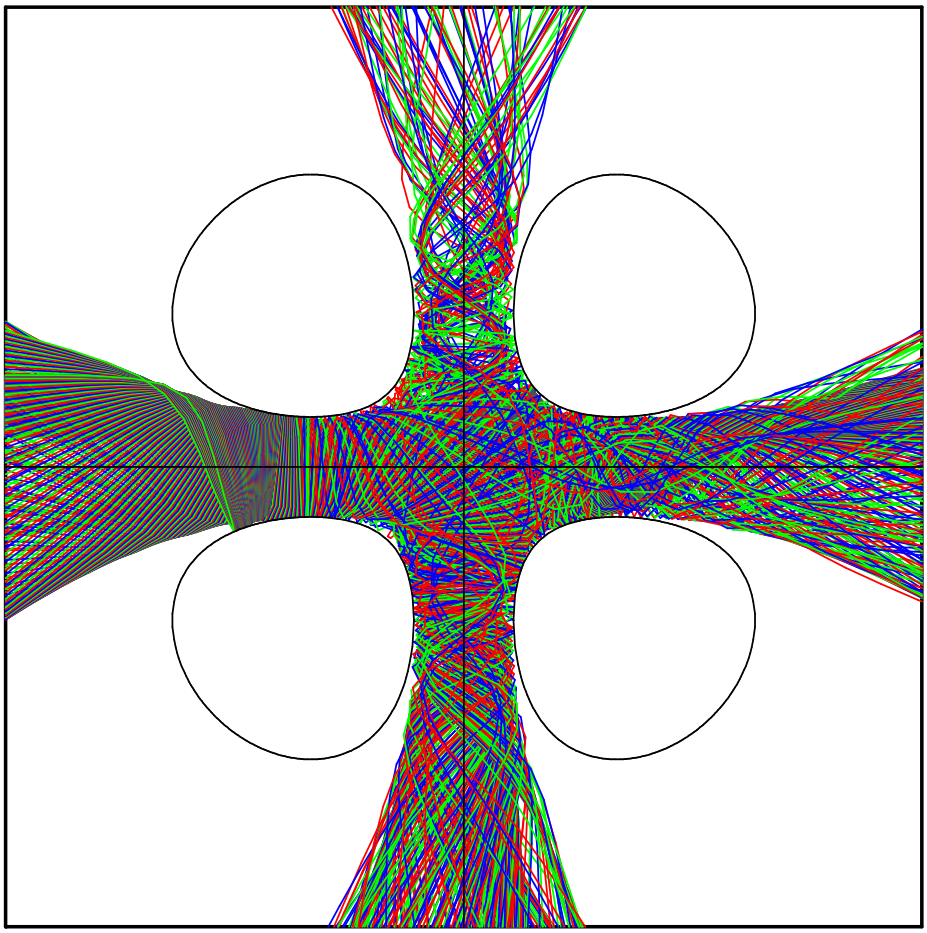
8. GAIA

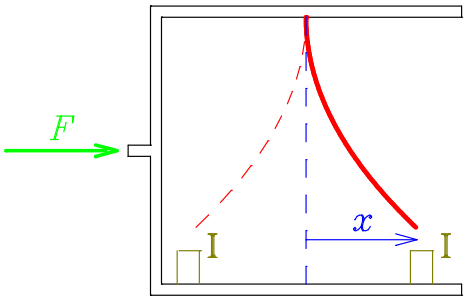
Kaos determinista



8.1 IRUDIA Sakabanatze kaotikoa: 8.22 irudiko problemaren 1024 orbita[1].

[1]Ikus http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/kaosa/sakabanatzea1.ds simulazioa.

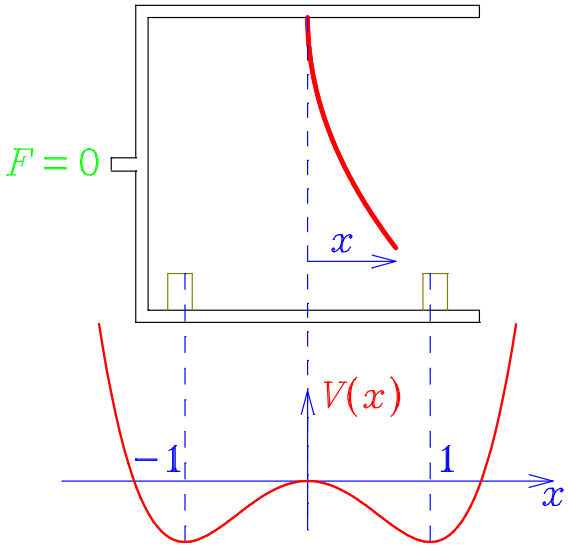
Kaos determinista mekanikan nola agertzen den aztertuko dugu hurrengo orrietan. Oinarrizko kontzeptu batzuk baizik ez ditugu ikusiko eta kontuan hartu behar da kaosa mekanika klasikoan ez ezik zientziaren arlo askotan agertzen dela. Kasu gehienetan ez dakigu nola aurkitu higidura--ekuazioen soluzio zehatzak: testuliburuetan aztertzen diren kasu errazak salbuespen nagusiak dira. Beraz, zenbakizko simulaziora jo beharko dugu [2].



8.2 IRUDIA Tresna mekanikoa.

8.1 Tresna mekaniko baten eredu matematiko sinplifikatua

Irudiko burdin hariak bi imanen erakarpena pairatzen du eta bai aireak eragindako marruskadura ere. Geroago, F kanpo-indar harmoniko bat aplikatuko da haria eta imanak kokaturik dauden euskarrian.



8.3 IRUDIA Tresna mekanikoaren eredua.

Argi denez, $F = 0$ denean bi oreka-posizio egonkor izango ditu sistema honek, burdin hariaren mutur askea iman bakoitzaren ondoan dagoenean hain zuzen. (**Biegonkortasuna** dugula esaten da horrelako kasuetan.) Gainera, simetriaren ondorioz, haria pausagunean egon daiteke posizio bertikalean, egoera hau ezegonkorra bada ere. Oreka-puntu hauek aztertzeko eta sistema honen eredu matematikoa egiteko, maximo bat bi minimoren artean dituen potentzial batez

[2] [41] programaz egin dira gai honetako zenbakizko kalkulu guztiak.

balia gaitezke, oraingoz marruskadura arbuiatzen badugu behintzat. Aukerarik errazena honako potentzial hau dugu[3]:

$$V(x) = -\frac{1}{4}x^2\left(2 - x^2\right). \tag{8.1}$$

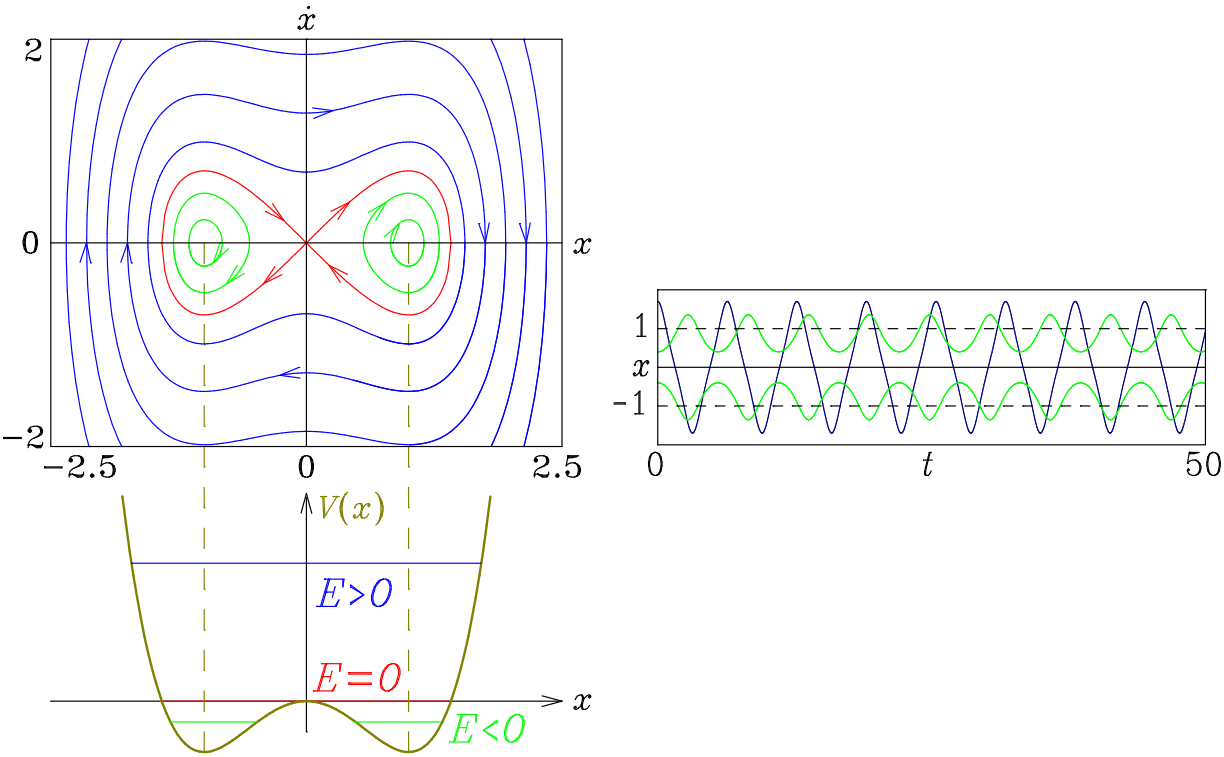
8.1 ARIKETA Froga ezazu higidura-ekuazioa honako hau dela:

$$\ddot{x} = x\left(1 - x^2\right). \tag{8.2}$$

Orain, abiaduraren proportzionala den marruskadura eta kanpo-indar harmonikoa kontuan hartuz, hauxe da aztertuko dugun higidura-ekuazio osoa, **Duffing-en ekuazioa** deritzona:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} - x\left(1 - x^2\right) = f\cos\omega t. \tag{8.3}$$

Ekuazio hau sinplifikatuegia dela pentsa genezake, eta itxuraz ez zaigu hain arrotz egiten, zeinu bat eta gai kubikoa kenduta ohiko osziladore harmoniko bortxatua baita. Baina ikusiko dugunez, gai ez-lineal hori agertzeak ondorio dinamiko ikaragarriak dakartza eta ekuazio hau oso aberatsa da ikuspuntu dinamikotik.



8.4 IRUDIA Fase-espazioa eta soluzio batzuk $\gamma = f = 0$ kasuan.

8.2 Oszilazio periodikoak

Hasteko marruskadura eta kanpo-indarra nuluak direla suposatzen badugu, sistema kontserbatzailea izango da eta energia mekanikoa higidura-konstantea dela adierazten duen hurrengo adierazpena fase-ibilbideen ekuazioa da:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{4}x^2\left(2 - x^2\right) = E. \tag{8.4}$$

[3]Gai honetan dimentsio gabeko aldagaiak erabiltzen ditugu, baita $m = 1$ masa.

8.2 ARIKETA Egiaztatu sistema honen fase-espazioa 8.4 irudikoa dela.

$(-1,0)$ eta $(1,0)$ puntuak potentzialaren minimoei dagozkienez, oreka-puntu egonkorrak dira, eta haietariko baten ondoan hasten diren ibilbideak beti daude puntuaren inguruan; ez dira handik aldentzen ezta puntura joaten ere. Oreka egonkorra izan arren ez da asintotikoki egonkorra eta puntu horiei **zentroak** deritze, haien inguruko ibilbideen itxuragatik.

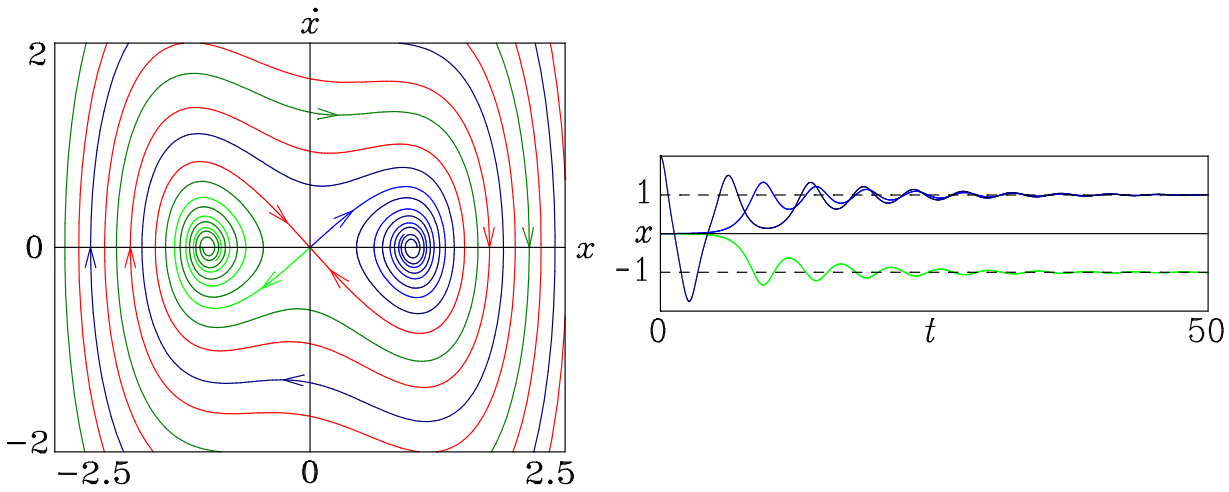
Potentzialaren maximoaren kasuan, (0,0) oreka-puntu ezegonkorra daukagu eta (zela bateko zentroan utzitako bolatxo bati gertatzen zaiona kontuan harturik edo) **zela-puntua** dela diogu.

Ibilbide gehienak itxiak dira eta, beraz, oszilazio periodikoei dagozkie. Energia negatiboa bada, zentro baten inguruan oszilatzen da sistema, orbita berdeetan ikusten den bezala. Energia positiboaren kasuan, sistema maximoaren gainetik pasatzeko gai da eta orbitak bi zentroak inguratzen ditu.

Sistema honek askatasun-gradu bakarra duenez, aldiune bateko posizioa eta abiadura izango dira hastapen-baldintzak. Beraz, fase-espazioaren puntu bakoitza hastapen-baldintzen multzo bat da eta soluzio bati dagokio: puntu bakoitzetik soluzio bat eta soilik bat igarotzen da $t = 0$ unean.

8.3 ARIKETA Nolakoak dira (kasu berezi honetan) energia nuluko kasuari dagozkion ibilbideak? Zenbat dira? (Oreka-puntu batetik hasita bertara itzultzen diren orbitei **homoklinikoak** deritze.)

Salbuespenak salbuespen, orbita gehienak oszilazio periodikoak dira eta euren periodoa anplitudearen menpekoa da. Higidura sinpleenetarikoa dugu hau, baina nahiko berezia, marruskadura txikienak ere deuseztatzen du eta.

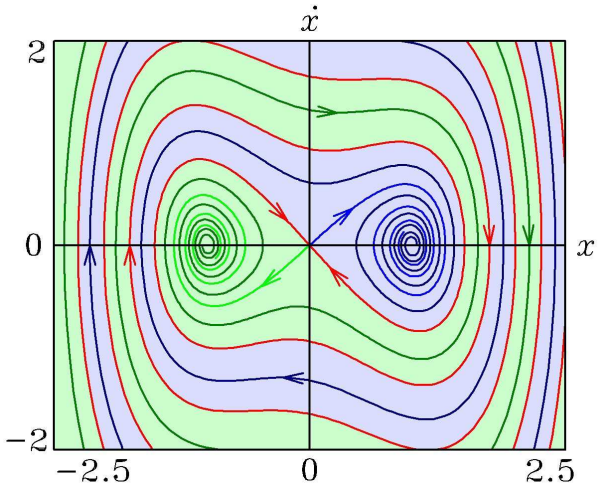


8.5 IRUDIA Fase-espazioa eta soluzio batzuk $\gamma = 0.2$, $f = 0$ kasuan.

8.3 Oszilazio indargetuak

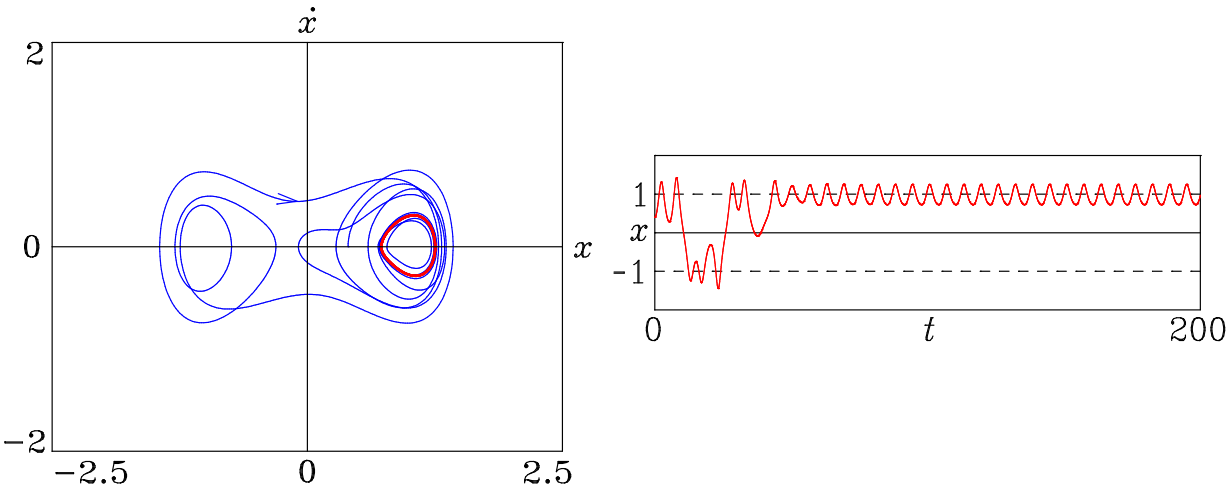
Orain marruskadura kontuan hartzen badugu, energia mekanikoa eta oszilazioen anplitudea gutxituz joango dira eta ia orbita guztiek energia potentzialaren minimo batera joko dute. Ondorioz, (1,0) eta (-1,0) puntuak asintotikoki egonkorrak izango dira orain, inguruan dauden orbitek bertara hurbiltzeko joera baitute. Orbita horien itxura geometrikoa kontuan hartuz, oreka-puntuak **fokuak** direla esaten da (kasu gainindargetuan **nodoak** dira: ikus [38]), eta euren inguruko orbitak erakartzen dituztenez, **erakarleak** deritze.

8.5 irudian ikusten dugunez, (0,0) jatorria zela-puntua da, berriro ere, baina handik sortzen diren orbitak oso desberdinak dira orain. Haietariko bik fokuetara jotzen dute. Orbita hauek oreka-puntuaren *barietate ezegonkorra* osatzen dute.



8.6 IRUDIA Erakarpen-osinak $\gamma = 0.2$, $f = 0$ kasuan.

Baina askoz ere interesgarriagoak dira (0,0) puntura doazen bi orbitak, **barietate egonkorra** osatzen dutenak alegia. 8.6 irudian argi eta garbi ikusten denez, ez doaz erakarle batera eta, hortaz, foku desberdinetara jotzen duten orbitak banantzen dituzte. Horregatik, orbita hauek **banantzailea** osatzen dutela esaten dugu. Erakarle batera doazen soluzioei dagozkien fase-puntuen leku geometrikoa, erakarlearen **osina** da eta banantzailea erakarle desberdinen osinak banantzen ditu: **osin-muga** da.



8.7 IRUDIA Duffing-en ekuazioa $\gamma = 0.2$, $f = 0.23$ kasuan.

8.4 Oszilazio bakartuak

Kanpo-indarra badago, oreka-puntuak ezinezkoak dira, konstanteek ez baitute (8.3) higidura--ekuazioa, betetzen. Soluzio periodikoak ager daitezke; baina kasu kontserbatzailean ez bezala,

ez dute osatuko anplitudearekin era jarraituan aldatzen diren periodoetako orbiten multzo infinitu bat. Orain, periodo nagusi bat dugu: kanpo-indarrarena hain zuzen. Oszilazio linealen kasuan, kanpo-indarraren periodoa duen orbita periodiko bakarra dugu eta, gainera, erakarlea da, beste orbita guztiek tarte iragankor baten ondoren soluzio periodiko bakartu horretara jotzen dute eta. Orbita periodiko bakartuei **ziklo limiteak** deritze.

Duffing-en ekuazioan $f = 0.23$ balioa aukeratzen badugu, antzeko eboluzioa ikusiko dugu kasu ez-lineal honetan. Desagertu diren bi erakarle puntualen ordez bi ziklo limite daude, eta asintotikoki egonkorrak, erakarleak, dira.

8.5 Erakarleak eta Poincaré-ren sekzioak

Orain arte aztertu ditugun erakarleak dimentsio gabeko puntuak edo dimentsio bateko kurbak izan dira; baina dimentsio guztietarako erakarleak aurki daitezke. Adibidez, 8.8 irudiko adibidean,

$$\dot{x} = x\left(a - b + z + d\left(1 - z^2\right)\right) - cy, \tag{8.5}$$

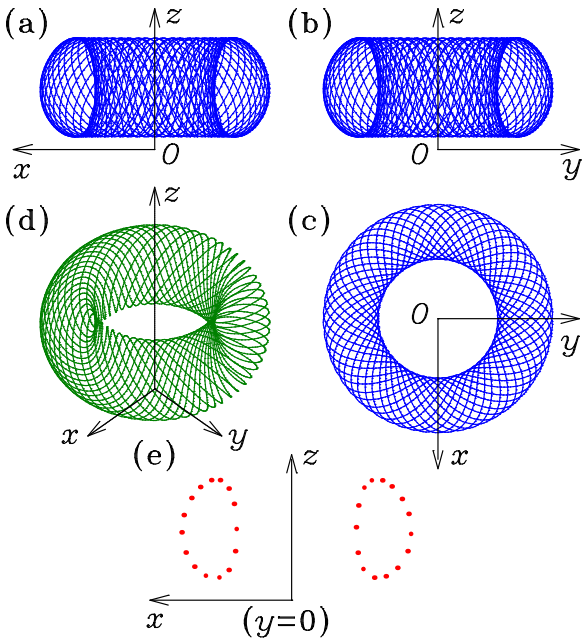
$$\dot{y} = y\left(a - b + z + d\left(1 - z^2\right)\right) + cx, \tag{8.6}$$

$$\dot{z} = az - \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \tag{8.7}$$

sistemaren orbita baten zati bat ikusten da, $a = 2.01$, $b = 3$, $c = 0.25$ eta $d = 0.2$ balioetarako. y, x eta z ardatzen norabideetan lorturiko proiekzioak irudiko (a), (b) eta (c) parteetan ikusten dira, hurrenez hurren. Lehen oktantearen erdikariaren norabideari dagokiona, ordea, (d) delakoan erakusten da. Aipaturiko kasuetan, proiekzioen bidez hiru dimentsioko sistema dinamikoaren soluzioen adierazpenak lortzen dira bi dimentsioko planoan. Gauza bera egiteko, badago beste aukera bat, **Poincaré-ren sekzioa** deitzen dena. Azken metodo honetan soluzioaren eta gainazal jakin baten arteko ebakidura-puntuak marrazten dira. Irudiko (e) zatian, adibidez, soluzioa $y = 0$ planoan dagoen bakoitzean dagozkion (x, z) koordenatuek definituriko puntua marraztu da. Edozein kasutan, 8.8 irudia arretaz aztertuz, portaera iragankorraren ondoren, orbita bi dimentsioko gainazal itxi batean kiribiltzen dela ikusten da. Erakarle honen forma geometrikoa **toru** izenaz ezagutzen da topologian, eta toruaren eta $y = 0$ planoaren ebakidura bi zirkunferentzia dira (zirkunferentzia topologikoak dira hauek, ohiko zirkunferentziak deformatuz, baina apurtu gabe, lor daitezkeenak). Irudiko orbitatik hasierako portaera iragankorra ezabatu da, sistema erakarlearen oso hurbil egoteko behar bezain tarte luzea pasatu dela eta ikuspuntu praktikotik erakarle barruan dagoela pentsatu ahal izateko asmoz. Hastapen-baldintzak aldatu ondoren, berriro portaera iragankorra igaro arte itxaroten bada, lortzen den orbita baliokidea da ikuspuntu kualitatibotik: ez da berdina, baina gainazal berean antzeko moduan biribiltzen da. Erakarlea toruaren azala da.

Denbora-tarte labur baten ondoren, orbita guztiak toruaren gainazalean daude ikuspuntu praktikotik. Horrelako bi dimentsioko erakarle baten kasuan bi periodo ditugu: toruaren bi sekzio nagusietako bakoitzaren inguruan bira bat egiteko behar den batez besteko balioak periodo bat definitzen du. Bi periodo horiek elkarneurgarriak badira (hau da, periodoak T eta T' izanik, $nT + n'T' = 0$ ekuazioak, n eta n' balioetarako soluzio oso ez-nuluak baditu) higidura iraunkorra periodikoa da eta orbita toruaren gainazalean dagoen kurba itxia izango da. Baina gehienetan ez da hori gertatuko eta higidura **kuasiperiodikoa** (edo, zehazkiago, **biperiodikoa**) izango da. Orbitak toruaren gainazala beteko du eta higidura ez da inoiz ere errepikatuko; hala ere, funtsean bi periodo ditugu eta higidura iraunkorra nahiko erraza da.

[4] Ikus `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/kaosa/toroa.ds` simulazioa.

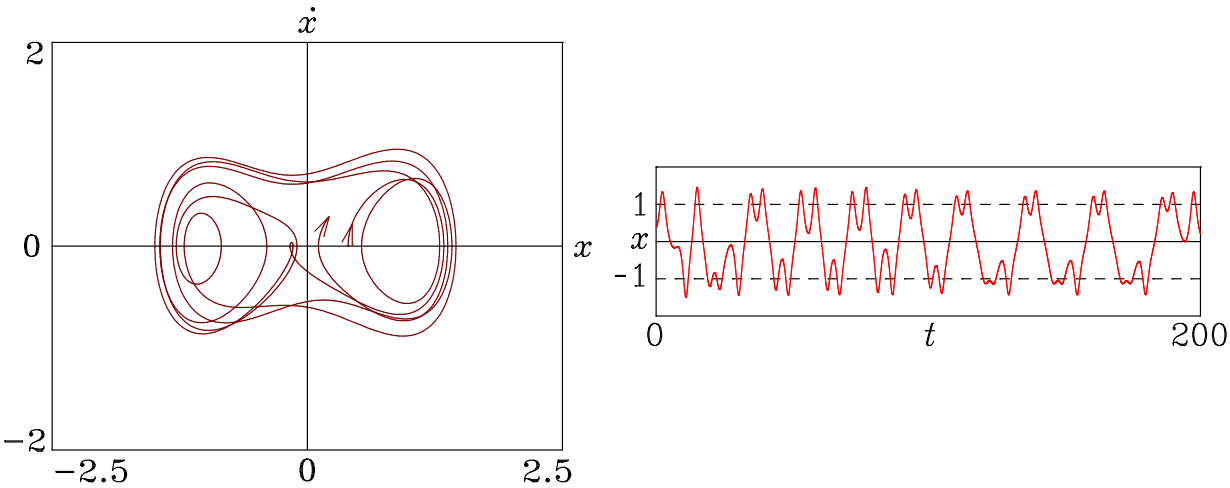


8.8 IRUDIA Proiekzioak eta Poincaré-ren sekzioa[4].

Erakarlearen dimentsioa n bada, n periodo izango ditugu kasu orokorrean. Landau fisikariak uste zuen hau izan zitekeela fluidoetan ikusten den turbulentziaren azalpena: dimentsio handiko erakarlea balego, higidura kuasiperiodikoak periodo asko izango lituzke eta kaotikotzat joko genuke. Gaur egunean badakigu kaosa egoteko ez dela beharrezkoa periodo (eta dimentsio) asko egotea. Nahikoa izan daiteke sistema dinamikoa ez-lineala izatea.

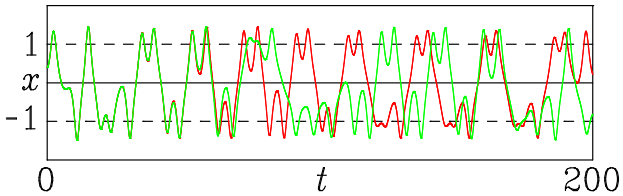
8.6 Oszilazio kaotikoak

Kanpo-indarraren anplitudea handitzean, eboluzioaren izaera erabat aldatzen da: orbita periodikoak desagertzen dira (horrela dirudi, behintzat) eta soluzioak etengabe ari dira oszilatzen baina ez da inolako erregulartasunik nabaritzen.



8.9 IRUDIA Duffing-en ekuazioa $\gamma = 0.2$, $f = 0.3$ kasuan[5].

Erregulartasunik eza beste ikuspuntu batetik aztertzeko, ikus dezagun zer gertatzen den hastapen-baldintzak pittin bat aldatzen badira. 8.10 irudian $(0.4, 0)$ eta $(0.40001, 0)$ hastapen-baldintzei dagozkien orbitak marraztu dira. Ikusten dugunez hastapen-baldintzen aldaketa txikerrek ondorio ikaragarriak izan ditzakete: hasieran oso hurbil zeuden orbiten arteko distantzia era esponentzialean handitzen da eta denbora-tarte bat pasatu ondoren bi soluzioak guztiz desberdinak dira. Esan behar da fenomeno hau ez dela erabilitako zenbakizko metodoaren izaera hurbilduaren ondorioa, izaera horrek lortutako soluzioaren doitasunean eragina badu ere. **Hastapen-baldintzen menpekotasun sentikor** hau higidura-ekuazioaren izaera ez-linealetik dator eta kaos deterministaren ezaugarri nagusia dugu. Zientziaren arlo honen aitzindaria izan den Lorenz meteorologoak **tximeleta efektu** izena ezarri dio fenomeno honi, tximeleta baten hegoek sortutako perturbazioak denbora-tarte egokia igaro ondoren eguraldiaren iragarpen finenak hondatzeko gai baitirateke.



8.10 IRUDIA Hasieran oso hurbil dauden bi orbita $\gamma = 0.2$, $f = 0.3$ kasuan[6].

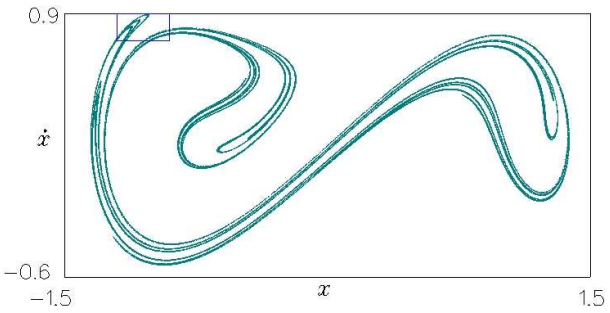
Naturan gertatzen diren hastapen-baldintzak neurtzean, erroreak egiten dira, nahitaez. Eboluzioa guztiz determinista izan arren, ikuspuntu matematikotik printzipioz doitasun osoz kalkula daitekeen soluzioak interes praktiko txikia izan dezake, hastapen-baldintzetan egindako erroreak era esponentzialean handituz badoaz. Laplace-ren determinismoari ikaragarrizko oztopo praktikoak ezar diezazkioke eboluzio-ekuazio ez-lineal batzuen izaera kaotikoak. Beste aitzindari batek (Poincaré-k) aipatu zuenez, dadoak zoriaren iturritzat jotzen ditugu, nahiz eta haien eboluzio-ekuazioak, mekanika klasikoarenak, guztiz deterministak izan. Azpimarratu behar da hemen, fisika kuantikoan ez bezala, aurresatea eragozten duena ez dela teoria fisikoa, baizik eta ekuazioen izaera matematikoa eta haiek ebazteko erabili behar diren hastapen-baldintzetan eta metodo hurbilduetan halabeharrez egiten diren erroreak.

8.6.1 Erakarle bitxiak

Aurreko adibidean orbitek ez zuten inolako erregulartasunik erakusten, baina bai propietate komun bat: tarte iragankor labur baten ondoren, orbita guztiak fase-espazioaren alde txiki samar batean daude. Badirudi periodikoa ez den erakarle baten aurrean gaudela, orbita guztiek bertarantz jotzen dute eta. Duffing-en ekuazioan denbora esplizituki agertzen denez (hau da, **autonomoa** ez denez), hastapen-baldintzen benetako espazioa (matematikarien fase-espazioa) hiru dimentsiokoa da, orbita bat zehazteko hasierako posizio eta abiaduraz gain hasierako aldiunea ere aukeratu behar baita. Fase-espazio horretan ager daitezkeen erakarleak aztertzeko, Poincaré-ren sekzioez baliatuko gara, bi dimentsioko irudiak egiteko.

Denbora-dimentsioa periodikotzat jo dezakegu, periodikoa den kosinu batean bakarrik agertzen da eta. Beraz, periodo berbera duen sekzio estroboskopikoa erabiltzea da aukerarik errazena.

[5]Ikus `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/kaosa/Duffing1.ds` simulazioa.
[6]Ikus `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/kaosa/Duffing1.ds` simulazioa.
[7]Ikus `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/kaosa/Duffing2.ds` simulazioa.

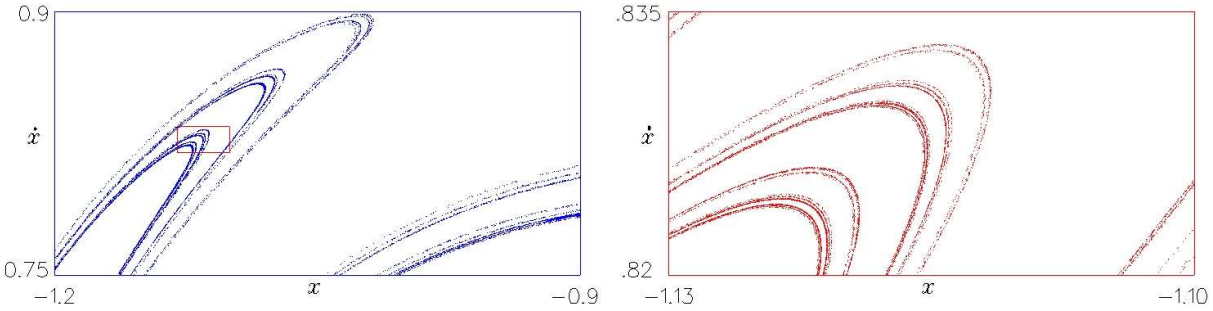


8.11 IRUDIA Duffing-en erakarlearen sekzio estroboskopikoa $t \bmod 2\pi = 0$ kasuan[7].

Orbita osoak aztertu beharrean,

$$t = t_0 + n\frac{2\pi}{\omega}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{8.8}$$

aldiunetako posizioa eta abiadura marraztu dira 8.11 irudian. Hau ikusita pentsa genezake lerro makur batzuek osatzen dutela sekzioa, baina goiko laukizuzena handituz gero, 8.12 sekzioak lortzen dira. Ikusten dugunez, lerro horiek beste lerro batzuez osaturik daude eta azken hauek ere ez dira bakunak. Eskala guztietan errepikatzen da gauza bera: gero eta egitura gehiago agertzen da, erakarlearen **autoantzekotasun** geometrikoaren ondorioz. Badirudi infinitu geruzaz osaturikoa dela.



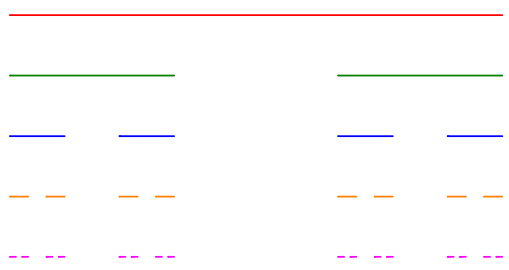
8.12 IRUDIA Duffing-en erakarlearen sekzio estroboskopikoaren bi handipen[8].

8.7 Fraktalak

Objektu autoantzekoak XIX. mendetik ezagutzen dira matematikan. Adibidez, oso era sinplean definitzen da **Cantor-en multzoa**: segmentu bat hiru zati berdinetan zatituz gero, erdiko azpisegmentua ezabatzen da, eta prozesu hau behin eta berriro errepikatzen da pauso bakoitzean geratzen diren segmentu guztietan. Argi dago limitean lortzen den multzoan infinitu puntu daudela (egia esan, hasierako segmentuan zeuden beste!).

8.4 ARIKETA Froga ezazu Cantor-en multzoaren luzera nulua dela.

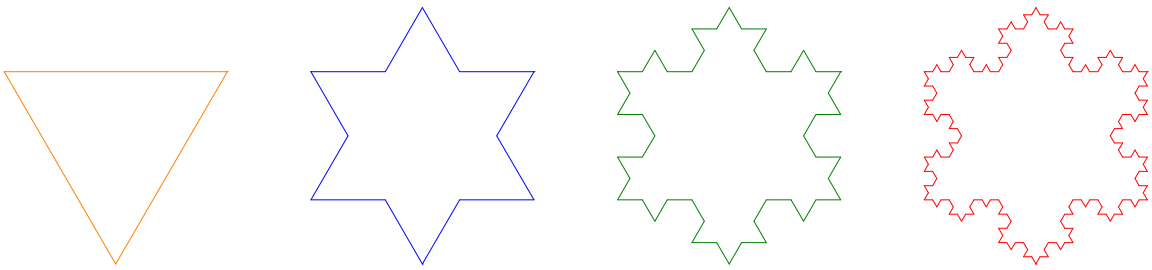
[8]Ikus `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/kaosa/Duffing2.ds` simulazioa.



8.13 IRUDIA Cantor-en multzoa eraikiz.

Baina badauzka hain errazak ez diren beste propietate ikaragarri batzuk ere. Adibidez, luzera gabekoa da eta bere dimentsioa $0 < \ln 2/\ln 3 < 1$. Dimentsioa osoa ez denez, **fraktala** dela esaten da.

Beste adibide famatu bat, **von Koch-en elur-maluta**, honela eraikitzen da: triangelu bateko alde bakoitza hirutan zatitzen da eta erdiko zatia berarekin batera triangelu aldekide bat osatzen duten bi segmentuez ordezkatzen da, eta prozesu hau geratzen diren segmentu guztietan errepikatzen da.



8.14 IRUDIA Von Koch-en elur-maluta eraikiz.

8.5 ARIKETA Froga ezazu von Kock-en kurbaren luzera infinitua dela eta inguratzen duen azalera finitua.

Horrez gain, kurba horrek ez du tangenterik onartzen ezein puntutan: jarraitua izan arren ez da diferentziagarria.

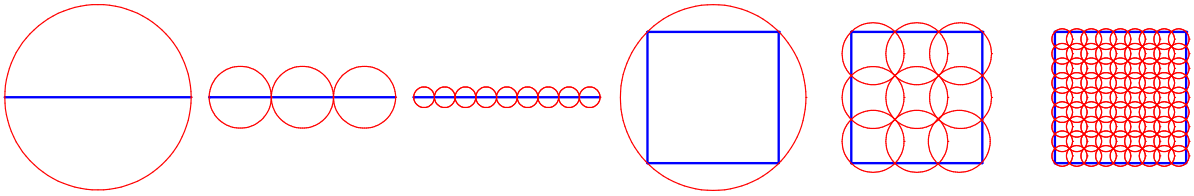
Adibide geometriko hauen kasuan, autoantzekotasuna zehatza da; naturan agertzen diren fraktaletan, berriz, autoantzekotasuna hurbildua izaten da.

8.7.1 Dimentsio fraktala

Fraktalen konplexutasuna kuantitatiboki neurtzeko, dimentsio fraktala erabil daiteke. Dimentsioaren definizio desberdinak daude, baina hemen haietariko errazena, **edukiera**, aukeratuko dugu. l luzerako segmentu bat estaltzeko, $d = l$ diametroko zirkulu bakarra behar dugu, $d = l/2$ diametroko $N = 2$ zirkulu, eta d diametroko $N = l/d$ zirkulu. Segmentuaren dimentsioa $D = 1$ dela gogoratuz, honela ere idatz daiteke estalkia egiteko behar diren zirkuluen kopurua:

$$N(d) = Kd^{-D}. \tag{8.9}$$

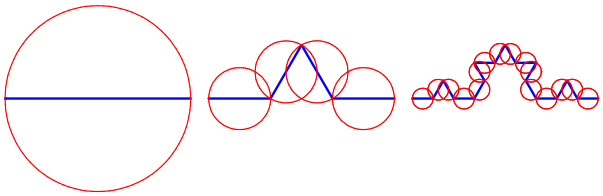
K koefizientea (kasu honetan luzera) konstante egokia da. Estali nahi duguna karratu bat bada, adierazpen berbera betetzen da, baina orain karratuaren dimentsioak bi direnez, $D = 2$ erabili



8.15 IRUDIA Segmentuaren eta karratuaren estalkiak.

behar da eta K karratuaren azaleraren proportzionala izango da. Era berean, erraz ikusten da kubo baten eta edozein multzo «arrunten» kasuan, d diametroko bolen bidez egindako estalkietan formula hori betetzen dela. Ondorioz, adierazpen hori erabiliko da kasu guztietan (eta ez bakarrik kasu arruntetan) dimentsioa definitzeko. Testuinguru honetan K konstantea interes gabekoa denez, hurrengo adierazpen baliokideaz balia gaitezke:

$$D = -\lim_{d\to 0} \frac{\ln N(d)}{\ln d}. \tag{8.10}$$



8.16 IRUDIA Von Koch-en kurbaren estalkiak.

8.6 ARIKETA Erabili 8.16 irudia von Koch-en fraktalaren dimentsioa $\ln 4/\ln 3 \approx 1.26186$ dela frogatzeko. (Ikus, halaber, 8.11.2 problema.)

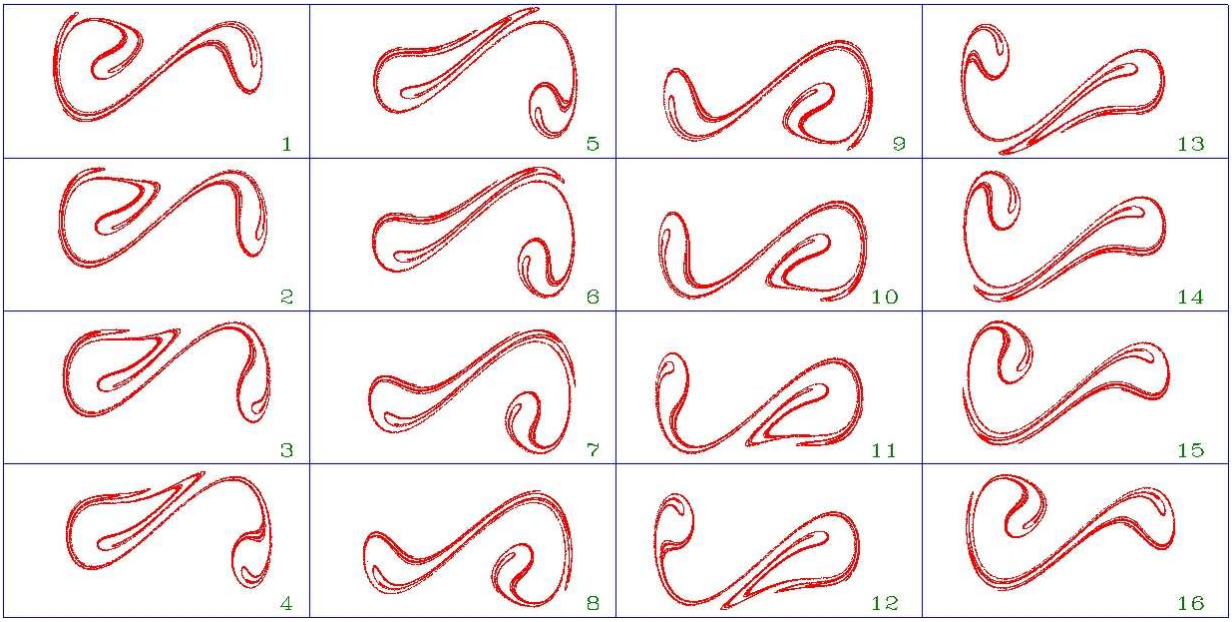
8.8 Okinaren transformazioa eta Liapunov-en berretzaileak

Duffing-en erakarlearen sorrera, egitura eta izaera hobeto ulertzeko, kanpo-indarraren oinarrizko periodoaren

$$t = t_0 + n\frac{2\pi}{\omega}, \qquad t_0 \equiv (k-1)\frac{\pi}{8\omega}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, 16) \tag{8.11}$$

aldiuneei dagozkien Poincaré-ren sekzio estroboskopikoez baliatuko gara 8.17 irudian. Irudi honetan erakarlearen beraren eboluzioa ikusten dugu. Erakarlea aldaezina da higiduran zehar eta bertan dauden puntuak erakarlean zehar higitzen dira, handik irten gabe. Puntu horiek transformazio bat pairatzen dute higiduran zehar; baina puntu guztien multzoa, erakarlea bera, transformazio horrekiko aldaezina da. Irudian agerian dago transformazio horrek okinak orearekin egiten duenarekin antz handia duela eta bi osagaiz osaturikoa dela:

[9] Ikus `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/kaosa/Duffing3.ds` simulazioa.



8.17 IRUDIA Okinaren transformazioa[9].

Luzatzea: Erakarlea luzatzen da periodoan zehar eta, ondorioz, aldiune batean oso hurbil zeuden puntuen arteko distantzia handituz doa. Soluzio hurbilen arteko d distantzia era esponentzialean handitzen da: $d \propto e^{\lambda t}$ non λ magnitudea Liapunov-en berretzaile handiena den. Transformazio hau da hastapen-baldintzen menpekotasun sentikorraren eta kaosaren zergatia.

Tolestatzea: Luzatu ahala bere gainean tolestatzen da erakarlea. Horrela, erakarlea beti dago fase-espazioaren eskualde bornatu batean. Gainera, tolestatzen den bakoitzean erakarlea osatzen duten geruzen kopurua bikoizten denez, infinitu geruza egongo dira halabeharrez. Beraz, geruzak zeharkako norabide batean ebakiz gero, Cantor-en multzoaren antzeko zerbait aurkituko dugu eta erakarlea fraktala (hau da, bitxia) izango da.

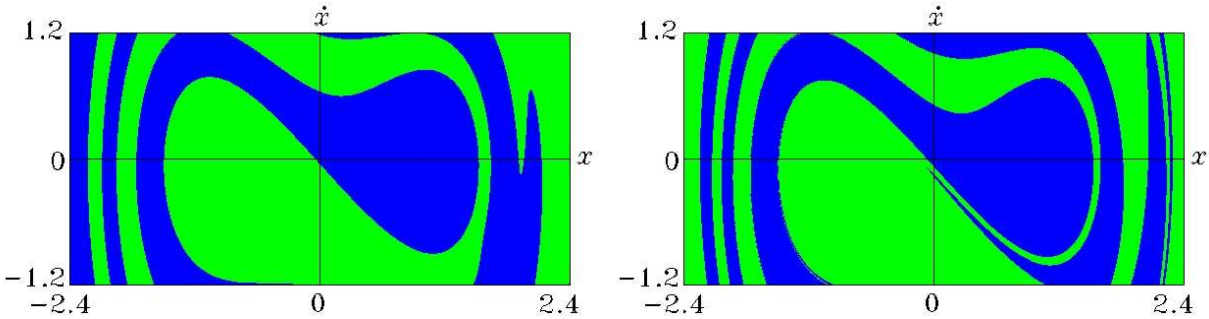
Okinaren transformazio bikoitz hau kaos deterministaren oinarrizko mekanismoen artean dago.

8.9 Osin-muga fraktalak

Duffing-en ekuazioaren kasuan $\gamma = 0.2$, $\omega = 1$ eta $f \leq 0.13$ balioetarako agertzen diren erakarleak ez dira kaotikoak, ziklo limiteak baizik, baina bi dira, potentzialaren minimo bana inguratzen dutenak hain zuzen ere. Aukeratzen diren hastapen-baldintzen arabera soluzioak ziklo limite batera edo bestera joko du. Osinak aztertzeko $t = 0$ aldiunean aukeratuko ditugu x posizioa eta $\dot{x}$ abiadura eta horrela lortzen den soluzioak eskuineko ziklora jotzen badu (hau da, eskuineko zikloaren osinean badago), $(x, \dot{x})$ puntua kolore batez marraztuko dugu; ezkerreko zikloaren osinean badago, beste kolore bat erabiliko da. Horrela osinen irudia lortuko dugu.

8.18 irudiko kasuetan osin-muga kurba leuna da eta higidura asintotikoa periodikoa: hurbil dauden soluzioen arteko distantzia ez da handituko era esponentzialean. Hala ere, bi ziklo limi-

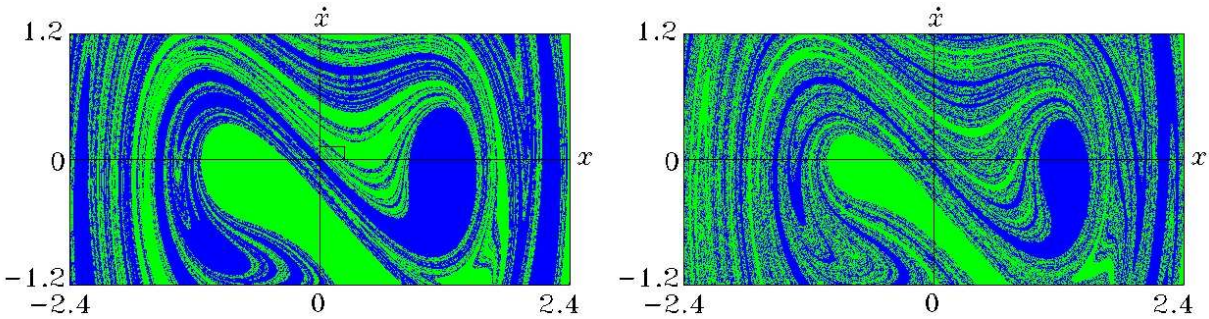
[10]Ikus `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/kaosa/osina10.ds` eta `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/kaosa/osina15.ds` simulazioak.



8.18 IRUDIA Duffing-en ekuazioaren osinak $f = 0.1,\ 0.15$ kasuetan[10].

te daudenez, etorkizuna aurresateko, jakin behar da zein osinetan dauden hastapen-baldintzak. Hastapen-baldintzak kalkulatzean egiten den errorea d bada, osin-mugatik d distantziara dauden puntuekin bakarrik gerta daiteke aurresana oker egotea. Puntu horiek zenbat diren neurtzeko, d erradioko diskoez estaliko dugu osin-muga (eta zalantzako puntuak). Dakigunez, horretarako behar diren diskoen kopurua $N_1(d) \propto d^{-1}$ da eta aztertutako fase-espazioaren aldea estaltzeko $N_2(d) \propto d^{-2}$ disko beharko dira. Ondorioz, hastapen-baldintzak d doitasunez neurtzean, zalantzan dauden puntuen proportzioa $P(d) = N_1(d)/N_2(d) \propto d$ da. Beraz, zalantzazko puntuen proportzioa magnitude-ordena batean gutxitu nahi bada, neurketetan egindako errorean ere magnitude-ordena bat irabazi behar da.

Oro har, osin-mugaren dimentsioa D bada, $N_1(d) \propto d^{-D}$ bola beharko dira muga estaltzeko eta fase-espazioaren zatia estaltzeko $N_2(d) \propto d^{-F}$, bere dimentsioa F bada. Beraz, zalantzazko hastapen-baldintzen proportzioa hauxe da: $P(d) \propto d^{F-D} \equiv d^z$. Hemengo $z = F - D$ balioa **ziurgabetasun-berretzailea** da.

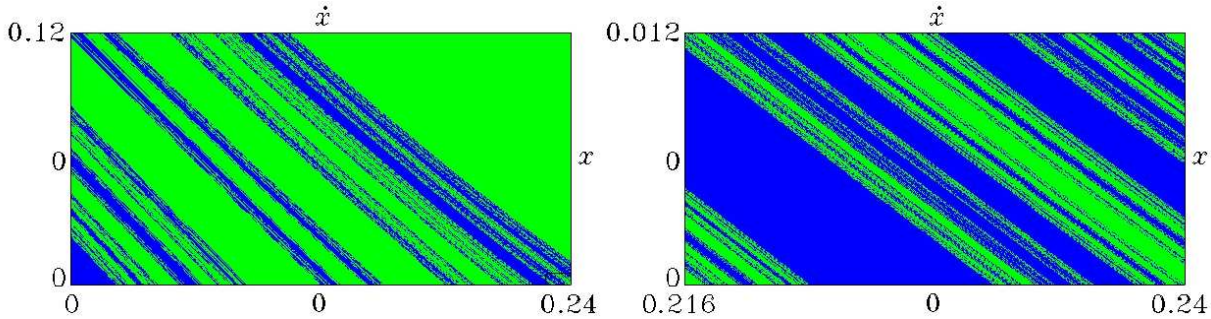


8.19 IRUDIA Duffing-en ekuazioaren osinak $f = 0.2,\ 0.23$ kasuetan[11].

Osin-muga leuna bada, bere dimentsioa $D = F - 1$ izango da eta ziurgabetasun-berretzailea $z = 1$. Horrela, zalantzazko puntuen kopurua 10 aldiz txikiagoa izateko, 10 aldiz txikiagoa izan beharko du hastapen-baldintzetan egindako erroreak. Baina, zer gertatzen da osin-muga leuna izan beharrean fraktala bada? $F - 1 < D < F$ bada, $z < 1$ izango da eta zalantzazko hastapen--baldintzen kopurua gutxitzea zailago gertatuko da. Adibidez, $D = F - 0.2$ bada, proportzioa 10 aldiz txikiagoa izateko, hastapen-baldintzak neurtzean 100000 aldiz txikiagoa den errorea lortu behar da.

[11]Ikus `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/kaosa/osina20.ds` eta `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/kaosa/osina23.ds` simulazioak.

[12]Ikus `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/kaosa/osina20a.ds` eta `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/kaosa/osina20b.ds` simulazioak.



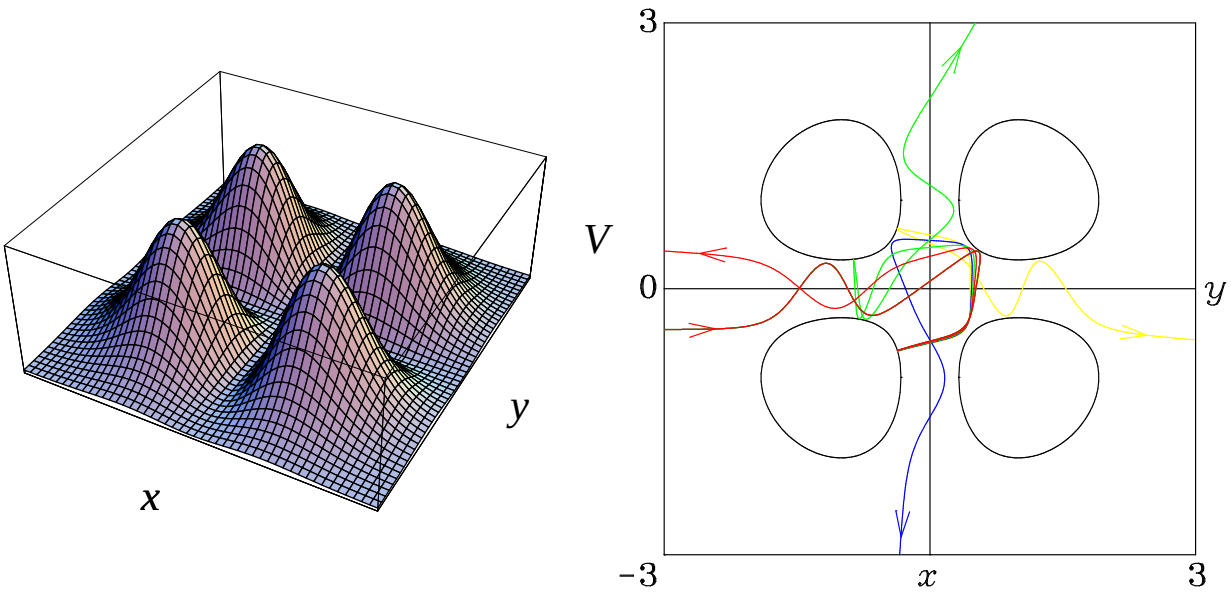
8.20 IRUDIA Duffing-en ekuazioaren osinen handipenak $f = 0.2$ kasuan[12].

Hau gertatzen bada, eta oraintxe ikusiko dugu horrelakoak gertatzen direla, aurresateak oztopo handia izango du, higidura kaotikoa ez bada ere. Adibidez, osin-muga fraktala dela egiaztatzeko, 8.19 irudiaren erdian marraztu den laukizuzena 8.20 delakoaren ezkerraldean handitu dugu, eta azken honen beheko eskuin muturra ondoan agertzen da.

8.10 Sakabanatze kaotikoa

Kaosaren beste alderdi bat dugu hau. Sakabanatze-prozesu batean partikulak infinitura doaz eta ez dago erakarlerik. Higidura asintotikoa askea da, oso sinplea, beraz. Hala ere, etorkizuna aurresatea zaila izan daiteke. Hemen, bi dimentsiotan lau maximo dituen hurrengo energia potentziala aztertuko dugu, dimentsio gabeko aldagai egokietan:

$$V(x, y) = x^2 y^2 e^{2-\left(x^2+y^2\right)}. \tag{8.12}$$

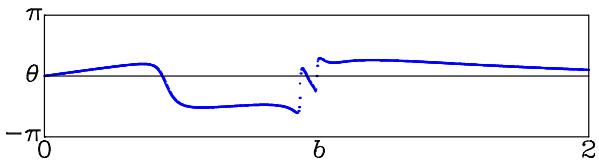


8.21 IRUDIA Energia potentziala eta lau orbita $E = 0.26$ denean[13].

[13]Ikus `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/kaosa/sakabanatzea2.ds` simulazioa.

8.7 ARIKETA Kalkula itzazu higidura-ekuazioak.

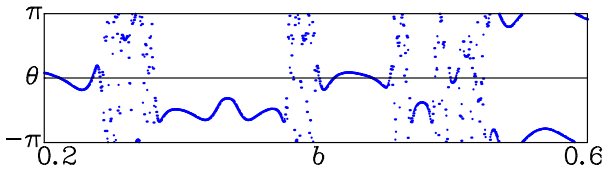
Partikula $(-10, b)$ puntuan dagoenean x ardatzean zehar E energiaz higitzen bada, elkarrekintza-eskualdetik irtetean θ norabidean higituko da abiadura konstantez. Horrela $\theta(b)$ **sakabanatze-funtzioa** kalkula daiteke. Adibidez, 8.22 irudiko sakabanatze-funtzioa $E = 1.2$ energiari dagokio. Kasu honetan partikula energiaren maximoen gainetik pasatzen da eta sakabanatze-angelua jotze-parametroaren funtzio leuna da.



8.22 IRUDIA Sakabanatze-funtzioa $E = 1.2$ denean.

Baina $E = 0.26$ energiari dagokion sakabanatze-funtzioa ez da jarraitua, 8.23 irudian ikus daitekeen bezala.

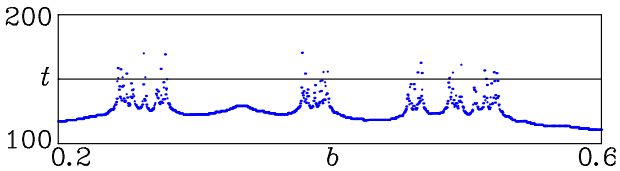
8.8 ARIKETA Kalkula itzazu aurreko funtzioaren handitze batzuk, eten-multzoaren izaera fraktal autoantzekoa dela egiaztatzeko.



8.23 IRUDIA Sakabanatze-funtzioa $E = 0.26$ denean[14].

Aurreko atalean bezalaxe, erakarle kaotikorik ez badago ere, egoera asintotikoa aurresatea zaila da **sakabanatze kaotiko** hau gertatzen bada: eten-puntuen inguruan sakabanatze-angeluaren benetako balioa zalantzan egongo da. Argi dago ziurgabetasun-berretzailearen kontzeptua ia hitzez hitz aplika daitekeela kasu honetan.

8.21 irudian $b = -0.45939019 + 2.5\,k \times 10^{-6}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ balioetarako lortzen diren orbitak marraztu dira. Ikusten dugunez, jotze-parametroaren aldaketak oso txikiak izan arren, etorkizuneko norabide asintotikoa zeharo desberdina da lau kasuotan.



8.24 IRUDIA Sakabanatze-denbora $E = 0.26$ denean[15].

Fenomeno hau hobeto ulertzeko, partikulak elkarrekintza-eskualdean ematen duen denbora 8.24 irudian agertzen da. Ikusten dugunez, funtzio hau ere etena da eta sakabanatze-denboraren eta angeluaren etenuneak puntu berberetan gertatzen dira.

[14] Ikus `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/kaosa/sakabanatzea1.ds` simulazioa.
[15] Ikus `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/kaosa/sakabanatzea1.ds` simulazioa.

Emaitza honekin sakabanatze kaotikoaren zergatia erraz uler daiteke. Energia maximoena baina txikiagoa bada, gerta daiteke partikula potentzialaren tontor desberdinetan errebotatzea behin eta berriro. Lau tontorrekin infinitu segida periodiko desberdin osa daitekeenez, infinitu orbita periodiko daude. Jakina, orbita periodiko horiek ez dira egonkorrak izango (eta ez erakarleak ere); baina gerta daiteke sakabanatze-orbita bat orbita periodiko ezegonkor baten oso hurbil egotea aldiune batean eta azken hau gertatzen bada, elkarren hurbil egon daitezke denbora-tarte luze batez eta anitz aldiz errebotatu ondoren norabide-aldaketa handia gerta daiteke, hasieran oso hurbil zuen beste orbita bati dagokion aldaketaren oso desberdina izateko moduan.

8.11 Problema ebatziak

8.11.1 Duffing-en ekuazioa

Froga ezazu marruskadura arbuiagarria denean, kanpo-indarrak aurkitu behar den baldintza betetzen badu, Duffing-en ekuazioak $x = A\cos\frac{\omega}{3}t$ soluzio periodiko zehatz bat onartzen duela.

Duffing-en

$$\ddot{x} - x\left(1 - x^2\right) = f\cos\omega t$$

ekuazioan $x = A\cos\frac{\omega}{3}t$ saiatzen badugu,

$$\frac{1}{18}\left[9A^3 + 18f - 2A\left(9 + \omega^2\right) + 9\left(A^3 - 4f\right)\cos\left(\frac{2}{3}\omega t\right)\right]\cos\frac{\omega}{3}t = 0$$

geratzen zaigu. Argi dago ekuazio hori t une guztietarako bete dadin, $A = \sqrt[3]{4f}$ aukeratu behar dela. Hori eginez,

$$\left[3f - \sqrt[3]{4f}\left(1 + \frac{\omega^2}{9}\right)\right]\cos\frac{\omega}{3}t = 0$$

baldintza geratzen zaigu. Soluzio periodiko berezia onartzeko, hortaz, $\omega = 3\sqrt{3\left(\frac{f}{2}\right)^{2/3} - 1}$ erlazioa bete behar da.

8.11.2 Von Koch-en elur-maluta

Kalkulatu 8.14 irudian erakusten den von Koch-en elur-malutaren dimentsioa, perimetroa eta azalera. Iruzkina egin erantzunari.

8.6 ariketan erabili dugun metodo zuzenaren ordez, simetriaz baliatuko gara dimentsioa kalkulatzeko. Izan ere, argi dago ϵ diametroko N zirkulu behar badira fraktal hau estaltzeko, $\epsilon/3$ diametroko $4N$ beharko direla, hau da,

$$4N(\epsilon) = N(\epsilon/3).$$

Hemen, ($\epsilon \to 0$ limitean betetzen den) $N(\epsilon) \propto \epsilon^{-D}$ definizioa saiatzen badugu, hauxe geratzen da:

$$4\epsilon^{-D} = (\epsilon/3)^{-D} \quad\Longrightarrow\quad 4 = 3^D \quad\Longrightarrow\quad D = \frac{\ln 4}{\ln 3}.$$

Bestalde, argi dago fraktala eraikitzean pauso bakoitzean, L luzerako segmentu bakoitzaren ordez $L/3$ luzerako 4 segmentu erabiltzen direnez, perimetroa aurrekoa bider $4/3$ dela eta limitean infinitua.

Hasierako triangeluaren azalera S bada, lehen pausoan $S/9$ azalerako 3 triangeluren azalera gehitzen zaio; bigarrenean $S/9^2$ azalerako 3×4 triangelurena; hirugarrenean $S/9^3$ azalerako 3×4^2 triangelurena; eta n.enean $S/9^n$ azalerako $3 \times 4^{n-1}$ triangelurena. Limitean, azalera osoa hauxe izango da, beraz:

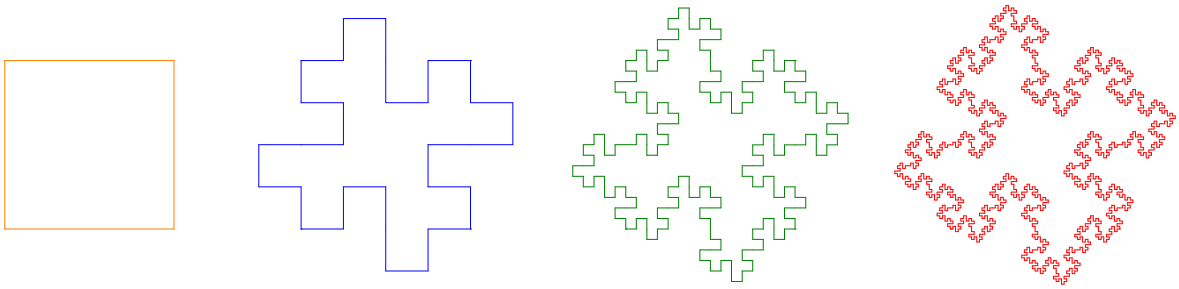
$$S\left[1 + \frac{3}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{9^n}\right] = \frac{8}{5}\,S.$$

Bitxia badirudi ere, perimetro jarraitu infinitu batek azalera finitua ingura dezake.

8.12 Problemak

8.1 Erabili ekuazio diferentzialak ebazteko zenbakizko tresna egokiren bat (hala nola [41] programa) gai honetako higidura-ekuazioak aztertzeko. Egiaztatu soluzioak, edota fase-espazioa, erakusten dituzten irudiak.

8.2 Kalkulatu Cantor-en multzoaren dimentsioa.



8.25 IRUDIA 8.3 problemako fraktala.

8.3 Zein da 8.25 irudiko fraktala eraikitzeko araua? Kalkulatu bere dimentsioa, azalera eta perimetroa.