4. GAIA

Indar zentralak

4.1 IRUDIA Planeten higiduraren ezaugarri batzuen simulazio mekanikoa zientzia-museoan.

Aparteko garrantzia izan dute fisikaren historian indar zentralek: nahikoa da Newton-ek bere grabitazio unibertsalaren legea eguzki-sistemari aplikatzean izan zuen arrakasta (Halley-ek orain bere izena duen kometa itzuliko zela aurresatean, adibidez) gogoratzea. Fisika kuantikoan ere lehenago aztertu zen problema, hidrogeno atomoarena, indar zentralen menpeko higidura izan zen. Aitortu behar da oso mesedegarria izan zela funtsezko problema horietan agertzen diren indarrak zentralak izatea, zeren horrelakoak oso bereziak baitira. Izan ere, oso propietate bereziak betetzen dituzte, energia mekanikoaren eta momentu angeluarraren kontserbazio-legeekin hasita. Areago, aipaturiko problemetan indar newtondarrak agertzen dira eta hauek (harmonikoekin batera) indar-eremu zentral errazenak dira. Errazenak eta bereziegiak esan beharko genuke, horrelakoek dituzten propietate batzuk ez baitira betetzen indar zentral orokorrekin (ikus Bertrand-en teorema 133. orrian).

Kontsidera ditzagun hurrengo bi problemak:

1. Indar-eremu zentral batean higitzen den m masako partikula bakarra. Erreferentzia-sistema inertzialaren jatorria indar-poloan aukeratzen badugu (1.3.5 atalean egin genuen bezala) eta partikularen posizio-bektorea $\mathbf{r}$ bada, honelakoa da indarra:

$$\mathbf{F} = F(r)\,\frac{\mathbf{r}}{r} = F(r)\,\hat{\mathbf{r}}. \tag{4.1}$$

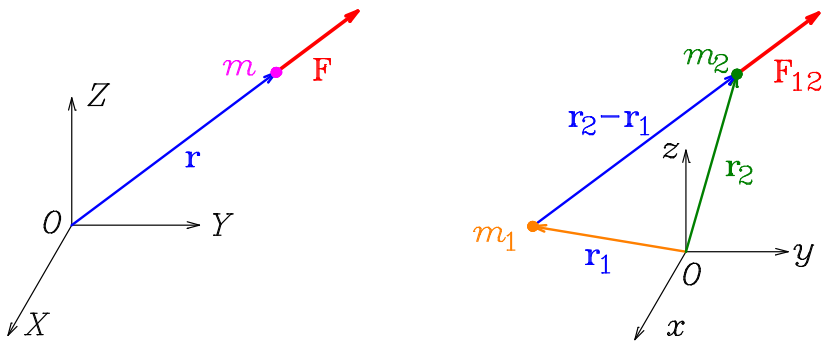
   Higidura-ekuazioa beraz, hauxe da:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = F(r)\,\hat{\mathbf{r}}. \tag{4.2}$$

2. Bi gorputzen sistema bakartu bat non partikula bakoitzak bestearen gainean eragiten duen indarra zentrala den:

$$\mathbf{F}_{ji} = F\left(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|\right)\,\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \qquad (i, j = 1, 2). \tag{4.3}$$

   1.5.6 atalean egin genuen bezala, $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ posizio erlatiboaren ekuazioa idazten badugu, (4.2) berreskuratzen dugu, m masa laburbildua eta $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ indarraren funtzioan.



4.2 IRUDIA Partikula bat indar-eremu zentral batean eta bi partikulen problema.

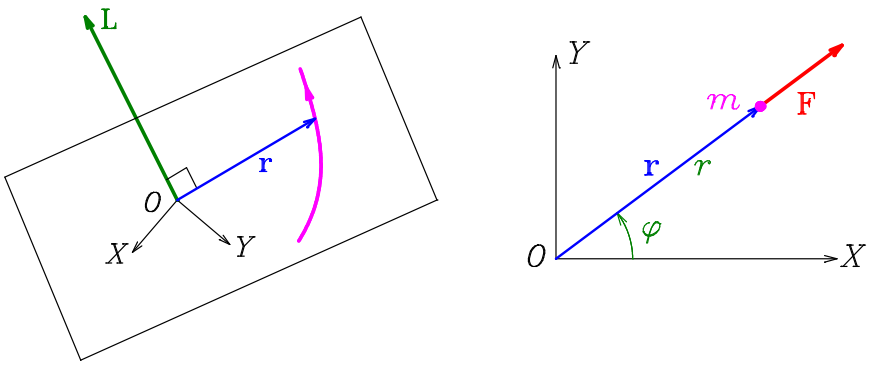
Bi problema hauek, beraz, baliokideak dira ikuspuntu matematikotik eta biak aztertuko ditugu aldi berean. Gogoan eduki behar da, hala ere, lehen kasuan (4.2) ekuazioko m eta $\mathbf{r}$ magnitudeak partikula bakarraren masa eta posizioa direla eta bigarrenean sistemaren masa laburbildua eta bi partikulen arteko posizio erlatiboa.

4.1 Higidura-konstanteak eta soluzioak

Indarra zentrala denez, 1.11 ariketan frogatu genuen poloarekiko (hau da, $\mathbf{r} = 0$ puntuarekiko) momentu angeluarra higidura-konstantea dela eta, ondorioz, polotik pasatuz momentu angeluarraren perpendikularra den plano batean higitzen dela partikula. Analisia errazteko, OXY plano koordenatua higidurarena izateko moduan aukeratzen badugu eta bertan koordenatu polarrak erabiltzen badira, momentu angeluarra

$$\mathbf{L} = mr^2\dot{\varphi}\,\mathbf{k} \tag{4.4}$$

da (ikus 1.10 ariketa).



4.3 IRUDIA Momentu angeluarra eta koordenatu polarrak higidura-planoan.

Gainera badakigu indar-eremu zentralak kontserbatzaileak direla beti (gogoratu 1.3.5 atala):

$$V(r) = -\int F(r)\,dr \qquad \Longleftrightarrow \qquad F(r) = -V'(r). \tag{4.5}$$

Beraz, higidura lauaren ekuazioek bi higidura-konstante onartzen dituzte, (4.4) momentu angeluarraren z osagaia eta (4.5) energia potentzialari dagokion energia mekanikoa, alegia:

$$L = mr^2\dot{\varphi}, \tag{4.6}$$

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r). \tag{4.7}$$

OZ ardatz positiboa momentu angeluarraren noranzkoan aukeratzen badugu, (4.4) adierazpenaren ondorioz,

$$L = mr^2\dot{\varphi} > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot{\varphi} > 0 \tag{4.8}$$

dugu beti (dimentsio bakarreko higidurari dagokion $L \propto \dot{\varphi} = 0$ kasu berezian izan ezik).

Bestalde, (1.59) azalera-abiadura

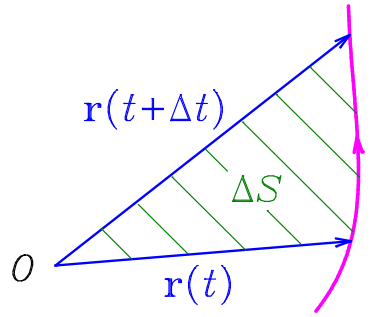
$$v_{\mathrm{a}} = \dot{S} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{L}{2m} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} \tag{4.9}$$

da eta, higidura-konstantea denez, **Kepler-en bigarren legea** betetzen da: *Eguzkia eta planeta bat lotzen dituen segmentuak azalera berdinak estaltzen ditu denbora-tarte berdinetan*. Hauxe dugu, bada, Kepler-en legerik unibertsalena, eguzki-sisteman ez ezik, indar-eremu zentral guztietan ere («Eguzki» eta «planeta» hitzak aldatu ondoren) betetzen baita.

4.1 ARIKETA Egiaztatu higidura-ekuazioak honako hauek direla koordenatu polarretan:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + V'(r) = 0, \tag{4.10}$$

$$\left(mr^2\dot{\varphi}\right)^{\cdot} = 0. \tag{4.11}$$



4.4 IRUDIA Posizio-bektoreak Δt tartean estalitako azalera.

4.1.1 Dimentsio bakarreko problema baliokidea

Momentu angeluarraren (4.6) kontserbazio-legetik

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} \tag{4.12}$$

abiadura angeluarra askatuz, honela idazten da higidura erradialaren (4.10) ekuazioa:

$$m\ddot{r} = -V'(r) + mr\dot{\varphi}^2 = -\frac{dV(r)}{dr} + \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{d}{dr}\left[V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}\right]. \tag{4.13}$$

4.2 ARIKETA Zergatik deitzen zaio **indar zentrifugoa**

$$mr\dot{\varphi}^2 = \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{d}{dr}\left[\frac{L^2}{2mr^2}\right] \tag{4.14}$$

gaiari?

Orain, $V(r)$-ren eta $L^2/2mr^2$ energia potentzial zentrifugoaren baturari **energia potentzial eraginkorra** deitzen badiogu,

$$V_{\mathrm{e}}(r) \equiv V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}, \tag{4.15}$$

honela idazten da higidura erradialaren (4.13) ekuazioa:

$$m\ddot{r} = -V_{\mathrm{e}}'(r). \tag{4.16}$$

Egitura matematikoaren aldetik ekuazio hau eta (1.104) guztiz berdinak dira. Beraz, $V_{\mathrm{e}}(x)$ potentzialean (eta ez jatorrizko $V(x)$ delakoan) eta lerro zuzen batean higitzen ari den partikularen eboluzioa ere deskribatzen du (4.16) ekuazioak. (Diferentzia txiki bat dago: distantzia bat denez, r ezin izan daiteke negatiboa hasierako probleman.)

Eman dezagun $t = t_0$ aldiunean partikula (r_0, φ_0) puntuan zegoela. Beste une guztietan non dagoen jakiteko bi pausotan ebatziko ditugu higidura-ekuazioak.

4.1.2 Higidura erradiala

Dimentsio bakarreko problema baliokidea ebazten badugu, jatorrizko problema lauaren higidura erradiala ezaguna izango da. Horretarako problema baliokidearen energia mekanikoaren kontserbazioaz baliatuko gara:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\mathrm{e}}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}. \tag{4.17}$$

Jakina, azken hau (4.7) energia mekanikoa da, abiadura angeluarra (4.6) kontserbazio-legearen bidez ezabatu ondoren. Orain, 1.4.3 ataleko aldagaien banantzearen metodoa erabiltzen badugu, higidura erradialaren ekuazioa

$$dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V_{\mathrm{e}}(r)\right]}} = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right]}} \tag{4.18}$$

da —gogoratu (1.109)—. Honen soluzioa (1.111)-ri dagokiona da:

$$t - t_0 = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right]}}, \qquad r_0 \equiv r\left(t_0\right). \tag{4.19}$$

Integral hau ebazten badugu t denbora r distantziaren menpean ezagutuko dugu eta, funtzio hori alderantzikatuz, $r(t)$ soluzioa. Jakina, bi eragiketa matematiko horiek egiteko askotan metodo hurbilduetara (agian, zenbakizko metodo egoki batera) jo beharko da, $V(r)$ potentzial gehienen kasuan era zehatzean egitea zaila edo ezinezkoa baita.

4.1.3 Higidura angeluarra

Higidura erradialaren $r(t)$ soluzioa ezaguna denean, (4.12) ekuazioan aldagaiak banantzen baditugu,

$$d\varphi = \frac{L}{mr(t)^2} dt, \tag{4.20}$$

eta hastapen-baldintzak berriro erabiltzen badira, higidura angeluarraren soluzioa lortzen da:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{t_0}^{t} \frac{L}{mr(t)^2} dt, \qquad \varphi_0 \equiv \varphi\left(t_0\right). \tag{4.21}$$

Integrala (agian era hurbilduan) ebazten badugu, $\varphi(t)$ angelu polarra ezaguna izango da.

4.1.4 Orbitaren ekuazioa

Esan dugunez, partikularen posizioa aldiune guztietan ezagutzeko (4.19) eta (4.21) integralak ebatzi behar dira. Horretarako sarri askotan metodo hurbilduetara jo behar denez, informazio partziala baina interesgarria ematen duten bestelako metodoak erabilgarriak izan daitezke. Haietariko bat orbitaren ekuazioa, hau da, partikularen ibilbidearen ekuazioa kalkulatzea da: horrela partikula nondik dabilen jakingo dugu, aldiune bakoitzean orbitako zein puntutan dagoen ezagutu ez arren.

Orbitaren ekuazioa higidura-ekuazioetan denbora ezabatuz lortzen da, eta hau erraz egiten da (4.20) delakoan (4.18)-tik lortzen den dt ordezkatzen badugu:

$$d\varphi = \pm \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right]}}. \tag{4.22}$$

$r(t_0) = r_0$ eta $\varphi(t_0) = \varphi_0$ hastapen-baldintzak erabiliz, bada, honela idazten da orbitaren ekuazioa:

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{L\,dr}{mr^2\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right]}}. \tag{4.23}$$

Integrala ebatzi ondoren lortutako $\varphi(r)$ funtzioa (edo alderantzizko $r(\varphi)$ delakoa) orbitaren ekuazioa da. Zoritxarrez, integral hori ere ez da beti erraza eta apur bat aztertzeko egin dezagun gai honetan batzuetan erabilgarria den hurrengo aldagai-aldaketa:

$$u \equiv \frac{1}{r}. \tag{4.24}$$

4.3 ARIKETA Erabili $r(\varphi_0) = r_0$ hastapen-baldintza eta δ integrazio-konstantea orbitaren ekuazioa hurrengo bi modu baliokideetara idazten dela frogatzeko:

$$\varphi - \varphi_0 = \mp \int_{1/r_0}^{1/r} \frac{du}{\sqrt{\frac{2m}{L^2}\left[E - V\left(\frac{1}{u}\right)\right] - u^2}}, \tag{4.25}$$

$$\varphi - \delta = \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2m}{L^2}\left[E - V\left(\frac{1}{u}\right)\right] - u^2}}. \tag{4.26}$$

Adibidez, kontsidera dezagun

$$V \propto u^n = \frac{1}{r^n} \quad \Longleftrightarrow \quad F \propto u^{n+1} = \frac{1}{r^{n+1}} \qquad (n \neq 0) \tag{4.27}$$

moduko energia potentzialak eta indarrak. Orbitaren (4.25) ekuazioa funtzio trigonometriko zirkularren eta hiperbolikoen bidez ebatz daiteke $n = -2, 1, 2$ kasuetan eta $n = -6, -4, -1, 3, 4, 6$ denean integral eliptikoak behar dira (ikus B.4 atala).

4.4 ARIKETA Froga ezazu $n = -2, 1, 2$ kasuetan (4.25)–(4.26) integralak hurrengoa erabiliz ebatz daitezkeela (parentesi arteko baldintzak betetzen badira):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arccos\left[-\frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}}\right], \qquad (a < 0,\ \Delta \equiv b^2 - 4ac > 0). \tag{4.28}$$

4.1.5 Binet-en formula

Beste modu batera lor daiteke orbitaren ekuazioa, denbora ezabatzeko (4.20) delakoaren baliokidea den (4.12) ekuazioaz baliatzen bagara:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{m}u^2. \tag{4.29}$$

Izan ere, $' \equiv d/d\varphi$ notazioa erabiliz, hauxe lortzen da (4.24) deribatzean:

$$\dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2} = -\frac{u'}{u^2}\dot{\varphi} = -\frac{L}{m}u', \tag{4.30}$$

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m}u''\dot{\varphi} = -\frac{L^2}{m^2}u^2u''. \tag{4.31}$$

Orain higidura erradialaren (4.13) ekuazioan emaitza hauek ordezkatuz,

$$m\ddot{r} = -\frac{L^2}{m}u^2u'' = -V'(r) + \frac{L^2}{mr^3} = F + \frac{L^2}{m}u^3, \tag{4.32}$$

honela idazten da orbitaren ekuazioa $F(r) = -V'(r)$ indarra u aldagaiaren bidez idazten bada:

$$u'' + u = -\frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right). \tag{4.33}$$

Kasu batzuetan ekuazio hau ebatz daiteke orbita aurkitzeko eta, alderantziz, orbitaren $u(\varphi)$ ekuazioa ezaguna bada hemendik lor daiteke indar-legea:

$$F\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{L^2}{m}\left(u'' + u\right)u^2. \tag{4.34}$$

(Ikus 4.24 problema.)

4.5 ARIKETA Froga ezazu orbitaren ekuazioa $u = A\left(e\cos(\varphi - \delta) \pm 1\right)$ bada (hau da, geroago ikusiko dugunez, kurba konikoetako bat bada), indarra newtondarra dela: $F \propto \mp u^2 = \mp 1/r^2$.

4.1.6 Orbita zirkularren egonkortasuna

Energia potentzial eraginkorraren erabilgarritasuna ikusteko, azter dezagun noiz egon daitezkeen orbita zirkularrak indar-eremu zentraletan eta noiz diren egonkorrak.

Dimentsio bakarreko problema baliokidean soluziorik errazenak $r = r_0(=$ ktea.) oreka-puntuak dira, baina hauek jatorrizko probleman orbita zirkularrak dira. Dimentsio bakarreko problema baliokideetan 1.4.6 atalean ikasi duguna erabil dezakegu, beraz, $r = r_0$ soluzioak aurkitzeko, energia potentzial eraginkorraren mutur-puntuetan gertatuko baitira:

$$V_{\mathrm{e}}'(r_0) = V'(r_0) - \frac{L^2}{mr_0^3} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad V'(r_0) = \frac{L^2}{mr_0^3}. \tag{4.35}$$

Ekuazio honen erro (positibo) bakoitzeko, dimentsio bakarreko problemaren oreka-puntu bat eta problema lauaren orbita zirkular bat ditugu. Soluzio horiek egonkorrak izango dira mutur-puntua minimo erlatibo bat denean, hau da, (4.35) eta hurrengoa betetzen direnean:

$$V_{\mathrm{e}}''(r_0) = V''(r_0) + \frac{3L^2}{mr_0^4} > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad V''(r_0) + \frac{3}{r_0}V'(r_0) > 0. \tag{4.36}$$

Aplikazio moduan, kontsidera dezagun $V = -k/r^n$ egitura errazeko potentzial zentralak. Orbita zirkularren erradioa (4.35) baldintzak emandakoa da:

$$\frac{nk}{r_0^{n+1}} - \frac{L^2}{mr_0^3} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad r_0 = \left(\frac{nkm}{L^2}\right)^{1/(n-2)}. \tag{4.37}$$

Beraz, $nk > 0$ eta $n \neq 2$ badira, momentu angeluarraren L balio bakoitzeko orbita zirkular bat dago.

4.6 ARIKETA Zein da $nk > 0$ baldintzaren esangura fisikoa?

Orbita zirkularra egonkorra izateko bete behar den (4.36) baldintza honela geratzen da:

$$(2-n)\frac{nk}{r_0^{n+2}} > 0. \tag{4.38}$$

Ondorioz, *$V = -k/r^n$ egiturako energia potentzial zentraletan $kn > 0$ bada, orbita zirkularrak egonkorrak dira $n < 2$ denean*.

4.2 Indar newtondarrak: Kepler-en problema

Indar-eremu zentralen artean, fisikan garrantzi handienekoak newtondarrak direateke, haien artean grabitatorioak eta elektrostatikoak baitaude. Goian esan dugunez, indarra newtondarra da distantziaren karratuaren alderantzizko proportzionala bada: $F \propto \mp 1/r^2$. Beraz, indar-eremu zentral bat newtondarra izango da (1.83) energia potentziala egitura honetakoa bada:

$$V(r) = -\frac{k}{r} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}}. \tag{4.39}$$

k proportzionaltasun-konstantearen zeinuaren arabera, bi motatako indar newtondarrak ditugu:

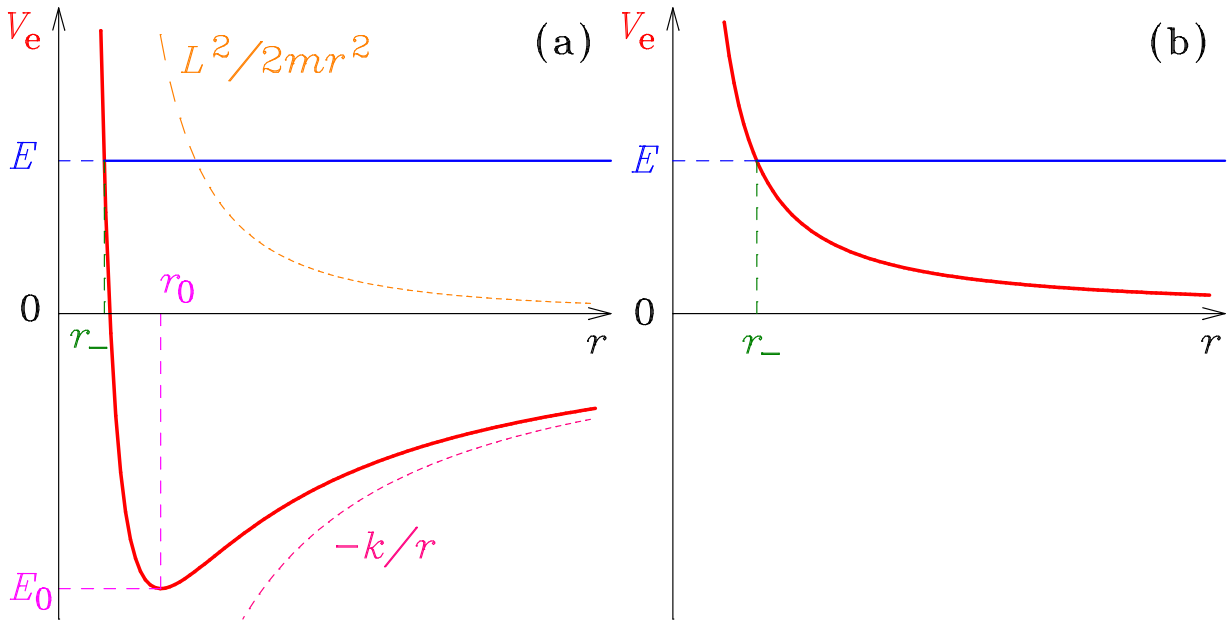
Indar erakarlea $k > 0$ denean. Adibidez, bi partikulen arteko erakarpen grabitatorioa deskribatzen duen Newton-en grabitazio unibertsalaren legean:

$$k = Gm_1m_2 > 0. \tag{4.40}$$

Indar aldaratzailea $k < 0$ denean. Adibidez, Coulomb-en legearen arabera, bi kargen arteko elkarrekintza elektrostatikoan

$$k = -\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0} \tag{4.41}$$

konstantea negatiboa da bi karga zeinu berekoak badira.



4.5 IRUDIA Energia potentzial eraginkorra. (a) Indar erakarlea. (b) Indar aldaratzailea.

4.2.1 Energia potentzial eraginkorra

Indar newtondarren kasuan (4.15) energia potentzial eraginkorra

$$V_e(r) = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \tag{4.42}$$

da. Argi dago bi ardatzak asintotak direla,

$$\lim_{r\to 0+} V_{\mathrm{e}}(r) = +\infty, \qquad \lim_{r\to +\infty} V_{\mathrm{e}}(r) = 0, \tag{4.43}$$

eta, muturrak aurkitzeko, kalkula dezagun non den zero deribatua:

$$V_{\mathrm{e}}'(r) = \frac{k}{r^2} - \frac{L^2}{mr^3} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad r = r_0 \equiv \frac{L^2}{mk}. \tag{4.44}$$

Distantziak negatiboak ez direnez, argi dago, bi kasu ditugula.

Indar erakarleen kasuan, energia potentzial eraginkorrak minimo bat du $r = r_0$ puntuan hurrengo balioarekin:

$$V_{\mathrm{e}}(r_0) = E_0 \equiv -\frac{mk^2}{2L^2} = -\frac{k}{2r_0} < 0. \tag{4.45}$$

4.7 ARIKETA Egiaztatu $r = r_0$ puntuan energia potentzial eraginkorraren minimo bat dagoela eta ondorioztatu bere grafikoa 4.5 irudiko ezkerraldean agertzen dena dela.

Indarra aldaratzailea bada, $k < 0$, energia potentzial eraginkorra positiboa ($V_{\mathrm{e}}(r) > 0$) eta monotono beherakorra ($V_{\mathrm{e}}'(r) < 0$) da, 4.5 irudiko eskuinaldean erakusten den legez.

4.2.2 Orbitaren ekuazioa

Indar newtondarren kasuan orbitaren ekuazioa modu erraz askotara ebatz daiteke (ikus, adibidez, [38]). Hemen (4.28) integrala erabiliko dugu (4.25) kalkulatzeko. Hasteko, energia potentzial eraginkorrak

$$V_{\mathrm{e}}(r) \geq E_0 = -\frac{mk^2}{2L^2} \tag{4.46}$$

desberdintza betetzen du beti: indarra erakarlea denean, E_0 da energia potentzial eraginkorraren balio minimoa, eta, indarra aldaratzailea bada, $V_{\mathrm{e}}(r) > 0 > E_0$ desberdintza hertsiagoa betetzen da. Energia mekanikoaren kasuan

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\mathrm{e}}(r) \geq V_{\mathrm{e}}(r) \geq E_0 = -\frac{mk^2}{2L^2} \tag{4.47}$$

dugu, eta, beraz, (4.28) integraleko konstanteak hurrengoak izango dira aplikazio honetan:

$$a \equiv -1 < 0, \quad b \equiv \frac{2mk}{L^2}, \quad c \equiv \frac{2mE}{L^2}, \quad \Delta = \frac{4m^2k^2}{L^2}\left(1 + \frac{2L^2E}{mk^2}\right) > 0. \tag{4.48}$$

Beraz, honela idazten da (4.26):

$$\varphi - \delta = \pm \arccos\left[\frac{u - \frac{mk}{L^2}}{\frac{m|k|}{L^2}\sqrt{1 + \frac{2L^2E}{mk^2}}}\right]. \tag{4.49}$$

Adierazpen hau errazteko, orbitaren bi parametro definituko ditugu:

$$e \equiv \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{mk^2}} = \sqrt{1 - \frac{E}{E_0}} \tag{4.50}$$

eszentrikotasuna eta

$$p \equiv \frac{L^2}{m|k|} \tag{4.51}$$

foku-parametroa, astronomian ***semi-latus rectum*** izenarekin ezagutzen dena.

4.8 ARIKETA Frogatu e erreala dela beti eta indarra erakarlea denean $p = r_0$ dugula.

Kosinu funtzioa bikoitia dela gogoratuz, (4.49) emaitza

$$u = \frac{e\cos(\varphi - \delta) + k/|k|}{p} \tag{4.52}$$

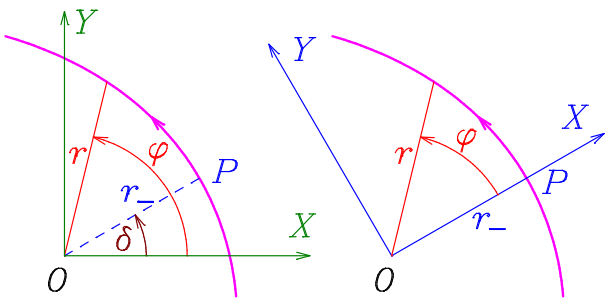
moduan idazten da eta $u = 1/r$ aldagai-aldaketa deseginez,

$$r = \frac{p}{e\cos(\varphi - \delta) + k/|k|}. \tag{4.53}$$

e eta p parametroak ez-negatiboak direnez, r distantziaren baliorik txikiena (geroago ikusiko dugunez, perizentroan gertatzen dena) $\cos(\varphi - \delta) = 1$ denean —hau da $\varphi = \delta$ norabidean— gertatzen da. Ondorioz, gure OX ardatza aipaturiko perizentrotik pasatzeko moduan aukeratzen badugu, bertan $\varphi = \delta = 0$ izango dugu eta orbitaren ekuazioa

$$r = \frac{p}{e\cos\varphi \pm 1} \tag{4.54}$$

izango da, non $+$ $(-)$ zeinua indar erakarleen (aldaratzaileen) kasuan aukeratu behar den.



4.6 IRUDIA P perizentroaren posizioa (4.53) eta (4.54) aukerekin.

Ekuazioa koordenatu cartesiarretan idazteko, (1.4)–(1.5) transformazio-ekuazioak erabiliko ditugu $p = er\cos\varphi \pm r = ex \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ adierazpen baliokidetik erro karratua ezabatzeko: $x^2 + y^2 = (p - ex)^2$, edota

$$\left(1 - e^2\right) x^2 + 2pex + y^2 = p^2. \tag{4.55}$$

4.3 Kepler-en orbitak

Energia negatiboa denean, orbita newtondarra bornaturik dago, eta itxia eta periodikoa da, jarraian ikusiko dugun bezala. Horrelakoak dira planeten orbitak, Kepler-en legeetan deskribatutakoak.

4.3.1 Orbita zirkularrak

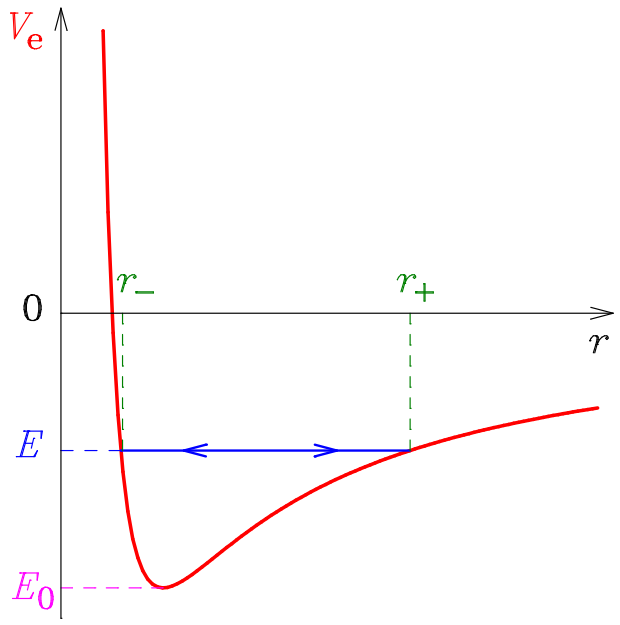
(4.47) adierazpenaren arabera energia mekanikoaren energiarik txikiena $E = E_0 < 0$ da. Hori bakarrik gerta daiteke indarra erakarlea ($k > 0$) bada eta $\dot{r} = 0$ denean. Dimentsio bakarreko problema baliokidean partikula pausagunean dago $r = r_0$ oreka-puntuan, 4.5 irudiko ezkerraldean ikusten den bezala. Bestalde, (4.50) eszentrikotasuna nulua da ($e = 0$) eta jatorrizko problema lauan (4.54)-tik edota (4.55)-tik ere lortzen den $r = r_0 = p$ orbita zirkularra (eta, beraz, itxia eta periodikoa) dugu.

4.9 ARIKETA Bakarra al da orbita zirkularra?

4.3.2 Orbita eliptikoak

Energia mekanikoa negatiboa baina minimoa baino handiagoa bada, $E_0 < E < 0$, eszentrikotasunak $0 < e < 1$ baldintza betetzen du. Indarra erakarlea da nahitaez ($k > 0$) eta orbitaren ekuazioa honako hau:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}. \tag{4.56}$$



4.7 IRUDIA Orbita bornatuak.

Energia mekanikoa energia potentzial eraginkorra baino txikiagoa ez denez, 4.7 irudian ikusten dugu orbita bornatua dela. $r = r_\pm$ puntuetan $E = V_e$ dugunez, dimentsio bakarreko problema baliokidean $T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$ energia zinetikoa nulua da: 1.4.6 atalean ikusi genuenez, atzerapen-puntuak dira horrelakoak eta bertan abiadura nulua da ($\dot{r} = 0$), balio positiboetatik negatiboetara (edo alderantziz) joatean atzera egiten baitu partikulak.

Problema lauan puntu horietan energia zinetikoa eta abiadura ez dira nuluak, baina bertan ditugu distantziaren muturrak ($\dot{r} = 0$). **Absideak** deitzen dira puntu horiek astronomian. (4.56) adierazpenean ikusten dugu distantziaren minimoa

$$r_- = \frac{p}{1 + e} \tag{4.57}$$

dela eta dagokion puntua orbitaren **perizentroa** deitzen da edo, astronomian, **periastroa** (eta orbita Eguzkiaren ingurukoa bada, **perihelioa**; Lurraren ingurukoa denean, **perigeoa**; eta abar). Distantziaren maximoa

$$r_+ = \frac{p}{1-e} \tag{4.58}$$

dugu eta gertatzen deneko puntua **apozentroa** deitzen da edo, astronomian, **apoastroa** (Eguzkiaren inguruko orbitaren kasuan **afelioa**; Lurraren ingurukoa denean, **apogeoa**; eta abar).

4.10 ARIKETA Froga ezazu absideak posizio-bektorea eta abiadura elkarzutak izateko baldintzak definiturikoak direla preseski: $\mathbf{r} \perp \dot{\mathbf{r}}$.

Orbita nolakoa den ikusteko, bere ekuazioa koordenatu cartesiarretan aztertuko dugu.

4.11 ARIKETA Osatu karratuak (4.55) ekuazioan modu honetan idazteko:

$$\left(\frac{1-e^2}{p}\right)\left(x+\frac{pe}{1-e^2}\right)^2 + \frac{1-e^2}{p^2}\,y^2 = 1. \tag{4.59}$$

Ondorioz,

$$a \equiv \frac{p}{1-e^2} = \frac{r_- + r_+}{2} = -\frac{k}{2E}, \tag{4.60}$$

$$b \equiv \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{pa}, \tag{4.61}$$

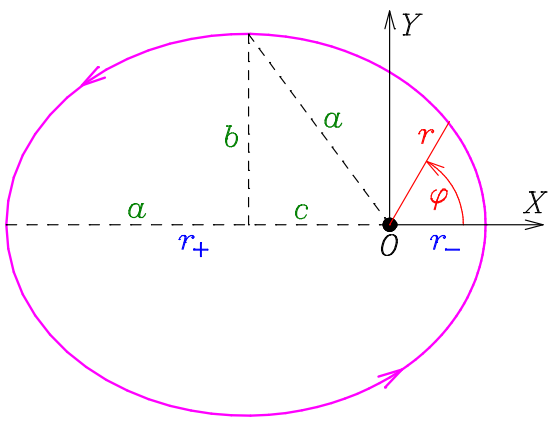
$$c \equiv \frac{pe}{1-e^2} = a - r_- \tag{4.62}$$

parametroak definitzen baditugu, orbitaren ekuazioa hauxe dugu:

$$\left(\frac{x+c}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1. \tag{4.63}$$

4.12 ARIKETA Egiaztatu honako propietate hauek betetzen direla:

$$a^2 = b^2 + c^2, \qquad e = \frac{c}{a}. \tag{4.64}$$



4.8 IRUDIA Orbita eliptikoa.

Orbita, beraz, elipse bat da: ardatzerdi nagusia a da, ardatzerdi txikia b, eta foku-parametroa c. Gainera, elipsearen zentroa $(-c, 0)$ puntuan dago eta, hortaz, jatorria (hau da, indar-poloa) elipsearen fokuan. **Kepler-en lehen legea** frogatu dugu: *planeten orbitak elipseak dira, foku batean Eguzkia dutenak*. Bigarren lege hau indar newtondar guztiekin betetzen da (energia negatiboa denean), baina ez indar-eremu zentral guztiekin.

4.13 ARIKETA Bi gorputzen probleman energia mekanikoa negatiboa bada, nolakoa da gorputz bakoitzaren masa-zentroaren inguruko orbita?

4.3.3 Kepler-en hirugarren legea

Argi dago orbita zirkularren kasua, hemengoaren kasu berezi bat baino ez dela, $e = 0$ (edota $E = E_0$) eginez lortzen dena, hain zuzen. Kasu zirkular eta eliptiko guztietan orbitak bornatuak eta itxiak dira eta, beraz, periodikoak. Erabil ditzagun elipsearen $S = \pi ab$ azalera eta orbitaren T periodoa (1.59) azalera-abiaduraren modulua kalkulatzeko:

$$v_{\mathrm{a}} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{L}{2m}. \tag{4.65}$$

Hemendik periodoa askatuta, (4.51) eta (4.61) erabiltzen bada, hauxe lortzen da:

$$T = \frac{2\pi mab}{L} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\, a^{3/2}. \tag{4.66}$$

Beraz, hauxe da periodoaren eta ardatzerdi nagusiaren arteko erlazioa:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{k}. \tag{4.67}$$

M masako planeta baten kasuan $k = GM_\odot M$, $m = M_\odot M/\left(M_\odot + M\right)$ dugu, $M_\odot$ delakoa Eguzkiaren masa bada (ikus A.4 taulan astronomian erabiltzen diren ikur batzuk). Ondorioz,

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G\left(M_\odot + M\right)}. \tag{4.68}$$

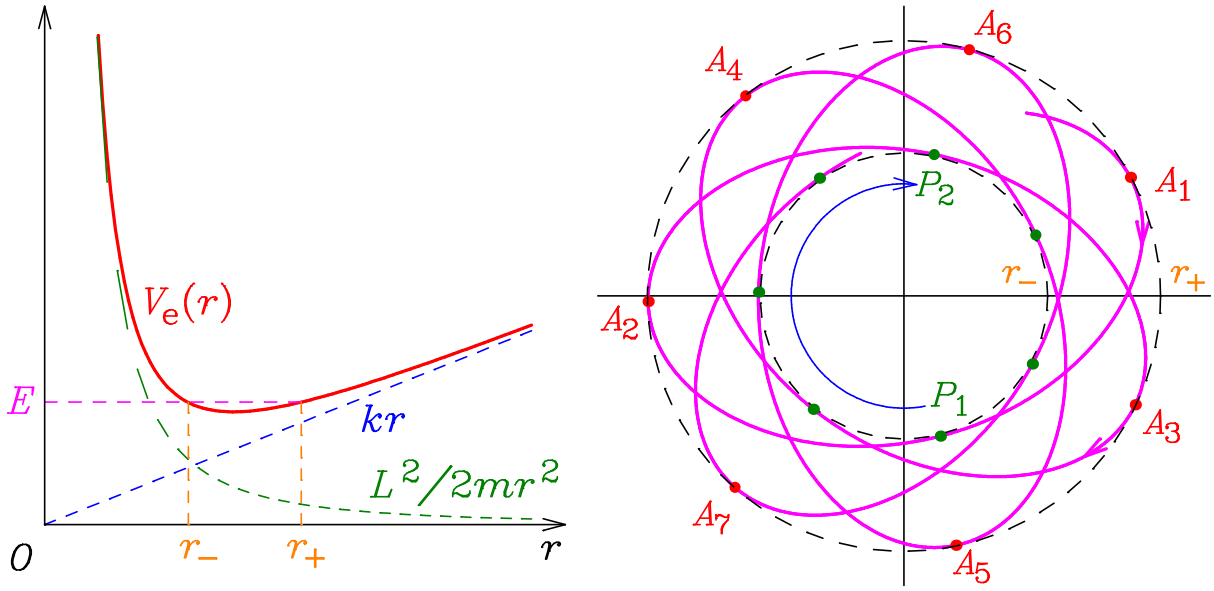
Baina Eguzkiaren masa askoz ere handiagoa denez ($M \ll M_\odot$),

$$\frac{T^2}{a^3} \approx \frac{4\pi^2}{GM_\odot} \tag{4.69}$$

oso hurbilketa ona da eta planetaren masa ez da hemen agertzen. Kepler-en hirugarren legea frogatu dugu: *periodoaren karratuaren eta orbitaren ardatzerdi nagusiaren kuboaren arteko zatidura berdina da planeta guztietarako*. Ikusi dugunez, lege hau ez da zehatza, hurbildua baizik, eta eguzki-sisteman bakarrik betetzen da; hortaz, Kepler-en legerik mugatuena dugu hau. (Ikus, halaber, 4.39 problema.)

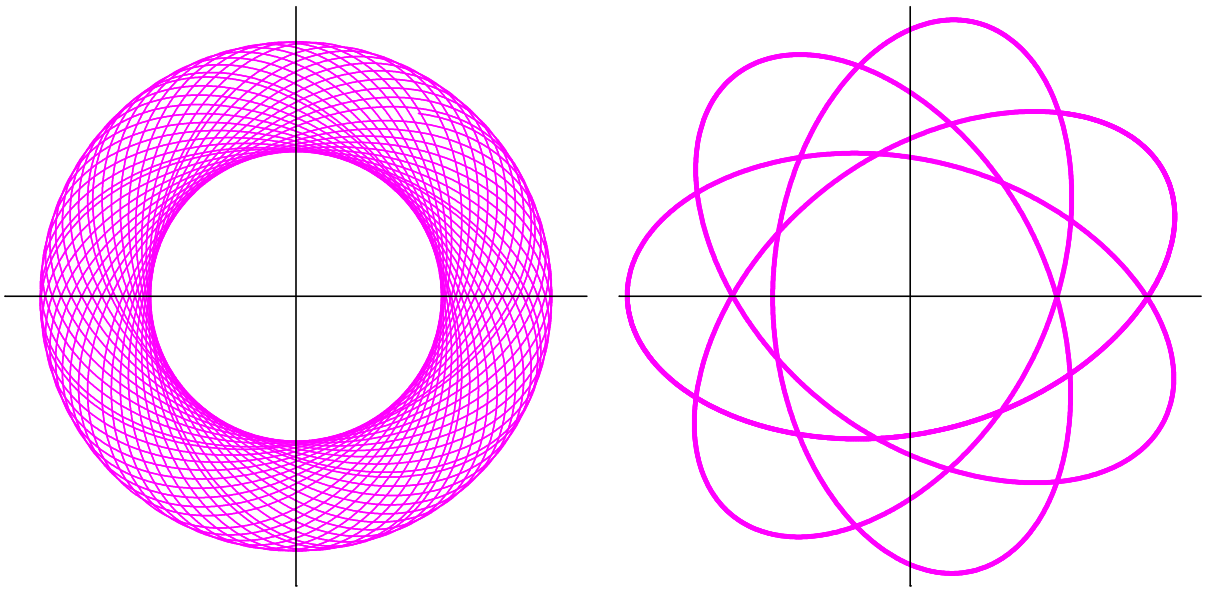
4.3.4 Bertrand-en teorema

Ez da pentsatu behar indar-eremu zentraletan orbita bornatuak itxiak eta periodikoak izaten direla: izan ere, hori salbuespena da kasu orokorra baino areago. Bertrand-en teoremaren arabera, orbita bornatu guztiak itxiak badira, indar-eremu zentralak newtondarra ($F \propto -1/r^2$) edo harmonikoa ($F \propto -r$) izan behar du. Kasu orokorretan absideak ez dira beti gertatzen norabide angeluar berean: prezesatzen ari dira eta, hastapen-baldintza batzuekin gertatzen diren kasu berezietan izan ezik, orbitak ez dira periodikoak.



4.9 IRUDIA Potentzial eraginkorra eta absideen prezesioa $V = kr$ kasuan.

Adibide moduan kontsidera dezagun $V = kr$ potentzial erakarlea (6.14.5 probleman agertuko zaigu berriro potentzial hau). 4.9 irudiko ezkerraldean potentzial eraginkorraren grafikoa marraztu da. Argi dago orbita guztiak bornatuak direla, baina gehienak ez dira periodikoak izango. Irudi bereko eskuinaldean erakusten da non agertzen diren ondoz ondoko absideak orbita batean. Orbita gehienak, ondorioz, irekiak dira eta, adibidez, 4.10 irudiko ezkerrean agertzen dena r_- eta r_+ erradioko zirkunferentzien arteko puntu bakoitzetik nahi bezain hurbil pasatuko da uneren batean. Eskuineko orbita, ordea, itxia da, baina periodikotasun hori desagertzen da hastapen-baldintzak nahi bezain gutxi aldatzean: orbita periodikoak salbuespenak dira.

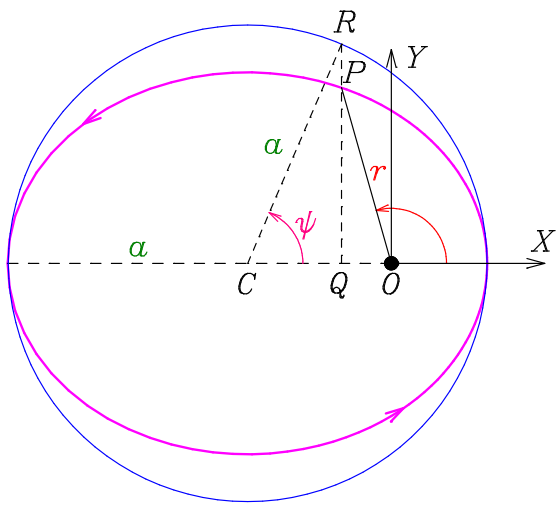


4.10 IRUDIA Bi orbita $V = kr$ kasuan[1].

[1] Ikus `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/zentralak/4.10.ds` eta `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/zentralak/4.11.ds` simulazioak.

4.3.5 Kepler-en ekuazioa

Orbita ezagutzea nahikoa ez bada, partikularen posizioa aldiune guztietan aurkitzeko, (4.19) integrala kalkulatu behar da; baina, oinarrizko funtzioen bidez adierazten bada ere, $t(r)$ emaitza transzendentetik ezin da alderantzizko $r(t)$ funtzioa oinarrizko funtzioen bidez askatzea, geroago (4.21) integrala eginez $\varphi(t)$ lortzeko. Jakina, gaur egun zenbakizko kalkulua erabil daiteke horretarako[2], baina Kepler-ek proposatu zuen metodo geometrikoagoa ikusiko dugu hemen. Partikularen posizioa zehazteko (x, y) koordenatu cartesiarrak edo (r, φ) polarrak erabil daitezke. Astronomian, φ angelu polarrari **benetako anomalia** deritzo, eta perizentrotik neurturiko desbiderapena neurtzen du, zentroa fokuan duen angelu baten bidez. Aipaturiko desbiderapena neurtzeko, elipsearen C zentroan aukera daiteke angelu bat, 4.11 irudian erakusten den moduan. Orbitako P puntu bakoitzean PQ altuera eraikitzen da eta honek R puntuan ebakitzen du elipsearen zentroan kokaturiko a erradioko zirkunferentzia. Zentrotik neurturiko R puntuaren ψ posizio angeluarra **anomalia eszentrikoa** da.



4.11 IRUDIA Anomalia eszentrikoa eta benetakoa.

P puntuko x abzisa honako hau da:

$$x = \overline{CQ} - \overline{OC} = a\cos\psi - c = a(\cos\psi - e). \tag{4.70}$$

Bestalde, elipsearen (4.63) ekuazioaz baliatuz, hauxe dugu:

$$y = \pm b\sqrt{1 - \left(\frac{x+c}{a}\right)^2} = \pm b\sqrt{1 - \cos^2\psi} = b\sin\psi. \tag{4.71}$$

(Azken emaitzaren zeinua irudia erabiliz aurkitzen da, jakina.) Beraz, honela kalkulatzen dira koordenatu cartesiarrak anomalia eszentrikoaren bidez:

$$x = a(\cos\psi - e), \tag{4.72}$$

$$y = b\sin\psi. \tag{4.73}$$

[2]Ikus `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/zentralak/Kepler.ds` simulazioa.

4.14 ARIKETA Froga ezazu koordenatu polarrak hurrengo adierazpenek emandakoak direla:

$$r = a(1 - e\cos\psi), \tag{4.74}$$

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{\psi}{2}. \tag{4.75}$$

Planetaren periodoa T bada, Kepler-en bigarren legearen arabera azalera-abiadura modu honetan kalkulatzen dugu:

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{a}} &= \frac{\pi ab}{T} = \frac{1}{2}\left|\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}\right| = \frac{1}{2}\left|x\dot{y} - y\dot{x}\right| = \frac{ab}{2}\left|(\cos\psi - e)\cos\psi + \sin^2\psi\right|\dot{\psi} \\ &= \frac{ab}{2}\left(1 - e\cos\psi\right)\dot{\psi}. \end{aligned} \tag{4.76}$$

Bestalde, bi anomalien batez besteko balioa

$$\langle\psi\rangle = \langle\varphi\rangle = n \equiv \frac{2\pi}{T} \tag{4.77}$$

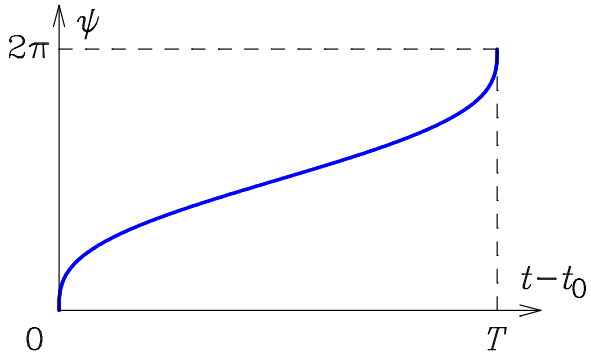
batez besteko anomalia da eta honela idazten da (4.76):

$$n = (1 - e\cos\psi)\dot{\psi}. \tag{4.78}$$

Ondorioz, planeta $t = t_0$ aldiunean $\psi = \varphi = 0$ periheliotik pasatu bada, hauxe dugu t unean:

$$n\,(t - t_0) = \psi - e\sin\psi. \tag{4.79}$$

Kepler-en ekuazio transzendente honetatik $\psi(t)$ (modu hurbilean edo zenbakizkoan) askatuz gero, planetaren posizioa ezagutzen da (4.72)–(4.73) —edota (4.74)–(4.75)— erabiliz.



4.12 IRUDIA Anomalia eszentrikoaren eboluzioa.

4.3.6 Energia mekanikoa eta ardatz nagusia

Orbita bornatuen beste propietate interesgarria (4.60) ekuaziotik lortzen dena da: orbitaren energia ardatz nagusiaren menpeko hutsa da, hau da, ardatz nagusi berbera duten orbita guztien energia

$$E = -\frac{k}{2a} \tag{4.80}$$

da, ardatz txikia (eta eszentrikotasuna) edonolakoa izanik ere. Alderantziz ere esan dezakegu: orbitaren ardatz nagusia energia mekanikoaren menpeko hutsa da, baina ardatz txikia eta eszentrikotasuna kalkulatzeko momentu angeluarra ere ezagutu behar dugu.

(4.78)-ren bidez oso erraz kalkula daiteke energia potentzialaren batez besteko balioa:

$$\langle V\rangle \equiv \frac{1}{T}\int_0^T V\,dt = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{k}{a(1-e\cos\psi)}\,(1-e\cos\psi)\,d\psi = -\frac{k}{a}. \tag{4.81}$$

Bestalde, (4.80) erabiliz, hauxe dugu:

$$\langle T\rangle + \langle V\rangle = E = \frac{\langle V\rangle}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \langle V\rangle = -2\,\langle T\rangle = 2E. \tag{4.82}$$

Emaitza hau partikula-sistemetara eta bestelako indarretara hedatzean lortzen dena (ikus [32]) **Clausius-en birialaren teorema** deitzen da eta oso erabilgarria izaten da gasen teoria zinetikoan eta astronomian. Galaxien taldeetan materia iluna (hau da, teleskopioan ikusten ez dena) dagoela ondorioztatzeko erabili da, adibidez (ikus [7]).

4.4 Orbita irekiak

4.5 irudian ikusten denez, indar-eremu newtondarra erakarlea bada eta energia mekanikoa positiboa edo zero, orbitak irekiak izango dira, distantzia minimo bat egon arren ez baitago distantzia maximorik. Orbita irekia izateko $E \geq 0$ baldintza, abiaduraren bidez ere idatz daiteke:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad v \geq v_{\rm i} \equiv \sqrt{\frac{2k}{mr}}. \tag{4.83}$$

Hortaz, *indar-eremu newtondar erakarle batean, orbita irekia izango da baldin eta partikula r distantziara dagoenean bere abiadura (4.83) adierazpenean definituriko $v_{\rm i}$* ***ihes-abiadura*** *baino handiagoa (edo berdina) bada*. Abiadura minimo bat behar da, beraz, partikula infinitura joateko.

4.15 ARIKETA Froga ezazu suziri bati Lurreko azalean eman behar zaion abiadurarik txikiena infiniturantz alde egiteko gai izan dadin hauxe dela:

$$v_{\rm i} = \sqrt{2gR_\oplus} \approx 11.18\ \text{km/s}. \tag{4.84}$$

Indar-eremu newtondarra aldaratzailea bada, berriz, orbita guztiak irekiak izango dira, une batean abiadura zero bada ere, kasu horretan energia mekanikoa positiboa baita beti ($E > 0$) eta r distantzia polarrak ez baitu goi-mugarik (ikus 4.5 irudia): orbita ez da inoiz bornatua eta partikula infiniturantz joango da nahitaez.

4.4.1 Orbita parabolikoak

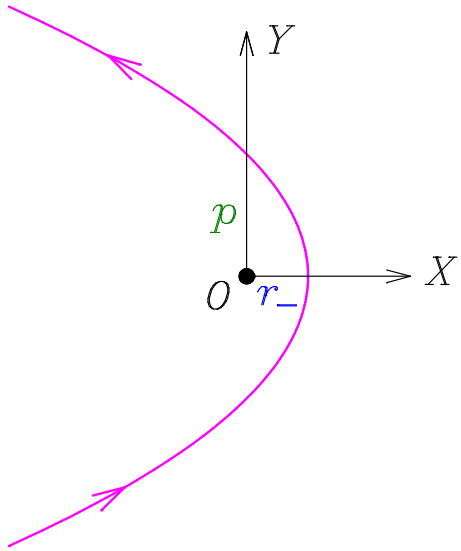
Eman dezagun partikularen energia mekanikoa nulua dela: $E = 0$. Indarra erakarlea da ($k > 0$), (4.50) eszentrikotasuna $e = 1$, eta abiadura ihes-abiaduraren berdina puntu guztietan. Orbitaren (4.54) ekuazioa

$$r = \frac{p}{\cos\varphi + 1} \tag{4.85}$$

da, edo (4.55) ekuazioan $e = 1$ eginez,

$$y^2 = p^2 - 2px. \tag{4.86}$$

OX ardatzeko parabola da, beraz. Lehen esan bezala, ez dago distantzia maximorik, $r \to \infty$ baitoa $\varphi \to \pm\pi$ limiteetan: partikula infinitutik dator hara itzultzeko.



4.13 IRUDIA Orbita parabolikoa.

4.4.2 Orbita hiperbolikoak

Energia positiboa bada, $e > 1$ dugu eta orbitaren ekuazioa honako hau da:

$$r = \frac{p}{e\cos\varphi \pm 1}. \tag{4.87}$$

Ekuazio hau koordenatu cartesiarretan lortzeko, karratuak osa daitezke (4.55) ekuazioan edo, hobe, (4.59) emaitza hurrengo moduan idatz daiteke, $e > 1$ dela kontuan hartuz:

$$\left(\frac{e^2-1}{p}\right)^2\left(x - \frac{pe}{e^2-1}\right)^2 - \frac{e^2-1}{p^2}\,y^2 = 1. \tag{4.88}$$

Ondorioz,

$$a \equiv \frac{p}{e^2-1} = \frac{|k|}{2E}, \tag{4.89}$$

$$b \equiv \frac{p}{\sqrt{e^2-1}} = \sqrt{pa}, \tag{4.90}$$

$$c \equiv \frac{pe}{e^2-1} \tag{4.91}$$

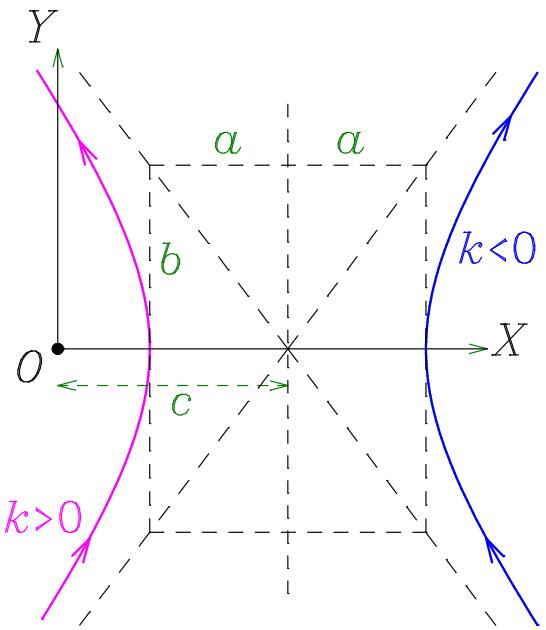
parametroak definitzen baditugu, orbitaren ekuazioa hauxe dugu:

$$\left(\frac{x-c}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1. \tag{4.92}$$

4.16 ARIKETA Egiaztatu hurrengo propietateak betetzen direla:

$$c^2 = a^2 + b^2, \qquad e = \frac{c}{a}. \tag{4.93}$$

Orbita, beraz, hiperbola-adar bat da: ardatzerdi nagusia a da, ardatzerdi txikia b, eta foku--parametroa c. Gainera, hiperbolaren zentroa $(c, 0)$ puntuan dago eta, hortaz, jatorria (hau da, indar-poloa) hiperbolaren fokuetako batean. Hiperbolak bi adar dituenez, bi orbita adierazten dira (4.88) ekuazioan:



4.14 IRUDIA Orbita hiperbolikoak.

- Indarra erakarlea denean ($k > 0$), $+$ zeinua aukeratu behar da (4.87) ekuazioan eta indar--polotik hurbilen dagoen adarra dugu.
- Indar aldaratzaileen kasuan ($k < 0$), $-$ zeinua erabili behar da eta (4.87) ekuazioak adar urruna deskribatzen du.

4.17 ARIKETA Zergatik aukeratu behar dira hiperbolaren adarrak goian esandako moduan?

Orbita bornatuen kasuan bezalaxe, energia mekanikoa ardatz nagusiaren menpeko hutsa da, zeren eta (4.89) ekuazioaren ondorioz

$$E = \frac{|k|}{2a} \tag{4.94}$$

baitugu. (Jakina, indar erakarleen kasuan balio absolutua ezaba daiteke aurreko ekuazioan.)

Hiperbolaren adarrek asintotak dituzte eta asintoten norabideek angelu polarren balio minimoak eta maximoak definitzen dituzte. Izan ere, (4.87) ekuazioaren izendatzailea zerora doanean distantzia polarra infinitura doa eta, limite horretan, partikula infinituan higitzen da asintota batean zehar. Beti bezala perizentroa $\varphi = 0$ norabidean badago, indar erakarleen kasuan hauexek dira, bada, angelu polarrak izan ditzake balioak:

$$-\pi < -\arccos\left(-\frac{1}{e}\right) < \varphi < \arccos\left(-\frac{1}{e}\right) < \pi. \tag{4.95}$$

Indarra aldaratzailea bada, berriz, honako hau dugu:

$$-\frac{\pi}{2} < -\arccos\left(\frac{1}{e}\right) < \varphi < \arccos\left(\frac{1}{e}\right) < \frac{\pi}{2}. \tag{4.96}$$

Energia potentziala: $V = -\dfrac{k}{r} \qquad \left(k = Gm_1m_2,\ -\dfrac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}\right)$

Energia potentzial eraginkorra: $V_\mathrm{e} = -\dfrac{k}{r} + \dfrac{L^2}{2mr^2} \geq E_0$

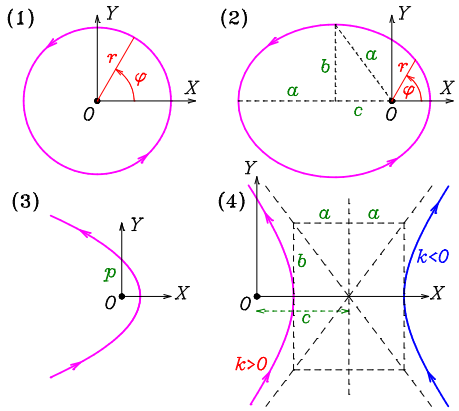
Energia mekanikoa: $E = \dfrac{1}{2}mv^2 + V = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_\mathrm{e} \geq V_\mathrm{e} \geq E_0$

Energia minimoa: $E_0 = -\dfrac{mk^2}{2L^2}$

Eszentrikotasuna: $e = \sqrt{1 - \dfrac{E}{E_0}} = \sqrt{1 + \dfrac{2L^2E}{mk^2}}$

Foku-parametroa: $p = \dfrac{L^2}{m|k|} = -\dfrac{|k|}{2E_0}$

Orbitaren ekuazioa: $r = \dfrac{p}{e\cos\varphi + k/|k|}$



Kasua	Ekuazioa	Parametroak	Orbita
$E = E_0$ $e = 0$ $k > 0$	$r = p = -\dfrac{k}{2E_0}$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ $E = -\dfrac{k}{2r}$		$x^2 + y^2 = p^2$ zirkunferentzia Itxia eta periodikoa: irudiko (1)
$E_0 < E < 0$ $0 < e < 1$ $k > 0$	$\dfrac{p}{1+e} \leq r = \dfrac{p}{1+e\cos\varphi} \leq \dfrac{p}{1-e}$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ $E = -\dfrac{k}{2a}$	$2a = \dfrac{p}{1+e} + \dfrac{p}{1-e}$ $a = \dfrac{p}{1-e^2} = -\dfrac{k}{2E}$ $c = ea \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}$	$\left(\dfrac{x+c}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$ elipsea Itxia eta periodikoa: irudiko (2) $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2 m}{k} \left(= \dfrac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}\right)$
$E = 0$ $e = 1$ $k > 0$	$\dfrac{p}{2} \leq r = \dfrac{p}{1+\cos\varphi} < \infty$ $-\pi < \varphi < \pi$ $E = 0 \qquad v = v_\mathrm{i} \equiv \sqrt{\dfrac{2k}{mr}}$		$y^2 + 2px = p^2$ parabola Irekia: irudiko (3)
$E > 0$ $e > 1$ $k > 0$	$\dfrac{p}{e+1} \leq r = \dfrac{p}{e\cos\varphi + 1} < \infty$ $0 \leq \lvert\varphi\rvert < \arccos\left(-\dfrac{1}{e}\right) < \pi$ $E = \dfrac{k}{2a} \qquad v > v_\mathrm{i}$	$2a = \dfrac{p}{e-1} - \dfrac{p}{e+1}$ $a = \dfrac{p}{e^2-1} = \dfrac{k}{2E}$ $c = ea \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$	$\left(\dfrac{x-c}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$ hiperbola Irekia: irudiko (4), $x < c$ adarra
$E > 0$ $e > 1$ $\boxed{k < 0}$	$\dfrac{p}{e-1} \leq r = \dfrac{p}{e\cos\varphi - 1} < \infty$ $0 \leq \lvert\varphi\rvert < \arccos\left(\dfrac{1}{e}\right) < \dfrac{\pi}{2}$ $E = \dfrac{\lvert k\rvert}{2a} \qquad v \geq 0$	$2a = \dfrac{p}{e-1} - \dfrac{p}{e+1}$ $a = \dfrac{p}{e^2-1} = \dfrac{\lvert k\rvert}{2E}$ $c = ea \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$	$\left(\dfrac{x-c}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$ hiperbola Irekia: irudiko (4), $x > c$ adarra

4.1 TAULA Orbita newtondarrak.

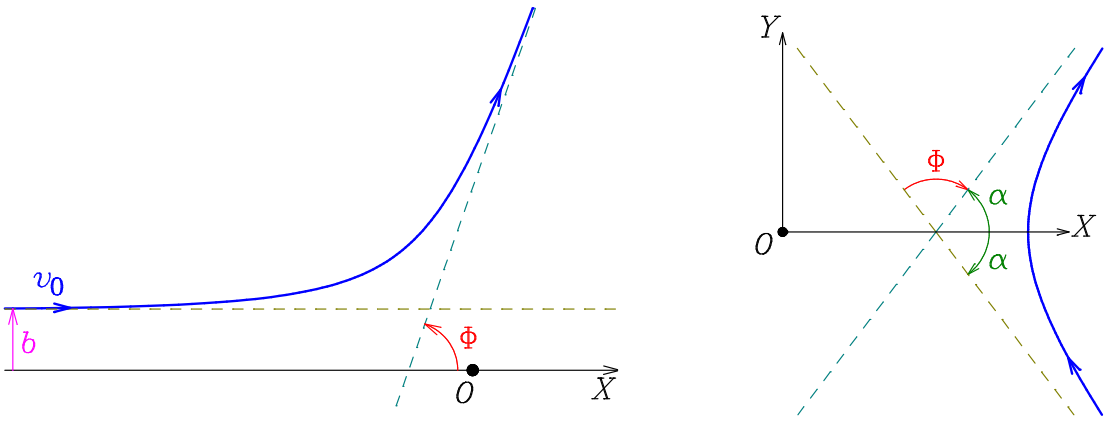
4.5 Sakabanatze newtondarra

Kontsidera dezagun fisikan askotan egiten den esperimentu mota bat. Finko dagoen O jomuga baten kontra m masako partikula bat jaurtitzen da oso distantzia handitik v_0 abiadurarekin. Analisia errazteko, jomuga finko dagoela (agian oso astuna delako) suposatuko dugu, baita jomuga jaurtigaiaren gainean eragindako indarra newtondarra eta aldaratzailea dela (adibidez, biak zeinu bereko kargak direlako). Hasieran distantzia oso handia zenez, partikularen higidura uniformea zen eta energia mekanikoa hasierako energia zinetikoaren berdina:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2. \tag{4.97}$$

Jotze-parametroa partikularen hasierako norabidearen eta jomugaren arteko b distantzia da eta jomugarekiko momentu angeluar konstantea neurtzeko erabil daiteke:

$$L = mbv_0. \tag{4.98}$$



4.15 IRUDIA Sakabanatze newtondarra ardatzen bi aukera desberdinekin.

Jomugak eragindako indarraren eraginez, jaurtigaiaren norabidea aldatu egiten da eta distantzia berriro oso handia denean higidura uniformea izango da. Norabidearen aldaketa osoa, hau da, bi zuzen asintotikoen arteko angeluari **sakabanatze-angelua** deritzo eta 4.15 irudiko eskuinaldean ikusten denez, $\Phi + 2\alpha = \pi$ betetzen da, α angelua φ-ren balio maximoa izanik. (4.96) emaitzaren ondorioz, $\cos\alpha = 1/e$ dugu eta, beraz, (4.50) erabiliz,

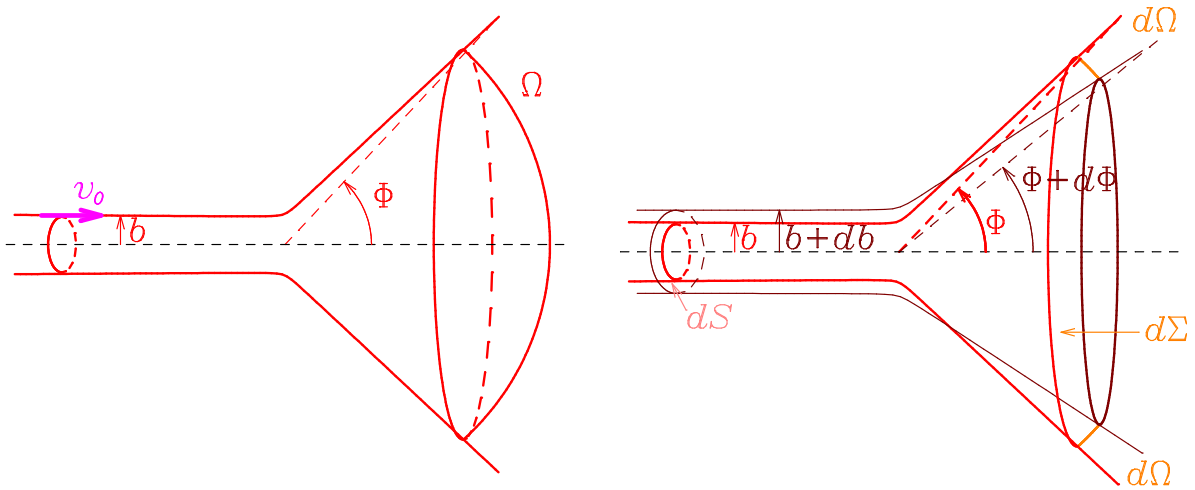
$$\begin{aligned}\cot\frac{\Phi}{2} &= \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1} = \sqrt{e^2-1} = \sqrt{\frac{2EL^2}{mk^2}} = \sqrt{\frac{m^2b^2v_0^4}{k^2}}\end{aligned} \tag{4.99}$$

lortzen dugu. Hauxe da, bada, indar newtondarren kasuan sakabanatze-angelua ematen duen formula:

$$\cot\frac{\Phi}{2} = \frac{mbv_0^2}{|k|} = \frac{2bE}{|k|}. \tag{4.100}$$

4.5.1 Sekzio eragilea

Orain arte partikula bakarra kontsideratu dugu, baina benetako esperimentuetan hainbat partikula jaurtitzen dira jomugaren kontra. Eman dezagun sorta uniforme bat bidaltzen dela eta OX ardatza sortaren norabidean eta jomugan zehar aukeratzen dugula. Partikula guztien hasierako abiadura v_0 da eta energia mekanikoa $E = \frac{1}{2}mv_0^2$; baina b jotze-parametroak (eta, beraz, momentu angeluarrak) aldatu egiten dira sortako puntu batetik bestera, noski. Sortak pairatutako indarra ardatzaren inguruan simetrikoa dela suposatuko dugu. Prozesu osoak simetria bera badu, indarra zentrala delako edo, orduan oso distantzia handira b erradioko zirkunferentzian zeuden partikula guztiak Φ angeluko konoan higituko dira etorkizuneko infinituan, 4.16 irudian erakusten den bezala. Ohi bezala, indarra (eta, beraz, desbiderapena) distantziarekin txikituz badoa eta jotze-parametroa aurreko b baino handiagoa (txikiagoa) bada, partikulak aipaturiko konoak definitzen duen Ω angelu solidoaren barruan (kanpoan) agertuko dira sakabanatu ondoren.



4.16 IRUDIA Sorta baten sakabanatzea.

Kontsidera ditzagun iraganeko infinituan sortaren perpendikularra den plano batetik eta b eta $b + db$ balioen arteko jotze-parametro batekin denbora-unitatean pasatu ziren dN jaurtigaiak. Definizioz, sortaren **intentsitatea** denbora-unitatean sekzio normalaren azalera-unitatetik pasatu ziren partikulen kopurua da: $I = dN/dS$. Partikula horien sakabanatze-angeluak Φ eta $\Phi + d\Phi$ balioen artean egongo dira eta etorkizuneko infinituan partikulak bi angelu horietako konoen arteko $d\Omega$ angelu solidoan agertuko dira. Berriro ere, indar newtondar aldaratzaileekin gertatzen den bezala, indarra eta, ondorioz, desbiderapena distantziarekin txikitzen direla suposatu dugu 4.16 irudiko eskuinaldean. Beraz, $db > 0$ bada, $d\Phi < 0$ izango dugu.

Irudiko eraztunaren azalera $dS = 2\pi b\, db$ denez, sakabanatzea gertatu baino lehen denbora--unitatean handik pasatzen diren partikulen kopurua

$$dN = I\, dS = 2\pi I b\, db \tag{4.101}$$

da. Kontsidera dezagun orain zentroa konoen erpinean duen R erradio handiko gainazal esferiko bat. Gainazalak eta konoek irudiko $d\Sigma$ eraztun esferikoa definitzen dute.

Sakabanatzearen ondoren (detektagailuan) $d\Sigma$ gainazaletik denbora unitatean pasatu diren dN partikulen kopurua intentsitatearen proportzionala izango da, jakina, eta informazio ezagun hori kenduta geratzen zaigun $d\sigma \equiv dN/I$ magnitudea **sekzio eragile diferentziala** da: denbora unitatean $d\Sigma$ gainazaletik pasatzen diren jaurtigaien kopuruaren eta intentsitatearen zatidura. Argi

dago, (4.101) emaitzaren ondorioz,

$$d\sigma = dS = 2\pi b\, db \tag{4.102}$$

dela; baina esperimentu batean ez da zuzenean neurtzen partikula bakoitzaren b jotze-parametroa, zein norabidetan agertzen den baizik. Beraz, $d\sigma$ nolabait Φ sakabanatze-angeluaren menpean idatzi behar dugu.

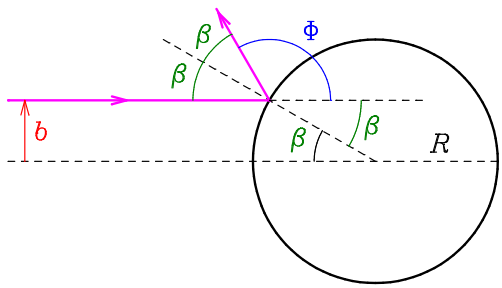
Gainera badakigu $d\Sigma$ (edo $d\Omega$) balioaren menpekoa izango dela $d\sigma$ eta, hortaz, $d\sigma/d\Sigma$ edo, hobe, $d\sigma/d\Omega$ kalkulatu behar dugu. $d\Sigma = R^2\, d\Omega$ azalera erradioaren menpekoa denez, naturalagoa da bere ordez erradioaren independentea den $d\Omega$ erabiltzea. Sekzio eragile diferentziala angelu solidoarekin nola aldatzen den ikusteko, kalkula dezagun eraztun esferikoaren $d\Sigma$ azalera infinitesimala.

Bere oinarria $R\sin\phi$ erradioko zirkunferentzia da, $2\pi R\sin\phi$ luzera duena. Eraztunaren altuera R erradioko zirkunferentziaren $-d\Phi$ arkua denez, bere luzera $-R\, d\Phi$ da (gogoratu $d\Phi$ negatiboa dela). Eraztunaren azalera, beraz, $d\Sigma = -2\pi R^2 \sin\Phi\, d\Phi$ da eta definitzen duen angelu solidoa

$$d\Omega = \frac{d\Sigma}{R^2} = -2\pi \sin\Phi\, d\Phi. \tag{4.103}$$

Ondorioz, hauxe dugu:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{b\, db}{\sin\Phi\, d\Phi}. \tag{4.104}$$



4.17 IRUDIA Esfera tinkoa eta partikulen sakabanatzea.

Orain arte sorta uniformea eta indarra simetrikoa dela suposatu dugu (baita, indarra distantziarekin txikitzen dela; hauxe egia ez bada, – zeinua kendu behar da aurreko adierazpenetatik); baina aurrera egiteko indarraren adierazpen esplizitua ezagutu behar dugu $b(\Phi)$ funtzioa kalkulatzeko. Adibide moduan, kontsidera dezagun partikula puntualak esfera leun finko baten kontra bidaltzen direla. Esfera leuna bada ez dago ukipen-indar tangenterik eta gainazal esferikoaren tangentea den abiaduraren osagaia ez da aldatuko. Talka elastikoa bada, abiaduraren modulua eta, beraz, abiadura erradialarena ez dira aldatuko (gogoratu 1.6.4 problema): eraso- eta islapen-angeluak berdinak dira eta talkaren geometria 4.17 irudikoa. Sakabanatze-angelua $\Phi = \pi - 2\beta$ izango da eta, $b \leq R$ denean, hauxe dugu:

$$\sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Phi}{2}\right) = \cos\frac{\Phi}{2} = \frac{b}{R}. \tag{4.105}$$

Hemendik zuzenean lortzen da sekzio eragile diferentziala:

$$b = R\cos\frac{\Phi}{2}, \tag{4.106}$$

$$\frac{db}{d\Phi} = -\frac{R}{2}\sin\frac{\Phi}{2}, \tag{4.107}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{b}{\sin\Phi}\frac{db}{d\Phi} = -\frac{b}{2\sin\frac{\Phi}{2}\cos\frac{\Phi}{2}}\frac{db}{d\Phi} = \frac{R^2}{4}. \tag{4.108}$$

Kasu erraz honetan $d\sigma/d\Omega$ konstantea da eta sakabanatzea isotropoa: angelu solidoaren unitatean zehar igarotako partikulen kopurua berdina izango da norabide guztietan.

Indar newtondarren kasuan, (4.100) emaitzaren diferentziala

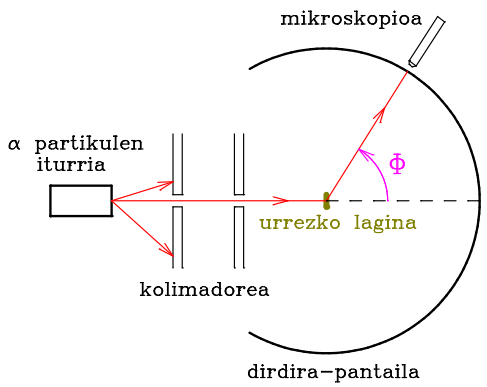
$$\frac{2E\,db}{|k|} = d\left(\cot\frac{\Phi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d\Phi}{\sin^2\frac{\Phi}{2}} \tag{4.109}$$

da eta, hemendik lortzen den db eta (4.100) berriro erabiliz, hauxe dugu:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^2}{16E^2}\frac{1}{\sin^4\frac{\Phi}{2}}. \tag{4.110}$$

4.5.2 Rutherford-en sakabanatzea

XX. mendearen hasieran materiaren oinarrizko osagai ezagun bakarra elektroia zen. Azken honen aurkitzailea izan zen J. J. Thomson-en ustez, elektroi negatiboak materia-banaketa jarraitu positibo batean zeuden sartuta, budin baten mahaspasen antzera. Materiaren benetako egitura aztertzeko, 1908ko Kimikako Nobel sariduna zen Rutherford-ek Manchesterren zuzendutako laborategian esperimentu batzuk egin ziren 1909 inguruan. Urrezko xafla meheak α partikulekin bonbardatu zituzten, azken hauen kopurua norabide desberdinetan neurtzeko. Partikula gehienak ia ez ziren desbideratzen, baina bakan batzuk atzera (hau da, $\Phi > \pi/2$ sakabanatze-angeluekin) irteten ziren. Oso harrigarria izan zen hori, paperezko orri bat bonbardatzean bala batzuk atzera irtengo balira bezala. Rutherford-ek orduan materia ia hutsik dagoela proposatu zuen: elektroiez gain karga positiboa dago, baina oso gune txikietan, nukleoetan, bildurik. α partikulak elektroiak baino askoz astunagoak direnez, neurtzen ziren desbiderapenak ulertzeko, nukleoen eragina aztertu behar zen.



4.18 IRUDIA Geiger eta Marsden-en esperimentuaren eskema.

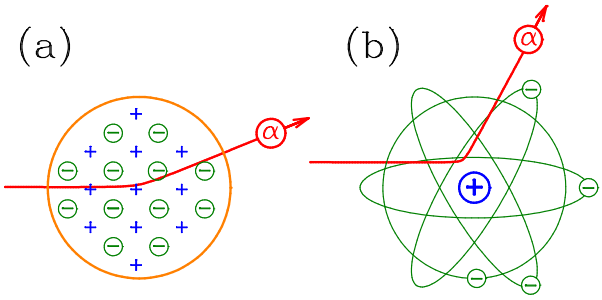
Jaurtigaia eta jomuga nukleoak badira, Z_1 eta Z_2 zenbaki atomikoak dituztenak,

$$k = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} = -\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \tag{4.111}$$

dugu eta (4.110) emaitzatik 1911ko **Rutherford-en sakabanatze-formula** lortzen da:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = n\left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\Phi}{2}}, \tag{4.112}$$

non n zenbakia laginean dauden nukleoen kopurua den. Izan ere, benetako esperimentu batean sakabanatze-zentro asko daudela kontuan hartu behar da: partikula bat norabide batean agertzeko arrazoia edozein jomugaren eraginaren ondorioa izan daiteke. Hemen suposatzen da partikula baten desbiderapena nukleo bakarrarekin duen elkarrekintzaren ondorioa dela, eta egia da lagina mehea denean (ikus, halaber, 4.5.5 atala). Gainera, lagina detektagailua baino askoz txikiagoa dela suposatzen dugu, behatzaileak neurturiko angelua sakabanatze-zentroaren menpekoa ez izateko.



4.19 IRUDIA α partikulen sakabanatzea (a) Thomson-en ereduan eta (b) Rutherford-enean.

Ikusten dugunez, sekzio eragile diferentzialaren sakabanatze-angeluarekiko menpekotasuna oso handia da. Zorionez, denbora hartan egin gabe zegoen mekanika kuantikoan emaitza berbera lortzen da indar newtondarren kasuan, eta menpekotasun hori Geiger-ek eta Marsden-ek egiaztatu zuten nukleo astunak α partikulekin bonbardatzean. Esperimentu eta azalpen teoriko hauekin oso urrats handia egin zen atomo-egitura ulertzeko.

4.5.3 Sekzio eragile osoa

Sekzio eragile diferentziala integratzen badugu, sekzio eragile osoa —hau da norabide guztietan denbora-unitatean agertzen diren partikula sakabanatuen kopuruaren eta intentsitatearen zatidura— lortzen da. Esfera leun gogor baten kasuan, (4.108) konstantea denez,

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega = \frac{R^2}{4}\int d\Omega = \pi R^2 \tag{4.113}$$

dugu: sakabanatzen diren partikulen zeharkako azalera esferarena da, $b > R$ jotze-parametroen kasuan ez baitago sakabanatzerik.

Sakabanatze newtondarrean, (4.110) emaitzatik honela kalkulatzen da sekzio eragile osoa:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega = 2\pi \frac{k^2}{16E^2}\int_{\Phi_{\min}}^{\Phi_{\max}} \frac{\sin\Phi\, d\Phi}{\sin^4\frac{\Phi}{2}}\, d\Phi = -\frac{\pi k^2}{4E^2}\left.\frac{1}{\sin^2\frac{\Phi}{2}}\right|_{\Phi_{\min}}^{\Phi_{\max}}. \tag{4.114}$$

Sorta uniformearen zeharkako sekzioa infinitua dela suposatzen badugu, $\Phi_{\min} = 0$ lortzen da $b = \infty$ denean eta, jakina, sekzio osoa infinitua da. Benetako esperimentu batean, elektroien kargak nukleoen kontrakoak direnez, jotze-parametroa atomoaren erradioa baino handiagoa bada, jaurtigaia (ia) ez da desbideratuko; beraz, desbideratzen den sortaren zatiaren σ azalera finitua (eta oso txikia) izango da.

4.5.4 Perizentroa eta nukleoen dimentsioa

Bestaldetik, jomuga puntuala dela suposatu dugu, beraz ezin erabil daiteke (4.110) jotze--parametroaren balioa nukleoaren erradioaren parekoa edo txikiagoa bada. Izan ere, jomuga eta jaurtigaiaren arteko distantziarik txikiena

$$r_- = \frac{p}{e-1} = \frac{p}{e^2-1}(e+1) = a(1+e) = \frac{|k|}{2E}(1+e) \tag{4.115}$$

da eta

$$\sin\frac{\Phi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha = \frac{1}{e}. \tag{4.116}$$

Beraz,

$$r_- = \frac{|k|}{2E}\left(1+\csc\frac{\Phi}{2}\right) \tag{4.117}$$

eta sakabanatze-esperimentu batean «ikus» daitezkeen distantzia txikienak, $\Phi = \pi$ balioari dagozkion buruz buruko talketako

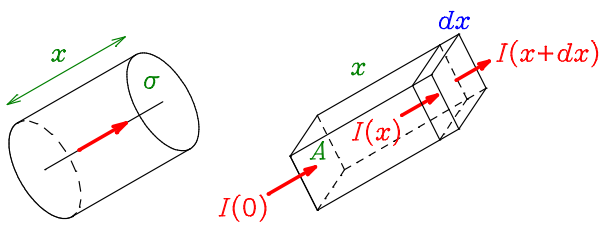
$$r_{\min} = \frac{|k|}{E} \tag{4.118}$$

baliokoak edo izango dira. Rutherford-ek bere legea $|k|/E > 10^{-14}$ m energiekin bakarrik betetzen zuela ikustean, nukleoaren dimentsioa 10^{-14} m ingurukoa (eta ez atomoaren $d \sim 10^{-10}$ m diametroa) zela ondorioztatu zuen: materia ia-ia hutsik dago.

4.5.5 Batez besteko ibilbide askea

Sekzio eragile osoaz balia gaitezke partikula-sorta bat materian zehar higitzean nola ahultzen den aztertzeko. Azter dezagun, hasteko, bolumen-unitatean N atomo dituen material batean higitzen den sortako partikula bat. Partikularen eta atomo baten arteko sekzio eragile osoa σ bada, bien arteko talka gertatzeko, partikularen ibilbidea ardaztzat duen σ zeharkako sekzioko zilindroan egon behar du atomoak. Ondorioz, x distantzia egitean, zilindroan dauden $N\sigma x$ atomoen eragina pairatuko du partikulak eta talken artean egindako batez besteko bidea, batez besteko ibilbide askea deitzen dena, hauxe izango da:

$$\lambda = \frac{1}{N\sigma}. \tag{4.119}$$



4.20 IRUDIA Ibilbide askea eta partikula-sortaren intentsitatea.

Eman dezagun partikula-sorta materialaren azalaren perpendikularra dela eta bere intentsitatea azalean $I(0)$, eta x sakoneran atomoekin talka egin gabe (eta, beraz, desbideratu gabe) higitzen diren partikulen intentsitatea $I(x)$. Beraz x distantziara dagoen dx lodierako xafla bat kontsideratzen badugu, barruan $NA\,dx$ atomo daude eta denbora-unitatean $NA\sigma I(x)\,dx$ talka

gertatuko dira. Xaflan denbora-unitatean sartzen diren partikulak $I(x)A$ direnez, talkarik egin gabe irteten direnak honako hauek ditugu:

$$I(x+dx)A = I(x)A - NA\sigma I(x)\,dx. \tag{4.120}$$

Hemen $I(x+dx) = I(x) + I'(x)\,dx$ garapena eginez, $I'(x) = -N\sigma I(x)$ lortzen dugu eta hau, $I(0)$ hastapen-baldintza gogoratuz, hurrengo modu baliokidean idazten da:

$$I(x) = I(0)e^{-N\sigma x} = I(0)e^{-x/\lambda}. \tag{4.121}$$

Laginaren lodiera d bada, denbora unitatean gertatzen diren talkak

$$I(0)A - I(d)A = \left(1 - e^{-d/\lambda}\right) I(0)A \tag{4.122}$$

izango dira. Lagina oso mehea bada, hau da, $d \ll \lambda$ badugu, $e^{-d/\lambda} \approx 1 - d/\lambda = 1 - N\sigma d$ garapena erabil dezakegu eta talken kopurua $N\sigma d I(0)A$ izango da: atomo batekin gertatzen diren $\sigma I(0)$ talken eta lagineko NAd atomoen kopuruen biderkadura, hain zuzen. Arrazoi beragatik, lagina oso mehea denean, talka anizkunik ez badago, sekzio eragile diferentziala partikula bakarrari dagokiona nukleoen kopuruarekin biderkatuz lortzen da.

4.5.6 Sekzio eragileak masa-zentroan eta laborategian

Orain arte, gauzak errazteko, indar-poloa finkotzat hartu dugu, baina hori ez da beti egia izango. Eman dezagun laborategian hasieran geldi dauden jomuga aske berdinen kontra igortzen direla jaurtigaiak. (Horrelako prozesu fisiko bat dugu (ia) geldi dauden protoiak energia handiko protoiekin bonbardatzean, adibidez.) Oro har, partikulen arteko talkak errazago aztertzen dira masa-zentroaren sisteman, 1.5.7 atalean ikusi genuen bezala (ikus, halaber, 4.13 problema); baina neurketak laborategiko sisteman egiten dira.

Eman dezagun, masa-zentroaren sisteman b jotze-parametroaren eta θ^* sakabanatze-angeluaren arteko erlazioa kalkulatu dela eta, ondorioz,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = -\frac{b\,db}{\sin\Phi^*\,d\Phi^*} \tag{4.123}$$

ezaguna dela. Izan ere, higidura erlatiboan eta masa-zentroan neurtutako sakabanatze-angeluak berdinak dira, (1.165) proportzionaltasunaren ondorioz, norabideak berdinak baitira. Gainera infinituan jaurtigaiak zituen abiadura eta energia modu berean neurtzen dira laborategiko sisteman eta higidura erlatiboan, hasieran jomuga geldi bazegoen. Beraz, sakabanatzea newtondarra denean, Rutherford-en emaitzak erabil daitezke masa-zentroan, jaurtigaiaren masaren ordez sistemaren masa laburbildua erabiltzen bada.

Kono infinitesimal batean sakabanatzen diren partikulen kopurua berdina izango masa-zentroan eta laborategiko sisteman, jakina:

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega^*}\,d\Omega^* = \frac{d\sigma}{d\Omega}\,d\Omega. \tag{4.124}$$

Hortaz, (4.103) adierazpena eta masa-zentroan dagokiona erabiliz,

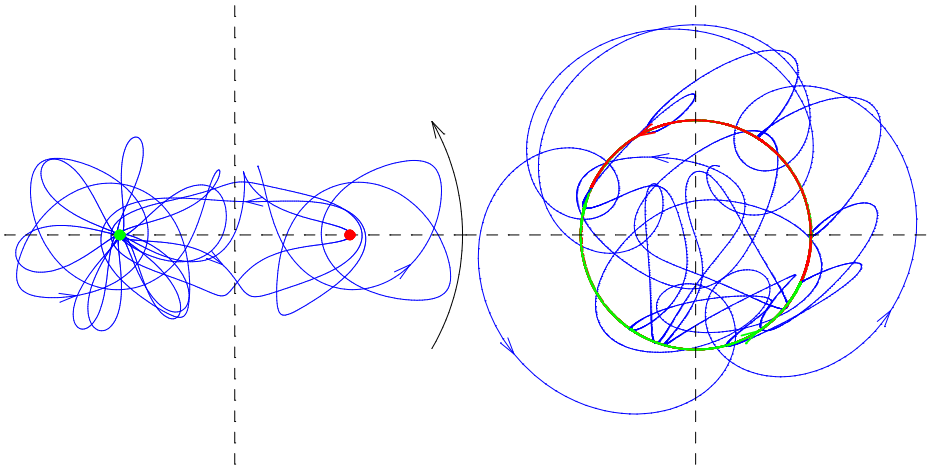
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sin\theta^*}{\sin\theta}\,\frac{d\theta^*}{d\theta}\,\frac{d\sigma}{d\Omega^*} \tag{4.125}$$

lortzen da. Bi sistemetako sakabanatze-angeluen arteko erlazioa ematen duen (1.185) emaitza erabili behar da adierazpen esplizitu orokorra kalkulatzeko; baina, ez dugu hemen kalkulu orokorra egingo (4.12 probleman aztertuko dugu kasu berezi bat).

4.6 Hiru gorputzen problema

Orain arte aztertu dugun problema, barne-indar zentralen eraginez higitzen diren bi gorputzen higidura erlatiboa, hain zuzen, oso berezia da. Printzipioz, horrelako higidura batean sei hastapen--baldintza eman behar dira: hasierako posizio erlatiboaren hiru osagaiak eta abiaduraren hiruak. Energia mekanikoaren eta momentu angeluarraren kontserbazio-legeak[3] erabiliz, higidura-ekuazioak (4.19) eta (4.21) integraletara laburtu ditugu. Energia mekanikoa, momentu angeluarra eta bi hastapen-baldintza, $r(t_0)$ eta $\varphi(t_0)$, ematen badira higidura kalkula daiteke, aipaturiko integralak ebazteko gai bagara. Azken hau ez da askotan gertatzen, baina hiru gorputzen kasuan problema integraletara laburtzea ere ezinezkoa izaten da.

Izan ere, hiru gorputzen problema orokorrean energia mekanikoa izaten da higidura-konstante bakarra masa-zentroaren sisteman eta hastapen-baldintzak hamabi. Gauzak nolabait errazteko (ez dira batere errazak, baina) hipotesi gehiago egingo ditugu hemendik aurrera.



4.21 IRUDIA Bi gorputzen problema murriztu zirkularraren orbita bat sistema birakorrean eta masa-zentroarenean[5].

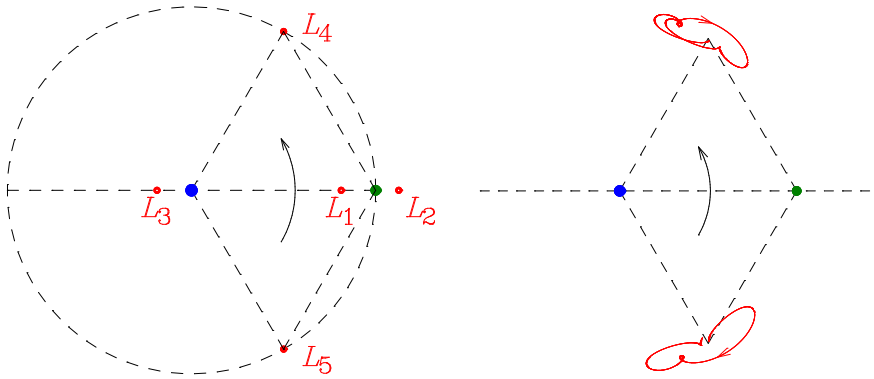
4.6.1 Hiru gorputzen problema murriztu zirkularra

Eman dezagun hiru gorputzetako batek, **planetoidea** deitu ohi denak, oso masa txikia duela, beste bien higiduran duen eragina arbuiagarria izateko moduan. Beste biak, **primarioak** deitutakoak, orbita zirkularretan higitzen dira elkarren inguruan eta, ondorioz, masa-zentroaren inguruan. (Adibidez, primarioak Eguzkia eta Jupiter izan daitezke eta planetoidea asteroide bat.) Gainera, planetoidea primarioen orbitaren planoan higitzen da; problema laua dugu eta hastapen--baldintzak lau izango dira (bat energia mekanikoa izan daiteke). Planetoidearen higidura aztertzeko, erreferentzia-sistemaren jatorria masa-zentroan aukeratuko dugu eta ardatz koordenatuak primarioekin batera biratuko dira; primarioak, beraz, X ardatzean pausagune erlatiboan egongo dira. Sistema birakor hau ez da inertziala eta, bi primarioen erakarpen grabitatorioez gain indar zentrifugoa eta Coriolis-ena agertuko dira higidura-ekuazioan (ikus 2.7.3 problema). Egindako hipotesi guztiekin ere problema oso zaila da. Adibide moduan, 4.21 irudian agertzen da orbita

[3] Indarra zentrala eta newtondarra bada, beste higidura-konstante bat dago: Laplace, Runge eta Lenz-en bektorea (ikus 4.6 problema).

[5] Ikus `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/zentralak/4.22.ds`.

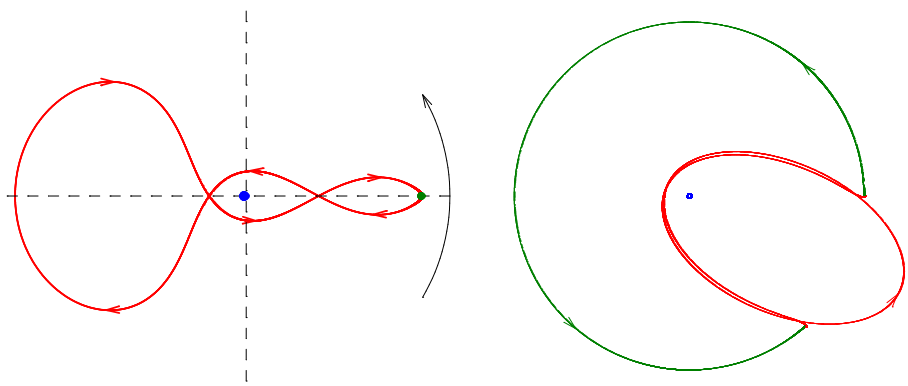
baten zati bat; ezkerraldean goian definituriko sistema birakorrean eta eskuinean puntu berean kokaturiko masa-zentroaren sistema inertzialean. Adibide horretan bi primarioen masak berdinak badira ere (masa-zentroaren inguruko orbita zirkularreko kontrako bi puntutan egongo dira beti bi primarioak), orbita ez da orain arte ikusi ditugunak bezain erraza.



4.22 IRUDIA Puntu lagrangearrak eta bi orbita Lurraren eta Ilargiaren sisteman[6].

Lagrange-ren puntuak

Orbita gehienak oso korapilatsuak izateak ez du esan nahi orbita errazagorik ez dagoela. Izan ere, higidura errazena oreka da eta Lagrange-k frogatu zuenez, sistema birakorrean lau oreka-puntu daude (ikus 2.7.4 problema). Lehenengo hiruak (L_1, L_2 eta L_3) primarioak lotzen dituen zuzenean daude eta beti dira ezegonkorrak(ikus [15]). Baina, bi primarioekin batera triangelu aldekideak definitzen duten L_4 eta L_5 interesgarriagoak dira, primarioen masen zatidura 0.0385 baino txikiagoa bada egonkorrak baitira, eta primarioak Eguzkia eta planeta bat edo Lurra eta Ilargia badira baldintza hori betetzen da. Azpimarratu behar da soluzio hauek oreka erlatiboaren puntuak direla, sistema birakorrean bakarrik baitaude geldi, masa-zentroaren sisteman primarioekin batera biratzen dira, baina $60°$-ko aurrerapen edo atzerapen konstantearekin, 4.22 irudian ikusten den bezala.



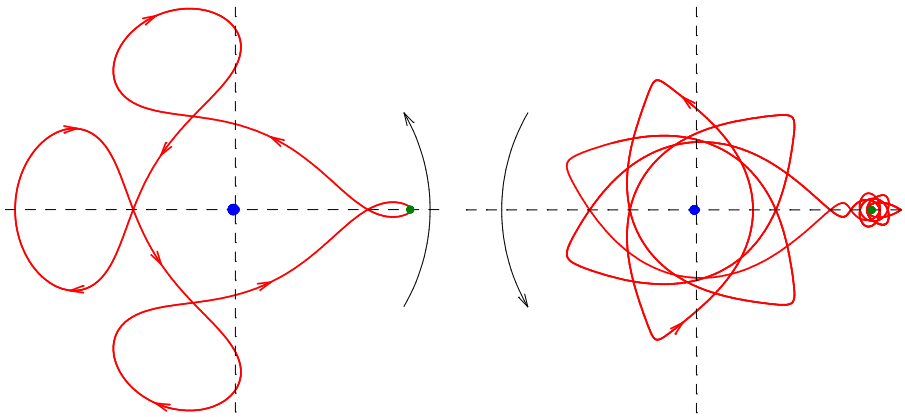
4.23 IRUDIA Arenstorf-en orbita bat sistema birakorrean eta masa-zentroarenean[7].

[6]Ikus `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/zentralak/4.23.ds` simulazioa.
[7]Ikus `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/zentralak/4.24.ds` simulazioa.

Lagrange-ren puntuak bitxikeria matematikotzat hartzen ziren, baina 1906 urtetik aurrera Jupiteren L_4 eta L_5 puntuen inguruan asteroideak aurkitzen hasi ziren: Akiles, Patroklo, Hektor, Nestor, Priamo, Agamemnon eta abar. Gaur egun mila baino gehiago ezagutzen dira (ia bi heren L_4 puntuaren inguruan) eta **troiarrak** deitzen dira. Martitzen lehen troiarra, Eureka, 1990ean aurkitu zen.

Primariotzat Lurra eta Ilargia dituen sisteman ez dago gorputz handirik L_4 eta L_5 puntuen inguruan, baina bai 1956an lehenengoz aurkitu ziren gorputz txikiez osaturiko hodei zabalak.

Badaude, gainera, orbita periodiko ezegonkorrak, hala nola 4.23 eta 4.24 irudietan erakusten diren Arenstorf-en zenbait orbita.



4.24 IRUDIA Arenstorf-en beste bi orbita sistema birakorrean[8].

1999an bestelako soluzio mota bat aurkitu zen, Eguzkiaren eta Lurraren sistemaren L_3, L_4 eta L_5 puntuak lotzen dituen orbitak eta, besteak beste, 5 km-ko diametroa duen Cruithne asteroidea horrelako batean higitzen da eta, kalkuluen arabera, bertan egongo da 5000 urtez.

4.7 Problema ebatziak

4.7.1 Newton-en problema

Ariketa honetan Newton-en grabitazio-legea ez dela ezaguna suposatuko da eta abiapuntutzat Kepler-en legeak aukeratuko dira.
(a) Froga ezazu Kepler-en lehen eta bigarren legeetatik planeta batek jasaten duen indarraren zentraltasuna ondorioztatzen dela.
(b) Emaitza horretaz eta Kepler-en lehen legeaz baliaturik, nola froga daiteke Eguzkiaren eta planetaren arteko distantziaren karratuaren alderantzizko proportzionala dela indarra?
(c) Erabili aurreko bi puntuetako emaitzak eta Kepler-en hirugarren legea indarra planetaren masaren proportzionala dela ondorioztatzeko.

(a) Lehen legearen ondorioz, orbita eliptikoaren fokuarekiko momentu angeluarraren norabidea, elipsearen planoaren perpendikularra eta, hortaz, konstantea da. Momentuaren modulua eta noranzkoa ere konstanteak dira, bigarren legearen ondorioz. Beraz, momentu angeluarra konstantea denez, $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ dugu.

[8] Ikus `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/zentralak/4.25a.ds` eta `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/zentralak/4.25b.ds` simulazioak.

(b) Orbita eliptikoa denez, koordenatu polarretan bere ekuazioa $u = (e\cos\varphi + 1)/p$ da eta Binet-en formula erabiliz zera dugu:

$$F = -\frac{L^2}{m}\left(u'' + u\right)u^2 = -\frac{L^2}{mp}u^2 = -\frac{k}{r^2}, \qquad \left(k = \frac{L^2}{mp}\right).$$

(c) Indar-eremua newtondarra dela aurreko bi puntuetan frogatu dugunez, hauxe dugu:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{k} = \text{ktea.} \qquad \Longrightarrow \qquad k \propto m.$$

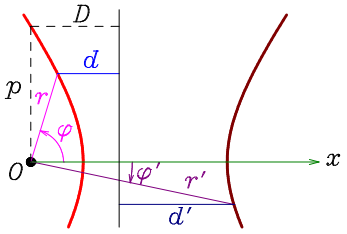
4.18 ARIKETA Nola froga daiteke Eguzkiaren masaren proportzionala dela indarra?

4.7.2 Kurba konikoak

*Eman dezagun puntu bat eta lerro zuzen bat aukeratzen ditugula. Puntua **fokua** deituko dugu eta lerro zuzena **zuzentzailea**. Fokutik eta zuzentzailetik neurturiko puntu baten distantzien arteko zatidura **eszentrikotasuna** da. Definizioz, kurba konikoak, e eszentrikotasun konstantea duten puntuen leku geometrikoak dira. Zuzentzailearen norabidean neurturiko kurba eta fokuaren arteko p distantzia **foku-parametroa** deitzen da. Aukeratu jatorria fokuan eta OX ardatza zuzentzailearen perpendikularra izateko moduan. Froga ezazu koordenatu polarretan kurba konikoen ekuazioa*

$$r = \frac{p}{e\cos\varphi \pm 1}$$

dela eta ondorioztatu kurba konikoak (geometria klasikoan gainazal konikoen eta planoen arteko ebakidura gisa ere definitzen zirenak) zirkunferentziak, elipseak, parabolak edo hiperbolak direla.



Irudian ikusten den bezala,

$$e = \frac{p}{D} = \frac{r}{d} = \frac{r'}{d'}.$$

Bestalde, $D = r\cos\varphi + d = r'\cos\varphi' - d'$ eta hemen

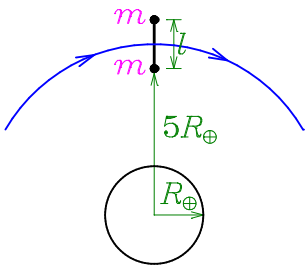
$$D = \frac{p}{e}, \qquad d = \frac{r}{e}, \qquad d' = \frac{r'}{e}$$

eginez hauxe dugu:

$$\frac{p}{e} = r\cos\varphi + \frac{r}{e} = r'\cos\varphi' - \frac{r'}{e}.$$

4.3.1, 4.3.2, 4.4.1 eta 4.4.2 ataletan frogatu dugunez, horrelako ekuazio batek emandako kurba zirkunferentzia, elipsea, parabola edo hiperbolaren adar bat da.

4.7.3 Sateliteak



Pisu gabeko hagatxo batez eta $m = 20$ kg-ko bi masa esferikoz osaturiko satelitea orbita zirkular batean higitzen ari da. Higidura osoan zehar $l \ll R_\oplus$ luzerako hagatxoa norabide erradialean dago inolako esfortzurik jasan gabe. Kalkula ezazu l distantzia.

Hagatxoak ez badu inolako indarrik eragiten, Lurrak eragindako ekarpena eta masen artekoa izango dira indarrak eta, ondorioz, bi masen higidura-ekuazioak hurrengoak:

$$\begin{aligned}\frac{GmM_\oplus}{(5R_\oplus)^2} - \frac{Gm^2}{l^2} &= m\omega^2(5R_\oplus),\\ \frac{GmM_\oplus}{(5R_\oplus + l)^2} + \frac{Gm^2}{l^2} &= m\omega^2(5R_\oplus + l).\end{aligned}$$

Batzuetan kalkuluak errazteko dimentsio gabeko aldagaiak oso erabilgarriak izaten dira, tarteko adierazpenak laburtzeko (baina kalkulu-akatsak aurkitzeko hain erabilgarria den dimentsioen egiaztapena galtzen da). Kasu honetan,

$$d \equiv \frac{l}{5R_\oplus}, \qquad \mu \equiv \frac{m}{M_\oplus}, \qquad Q \equiv \frac{125\omega^2 R_\oplus^3}{GM_\oplus}$$

aldagaiak erabiltzen baditugu, honela agertzen zaizkigu higidura-ekuazioak:

$$\begin{aligned}1 - \frac{\mu}{d^2} &= Q,\\ \frac{1}{(1+d)^2} + \frac{\mu}{d^2} &= Q(1+d).\end{aligned}$$

Lehen ekuazioa bigarrenean ordezkatuz zera lortzen da:

$$\mu\left(2 + 5d + 4d^2 + d^3\right) = d^3\left(3 + 3d + d^2\right).$$

Beraz, $d \ll 1$ dela erabiliz, parentesietan bakarrik gorde behar da lehen gaia:

$$2\mu \approx 3d^3.$$

Nahiago bada, Taylor-en garapenaren ondorioz, hauxe dugu:

$$\mu = d^3\frac{3 + 3d + d^2}{2 + 5d + 4d^2 + d^3} = \frac{3}{2}d^3 + \mathcal{O}\left(d^4\right),$$

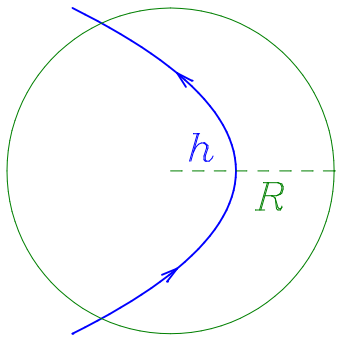
Edozein kasutan,

$$l \approx 5\left(\frac{2m}{3M_\oplus}\right)^{\frac{1}{3}} R_\oplus \approx 0.42\ \text{m}.$$

4.7.4 Kometa

Kometa baten orbita parabolikoa da eta bere perihelioa h. Froga ezazu Lurraren orbitaren barruan ematen duen denbora honako hau dela:

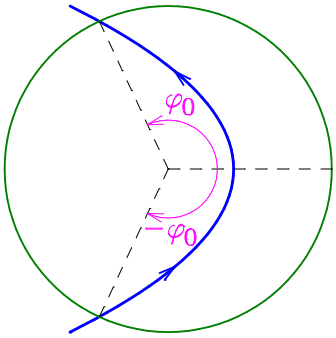
$$\Delta t = \frac{\sqrt{2}}{3\pi}\left(1 + \frac{2h}{R}\right)\sqrt{1 - \frac{h}{R}} \quad \text{urte}.$$



Zein da Δt-ren baliorik handiena? Balio maximo hori gertatzen denean, zein da kometaren abiadura Lurraren orbita zeharkatzean?

Orbita parabolikoaren ekuazioa

$$r = \frac{p}{1+\cos\varphi}, \qquad p = \frac{L^2}{mk}$$



da eta, beraz, kometa Lurraren orbitaren barruan egongo da hurrengo baldintza baliokideak betetzen direnean:

$$\begin{aligned} r &\leq R \iff -\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0, \\ \varphi_0 &\equiv \arccos\left(\frac{p}{R} - 1\right). \end{aligned}$$

Bestalde, honela adierazten da kometaren momentu angeluarra:

$$L = mr^2\dot{\varphi} = \sqrt{pmk} = \sqrt{GM_\odot m^2 p} = m\sqrt{GM_\odot}\sqrt{p}.$$

Aurreko adierazpenean orbitaren ekuazioa eta Kepler-en hirugarren legea ($T^2/R^3 = 4\pi^2/GM_\odot$) ordezkatuz,

$$\frac{p^2\dot{\varphi}}{(1+\cos\varphi)^2} = \frac{2\pi R^{3/2}\sqrt{p}}{T}$$

lortzen dugu eta hemen aldagaiak bananduz,

$$\int_{t0}^{t0+\Delta T} dt = \frac{T}{2\pi}\left(\frac{p}{R}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{(1+\cos\varphi)^2},$$

eta $p = 2h$ dela eta

$$\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2} = \frac{\sin x\,(2+\cos x)}{3(1+\cos x)^2}$$

integrala erabiliz, frogatu nahi genuen emaitza lortzen da:

$$\Delta t = \frac{\sqrt{2}T}{3\pi}\left(1 + \frac{2h}{R}\right)\sqrt{1 - \frac{h}{R}}.$$

(Kepler-en hirugarren legean R erradioa Lurraren orbitarena bada, T periodoa urtebetekoa da.) Orain $\partial\Delta t/\partial h = 0$ eginez, $h = R/2$ eta $\Delta t = 2T/3\pi$ lortzen da eta 4.7 probleman ikusiko dugunez,

$$v = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{R}} = \frac{\sqrt{8}\pi R}{T}.$$

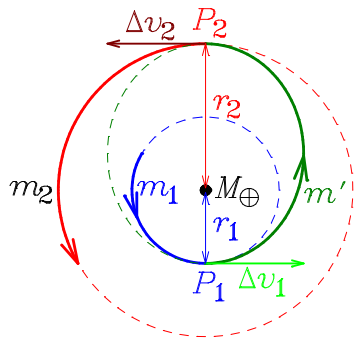
4.7.5 Hohmann-en orbita

Satelite bat orbita zirkular batetik beste batera joateko bi zirkunferentzien tangentea den orbita eliptikoa erabil daiteke. Noiz piztu behar da motorra? Nola aldatuko da abiadura motorra erabiltzean? Motorrak igorritako gasen abiadura u bada, zein da bidaia egiteko erabiliko den gasaren masa osoa?

Hiru orbitetan higidura grabitatearen eraginez gertatzen denez, motorra orbita aldatzeko erabili behar da soilik: P_1 eta P_2 puntuetan hain zuzen. Puntu horietan orbitak tangenteak direnez, abiaduraren norabidea ez da aldatuko. Abiadurak kalkulatzeko, orbita itxietan energia mekanikoa

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_\oplus}{r} = -\frac{GmM_\oplus}{2a}$$

dela erabiliko dugu:



$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{Gm_1M_\oplus}{r_1} &= -\frac{Gm_1M_\oplus}{2r_1},\\
\frac{1}{2}m'v_1'^2 - \frac{Gm'M_\oplus}{r_1} &= -\frac{Gm'M_\oplus}{r_1+r_2},\\
\frac{1}{2}m'v_2'^2 - \frac{Gm'M_\oplus}{r_2} &= -\frac{Gm'M_\oplus}{r_1+r_2},\\
\frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{Gm_2M_\oplus}{r_2} &= -\frac{Gm_2M_\oplus}{2r_2}.
\end{aligned}$$

Hemendik abiaduraren aldaketak honako hauek direla ondorioztatzen da:

$$\begin{aligned}
\Delta v_1 \equiv v_1' - v_1 &= \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r_1}}\left[\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} - 1\right],\\
\Delta v_2 \equiv v_2 - v_2' &= \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r_2}}\left[1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}\right].
\end{aligned}$$

Masa-aldaketak kalkulatzeko gasaz eta suziriaz osaturiko sistemaren momentu lineal osoa P_1 eta P_2 aldiunetako bakoitzean ez dela aldatzen erabil daiteke. dt tartean suziriaren abiaduraren aldaketa dv bada eta masarena dm, gasen masa $-dm$ da eta honela idazten da kontserbazio-legea:

$$mv = (m + dm)(v + dv) + (-dm)(v - u),$$

edota (bigarren ordenako $dm\,dv$ gaia arbuiatuz)

$$\frac{dm}{m} = -\frac{dv}{u}.$$

(Hauxe da masa aldakorraren higidura-ekuazioa. Ikus 1.6 problema.) Ekuazio hau P_1 eta P_2 puntuetako bakoitzaren inguruan integratuz, zera lortzen dugu:

$$\begin{aligned}
m' &= m_1 e^{-\Delta v_1/u},\\
m_2 &= m' e^{-\Delta v_2/u} = m_1 e^{-(\Delta v_1 + \Delta v_2)/u}.
\end{aligned}$$

Hortaz, gasen masa osoa hurrengoa da:

$$m_g = m_1 - m_2 = m_1\left[1 - e^{-(\Delta v_1 + \Delta v_2)/u}\right].$$

4.8 Problemak

4.1 Satelite baten orbitaren erradioa atmosfera ukitu gabe izan dezakeen txikiena bada, zein da periodoa?

4.2 Azter ezazu potentzial newtondar batean gertatzen den dimentsio bakarreko higidura.

4.3 Potentzial elastiko isotropoa. Erabili koordenatu cartesiarrak $V = 1/2\, kr^2$ energia potentzialaren kasuan orbitak aurkitzeko. Nolako legeak erabil daitezke kasu honetan Kepler-en legeen ordez?
Iradokizuna: Gogoratu 7.4.2 ataleko Lissajous-en irudiak eta ikusi hurrengo simulazioa: `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/zentralak/elastikoa.ds`.

4.4 Energia potentzialaren kalkulua[9]**.** $V(r)$ potentzial zentral batean higitzen den partikula baten posizio-bektorearen eta abiaduraren arteko angelua konstantea da: $0 < \alpha < \pi$. Erabili kontserbazio-printzipioak hauxe egiteko:
(a) Froga ezazu posizio-bektorearen eta abiaduraren moduluen rv biderkadura konstantea dela.
(b) Kalkulatu energia osoa eta $V(r)$ potentziala.
(c) Kalkulatu higiduraren $r(t)$ eta $\varphi(t)$ funtzioak.
(d) Noiz iristen da partikula indar-polora $t = 0$ unean hastapen-baldintzak $r_0 = 1000$ m, $v_0 = 10$ m s^{-1} eta $\alpha = 135°$ badira?

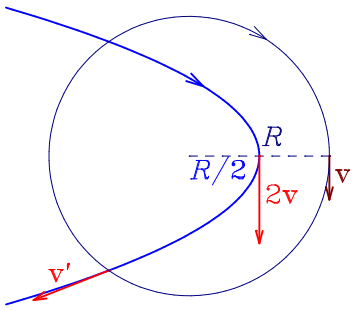
4.5 Orbitaren ekuazioa. Aurkitu orbitaren ekuazioa 4.4 problemaren kasuan.

4.6 Laplace, Runge eta Lenz-en bektorea. Partikula puntual bat $V = -k/r$ eremu newtondarrean ari da higitzen. Froga ezazu honako bektore hau higidura-konstantea dela:

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Kalkula ezazu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$ bi modu desberdinetara (biderketa eskalarraren definizioa erabiliz eta $\mathbf{A}$-ren definizioaz baliatuz), orbitaren ekuazioa berreskurazteko.

4.7 Eguzkiaren eta kometa baten arteko distantziarik laburrena Lurraren orbitaren erradioaren erdia da, eta aldiune horretan Lurraren abiadura kometarenaren erdia da. Zein izango da kometaren abiadura eta norabidea Lurraren orbita zeharkatzen duenean? Nolakoa izango da kometaren orbita?
Oharra: Arbuia ezazu Lurraren orbitaren eszentrikotasuna.



4.8 m masako satelite baten orbita zirkularraren erradioa $2R_\oplus$ da[10]. Aldiune batean, $F = amg$ modulu konstanteko indarra aplikatzen hasten da. a konstantea da eta g grabitate-eremuaren intentsitatea Lurraren azalean. Indarraren norabidea eta noranzkoa Lurraren zentroranzkoak dira beti. Satelitearen masa aldatzen ez dela suposatuz, zein da a konstantearen balioa, orbita berria Lurraren azalaren tangentea bada? Zein da satelitearen abiadura azken aldiune honetan?
Oharrak: Ikus `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/zentralak/amg.ds` simulazioa.

[9] Isaac Newton-ek berak proposatu eta ebatzi zuen problema hau *Principia*-n.
[10] Gogoratu $R_\oplus$ delakoa Lurraren erradioa dela. (Ikus 481 or.)

4.9 Kometa bat $v_\infty = \sqrt{GM_\oplus/R_\oplus}$ abiaduraz hurbiltzen da Lurrerantz oso distantzia handi batetik, Lurreko zentrotik b distantziara dagoen lerro zuzen batean zehar. Nolakoa izan behar du b balioak orbita Lurraren gainazalaren tangentea izateko? Zein da orbitaren eszentrikotasuna? Marraztu orbita eta kalkulatu non ukitzen duen Lurra. Zein da sakabanatze-angelua?

4.10 Bi sateliteren masak $m_1 = m$ eta $m_2 = \epsilon\, m$ dira. Biak higitzen ari dira R erradioko orbita zirkular berean, baina aurkako noranzkoetan. Elkarrekin topo egitean loturik geratzen dira. Nolakoa izan beharko du R erradioak Lurraren gainean eror ez daitezen?
Iradokizuna: Emaitzan ϵ, R eta $R_\oplus$ soilik agertzen dira.

4.11 4 keV-eko α partikulen sorta baten intentsitatea 3×10^8 m^{-2} s^{-1} da. 50 mg-ko aluminiozko jomugatik 0.6 m-tara, 400 mm^2-ko sekzioa duen detektagailu bat kokatzen da. Detektagailuaren norabidea eta sortarena elkarzutak dira. Zenbat α partikula iritsiko dira detektagailura denbora--unitatean?
Datuak: $Z_{\mathrm{Al}} = 13$, $m_{\mathrm{Al}} \approx 27$ u.

4.12 Sekzio eragileak. Zein da masa-zentroaren sisteman eta laborategian neurtutako sekzio eragileen arteko erlazioa jaurtigaiak eta jomugak berdinak direnean?

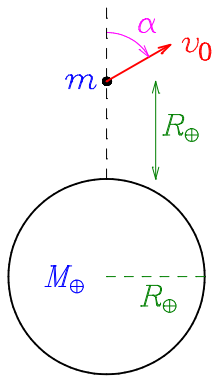
4.13 Hasieran laborategiko sisteman geldi dauden esfera leun gogorren kontra beste esfera leun gogorrak bidaltzen dira. Kalkulatu sekzio eragile diferentziala eta osoa masa-zentroaren sisteman eta, esfera guztiak berdinak diren kasu berezian, laborategian.

4.14 m masako satelitearen orbita zirkularraren erradioa r_0 bada, zein da satelitearen energia mekaniko osoa? Orbitaren A puntuan abiaduraren norabidea aldatzen da modulua aldatu gabe. Orbita berriaren perigeoa $r_0/5$ bada, zein da abiadura azken puntu honetan? (Adierazi emaitza v_0 balioaren bidez.) Zein izan da norabidearen aldaketa A puntuan?

4.15 Aldiune batean irudiko satelitearen garaiera (Lurraren gainazaletik neurtua) $R_\oplus$ da eta bere abiadura

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{2R_\oplus}}.$$

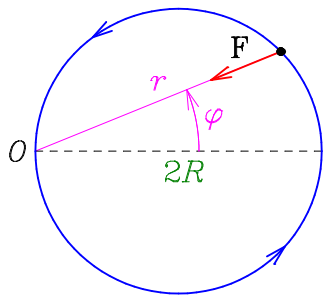
Abiadura eta bertikalaren arteko angelua α da.
(a) Nolakoa da orbita $\alpha = \pi/2$ bada?
(b) Nola aukeratu behar da α angelua satelitearen apogeoa ahalik eta handiena izateko (Lurraren gainean erori gabe, noski)?



4.16 Indar-eremu zentral baten eraginpean higitzen den partikula baten orbita zirkularra da eta O indar-poloa orbitan dago. Aurki ezazu orbitaren $r(\varphi)$ ekuazioa eta froga ezazu energia potentziala

$$V = -\frac{k}{r^4}$$

egiturakoa dela.

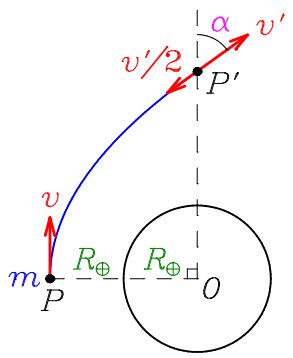


4.17 Eman dezagun m masako partikula bat $V = -k/r$ potentzial newtondarrean higitzen dela. Froga ezazu bere abiadura orbita eliptiko batean honako hau dela:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}.$$

Balia zaitez emaitza honetaz abiadura maximoaren eta minimoaren zatidura adierazteko orbitaren eszentrikotasunaren menpean. Zeintzuk dira orbita zirkularrei, parabolikoei eta hiperbolikoei dagozkien adierazpenak? Erabili azken hauek partikularen abiadura infinituan kalkulatzeko, orbita paraboliko eta hiperbolikoen kasuan.

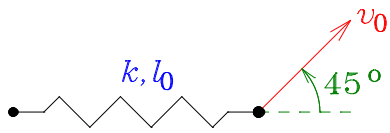
4.18 Irudiko satelitearen orbita parabolikoa da eta bere perigeoa P puntuan dago. P' puntura iristean, motorrak pizten dira eta denbora-tarte arbuiagarri batean satelitearen abiaduraren noranzkoa alderantzikatzen da eta bere modulua erdira murrizten.
(a) Kalkulatu v eta v' abiadurak, OP' distantzia eta α angelua.
(b) Begi bistan dago orbita berria ez dela parabolikoa izango; kalkulurik egin gabe: nolako orbita izango da halabeharrez?
(c) Lurraren gainean eroriko al da satelitea?



4.19 Satelite artifizial bat $2R_\oplus$ erradioko orbita zirkular egonkorrean higitzen da. Aldiune batean norabide erradialean bulkada bat ematen dion suziri bat pizten da. Ondorioz, satelitearen orbita berria parabolikoa da. Kalkulatu suziriak emandako abiadura erradiala eta orbita parabolikoaren eta Lurraren arteko distantziarik txikiena.

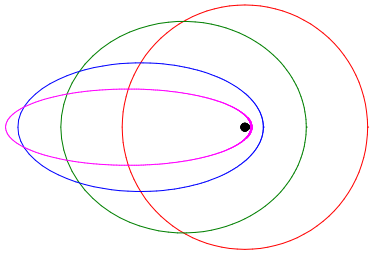
4.20 Izar baten inguruko orbita zirkularrean higitzen den planeta baten energia, momentu angeluarra eta abiadura E_0, L_0 eta v_0 dira, hurrenez hurren. Kometa batekin topo egitean orbita elipse bihurtzen da, periastroa aldatu gabe, baina apoastro berria bost aldiz handiagoa da. Kalkulatu orbita berrian planetak dituen energia, momentu angeluarra, eta periastroko eta apoastroko abiadurak. Marraztu planetaren bi orbitak irudi berean.

4.21 m masako partikula l_0 luzera propioko malguki baten bidez dago loturik puntu finko batetik. Partikularen abiadura hasieran irudian erakusten dena da eta malgukiaren luzera maximoa $2l_0$. Aurki ezazu malgukiaren k konstante berreskuratzailea m, v_0 eta l_0 datuen funtzioan.



4.22 Izar batek planeta bat duela susmatzen da. Planeta ez da zuzenean ikusten, baina astronomoen neurketen arabera izarra $v = 1$ km/s abiadura konstantez higitzen da zirkunferentzia batean $T = 1$ urte periodoarekin. Bestalde, izarraren masa $M = 2 \times 10^{30}$ kg dela aurkitu dute. Kalkulatu planetaren m masa.
Iradokizuna: Kalkuluaren azken pausoan, baina ez lehenago, planetaren masa izarrarenarena baino askoz txikiagoa dela suposa dezakezu.

4.23 «Irudiko orbita newtondar guztien ardatz nagusiak berdinak direnez, energia mekanikoak ere berdinak dituk» dio Aitorrek. «Bai zera! Orbita zirkularraren energia, minimoa duk» erantzuten dio Mikelek. Zer uste duzu zuk?



4.24 Binet-en (4.33) ekuazioa ebaztean bi integrazio-konstante agertuko dira eta, beraz, bi hastapen-baldintza erabili beharko dira. Baina orbitaren ekuazioa (4.25)-ren bidez kalkulatzean hastapen-baldintza bakarra erabili dugu: $u(\varphi_0) = 1/r_0$. Azaldu buruhauste hau.

4.25 Azter ezazu $-F(r)\,\hat{\mathbf{r}}$ indar-eremu zentral erakarlea eta $-m\gamma\dot{\mathbf{r}}$ marruskadura pairatzen dituen partikularen higidura. Aurkitu eta ebatzi momentu angeluarraren eboluzio-ekuazioa. Plano finko batean daude orbita bakoitzeko puntu guztiak? Zergatik? Hemendik aurrera, indarra newtondarra dela suposatuko dugu ($F = k/r^2$) eta marruskadura nahiko txikia, $1/\gamma$ orbitaren periodoa baino askoz handiagoa izateko moduan. Kasu horretan orbita ia zirkularra izan daiteke. Zergatik? Kalkulatu nola aldatzen diren, gutxi gorabehera, horrelako orbita baten erradioa eta abiadura. Frogatu abiadura handituz doala, nahiz eta marruskadura egon. Nondik dator horretarako behar den energia?

4.26 m masako satelite baten abiadura bere orbita zirkularrean v_0 da. Bat-batean ϵm masa jaurtitzen du atzerantz $-\mathbf{v}_0$ abiadura erlatiboarekin. Kalkulatu orbita berriaren forma, eszentrikotasuna, apogeoa eta perigeoa $0 < \epsilon < 1$ balioetarako. Zein da satelitearen garaiera bere posizio angeluarra, orbita berria hasi zen puntutik neurtua, $\pi/2$ denean?

4.27 Planeta baten orbitaren ardatzerdi nagusia a da eta periodoa T. Froga ezazu perihelioan eta afelioan dituen abiaduren biderkadura $\left(\dfrac{2\pi a}{T}\right)^2$ dela.

4.28 Zer aldatuko litzateke indar zentralen definizioan bakarrik eskatuko balitz indarraren aplikazio-lerroa puntu finko batetik pasatzeko, moduluan inolako baldintzarik ezarri gabe? Azaldu erantzuna adibide egoki batekin.

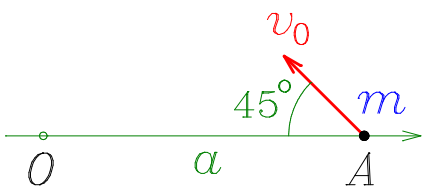
4.29 Planeta bat M masako izar baten inguruan higitzen da orbita zirkular batean. Izarra lehertzen denean kanpoko geruza jaurtitzen du oso abiadura handiarekin, masa-galera denbora-tarte arbuiagarri batean gertatzeko moduan. Geratzen den izarrak duen M' masa planetarena baino askoz handiagoa da. Leherketan planetak pairatutako indarra arbuiatzen bada, zein da planetaren orbitaren eszentrikotasun berria? Zein da bete behar den baldintza planeta izarretik ihes egiteko?

4.30 Lehen satelite artifiziala, Sputnik deitzen zena, 1957an jaurti zen. Perigeoan haren garaiera eta abiadura 227 km (kontuz, nondik neurtzen da hau?) eta 8 km/s baliokoak ziren hurrenez hurren. (a) Kalkulatu apogeoan zituen altuera eta abiadura. (b) Zein zen orbitaren periodoa?

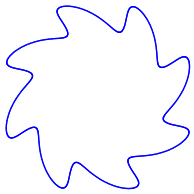
4.31 Eztabaidatu orbita zirkularren existentzia eta egonkortasuna indar-eremu zentrala Yukawa-ren energia potentzialari dagokiona denean:

$$V(r) = -\frac{k}{r}\,e^{-r/a}, \qquad (k, a > 0).$$

4.32 $F(r) = km/r^3$ moduluko indar zentralak O puntu finkorantz erakartzen du m masa. Irudiko posizioan partikularen abiadura $v_0 = \sqrt{k}/a$ da. Erabili kontserbazio-printzipioak partikularen ibilbidea kalkulatzeko. Aurkitu partikularen posizioa denboraren menpean.



4.33 Indar-eremu zentral batean higitzen den partikula baten orbita irudikoa izan daiteke?



4.34 Nolakoa da indar-zentral baten energia potentziala, orbita zirkularretan abiadura erradioaren menpekoa ez bada?

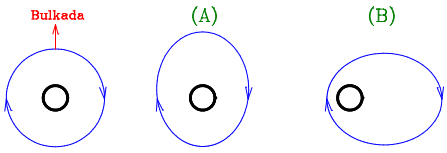
4.35 $m = 1000$ kg-ko bi satelite, $3R_\oplus$ eta $4R_\oplus$ erradioetako orbita zirkularretan higitzen ari dira plano berean, $R_\oplus$ luzerako hagatxo arin batez loturik daudela. Aurkitu sateliteen periodoa eta hagatxoan dagoen tentsioa.

4.36 Neutroi geldoak xurgapen-prozesuan, ${}^{113}_{48}$Cd isotopoaren sekzio eragilea $\sigma = 2 \times 10^4$ b da[11], sekzio geometrikoa baino lau magnitude-ordenaz handiagoa. Horrexegatik, Fermi-ren lehen erreaktorearekin hasita, larrialdietan erreakzio nuklearrak geldiarazteko kontrol-barrak kadmioz egin ohi dira.

Eman dezagun neutroi geldoen sorta bat kadmiozko xafla batean zehar igarotzen dela. Azken honetan ${}^{113}_{48}$Cd isotopoaren nukleoen zenbaki-dentsitatea 6×10^{27} m^{-3}-koa bada, zein da xaflaren lodiera minimoa sorta 100 aldiz moteltzeko?

4.37 Egia ala gezurra? Azaldu zergatik den egia edo gezurra hurrengo baieztapen bakoitza.

(a) Orbita zirkular batean higitzen ari den satelite baten motorra oso denbora-tarte labur batean erabiltzen bada irudian erakusten den bulkada emateko, orbita berria ez da izango A motakoa, B itxurakoa baizik.



(b) Indar-eremu zentral batean higitzen den partikula batek pairatutako indarra izan daiteke erakarlea puntu batzuetan eta aldaratzailea orbita bereko beste puntu batzuetan.

(c) Kepler-en orbita bateko perizentroan indarra eta abiadura elkarzutak direnez, indarra zentripetoa da eta honako hau betetzen da:

$$\frac{k}{r^2} = m\frac{v^2}{r}.$$

4.38 Oso distantzia handira zeudenean $\mathbf{v}_\infty$ abiaduraz higitzen ziren meteoritoen sorta zabal batean sartzen da Lurra. Nolakoa izan behar du meteorito baten jotze-parametroak Lurrean erortzeko? Kalkulatu Lurraren harrapatze-sekzio eragile osoa, hau da, Lurrean eroriko diren meteoritoen sortaren zeharkako sekzioaren azalera oso urrun zeudenean. Zenbat meteorito eroriko dira egun batean?

Datuak: $v_\infty = 20$ km s^{-1} eta sortaren intentsitatea $I = 5 \times 10^{-18}$ m^{-2} s^{-1}.

[11] Nukleoen sekzio geometrikoaren ordenakoa denez, askotan sekzio eragileak neurtzeko **barn** izeneko unitatea erabiltzen da: 1 b $= 10^{-28}$ m^2 $= 100$ fm^2. (Fentometroa **fermi** izenarekin ere ezagutzen da: 1 fm $= 10^{-15}$ m.)

4.39 Kepler-en lanetan hirugarren legea ez da 4.3.3 atalekoa, honako hau baizik: «Periodoaren karratuaren eta Eguzkiaren eta planetaren arteko batez besteko distantziaren kuboaren arteko zatidura berdina da planeta guztietarako». Kalkulatu ardatzerdi nagusiaren luzeraren eta batez besteko distantziaren arteko erlazioa. Iruzkina egin emaitzari.

4.40 Orbita geoegonkor batean higitzen ari da satelite bat (beraz, beti dago ekuatoreko puntu finko baten gainean, altuera berean). Une batean satelitearen motorra erabiltzen da, higiduraren norabidean, Lurraren tangentea den orbita berri batean jartzeko. Zein da abiadura orbita berriaren hasieran eta amaieran? Zenbateko denbora behar du Lurrera heltzeko?

4.41 Satelite batek bulkada bat pairatzen du bere orbita zirkularraren norabidean. Kalkulatu energia zinetikoaren aldaketa erlatiboa, hau da,

$$\Delta = \left| \frac{T - T_0}{T_0} \right|,$$

non bulkada aplikatu baino lehenago eta ondoren energia zinetikoak T_0 eta T diren, hurrenez hurren. Froga ezazu orbita berriaren eszentrikotasunaren menpeko hutsa den formula erraz baten bidez idazten dela Δ aldaketa kasu guztietan, hau da, orbita eliptikoa, parabolikoa zein hiperbolikoa denean.

4.42 Partikula puntual bat hurbiltzen ari da, oso distantzia handitik, $V = -k/r^4$ energia potentzialaren indar-polora, b jotze-parametroarekin eta hurrengo abiadurarekin:

$$v_0 = \sqrt{\frac{8k}{mb^4}}.$$

Marraztu energia potentzial eraginkorra eta orbitari dagokion energia-maila. Erabili informazio hori orbitaren zirriborroa marrazteko. Kalkulatu orbitaren ekuazioa.

4.43 Baliatu 1842an Jacobi-k latinez argitaratutako metodoaz orbita newtondarren ekuazioa berriro integratzeko.
(a) Aukera itzazu, ohi bezala, koordenatu polar lauak orbitaren planoan, $\varphi = 0$ ardatza perizentrotik pasatzeko moduan.
(b) Erabili momentu angeluarraren kontserbazioa

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\frac{k}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

ekuazioan, denborarekiko deribatua φ angeluarekiko deribatuarekin ordezkatzeko.
(c) Integratu horrela lortutako ekuazioa $\mathbf{v}$ abiadura lortzeko.
(d) Frogatu hodografoa —hau da, une guztietako abiadura bektoreak puntu berean jarrita euren puntek marraztutako leku geometrikoa— zirkunferentzia bat dela.
(e) Ordezkatu (c) emaitza momentu angeluarraren $L\,\mathbf{k} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ definizioan eta askatu $r(\varphi)$.