$ soluzio nabaria. Beraz:

- $r(A) = n$ bada, sistema bateragarri zehaztua izango da eta soluzio bakar hori $X = 0$ izango da.
- $r(A) < n$ bada, sistema bateragarri zehaztugabea izango da, eta soluzioak infinituak izango dira, (besteak beste, soluzio nabaria).

Azpiespazio bektoriala

Demagun E espazio bektorial bat eta S azpimultzoa dugula ($S \subset E$), $S \neq \varnothing$ izanik. S multzoa E-ren azpiespazio bektoriala izango da, baldin eta soilik baldin

$$\forall X,\ Y \in S \quad \forall \alpha, \beta \in R \quad \alpha X + \beta Y \in S$$

Sistema homogeneoen soluzio multzoa, hots, $S=\{X \in M_{(n,1)} / AX = 0\}$, $M_{(n,1)}$-ren azpiespazio bektoriala da.

Froga:

$$\forall X, Y \in S \quad \forall \alpha, \beta \in R \quad \alpha X + \beta Y \in S$$

$$X \in S \Rightarrow X \in M_{(n,1)} \ / \ AX = 0 \quad \alpha X \in M_{(n,1)} \ / \ \alpha AX = \alpha 0 = 0$$

$$Y \in S \Rightarrow Y \in M_{(n,1)} \ / \ AY = 0 \quad \beta Y \in M_{(n,1)} \ / \ \beta AY = \beta 0 = 0$$

$$\alpha X + \beta Y \in M_{(n,1)}, \quad \alpha AX + \beta AY = 0, \quad A(\alpha X + \beta Y) = 0 \Rightarrow \alpha X + \beta Y \in S.$$

I. GAI MULTZOKO ARIKETAK:

MATRIZEAK

ETA

EKUAZIO LINEALEZKO SISTEMAK

MATRIZEAK ETA EKUAZIO LINEALEZKO SISTEMAK

1. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Kalkula ezazu A^2.

2. Honako matrize hauek izanik: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & 7 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ eta

$C = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, egin itzazu eragiketa hauek: AB; CA; AC^T; $2CB$; A^TB.

3. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1/4 & 3/2 \end{pmatrix}$

a) Kalkula ezazu A^2.

b) Kalkulatu λ, $A^2 = \lambda A$ egiazkoa izan dadin.

4. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Kalkula ezazu, ahal bada, A^{-1}.

5. Izan bitez $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, b-ren zer baliotarako izango da

AB matrizea alderantzikagarria? Eta BA matrizea?

6. $H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ 0 & s & 0 \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix} / r, s, t \in R \right\}$ matrizeen multzoa izanik, r-ren, s-ren eta t-ren

zer baliotarako izango da H multzoko matrize alderantzikagarria?

7. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 2 & b & 0 \\ b & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Eztabaida ezazu A-ren heina b-ren balio erreal

guztietarako.

8. Lortu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ matrizearen heina.

9. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & c \end{pmatrix}$ matrizea.

a) $a, b, c \in R$ izanik, a, b eta c-ren zer baliotarako izango da A alderantzikagarria?

b) Eztabaida ezazu A-ren heina a, b eta c-ren balio erreal guztietarako.

10. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$ matrizea eta $B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$ eta

$C = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ azpimatrizeak. A-ren heina 2 bada, erantzun honako galdera hauei:

a) Zein da B-ren determinantearen balioa?

b) Izan al daiteke $|C| = 0$?

11. Sailkatu honako ekuazio linealezko sistema hau: $\begin{cases} y - z = 1 \\ x + z = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$

12. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ matrizea izanik, sailkatu eta ebatzi $AX = 0$ sistema.

13. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ a & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sistema izanik. Aztertu eta ebatzi *a*-ren balio erreal guztietarako.

14. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & a \end{pmatrix}$ matrizea. Aztertu eta ebatzi $AX = 0$ sistema *a*-ren balio erreal guztietarako.

15. Izan bitez $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & a \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Eztabaidatu eta ebatzi $AX = Y$ ekuazio linealezko sistema, *a*-ren balio erreal guztietarako.

16. Izan bitez $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}$. Eztabaidatu eta ebatzi, ahal bada, $AX = Y$ ekuazio linealezko sistema, *a*-ren balio erreal guztietarako.

17. Izan bedi honako sistema hau: $\begin{cases} x + 3y - z = -2 \\ 2x + \lambda y = 0 \\ x - 2y + z = 3 \end{cases}$

a) Aztertu λ-ren balio erreal guztietarako.

b) Ebatzi, ahal bada.

18. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$ ekuazio linealezko sistema homogeneo baten koefizienteen matrizea.

a) Eztabaidatu sistema α eta β-ren balio erreal guztietarako.

b) Froga ezazu $AX = 0$ sistema homogeneoen soluzio multzoa $M_{(3,1)}$-ren azpiespazio bektoriala dela.

19. Izan bedi sistema hau: $\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ $(a, b \in R)$

a) Aurkitu koefiziente-matrizea eta aztertu bere heina a eta b-ren $\in R$ balio erreal guztietarako.

b) Eztabaidatu sistema a eta b balio guztietarako.

c) Ebatzi sistema $a = b = 0$ balioetarako. Ba al da $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sistemaren soluzioa?

20. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Eztabaidatu eta ebatzi, ahal denean, $AX=0$ sistema a-ren balio erreal guztietarako.

b) Egiazta ezazu $AX=0$ sistema homogeneoen soluzio multzoa $M_{(3,1)}$-ren azpiespazio bektoriala dela.

21. Egiazta ezazu honako sistema honen soluzio multzoa $M_{(3,1)}$-ren azpiespazio bektoriala den:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

22. Izan bedi $\begin{cases} x+4y+z=3 \\ 3x-y+2z=1 \\ 2x-5y+az=-2 \end{cases}$ ekuazio linealezko sistema.

a) Eztabaidatu sistema a-ren balio guztietarako.

b) Ebatzi sistema $a = 1$ baliorako.

23. Izan bedi $\begin{cases} 4x+2y-z=0 \\ 2x+y=0 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$ ekuazio linealezko sistema.

a) Sailkatu eta ebatzi ekuazio linealezko sistema.

b) Froga ezazu aurreko atalean lortutako emaitza $M_{(3,1)}$-ren azpiespazio bektoriala dela.

II. gai multzoa: MATRIZEEN DIAGONALIZAZIOA

3. gaia: BEKTOREAK

3.1. Bektore-eragiketak: batuketa, eskalar batez biderkatzea, konbinazio lineala, bektoreen biderketa

3.2. Menpekotasun eta independentzia lineala

3.3. Ortogonaltasuna. Bektore baten norma. Ortonormaltasuna

4. gaia: DIAGONALIZAZIOA

4.1. Balio propioa. Bektore propioa. Propietateak. Ekuazio karakteristikoa

4.2. Balio eta bektore propioen kalkulua

4.3. Antzeko matrizeak. Diagonalizazioa

3. gaia: BEKTOREAK

3.1. Bektore-eragiketak: batuketa, eskalar batez biderkatzea, konbinazio lineala, bektoreen biderketa

Zenbaki erreal ordenatuen multzoari bektore deritzogu. Bektore batek espazioko puntu bat adierazten du, eta segmentu bat da. Bektore bat adierazteko $\overline{x}$ edo $\vec{x}$ idatziko dugu.

Hainbat espaziotako bektoreak daude, osagai kopuruaren arabera:

$\overline{x} = x$ denean $\overline{x} \in$ R izango da.

$\overline{x} = (x_1, x_2)$ denean $\overline{x} \in$ R^2 izango da.

....

$\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ denean $\overline{x} \in$ R^n izango da.

- <u>Batuketa:</u> $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \text{R}^n \qquad \overline{x} + \overline{y} \in \text{R}^n$

  Demagun $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ eta $\overline{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ ditugula,

  orduan, $\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$

  <u>Propietateak</u>:

  -- trukakorra: $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \text{R}^n$, $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$

  -- elkarkorra: $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \text{R}^n$, $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$

  -- elementu neutroa: $\forall \overline{x} \in \text{R}^n$, $\exists\, \overline{0} \in \text{R}^n$ / $\overline{x} + \overline{0} = \overline{x} + \overline{0} = \overline{x}$

  -- elementu simetrikoa: $\forall \overline{x} \in \text{R}^n$, $\exists - \overline{x} \in \text{R}^n$/ $\overline{x} + (-\overline{x}) = (-\overline{x}) + x = \overline{0}$

- <u>Eskalar batez biderkatzea:</u> $\forall \lambda \in \text{R}$, $\forall \overline{x} \in \text{R}^n \qquad \lambda \cdot \overline{x} \in \text{R}^n$

  $\lambda \cdot \overline{x} = \lambda \cdot (x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, ..., \lambda \cdot x_n)$ izango da.

  <u>Propietateak</u>:

  -- elementu neutroa: $\forall \overline{x} \in \text{R}^n$, $\exists\, 1 \in \text{R}$ / $1 \cdot \overline{x} = \overline{x}$

  -- elkarkorra: $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \text{R}$, $\forall \overline{x} \in \text{R}^n$, $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot \overline{x} = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \overline{x})$

  -- banakorra: $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \text{R}$, $\forall \overline{x} \in \text{R}^n$, $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \overline{x} = \lambda_1 \cdot \overline{x} + \lambda_2 \cdot \overline{x}$

  $\forall \lambda \in \text{R}$, $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \text{R}^n$, $\lambda \cdot (\overline{x} + \overline{y}) = \lambda \cdot \overline{x} + \lambda \cdot \overline{y}$

- <u>Konbinazio lineala</u>: $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n \in \mathrm{R}^n$ bektoreak eta $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathrm{R}$ eskalarrak ditugunean, $\lambda_1 \cdot \overline{x}_1 + \lambda_2 \cdot \overline{x}_2 + ... + \lambda_n \cdot \overline{x}_n$ adierazpena, $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n$ bektoreen konbinazio lineala izango da eta $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ eskalarrak konbinazio linealaren koefizienteak izango dira.

  $\overline{v} \in \mathrm{R}^n$ bektorea, $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n \in \mathrm{R}^n$ bektoreen konbinazio lineala dela esango dugu, honako hau egiaztatzen denean:

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathrm{R} \quad / \quad \overline{v} = \lambda_1 \cdot \overline{x}_1 + \lambda_2 \cdot \overline{x}_2 + ... + \lambda_n \cdot \overline{x}_n$$

  $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n \in \mathrm{R}^n$ bektoreen konbinazio lineal guztien multzoa $L < \overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n >$ ikurraren bitartez adieraziko dugu, hau da:

$$L < \overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n > = \left\{ \lambda_1 \cdot \overline{x}_1 + \lambda_2 \cdot \overline{x}_2 + ... + \lambda_n \cdot \overline{x}_n \ / \ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathrm{R} \right\}$$

- <u>Barne-biderketa edo biderketa eskalarra</u>: $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathrm{R}^n \quad \overline{x} \cdot \overline{y} = < \overline{x} / \overline{y} > \in \mathrm{R}$

  Demagun $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ eta $\overline{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ditugula, orduan $< \overline{x} / \overline{y} > = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + ... + x_n \cdot y_n$

  <u>Propietateak</u>:

  -- $\forall \overline{x} \in \mathrm{R}^n \ , \ < \overline{x} / \overline{x} > \ \geq 0$

  -- $< \overline{x} / \overline{x} > = 0 \ \Leftrightarrow \ \overline{x} = \overline{0}$

  -- $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathrm{R}^n \ , \ < \overline{x} / \overline{y} > = < \overline{y} / \overline{x} >$

  -- $\forall \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{y} \in \mathrm{R}^n, \ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{R}$:

$$< \lambda_1 \cdot \overline{x}_1 + \lambda_2 \cdot \overline{x}_2 / \overline{y} > = \lambda_1 < \overline{x}_1 / \overline{y} > + \lambda_2 < \overline{x}_2 / \overline{y} >$$

3.2. Menpekotasun eta independentzia lineala

Demagun $< \overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n >$ R^n-ren bektore-sistema dugula. Bektore bat beste bektoreen konbinazio lineala denean, sistema lotua edo linealki menpekoa dela esaten da. Alderantziz, bektore bat beste bektoreen konbinazio lineal gisa ipini ezin daitekeenean, orduan sistema librea, askea edo linealki independentea dela esaten da.

Demagun $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n$ R^n-ren *n* bektore dugula.

$< \overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n >$ sistema librea izango da, edo $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n$ bektoreak linealki independenteak izango dira, baldin eta soilik baldin hau egiaztatzen bada:

$$\lambda_1 \overline{x}_1 + \lambda_2 \overline{x}_2 + ... + \lambda_n \overline{x}_n = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$

$< \overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n >$ sistema lotua izango da edo $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n$ bektoreak linealki menpekoak izango dira, baldin eta soilik baldin hau egiaztatzen bada:

$$\lambda_1 \overline{x}_1 + \lambda_2 \overline{x}_2 + ... + \lambda_n \overline{x}_n = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad \exists\, \lambda_i \neq 0$$

Sistema bat librea edo lotua den frogatzeko, ekuazio linealezko sistema homogeneo hau plantea dezakegu:

$$A\overline{\lambda} = \overline{0}$$

$A \in M_n$ matrizearen zutabeak $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n$ bektoreen osagaiak dira.

$\overline{\lambda} \in M_{(n,1)}$ matrizearen elementuak, λ_1 , λ_2 , ..., $\lambda_n \in R$, konbinazio linealaren elementuak dira.

$A\overline{\lambda} = \overline{0}$ sistema homogeneoa da, beraz, sistema bateragarria. Gerta daiteke zehaztua edo zehaztugabea izatea:

- $A\overline{\lambda} = \overline{0}$ sistema bateragarri zehaztua bada, Rouché-Frobeniusen teoremaren arabera, $rA = r(A\ /\overline{0}) = n$ = ezezagunen kopurua eta soluzio bakarra izango du: $\overline{\lambda} = \overline{0}$ (soluzio nabaria); orduan, $<\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n>$ sistema librea izango da.

- $A\overline{\lambda} = \overline{0}$ sistema bateragarri zehaztugabea bada, Rouché-Frobeniusen teoremaren arabera, $rA = r(A\ /\overline{0}) < n$ = ezezagunen kopurua, orduan, $<\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n>$ sistema lotua izango da.

Beraz,

$$<\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n> \text{ sistema librea } \Leftrightarrow rA = n$$

$$<\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n> \text{ sistema lotua } \Leftrightarrow rA < n$$

3.3. Ortogonaltasuna. Bektore baten norma. Ortonormaltasuna

3.3.1. Ortogonaltasuna

$\bar{x}$, $\bar{y} \in \mathrm{R}^n$ bektoreen barne-biderkadura 0 denean, ortogonalak direla esaten da.

Bi bektoreen ortogonaltasuna honela adieraziko dugu: $\bar{x} \perp \bar{y}$ adieraziko dugu.

Beraz:

$$\bar{x} \perp \bar{y} \Leftrightarrow < \bar{x} / \bar{y} > = 0$$

$< \bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n >$ bektoreen sistema ortogonala dela esango dugu honako hau egiaztatzen denean:

$$\bar{x}_i \perp \bar{y}_j \qquad \forall\ i \neq j \qquad i, j = 1,2,...,n$$

3.3.2. Bektore baten norma

$\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathrm{R}^n$ bektorearen norma honela definitzen da:

$$\| \bar{x} \| = < \bar{x} / \bar{x} >^{1/2} = +\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

Propietateak:

-- $\forall \bar{x} \in \mathrm{R}^n$, $\| \bar{x} \| \geq 0$

-- $\| \bar{x} \| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$

-- $\forall \lambda \in \mathrm{R}$, $\forall \bar{x} \in \mathrm{R}^n$, $\| \lambda \cdot \bar{x} \| = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|$

3.3.3. Ortonormaltasuna

$<\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n>$ bektoreen sistema ortonormala dela esango dugu, elkar ortogonala bada eta bektore guztien norma 1 bada, hau da:

$$<\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n> \text{ ortonormala} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \bar{x}_i \perp \bar{x}_j & \forall i \neq j \quad i,j = 1,2,....n \\ \|\bar{x}_i\| = 1 & \forall i = 1,2,....n \end{cases}$$

Edozein bektore, hutsa ez dena, norma 1 duen bektore bihur dezakegu, bektore hori bere normaren alderantzizkoaz biderkatuz. Horrela, ortogonala den edozein sistema sistema ortonormal bihur dezakegu.

4. gaia: MATRIZEEN DIAGONALIZAZIOA

4.1. Balio propioa. Bektore propioa. Propietateak. Ekuazio karakteristikoa

4.2. Balio eta bektore propioen kalkulua

4.3. Antzeko matrizeak. Diagonalizazioa

4.1. Balio propioa. Bektore propioa. Propietateak. Ekuazio karakteristikoa

4.1.1. Balio propioa. Bektore propioa

Gai honen helburua $A \in M_n$ matrizearen antzeko matrize diagonala aurkitzea izango da, posiblea denean.
Helburu horretara heltzeko, lehenengo balio eta bektore propioen kontzeptuak aztertuko ditugu.

Definizioa.

$\overline{x} \in \mathrm{R}^n$, $\overline{x} \neq \overline{0}$, $A \in M_n$ matrizearen bektore propioa izango da, $\lambda \in \mathrm{R}$ eskalarra existitzen bada, non $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$ baita.

Definizioa.

$\lambda \in \mathrm{R}$ $A \in M_n$ matrizearen balio propioa izango da, $\overline{x} \in \mathrm{R}^n$, $\overline{x} \neq \overline{0}$, bektorea existitzen bada, non $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$ baita.

Halaber, $\lambda \in \mathrm{R}$ eta $\overline{x} \in \mathrm{R}^n$ balio eta bektore propio elkartuak direla esaten da.

4.1.2. Propietateak

1- $\overline{x} \in R^n$ bektore propio bati elkartutako $\lambda \in R$ balio propioa bakarra da.

Froga:

Demagun λ_1 eta λ_2 eskalarrak ditugula eta, $\overline{x}$ bektore propio bati elkartutako balio propioak direla. Orduan:

$$A\overline{x} = \lambda_1 \overline{x}$$

$$A\overline{x} = \lambda_2 \overline{x}$$

Ekuazioen kenketa eginez: $\overline{0} = \lambda_1 \overline{x} - \lambda_2 \overline{x} \quad \Rightarrow \quad \overline{0} = (\lambda_1 - \lambda_2)\overline{x}$

$\overline{x}$ bektore propioa denez, $\overline{x} \neq \overline{0}$ izango da. Beraz $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ izango da, eta $\lambda_1 = \lambda_2$ izango da.

2- Balio propio bati elkartutako bektore propioen multzoak eta bektore nuluak, osatuko dute R^n-ren azpiespazio bektoriala da.

Froga:

$S(\lambda) = \{ \overline{x} \in R^n \,/\, A\overline{x} = \lambda\overline{x} \}$ multzoa R^n-ren azpiespazio bektoriala izango da baldin eta soilik baldin hau egiaztatzen bada:

$$\forall \overline{x}, \overline{y} \in S(\lambda) \qquad \forall \alpha, \beta \in R, \qquad \alpha\overline{x} + \beta\overline{y} \in S(\lambda)$$

Hau da, $A(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}) = \lambda(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y})$ baldin bada.

$\overline{x} \in S(\lambda) \Rightarrow \overline{x} \in R^n \,/\, A\overline{x} = \lambda\overline{x}$

$\overline{y} \in S(\lambda) \Rightarrow \overline{y} \in R^n \,/\, A\overline{y} = \lambda\overline{y}$

Beraz, $A(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}) = \alpha A\overline{x} + \beta A\overline{y} = \alpha\lambda\overline{x} + \beta\lambda\overline{y} = \lambda(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y})$

3- Desberdinak diren balio propioei elkartutako bektore propioak linealki independenteak dira.

Froga:

Izan bitez, $\overline{x}_1$ eta $\overline{x}_2$ bektoreak λ_1 eta λ_2 balio propioei elkartutako bektore propioak, hurrenez hurren, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ izanik.
Beraz, $A\overline{x}_1 = \lambda_1 \overline{x}_1$ eta $A\overline{x}_2 = \lambda_2 \overline{x}_2$.
Eman dezagun < $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$> sistema lotua dela.
Beraz, $\exists\ \alpha \in R$ ($\alpha \neq 0$), non $\overline{x}_1 = \alpha\ \overline{x}_2$ baita.

$$A\overline{x}_1 = \lambda_1 \overline{x}_1 \Rightarrow A(\alpha\overline{x}_2) = \lambda_1(\alpha\overline{x}_2) \Rightarrow \alpha A\overline{x}_2 = \alpha\lambda_1\overline{x}_2 \Rightarrow \alpha\lambda_2\overline{x}_2 = \alpha\lambda_1\overline{x}_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \alpha(\lambda_2 - \lambda_1)\overline{x}_2 = \overline{0}$$

$\overline{x}_2 \neq \overline{0}$ (bektore propioa baita) eta $\alpha \neq 0$ direnez, $\lambda_2 - \lambda_1 = 0$ izan behar du, baina hori ezinezkoa da, enuntziatuaren aurkakoa baita.
Beraz, $\overline{x}_1$ eta $\overline{x}_2$ bektoreak λ_1 eta λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) balio propioei elkartutako bektore propioak badira, < $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$> sistema librea izango da.

4- $A \in M_n$ matrize erregularra bada, ez du balio propio nulurik.

Froga:

$A\overline{x} = \lambda\overline{x}$
A erregular $\Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$
A^{-1} matrizearekin aurrez biderkatuz: $A^{-1}A\overline{x} = A^{-1}\lambda\overline{x} \quad \Rightarrow \quad \overline{x} = \lambda A^{-1}\overline{x}$
$\lambda = 0$ balitz, orduan $\overline{x} = 0$ izango litzateke, eta hori enuntziatuaren aurkakoa litzateke, $\overline{x}$ bektore propioa baita.

4.1.3. Ekuazio karakteristikoa

$\lambda \in R$ *A*-ren balio propioa izango da, baldin eta soilik baldin existitzen bada $\overline{x} \in R^n$, $\overline{x} \neq \overline{0}$, non $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$ baita.

$A\overline{x} = \lambda\overline{x}$ sistema honela idatz dezakegu: $A\overline{x} - \lambda\overline{x} = \overline{0}$ edo $(A - \lambda I)\overline{x} = \overline{0}$, $I \in M_n$ identitate-matrizea izanik.

$(A-\lambda I)\overline{x} = \overline{0}$, *n* ezezagun eta *n* ekuazio linealezko sistema homogeneoa dugu, eta soluzio ez-nabaria izateko beharrezkoa eta nahikoa da $/A-\lambda I/ = 0$ izatea. Determinante horri *A*-ren polinomio karakteristiko deituko diogu eta honela adieraziko da: $P_A(\lambda) = /A-\lambda I/$.

$P_A(\lambda) = /A-\lambda I/ = 0$ ekuazioari *A*-ren ekuazio karakteristikoa deituko diogu.

Kontzeptu horiek, $A \in M_n$ matrizearen balio eta bektore propio elkartuak aurkitzeko erabiliko ditugu.

4.2. Balio eta bektore propioen kalkulua

Nola kalkulatu $A \in M_n$ matrizearen balio eta bektore propio elkartuak?

$\lambda \in R$, A-ren balio propioa izango da, baldin eta soilik baldin $P_A(\lambda)=|A-\lambda I|=0$ ekuazio karakteristikoaren erroa erreala bada. Horren arabera, n ordenako matrizearen balio propioen kalkulua ekuazio karakteristikoen erro errealen kalkulua besterik ez da.

Ekuazio karakteristikoa n mailakoa bada n balio propio izango ditu.

λ_i balio propioaren anizkoiztasun-ordena da, ekuazio karakteristikoaren erro gisa errepikatuta azaltzen den aldi kopurua adierazten duen zenbakia.

λ_i balio propio bakoitzari elkartutako bektore propioak $(A-\lambda_i I)\overline{x}=\overline{0}$ sistema homogeneoaren soluzio ez-nabariak izango dira.

$$S(\lambda_i) = \{ \overline{x} \in R^n \,/\, (A - \lambda_i I)\overline{x} = \overline{0} \,,\ \overline{x} \neq \overline{0} \}$$

4.3. Antzeko matrizeak. Diagonalizazioa

4.3.1. Antzeko matrizeak

$A,B \in M_n$ antzeko matrizeak izango dira, existitzen bada $P \in M_n$ matrize erregularra, non $B = P^{-1}AP$ baita.

Propietateak:

1- A eta B antzeko matrizeak badira, polinomio karakteristiko bera izango dute.

Froga:

$$P_B(\lambda) = |B - \lambda I| =_{(\text{ A eta B antzeko matrizeak direnez})} = |P^{-1}AP - \lambda I| =_{(P^{-1}P = I)}=$$
$$= |P^{-1}AP - \lambda P^{-1}PI| = |P^{-1}(A - \lambda I) P| = |P^{-1}| |(A - \lambda I)| |P| =$$
$$= |(A - \lambda I)| = P_A(\lambda)$$

2- A eta B antzeko matrizeak badira, determinante bera izango dute.

Froga:

$A, B \in M_n$ antzeko matrizeak direnez, $P \in M_n$ matrize erregularra existitzen da, non $B = P^{-1}AP$ baita.

Beraz: $|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = \frac{1}{|P|}|A||P| = |A|$

4.3.2. Diagonalizazioa

$A \in M_n$ matrizea diagonalgarria dela esango dugu $D \in M_n$ antzeko matrize diagonala existitzen bada: hots, $P \in M_n$ matrize erregularra existitzen bada non $D = P^{-1}AP$ baita.

Teorema: $A \in M_n$ matrizea diagonalgarria izango da, baldin soilik eta baldin n bektore propio linealki independente badu: hau da, A matrizearen bektore propioz osatutako R^n-ren oinarri bat existitzen bada.

Kasu horretan, A-ren antzeko matrizea, $D \in M_n$, honako hau izango da:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

eta $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ izango dira A matrizearen balio propioak.

$P \in M_n$ matrizea: $P = [\ \overline{x}_1 \quad \overline{x}_2 \quad \dots \quad \overline{x}_n\ ]$

$< \overline{x}_1 \quad \overline{x}_2 \quad \dots \quad \overline{x}_n >$, A matrizearen n bektore propio linealki independenteak izanik.

Ondorioa: $A \in M_n$ matrizeak n balio propio desberdin baldin baditu, orduan A diagonalgarria izango da.

Matrize simetrikoen diagonalizazioa

Matrize karratuen diagonalizazioaren problema aztertu ondoren, atal honetan matrize simetrikoen, $A = A^T$ betetzen dutenen, kasu berezia aztertuko dugu. Mota horretako matrizeek erabilera handia baitute estatistikan eta ekonomian.

Matrize simetrikoen diagonalizazioari buruzko zenbait propietate aipatuko ditugu:

Propietateak:

1- $A \in M_n$ simetrikoa bada, bere balio propio guztiak errealak izango dira.

2- $A \in M_n$ simetrikoa bada, bere balio propio desberdinei elkartutako bektore propioak ortogonalak izango dira.

Teorema:

$A \in M_n$ matrize simetrikoa bada, A-ren n bektore propioz osatutako sistema ortonormala existituko da. Beraz, edozein matrize simetriko diagonalgarria izango da, eta A diagonaltzen duen aldaketa-matrizea ortogonala izango da:

$A \in M_n$ simetrikoa $\Rightarrow$ $\exists P$ ortogonala eta D diagonala / $D = P^T A P$

$P = \begin{bmatrix} \frac{\overline{x}_1}{\|\overline{x}_1\|} & \frac{\overline{x}_2}{\|\overline{x}_2\|} & \cdots & \frac{\overline{x}_n}{\|\overline{x}_n\|} \end{bmatrix}$ izanik.

II. GAI MULTZOKO ARIKETAK:

MATRIZEEN DIAGONALIZAZIOA

MATRIZEEN DIAGONALIZAZIOA

1. Demagun $\overline{x}_1 = (1, 1, 1)$, $\overline{x}_2 = (1, 1, 0)$, $\overline{x}_3 = (1, 0, 0)$, $\overline{x}_4 = (1, -3, 5)$ direla.

a) Ba al dago $\overline{x}_4$ bektorea $L< (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)>$ multzoaren barne? Zergatik?

b) Ba al dago $\overline{x}_4$ bektorea $L< (1, 1, 1), (1, 1, 0)>$ multzoaren barne? Zergatik?

2. Kalkula itzazu $a, b, c \in R$, $<(1, 1, 1), (1, 0, -1), (a, b, c)>$ sistema elkar ortogonala izan dadin.

3. Honako sistema hau izanik: $\{(1, 2, 3), (1, 1, -1), (a, b, c)\}$

a) $a, b, c \in R$ izanik *a*-ren, *b*-ren eta *c*-ren zer baliotarako izango da sistema elkar ortogonala?

b) Eman *(a, b, c)* bektorearen adibide bat, bektore hutsa ez dena, sistema elkar ortogonala izan dadin.

c) Bihurtu bektoreen sistema (b ataleko adibidea erabiliz) sistema ortonormala.

4. Lortu $a, b, c \in R$, $< (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (a, b, c)>$ sistema ortonormala izan dadin.

5. Diagonaldu, posiblea bada, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Diagonaldu, posiblea bada, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ diagonalgarria da? Hala bada, aurkitu *A*-ren antzeko matrize diagonal bat.

8. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalgarria da? Hala bada, aurkitu A-ren antzeko matrize diagonal bat.

9. Aurkitu, posiblea bada, $\alpha, \beta \in R$ balioak, $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 8 & 0 \\ \alpha & 0 & 7 \end{pmatrix}$ diagonalgarria izan dadin.

10. Izan bedi $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in R$ izanik, α-ren zer baliotarako izango da A diagonalgarria?

11. Izan bedi $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, non $a+2b=4$ baita eta $<(1,0,0),(-1,1,0),(-3,0,1)>$ A-ren 3 bektore propio. Aurkitu A-ren balio propioak.

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalgarria da? Hala bada, lortu A diagonaltzen duen aldaketa-matrize bat.

13. Aurkitu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ diagonaltzen duen aldaketa-matrize ortogonal bat.

14. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) $a \in R$ izanik, a-ren zer baliotarako izango da A diagonalgarria?

b) $a = 4$ denean, aurkitu A diagonaltzen duen aldaketa-matrize bat eta haren antzeko matrizea.

15. Lortu $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea diagonaltzen duen aldaketa-matrize ortogonala.

16. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Lortu, posiblea bada, A diagonaltzen duen aldaketa-matrize ortogonal bat.

17. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Aurkitu A-ren balio eta bektore propioak.

b) Lortu A diagonaltzen duen aldaketa-matrize ortogonala.

c) Aurkitu A-ren antzeko matrize diagonalaren alderantzizkoa.

18. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Lortu, posiblea bada, A matrizea diagonaltzen duen aldaketa-matrize ortogonala eta haren antzeko matrize diagonala.

III. gai multzoa: ALDAGAI BAKARREKO FUNTZIO ERREALEN KALKULU DIFERENTZIALA

5. gaia: ALDAGAI BAKARREKO FUNTZIO ERREALAK

5.1. Eremua. Aldagai erreal bakarreko funtzio errealen jarraitutasuna

5.2. Deribagarritasuna. Deribatuen kalkulua. Goi-mailako deribatuak

5.3. Funtzio baten haztea eta gutxitzea. Funtzio baten ahurtasuna eta ganbiltasuna

5.4. Funtzioen adierazpen grafikoa. Funtzio linealak, polinomikoak, arrazionalak, trigonometrikoak, esponentzialak, logaritmikoak eta beste batzuk

5.1. Eremua. Aldagai erreal bakarreko funtzio errealen jarraitutasuna

Eskuarki erabiltzen ditugun funtzioak aldagai errealeko funtzio errealak dira. Ikus dezagun zer diren funtzio horiek eta zein diren haien oinarrizko osagaiak.

5.1.1. Eremua

Aldagai bakarreko funtzio erreala honako aplikazio honi deitzen zaio:

$$f : D \subset R \to R$$
$$x \to f(x)$$

Aipatu behar da $x \in D$ balio bakoitzari funtzioak balio bakarra ematen diola.
Funtzio bat aztertzeko lehenengo urratsa definizio-eremua zehaztea da.
x aldagai independenteak har ditzakeen balio guztien multzoari funtzioaren definizio-eremua esaten zaio:hots, funtzioa definituta dagoen puntu guztien multzoa da, eta honela adieraziko dugu: *D*

$$D = \{x \in R \;/\; \exists f(x)\}$$

5.1.2. Aldagai bakarreko funtzio errealen jarraitutasuna.

Funtzioen jarraitutasuna ikasteko oinarrizkoa izango da limiteak zer diren jakitea eta kalkulatzea.

Funtzio baten limitea

Intuitiboki, $f(x)$ funtzioaren limitea x_0 puntuan L dela esaten da, posiblea denean $f(x)$, L-ri nahi beste hurbiltzea, x, x_0-ri ($x \neq x_0$ izanik) mugarik gabe hurbiltzen zaionean.

Modu matematikoan honela izango litzateke:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 \; / \; | \, x - x_0 | < \delta \Rightarrow | \, f(x) - L \, | < \varepsilon$$

Emandako definizioa kontuan izanik, bi modu daude x, x_0-ri hurbiltzeko eskuinetik, $x \to x_0^+$ $(x > x_0)$ eta ezkerretik $x \to x_0^-$ $(x < x_0)$. Horrela alboko limiteak lortzen dira: $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ eta $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$

Definizioz, funtzio baten limitea existitzeko, alboko bi limiteek (eskuinekoak eta ezkerrekoak) berdinak izan behar dute.
Funtzio batek puntu batean limitea duenean, limite hori bakarra izango da.

Limiteen propietateak

Demagun $\lim_{x \to x_0} f(x)$ eta $\lim_{x \to x_0} g(x)$ ditugula:

1. Bi funtzioen arteko baturaren (kenduraren) limitea funtzio bakoitzaren limiteen batura (kendura) da.

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

2. Konstante bat eta funtzio baten arteko biderkaduraren limitea konstantearen eta funtzioaren limitearen biderkadura da.

$$\forall k \in R, \ \lim_{x \to x_0} k\, f(x) = k \lim_{x \to x_0} f(x)$$

3. Funtzioen arteko biderkaduraren limitea funtzio bakoitzaren limiteen biderkadura da.

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

4. Funtzioen arteko zatiduraren limitea funtzio bakoitzaren limiteen zatidura da, izendatzailea zero ez denean.

$\lim_{x \to x_0} [f(x) / g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) / \lim_{x \to x_0} g(x)$; $g(x) \neq 0$ eta $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$ izanik.

Funtzioen jarraitutasuna

Izan bedi $f:D\subset R\rightarrow R$ jarraitua da $x_0\in D$ puntuan, baldin eta soilik baldin funtzioaren balioa puntu horretan eta puntu horretako limitea berdinak badira. Hots, $f(x_0) = \lim\limits_{x\rightarrow x_0} f(x)$.

Beraz, funtzio bat puntu batean jarraitua izateko honako baldintza hauek bete behar dira:

- Funtzioa puntu horretan definitua egotea.
- Puntu horretan funtzioaren limitea existitzea.
- Funtzioaren balioa puntu horretan eta puntu horretako limitea berdinak izatea.

Aurreko baldintzetariko bat betetzen ez denean, funtzioa puntu horretan ez-jarraitua edo etena dela esaten da.
Bestalde, funtzioa *D* multzoan jarraitua dela esaten da multzo horretako puntu guztietan jarraitua denean.

Funtzio jarraituak

- Funtzio polinomikoak jarraituak dira zenbaki errealen multzo osoan.
- Bi funtzioen arteko zatiketatik lortutako funtzio arrazionalak jarraituak dira *R* multzoaren puntu guztietan, izendatzailea zero denean izan ezik.
- Funtzio potentzialak, esponentzialak eta logaritmikoak jarraituak dira beren eremuetan.
- Sinu eta kosinu funtzio trigonometrikoak jarraituak dira zenbaki errealen multzo osoan (tangente funtzioa etena da $\frac{\pi}{2}$ren multiplo bakoitietan).

Funtzio jarraituen propietateak

Izan bitez f eta g funtzioak jarraituak x_0 puntuan:

1. f eta g funtzio jarraituen arteko batura eta kendura x_0 puntuan funtzio jarraitua izango da.

   $(f \pm g)$ jarraitua x_0 puntuan

2. f funtzio jarraituaren eta λ zenbaki errealaren arteko biderkadura funtzioa jarraitua izango da.

   $(\lambda \cdot f)$ jarraitua x_0 puntuan $\lambda \in R$

3. f eta g funtzio jarraituen arteko biderkadura x_0 puntuan funtzio jarraitua izango da.

   $(f \cdot g)$ jarraitua x_0 puntuan

4. f eta g funtzio jarraituen arteko zatidura x_0 puntuan jarraitua izango da, izendatzailea zero denean izan ezik.

   (f/g) jarraitua x_0 puntuan ($g(x_0) \neq 0$)

5.2. Deribagarritasuna. Deribatuen kalkulua. Goi-mailako deribatuak

5.2.1. Deribagarritasuna. Deribatuen kalkulua.

Deribagarritasun eta jarraitutasun kontzeptuek harreman estua dute. Deribatuaren kontzeptua zehatzagoa da. Deribatuak adierazten du, funtzioak bere eremuko bi puntu hurbilen artean duen aldakuntza infinitesimala. Deribatuaren kontzeptua limitearen kontzeptuarekin erlazionatuta dago.

Izan bitez $f:D\subset R\rightarrow R$ eta $x_0 \in D$.

f, deribagarria da x_0 puntuan, honako limitea existitzen bada eta finitua bada:

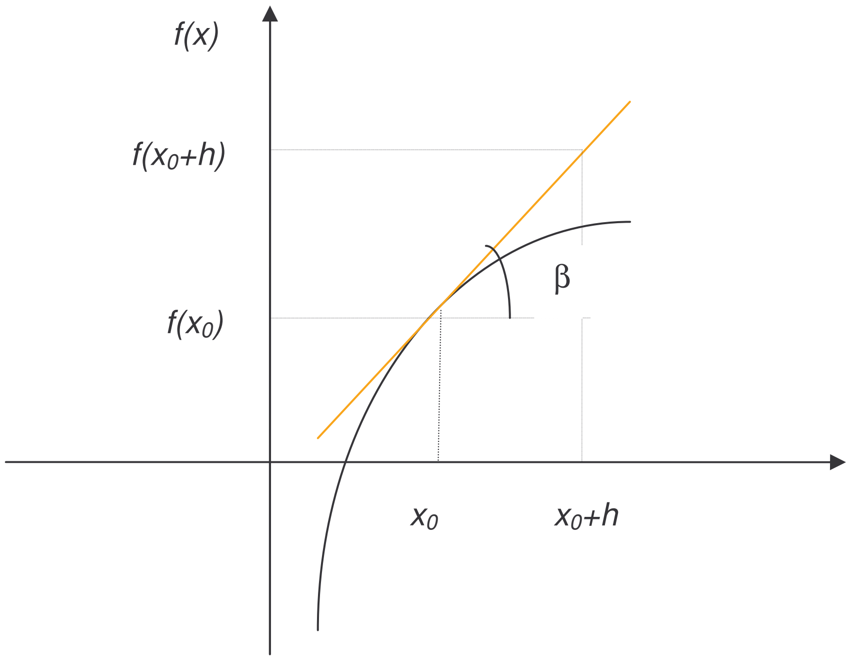
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Limite hori *f* funtzioaren deribatua da x_0 puntuan, eta honela adierazten da: $f'(x_0)$

Deribatuaren interpretazio geometrikoa

Funtzio baten deribatua puntu batean da, puntu horretan sortzen den kurbarekiko ukitzaile den zuzenaren malda eta funtzioaren haztea ingurune horretan neurtzen du. Deribatua positiboa denean funtzioa gorakorra izango da, eta deribatua negatiboa denean funtzioa beherakorra izango da.

Deribatuak $y = f(x)$ grafikoaren zuzen ukitzailearen malda adierazten du x_0 abzisako puntuan. Beraz, $y = f(x)$ kurbarekiko zuzen ukitzailearen ekuazioa x_0 abzisako puntuan, hau da: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.



$$\mathrm{tg}\beta = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Alboko deribatuak

Ikusi dugun bezala, deribatuaren kontzeptua limitearen kontzeptuarekin erlazionatuta dago. Beraz, limiteekin gertatzen zen bezala, alboko deribatuak defini daitezke:

f-ren ezker-deribatua x_0 puntuan honela definitzen da:

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

f-ren eskuin-deribatua x_0 puntuan honela definitzen da:

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Funtzio batek eskuin-deribatua eta ezker-deribatua dituenean eta haien balioak berdinak direnean, deribagarria da.

Funtzio bat puntu batean deribagarria bada, nahi eta nahi ez, puntu horretan jarraitua da. Baina funtzio bat puntu batean jarraitua izan daiteke eta ez deribagarria.

Deribagarritasuna $\Rightarrow$ jarraitutasuna

5.2.2. Deribatuen kalkulua

Eskuarki, funtzioaren deribatuak “deribazio erregelak“ erabiliz lortzen dira. Erregela horien bidez, edozein funtzioren deribatua errazago eta azkarrago lor daiteke. Lehenik, deribazioaren propietateak ezagutu behar dira:

Deribazioaren propietateak

Izan bitez f eta g funtzioak deribagarriak x_0 puntuan:

1. Funtzio deribagarrien arteko batura eta kendura puntu horretan funtzio deribagarria izango da.

$(f \pm g)$ deribagarria x_0 puntuan

$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

2. Funtzio deribagarriaren eta λ zenbaki errealaren arteko biderkadura funtzio deribagarria izango da.

$(\lambda \cdot f)$ deribagarria x_0 puntuan, $\lambda \in R$

$(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$

3. Bi funtzio deribagarriren arteko biderkadura puntu horretan funtzio deribagarria izango da.

$(f \cdot g)$ deribagarria x_0 puntuan

$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

4. Funtzio deribagarrien arteko zatidura puntu horretan deribagarria izango da, izendatzailea zero denean izan ezik.

(f/g) deribagarria x_0 puntuan ($g(x_0) \neq 0$)

$$(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Deribazio-erregelak

Ikusi dugu definizioa aplikatuz funtzio baten deribatua zelan lortzen den. Baina badira oinarrizko edozein funtzioren deribatua erraz eta arin aurkitzeko erregela praktiko batzuk.

$f(x_0) = k$	$f'(x_0) = 0$
$f(x_0) = x^k$	$f'(x_0) = k \cdot x^{k-1}$
$f(x_0) = e^x$	$f'(x_0) = e^x$
$f(x_0) = a^x$	$f'(x_0) = a^x \cdot \log a$
$f(x_0) = \ln x$	$f'(x_0) = \dfrac{1}{x}$
$f(x_0) = \log_a x$	$f'(x_0) = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$
$f(x_0) = \sin x$	$f'(x_0) = \cos x$
$f(x_0) = \cos x$	$f'(x_0) = - \sin x$
$f(x_0) = tg\, x$	$f'(x_0) = 1 + tg^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$f(x_0) = arc \sin x$	$f'(x_0) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x_0) = arc \cos x$	$f'(x_0) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x_0) = arc\, tg\, x$	$f'(x_0) = \dfrac{1}{1+x^2}$

5.2.3. Goi-mailako deribatuak

Funtzio bat multzo bateko puntu guztietan deribagarria bada, multzo horretan definituta dagoen $f':D \subset R \rightarrow R$ funtzioari f-ren funtzio deribatua esaten zaio.

Beraz, funtzio bat deribatzean beste funtzio bat lortzen da.

Horrela, f' deribagarria bada, bere deribatuari f-ren bigarren deribatua esango diogu, eta f'' idazten da.

Eta, horrela jarraituz gero, funtzioak deribatzen ahal diren neurrian, f-ren hirugarrena, laugarrena,..., n-garrena defini ditzakegu: f''', f^4,..., f^n.

5.3. Funtzio baten haztea eta gutxitzea. Funtzio baten ahurtasuna eta ganbiltasuna

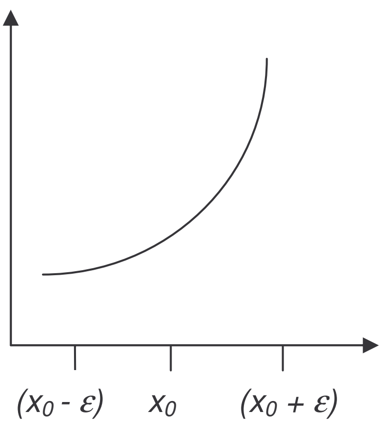
5.3.1. Funtzio baten haztea eta gutxitzea

Funtzio bat aztertzeko garrantzitsua da funtzioaren haztea eta gutxitzea aztertzea.

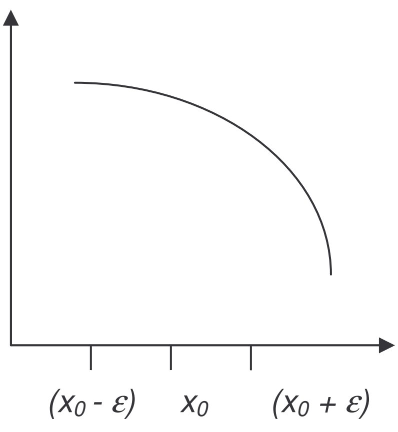
Izan bitez $f:D\subset R\rightarrow R$ eta $x_0 \in D$:

f gorakorra da x_0 puntuan, $E(x_0, \varepsilon)$ existitzen bada, eta, non x_1 , $x_2 \in E(x_0, \varepsilon)$ izanik, $x_1 \leq x_0 \leq x_2$ bada orduan: $f(x_1) \leq f(x_0) \leq f(x_2)$.

f beherakorra da x_0 puntuan, $E(x_0, \varepsilon)$ existitzen bada, eta, non x_1, $x_2 \in E(x_0, \varepsilon)$ izanik, $x_1 \leq x_0 \leq x_2$ bada orduan: $f(x_1) \geq f(x_0) \geq f(x_2)$.



Funtzio gorakorra x_0-n



Funtzio beherakorra x_0-n

Funtzio baten haztearen eta haren deribatuaren arteko erlazioa

f deribagarria bada $D \subset R$ multzoan,

$f'(x_0) > 0$ bada, orduan *f* hertsiki gorakorra da x_0 puntuan.

$f'(x_0) < 0$ bada, orduan *f* hertsiki beherakorra da x_0 puntuan.

$\forall x \in D \;\; f'(x) > 0$ bada, orduan *f* hertsiki gorakorra da *D* multzoan.

$\forall x \in D \;\; f'(x) < 0$ bada, orduan *f* hertsiki beherakorra da *D* multzoan.

$\forall x \in D \;\; f'(x) \geq 0$ bada, orduan *f* gorakorra da *D* multzoan.

$\forall x \in D \;\; f'(x) \leq 0$ bada, orduan *f* beherakorra da *D* multzoan.

Maximoak, minimoak. Definizioak

Zenbait puntutan funtzioaren joera aldatzen da, funtzioak puntu horietan maximoak eta minimoak lortzen dituela esaten da.

Tarte batean funtzio bat gorakorra izatetik beherakorra izatera aldatzen den puntua da funtzioaren maximoa, eta funtzioa beherakorra izatetik gorakorra izatera aldatzen den puntua, minimoa.

Puntu batean maximoa dagoela esaten denean, funtzioak puntu horretan gainerako puntuetan baino balio handiagoa duela adierazi nahi da.

Puntu batean minimoa dagoela esaten denean, funtzioak puntu horretan gainerako puntuetan baino balio txikiagoa duela adierazi nahi da.

Izan bitez $f:D\subset R\rightarrow R$ eta $x_0 \in D$.

f-k maximo lokala lortzen du x_0 puntuan: $\exists\ \varepsilon>0\ /\ f(x_0)\ \geq\ f(x)\ \ \forall x\in\ E(x_0,\ \varepsilon)\cap D$

f-k minimo lokala lortzen du x_0 puntuan: $\exists\ \varepsilon>0\ /\ f(x_0)\ \leq\ f(x)\ \ \forall x\in\ E(x_0,\ \varepsilon)\cap D$

f-k maximo lokal hertsia lortzen du x_0 puntuan: $\exists\ \varepsilon>0\ /\ f(x_0)>f(x)\ \forall x\in E(x_0,\varepsilon)\cap D$

f-k minimo lokal hertsia lortzen du x_0 puntuan: $\exists\ \varepsilon>0\ /\ f(x_0)<f(x)\ \forall x\in E(x_0,\ \varepsilon)\cap D$

f-k maximo globala lortzen du x_0 puntuan: $f(x_0)\ \geq\ f(x)\ \ \forall x\in\ D$

f-k minimo globala lortzen du x_0 puntuan: $f(x)\ \leq\ f(x_2)\ \ \forall x\in\ D$

f-k maximo global hertsia lortzen du x_0 puntuan: $f(x_0)\ >\ f(x)\ \ \forall x\in\ D$

f-k minimo global hertsia lortzen du x_0 puntuan: $f(x_0)\ <\ f(x_2)\ \ \forall x\in\ D$

Funtzio deribagarri baten muturren kokapena zehazteko, puntuaren ingurunean deribatuaren zeinua aztertu beharko da.

f-k maximo edo minimo lokala x_0 puntuan lortzeko, beharrezko baldintza $f'(x_0)=0$ izatea da.

$f'(x_0)=0$ betetzen duten puntuei puntu singularrak edo puntu bereziak esaten zaie.

Baina gerta daiteke $f'(x_0) = 0$ izatea eta ez egotea maximorik ez minimorik x_0 puntuan. Adibidez: $f(x) = x^3$ funtzioak $f'(0) = 0$ izanik ere, puntu horretan ez du ez maximorik ez minimorik.

Beraz, baldintza nahikoa, aztertu behar dugu:

Izan bedi f funtzioa deribagarria $k > n$ mailaraino,

$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) =...= f^{n-1}(x_0)= 0$ eta $f^n(x_0) \neq 0$, orduan:

n bikoitia eta $f^n(x_0) < 0$ bada, f-k x_0 puntuan maximo lokal hertsia lortuko du.

n bikoitia eta $f^n(x_0) > 0$ bada, f-k x_0 puntuan minimo lokal hertsia lortuko du.

n bakoitia eta $f^n(x_0) < 0$ bada, f x_0 puntuan beherakorra izango da.

n bakoitia eta $f^n(x_0) > 0$ bada, f x_0 puntuan gorakorra izango da.

Funtzio baten maximoak eta minimoak aztertzean, kontuan izan behar da, lehenik, deribatua zer diren puntutan den zero eta eremuko zer puntutan ez den funtzioa deribagarria.

Horrela, puntu batean funtzioa deribagarria ez bada baina bai jarraitua, funtzioaren balioa eta monotonia aztertuko dira puntu horretan, mutur bat izan daiteke eta.

f gorakorra bada $(x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0)$-n eta beherakorra $(\ x_0,\ x_0 + \varepsilon)$-n, orduan *f*-k x_0 puntuan maximo lokala lortuko du.
f beherakorra bada $(x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0)$-n eta gorakorra $(\ x_0,\ x_0 + \varepsilon)$-n, orduan *f*-k x_0 puntuan minimo lokala lortuko du.

5.3.2. Funtzio baten ahurtasuna eta ganbiltasuna

Azpiatal honetan funtzio baten kurbadura mota aztertuko dugu: ahurtasuna edo ganbiltasuna.

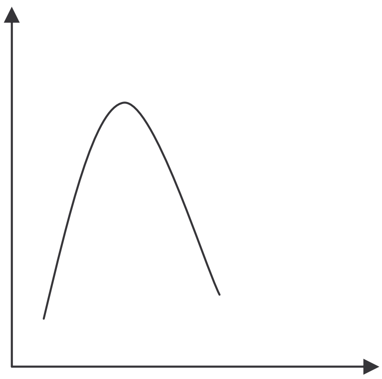
Izan bitez $f{:}D\subset R\rightarrow R$ eta $I \subset D$
f ganbila *I* tartean: $f(\lambda a+(1-\lambda)b) \leq \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b) \quad \forall\, a,b\in I \quad \forall\lambda\in [\,0,\,1]$
f ahurra *I* tartean: $f(\lambda a+(1-\lambda)b) \geq \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b) \quad \forall\, a,b\in I \quad \forall\lambda\in [\,0,\,1]$
f hertsiki ganbila *I* tartean: $f(\lambda a+(1-\lambda)b) < \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b) \forall\, a,b\in I \forall\lambda\in [\,0,1]$
f hertsiki ahurra *I* tartean: $f(\lambda a+(1-\lambda)b) > \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b) \quad \forall\, a,b\in I \quad \forall\lambda\in [\,0,\,1]$

Funtzioa deribagarria den kasuetan kurbadura motaren ezaugarriak zein diren (ahurtasuna, ganbiltasuna, inflexio-puntuak) modu matematikoan adierazteko erarik onena kurba hori beraren ukitzailearekin konparatzea da.

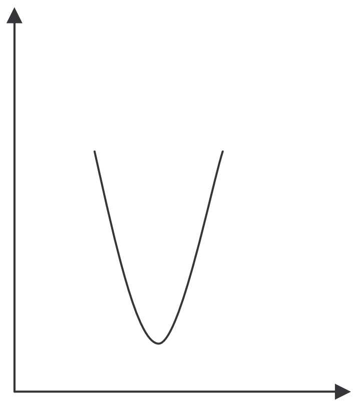
Izan bitez $f:D\subset R\rightarrow R$ eta $x_0 \in D$

f ahurra izango da x_0 puntuan, puntu horren ingurunean funtzioak hartzen dituen balioak zuzen ukitzailearen balioak baino txikiagoak badira. Hots, funtzioa ahurra bada, funtzioa grafikoki adierazten duen kurba, ez da inoiz egongo, kurba horrekiko ukitzaileak diren zuzenen gainean, edo zehatzago, ez da inoiz egongo zuzen ukitzaile horien gainean.

f ganbila izango da x_0 puntuan, puntu horren ingurunean funtzioak hartzen dituen balioak, zuzen ukitzailearen balioak baino handiagoak badira. Hots, funtzioa ganbila bada, funtzioa grafikoki adierazten duen kurba, ez da inoiz egongo, kurba honekiko ukitzaileak diren zuzenen azpitik, edo zehatzago, ez da inoiz egongo zuzen ukitzaile horien azpian.



ahurra



ganbila

Funtzioa ganbila izatetik ahurra izatera, edo alderantziz, aldatzen den puntuei inflexio-puntuak, deitzen zaie.

Oro har, funtzioa deribagarria denean, bere kurbadura motaren azterketa honako hau dugu:

Izan bitez $f:[a, b] \subset R \rightarrow R$ deribagarria $k>n$ mailaraino eta $x_0 \in (a, b)$ non
$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{n-1}(x_0) = 0$ eta $f^n(x_0) \neq 0$ baitira, orduan:
n bikoitia eta $f^n(x_0) < 0$ bada, f ahurra izango da x_0 puntuan
n bikoitia eta $f^n(x_0) > 0$ bada, f ganbila izango da x_0 puntuan
n bakoitia eta $n>1$ bada, x_0 inflexio-puntua izango da.

5.4. Funtzioen adierazpen grafikoa. Funtzio linealak, polinomikoak, arrazionalak, trigonometrikoak, esponentzialak, logaritmikoak eta beste batzuk

Atal honetako helburua adierazpen analitikoaren bitartez emandako funtzio bat grafikoki adieraztea izango da. Horretarako, aurreko ataletan ikusitako kontzeptu guztiak erabili beharko dira. Halaber, infinituan funtzioaren joera aztertzea baliagarria izango da. Beraz, lehenengo, funtzio baten asintotak ikasiko ditugu.

Funtzio baten asintotak

Funtzio baten asintota da zuzen bat, infinituan funtzioaren adierazpen grafikoa hurbiltzen zaiona, haien arteko distantzia *0*-ra hurbiltzen delarik, menpeko aldagaia edo aldagai independentea edo biak ∞-rantz hurbiltzen direnean. Hori dela eta, honako asintota mota hauek izan daitezke:

- Asintota bertikala:

Funtzio baten asintota bertikala $x = a$ ekuazioko zuzena izango da, puntu horretan alboko limiteen balioa $+\infty$ edo $-\infty$ bada, hots:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{edo} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

- Asintota horizontala:

Funtzio baten asintota horizontala $y = b$ ekuazioko zuzena izango da, funtzioak gutxienez alboko limite bat baldin badu x, $+\infty$-ra edo $-\infty$-ra hurbiltzen denean limite horren balioa b bada, hots:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \quad \text{edo} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

- Asintota zeiharra:

Funtzio baten asintota zeiharra, $y = mx + n$ ekuazioko zuzena izango da, eta m eta n honako hauek dira:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0 \quad \text{eta} \quad n = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$$

Daukagun informazio guztia bilduz, funtzioaren adierazpen grafikoa egin dezakegu. Beti ez da beharrezkoa izango tresna guztiak aztertzea, baina ondo dago eskura izatea eta nola erabili behar diren jakitea. Ikus ditzagun tresna horiek guztiak.

Funtzioen adierazpen grafikoa

Funtzio baten adierazpen grafikoa honako urrats hauek eginez lor daiteke:

1. Definizio-eremua aztertu.

2. Simetriak bilatu.

f funtzio baten grafikoa *Y* ardatzarekiko simetrikoa da, $f(-x) = f(x) \ \forall x \in D$ betetzen bada.

f funtzio baten grafikoa koordenatu-ardatzaren jatorriarekiko simetrikoa da, $f(-x) = - f(x) \ \forall x \in D$ betetzen bada.

Funtzio bat simetrikoa bada, nahikoa dugu kurba erdia bakarrik irudikatzea eta, gero, beste erdia simetria bidez egitea.

3. Periodikotasuna bilatu.

Funtzio bat periodikoa izango da, aldagaiaren balioaren tarte finkoetan errepikatzen bada, hau da, $f(x) = f(x+p) \ \forall x \in D$ bada, $p \in$ R funtzioaren periodoa izanik.

Funtzio bat periodikoa dela jakiteak asko laguntzen du haren adierazpena egiteko. Kurba periodo batean bakarrik eraiki daiteke eta, gero, modu periodikoan zabaldu, zati hori behin eta berriro eginez.

4. Ardatzekin dituen ebakidura-puntuak lortu.

Funtzio batek ardatz horizontalarekin duen ebakidura $f(x) = 0$ eginez lortzen da, eta ardatz bertikalarekin duen ebakidura lortzen da aldagai askeak baliogabetzen duen $y = f(0)$ funtzioaren balioa kalkulatuz.

5. Asintotak kalkulatu.

6. Haztea, gutxitzea eta muturrak aztertu.

7. Ahurtasuna, ganbiltasuna eta inflexio-puntuak aztertu.

8. Daukagun informazio guztia bildu eta funtzioa irudikatu.

Oinarrizko funtzioak

- Funtzio linealak: $f(x) = mx + b$ motakoak dira, $m, b \in$ R izanik.
m balioa konstante bat da eta zuzenaren malda adierazten du.
Eremua zenbaki errealen multzoa da.

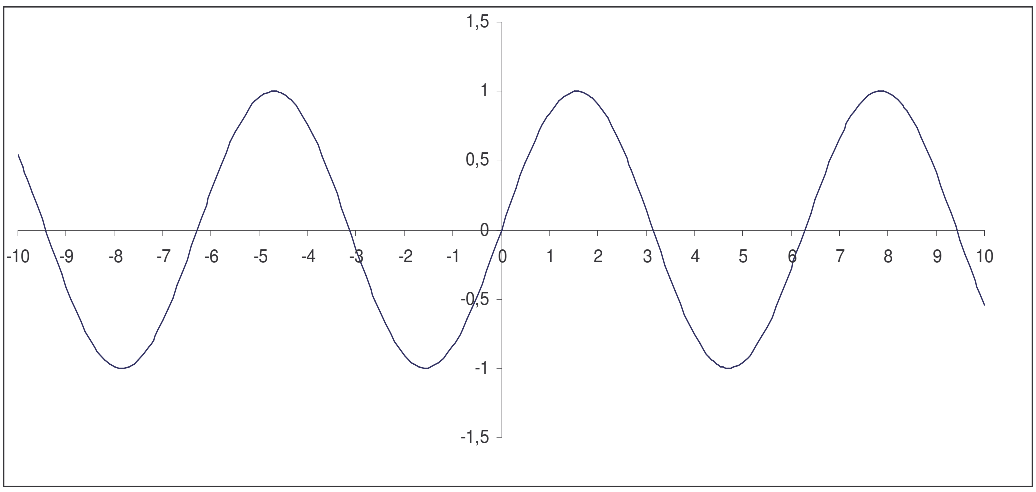
- Funtzio polinomikoak: $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + ... + a_n \cdot x^n$ motakoak dira, $a_i \in R$ izanik.
Eremua zenbaki errealen multzoa da.

- Funtzio arrazionalak: $f(x) = P(x) / Q(x)$ motakoak dira, $P(x)$ eta $Q(x)$ polinomioak izanik.
Eremua zenbaki errealen multzoa da $Q(x)$-ren erroak izan ezik.

- Funtzio trigonometrikoak: garrantzitsuenetariko batzuk honako hauek ditugu:

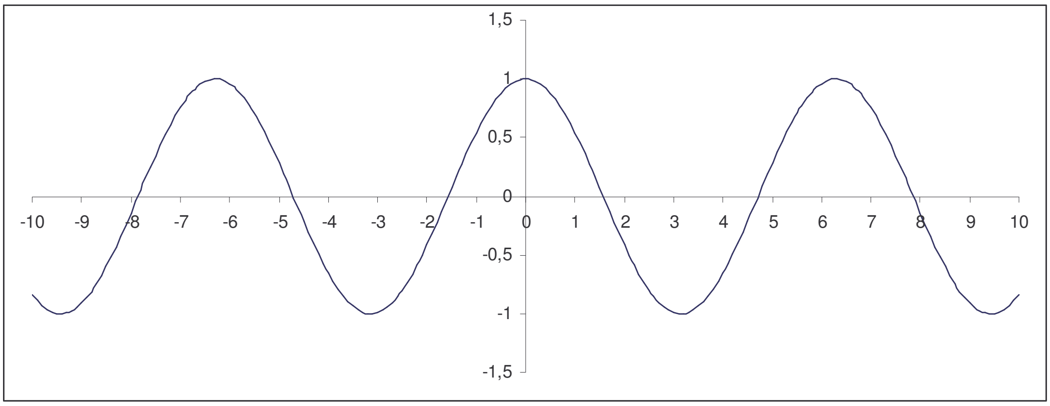
$f(x_0) = sin\ x$

Eremua zenbaki errealen multzoa da eta funtzio bornatua da.



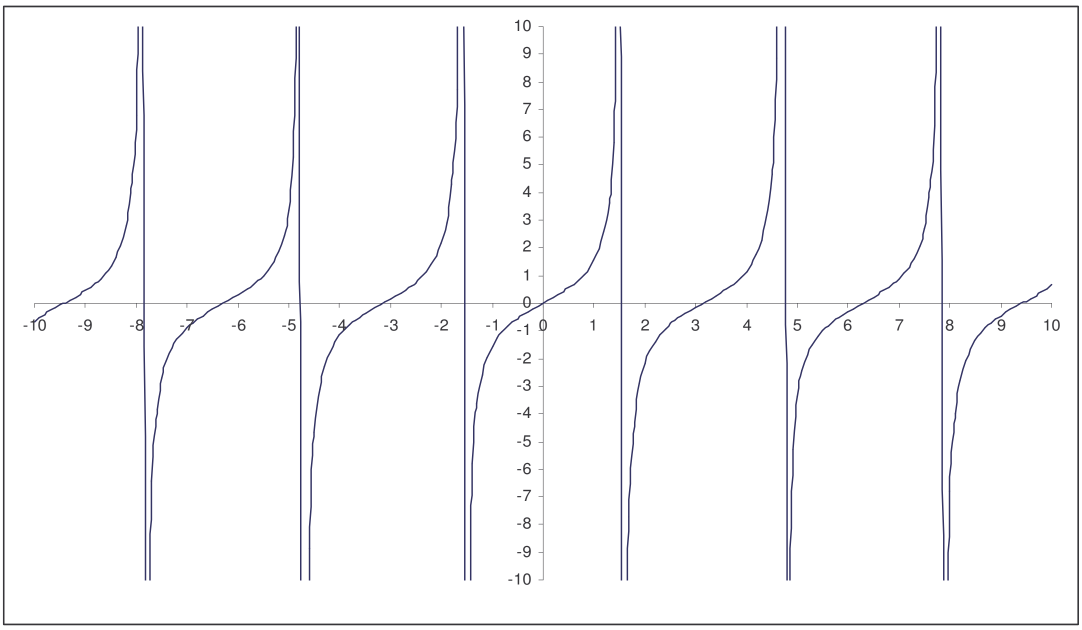
f(x_0) = cos x

Eremua zenbaki errealen multzoa da eta funtzio bornatua da.

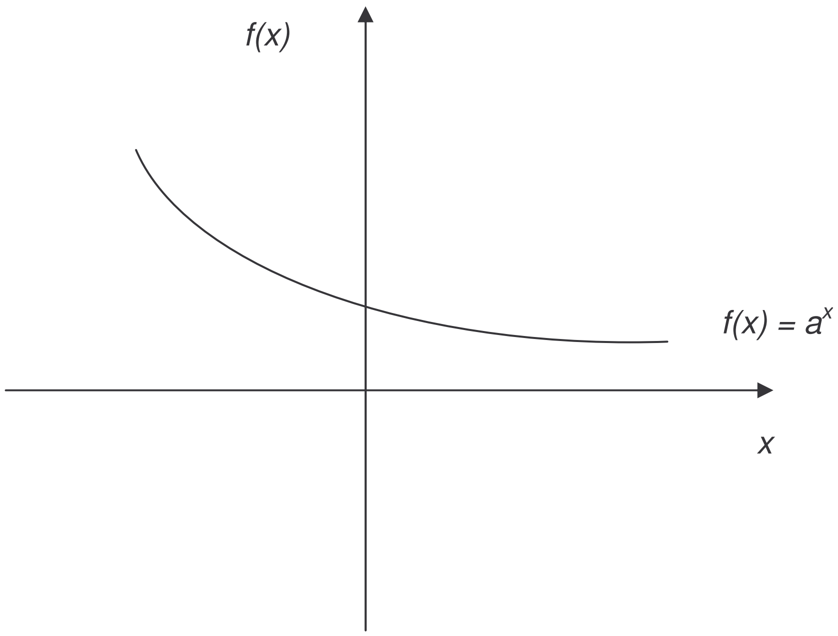


f(x_0) = tg x

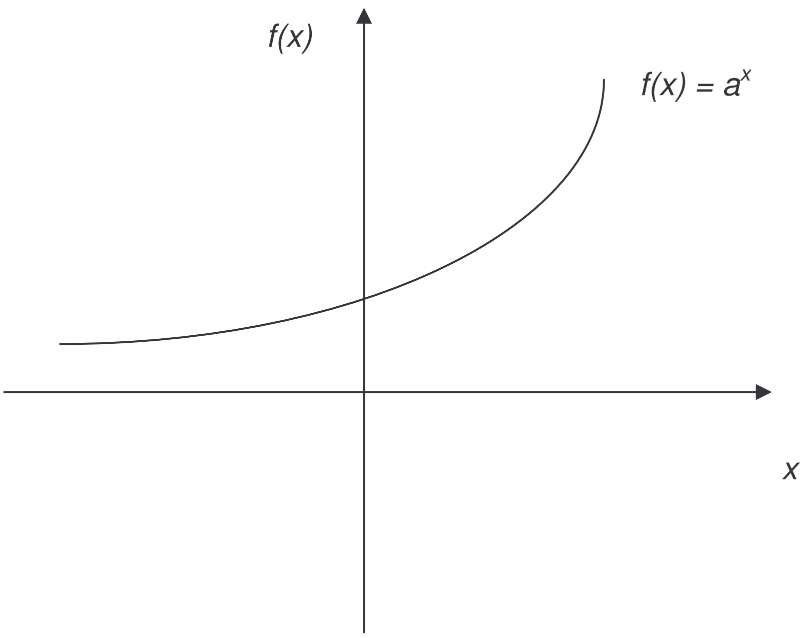
Eremua zenbaki errealen multzoa da, kosinua 0 den kasuetan izan ezik, hots: $D = R - \{(2k+1) \cdot \pi/2 \ / \ k \in R\}$, eta ez da funtzio bornatua.



- Funtzio esponentzialak: $f(x) = a^x$ motakoak dira, $a \in R$ eta $a>0$ izanik. Eremua zenbaki errealen multzoa da.



$0 < a < 1$

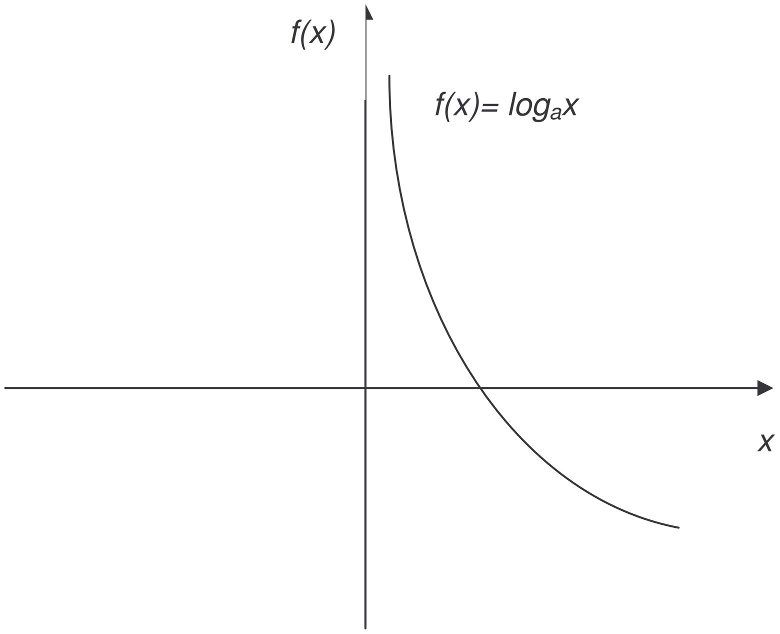


$a > 1$

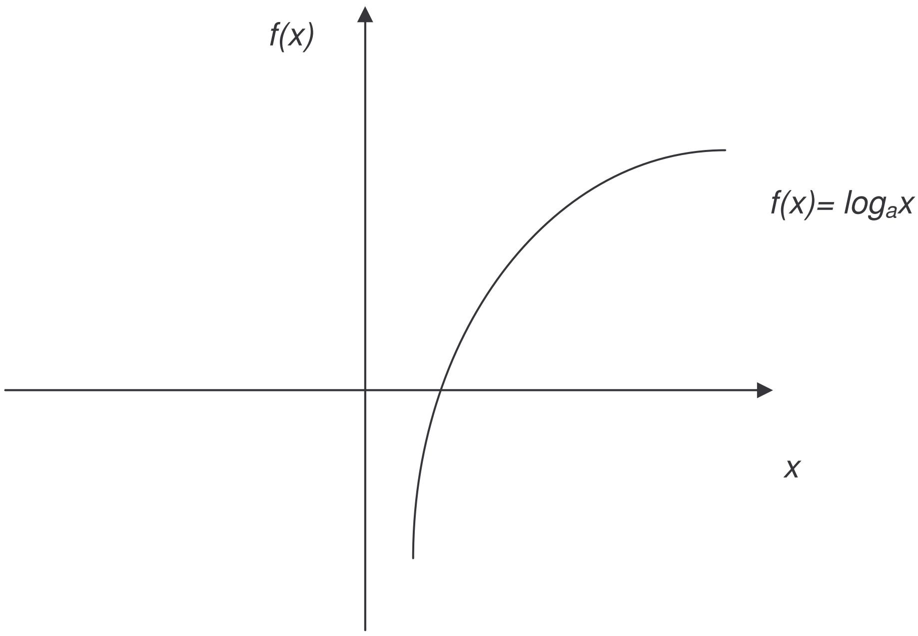
- Funtzio logaritmikoak: $f(x) = \log_a x$ motakoak dira.

Funtzio esponentzialen alderantzizkoa da.

Eremua zenbaki erreal positiboen multzoa da.



$0 < a < 1$



$a > 1$

III. GAI MULTZOKO ARIKETAK:

ALDAGAI BAKARREKO FUNTZIO ERREALEN KALKULU DIFERENTZIALA

ALDAGAI BAKARREKO FUNTZIO ERREALEN KALKULU DIFERENTZIALA

1. Aztertu honako funtzio hauen jarraitutasuna, eta adierazi haien tarte gorakor eta beherakorrak:

a) $f(x) = 1 - 4x - x^2$

b) $f(x) = (x-2)^2$

c) $f(x) = x\ln x$

d) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

e) $f(x) = x + \sin x$

2. Izan bedi $f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x^3 & 0 \le x < 1 \\ \sqrt{x-1} & x \ge 1 \end{cases}$.

a) Aztertu *f*-ren eremua.

b) Aztertu *f*-ren jarraitutasuna eta deribagarritasuna.

3. Izan bedi $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{xe^x} & x \le -1 \\ |x| & -1 < x \le 2 \\ \dfrac{1}{(x-2)^2} & x > 2 \end{cases}$.

a) Aztertu *f*-ren eremua.

b) Aztertu *f*-ren jarraitutasuna eta deribagarritasuna.

4. Izan bedi $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$

a) Aztertu *f*-ren jarraitutasuna.

b) Aztertu *f*-ren deribagarritasuna.

c) Aztertu *f*-ren haztea eta gutxitzea.

d) Aztertu ahurtasuna eta ganbiltasuna.

e) Egin funtzioaren adierazpen grafikoa.

f) Egin funtzioaren adierazpen grafikoa.

5. Izan bedi $f(x) = \dfrac{2 - x}{x^2 + x - 2}$.

a) Aztertu *f*-ren eremua.

b) Aztertu *f*-ren jarraitutasuna.

c) Aztertu *f*-ren deribagarritasuna.

d) Aztertu *f*-ren haztea eta gutxitzea.

e) Egin funtzioaren adierazpen grafikoa.

6. Izan bedi $f(x) = Ln\,(x^2 - 1)$

a) Aztertu *f*-ren eremua.

b) Aztertu *f*-ren jarraitutasuna eta deribagarritasuna.

c) Aztertu *f*-ren haztea eta gutxitzea.

d) Aztertu ahurtasuna eta ganbiltasuna.

e) Egin funtzioaren adierazpen grafikoa.

7. Izan bedi $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

a) Aztertu *f*-ren eremua.

b) Aztertu *f*-ren jarraitutasuna eta deribagarritasuna.

c) Egin funtzioaren adierazpen grafikoa.

8. Adierazi grafikoki honako funtzio hauek:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^3$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

9. Adierazi grafikoki honako funtzio hauek:

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

c) $f(x) = e^{-x}$

d) $f(x) = tgx$

e) $f(x) = lnx$

10. Aztertu eta adierazi grafikoki honako funtzio hauek:

a) $f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 5$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 - 4}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 5}{x+2}$

e) $f(x) = \dfrac{ln\,x}{x}$