Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

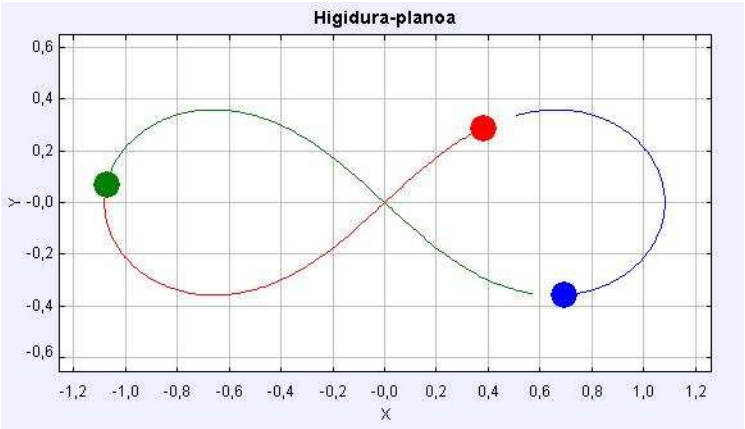
Mekanika Teorikoa

Juan M. Aguirregabiria

EUSKARA ERREKTOREORDETZAREN SARE ARGITALPENA

Liburu honek UPV/EHUko Euskara Errektoreordetzaren dirulaguntza jaso du

MEKANIKA TEORIKOA



Juan M. Aguirregabiria

Fisika Teorikoa eta Zientziaren Historia Saila
eta
Euskara Institutua

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Mekanika Teorikoa

Juan M. Aguirregabiria

Euskal Herriko Unibertsitatea
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Fisika Teorikoa eta Zientziaren Historia Saila
P. K. 644, 48080 Bilbo

Telefonoa: +34 946015915
Faxa: +34 946015399
Posta elektronikoa: juanmari.aguirregabiria@ehu.es
WWW orria: http://tp.lc.ehu.es/jma.html

Copyright © 2007, Juan M. Aguirregabiria
All rights reserved

Osorik edo zatiz, eskuz, makinaz zein informatikaz kopiatzea, jabearen idatzizko baimenik gabe, debekaturik dago.

2007KO ARGITARALDIA: 2007KO IRAILAREN 21A
2008KO ARGITARALDIA: 2008KO MAIATZAREN 27A

Egileak berak konposatu du testu hau LaTeX 2_ε formatuan eta marraztu ditu irudiak, Dynamics Solver programaren bidez.

ISBN 978-84-691-3630-0

Azalean:
Okinaren transformazioa.
Ikus http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/kaosa/Duffing_okina.html.

Aurreko orrialdean:
Moore-ren orbita periodikoa. Orbita egonkor berean higitzen dira hiru gorputz berdin, elkarrekintza grabitatorioaren ondorioz:
http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/zentralak/moore.ds.

HITZAURREA

Euskal Herriko Unibertsitateko Zientzia eta Teknologia Fakultatean, Fisika lizentziaturaren laugarren ikasturtean, «Mekanika Teorikoa» ikasten ari direnentzat idatzi da testu hau.

Gaur egun fisikaren ikerketa-lerro nagusitik at badago ere, ez da interes gabekoa mekanika analitikoa.

- Hasteko, fisikaren historian izan duen garrantzia aipatu behar da, eta ez bakarrik fisika klasikoaren historian: adibidez, Böhr eta Sommerfelden teoria kuantikoaren (eta kuantizazio erdiklasikoaren) oinarrian daude ekintza-aldagaiak eta oso ezaguna da Hamilton eta Jacobiren ekuazioaren eragina Schrödingerren formulazioan.

- Ikuspuntu matematikotik oso dotorea da: XIX. mendeko fisika matematikoaren gailurra (eta XX. mendeko geometria sinplektikoaren hasiera).

- Hemen ikusiko ditugun kontzeptu batzuk (aldakuntza-printzipioak, simetrien eta kontserbazio-legeen arteko erlazioa eta perturbazio-metodoak, esaterako), behar den moduan egokitu ondoren, garrantzi handikoak dira fisika modernoan.

- Oraindik ere mekanika analitikoaren teknika batzuk (batez ere, perturbazio-teoria kanonikoa) behar-beharrezkoak dira astronomian eta zientziaren beste atal batzuetan (hala nola azeleragailuetako partikula-sorten egonkortasunaren azterketan).

- Hiru gorputzen problema klasikoarekin hasi zen kaos deterministaren historia eta alor horretan orain egiten den ikerkuntzan oinarrizkoak dira ikasgai honetako kontzeptu batzuk (sistema dinamiko ez-integragarriak, adibidez).

Zuzenketak eta bestelako material osagarria hurrengo orrian aurki daitezke:
http://tp.lc.ehu.es/jma/mteorikoa.html

Nire esker beroenak Jesús Ibañez irakasle eskuzabalari, bere ikasmateriala emateagatik.

Leioa, 2006–2007 eta 2007–2008 ikasturteak

AURKIBIDE OROKORRA

HITZAURREA iii

IRUDIEN ZERRENDA ix

TAULEN ZERRENDA xi

1 Formalismo lagrangearra 1
- 1.1 Loturak . . . 2
  - 1.1.1 Lotura holonomoak . . . 2
  - 1.1.2 Lotura ez-holonomoak . . . 3
  - 1.1.3 Desplazamendu birtualak . . . 4
  - 1.1.4 Dinamikaren ekuazio orokorra . . . 5
- 1.2 Koordenatu orokortuak . . . 6
  - 1.2.1 Energia zinetikoa . . . 7
  - 1.2.2 Indar orokortuak . . . 9
- 1.3 Bigarren motako Lagrangeren ekuazioak . . . 9
- 1.4 Indar kontserbatzaileak . . . 12
  - 1.4.1 Potentzial orokortuak . . . 12
- 1.5 Lehen motako Lagrangeren ekuazioak . . . 13
  - 1.5.1 Problemen ebazpena mekanika analitikoan . . . 14
- 1.6 Indar ez-kontserbatzaileak . . . 15
  - 1.6.1 Rayleighen iraungipen-funtzioa . . . 16
- 1.7 Puntu-transformazioak . . . 17
  - 1.7.1 Puntu-transformazioekiko aldaezintasuna . . . 19
- 1.8 *Gauge* aldaezintasuna . . . 19
- 1.9 Problemak . . . 20

2 Aldakuntza-printzipioak 23
- 2.1 Aldaketa infinitesimalak eta mutur-puntuak . . . 24
- 2.2 Loturadun muturrak . . . 26
  - 2.2.1 Lagrangeren biderkatzaileak . . . 26
- 2.3 Funtzionalak . . . 27
- 2.4 Ekintza . . . 28
- 2.5 Muturreko kurbak . . . 29
- 2.6 Hamiltonen printzipioa . . . 31
  - 2.6.1 Ekintza minimoaren printzipioa . . . 31
- 2.7 Loturadun muturrekoak . . . 32

2.7.1 Lagrangeren biderkatzaileak . . . 32
2.7.2 Geodesikoak . . . 33
2.8 Lotura-indarrak eta Lagrangeren biderkatzaileak . . . 34
2.8.1 Lotura-indar orokortuak . . . 35
2.8.2 Estatika analitikoa . . . 36
2.9 Problemak . . . 38

3 Simetriak eta kontserbazio-legeak 41
3.1 Momentu kanoniko konjugatuak . . . 42
3.1.1 Koordenatu ziklikoak eta kontserbazio-printzipioak . . . 42
3.2 Hamiltondarra . . . 43
3.2.1 Hamiltondarra eta energia mekanikoa . . . 43
3.2.2 Hamiltondarraren kontserbazio-printzipioa: Jacobiren integrala . . . 44
3.3 Transformazio-taldeak . . . 44
3.3.1 Transformazio infinitesimalak . . . 45
3.4 Noetherren teorema . . . 46
3.4.1 Simetria-transformazioak . . . 46
3.4.2 Simetria orokortuak . . . 47
3.5 Partikula-sistemen kontserbazio-legeak . . . 48
3.5.1 Energia mekanikoaren kontserbazioa . . . 48
3.5.2 Momentu linealaren kontserbazioa . . . 48
3.5.3 Momentu angeluarraren kontserbazioa . . . 48
3.5.4 Masa-zentroaren teorema . . . 49
3.6 Problemak . . . 51

4 Formalismo hamiltondarra 55
4.1 Legendreren transformazioa . . . 56
4.1.1 Hamiltondarra . . . 56
4.2 Hamiltonen ekuazio kanonikoak . . . 57
4.3 Fase-espazioa . . . 57
4.3.1 Notazio laburtua . . . 58
4.3.2 Sistema dinamiko hamiltondarrak . . . 59
4.4 Aldagai dinamikoak fase-espazioan . . . 60
4.4.1 Koordenatu ziklikoak eta kontserbazio-printzipioak . . . 60
4.4.2 Hamiltondarraren kontserbazio-printzipioa . . . 61
4.5 Poissonen makoak . . . 61
4.5.1 Eboluzio-ekuazioak . . . 62
4.5.2 Higidura-konstanteak . . . 63
4.6 Liouvilleren teorema . . . 63
4.7 Hamiltonen printzipio aldatua . . . 64
4.8 Problemak . . . 66

5 Transformazio kanonikoak 71
5.1 Transformazio kanonikoak . . . 72
5.2 Poissonen makoak . . . 73
5.3 Lagrangeren parentesiak . . . 76
5.4 Funtzio sortzailea . . . 77

5.4.1 Hamiltondar berria . . . 79
5.5 Transformazio kanonikoen motak . . . 80
5.5.1 Lehen motako transformazio kanonikoak . . . 80
5.5.2 Bigarren, hirugarren eta laugarren motako transformazio kanonikoak . . . 82
5.6 Transformazio kanoniko infinitesimalak . . . 83
5.6.1 Liouvilleren teorema . . . 85
5.6.2 Simetriak eta kontserbazio-legeak . . . 85
5.7 Problemak . . . 86

6 Hamilton eta Jacobiren ekuazioa 89
6.1 Hamiltonen funtzio nagusia . . . 90
6.1.1 Soluzio osoa . . . 91
6.1.2 Ekintza . . . 92
6.2 Hamiltonen funtzio karakteristikoa . . . 93
6.3 Aldagaien banantzea . . . 94
6.3.1 Koordenatu ziklikoak . . . 94
6.3.2 Hamiltondar banangarriak . . . 95
6.4 Higidura kuasi-periodikoa . . . 97
6.5 Angelu- eta ekintza-aldagaiak . . . 100
6.6 Keplerren problema . . . 102
6.7 Hamiltondar osoki integragarriak . . . 104
6.7.1 Hamiltondar ez-integragarriak . . . 105
6.8 Problemak . . . 107

7 Perturbazio-teoria 111
7.1 Perturbazio erregularrak . . . 112
7.2 Poincaré eta Lindstedt-en metodoa . . . 112
7.3 Perturbazio-teoria kanonikoa . . . 114
7.3.1 Dimentsio bakarreko sistemak . . . 115
7.3.2 Osziladore kuasi-harmonikoa . . . 117
7.3.3 n dimentsioko sistemak . . . 117
7.4 Teorema adiabatikoa . . . 118
7.5 Problemak . . . 120

ERANSKINAK 123

A Osagarri matematikoak 125
A.1 Koordenatu-sistema erabilienak . . . 125
A.1.1 Koordenatu cartesiarrak . . . 125
A.1.2 Koordenatu polar zilindrikoak . . . 126
A.1.3 Koordenatu polar esferikoak . . . 127
A.1.4 Koordenatu parabolikoak . . . 128
A.1.5 Koordenatu eliptikoak . . . 128
A.2 Forma diferentzialak . . . 129
A.2.1 Forma zehatzak . . . 129
A.2.2 Forma itxiak . . . 130
A.2.3 Poincaréren lema . . . 130

A.3 Emaitza erabilgarriak 130
A.3.1 Teorema bat 131
A.3.2 Integral pare bat 131

B Problema batzuen soluzioak **133**

BIBLIOGRAFIA **139**

AURKIBIDE ALFABETIKOA **143**

IZENDEGIA **149**

HIZTEGIA **151**

IRUDIEN ZERRENDA

1.1 Joseph-Louis Lagrange 1
1.2 Pendulu matematikoa. 2
1.3 Desplazamendu erreala eta birtuala. 4

2.1 Leonhard Euler 23
2.2 $f(x)$ funtzioaren aldaketa infinitesimalak. 24
2.3 Maximoan $f(x, y)$ funtzioaren aldaketa infinitesimalak horizontalak dira. 25
2.4 Ekintza kalkulatzeko bi bide. 28
2.5 Funtzionalaren bi integrazio-bide $n = 1$ kasuan. 29
2.6 Hagatxoaren oreka. 36

3.1 Emmy Amalie Noether 41

4.1 Sir William Rowan Hamilton 55
4.2 Pendulu matematikoaren fase-espazioa. 58
4.3 Fase-espazioko eremu baten eboluzioa. 64

5.1 Siméon Denis Poisson 71

6.1 Carl Gustav Jacob Jacobi 89
6.2 (Q_i, P_i) bikote normalaren eboluzioa. 97
6.3 Penduluaren fase-espazioa. 98
6.4 (6.55) hamiltondarraren fase-orbita bat 99
6.5 Hénon eta Heilesen hamiltondarraren hiru toru. 99
6.6 Hénon eta Heilesen sistemaren Poincaréren sekzioak. 106

7.1 Jules Henri Poincaré 111
7.2 Osziladore kuasi-harmonikoaren soluzioa. 114
7.3 Osziladore harmonikoaren eboluzio adiabatikoa. 119

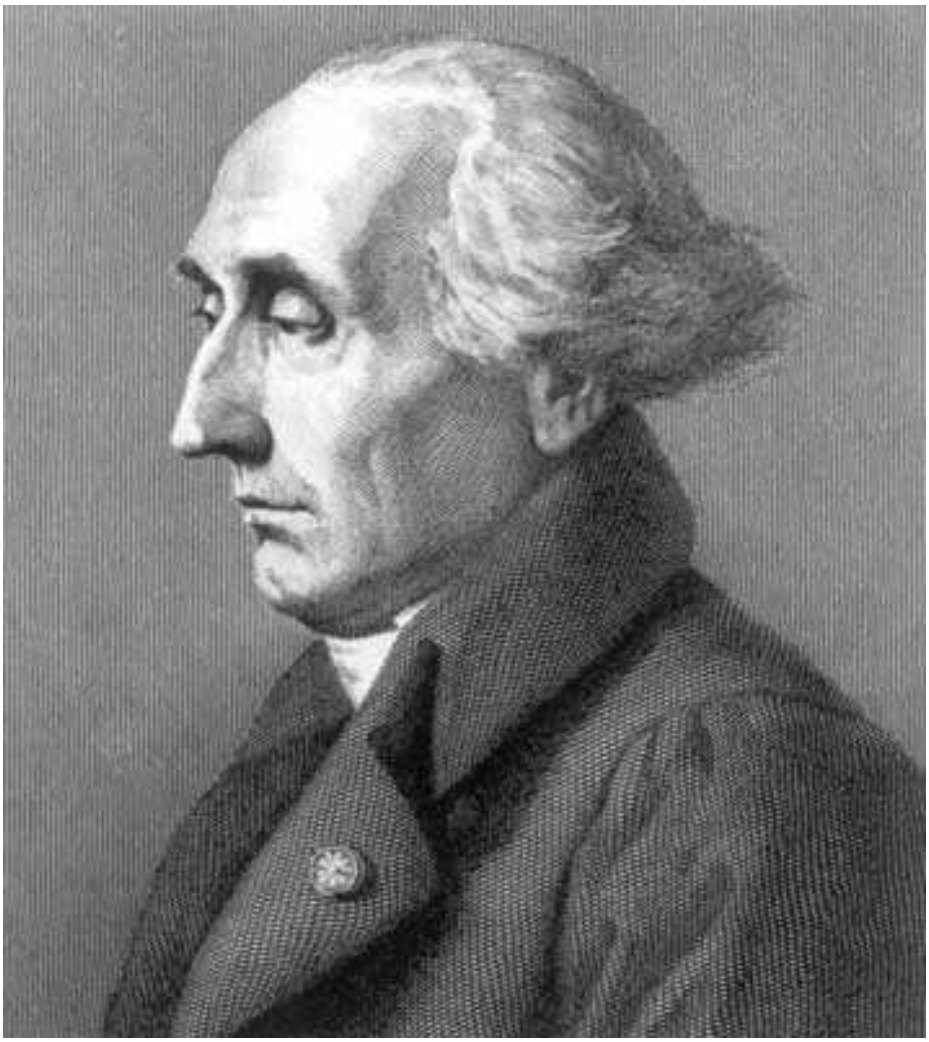
A.1 Koordenatu cartesiarrak. 125
A.2 Koordenatu polar zilindrikoak. 126
A.3 Koordenatu polar esferikoak. 127

TAULEN ZERRENDA

A.1 Koordenatu cartesiarrak. 125
A.2 Koordenatu polar zilindrikoak. 126
A.3 Koordenatu polar esferikoak. 127

1. GAIA

Formalismo lagrangearra



1.1 IRUDIA Joseph-Louis Lagrange (1736, Turin – 1813, Paris). 1788an argitaratu zuen *Mécanique Analytique* liburua.

Mekanika Klasikoa testuliburuan ikusi genuen lehenengoz Lagrangeren formalismoa. Hemen modu sistematiko sakonagoan aztertuko dugu, hurrengo gaietarako bidea prestatzeko.

1.1 Loturak

Hasteko, sistema mekanikoa definitu behar da, bete behar diren baldintzen bidez.

1.1.1 Lotura holonomoak

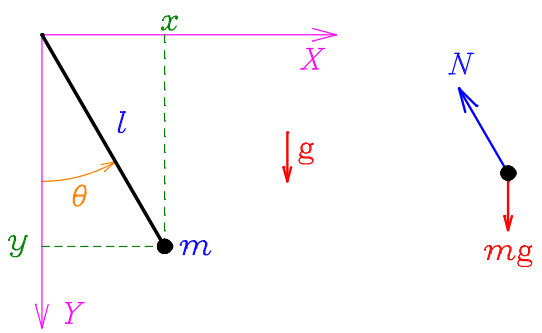
Eman dezagun sistema mekaniko baten N partikula puntualen posizio-bektoreak $\mathbf{r}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, N$) direla, une batean, erreferentzia-sistema inertzial batean. Partikulen higidurak bete behar duen

$$f\left(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N\right) = 0 \tag{1.1}$$

egiturako baldintza bati, **lotura holonomoa**, **finitua** edo **geometrikoa** deitzen zaio. Lotura-ekuazioan denbora ez bada esplizituki agertzen,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N\right) = 0, \tag{1.2}$$

lotura **eskleronomoa** edo **egonkorra** dela esango dugu. Bestela, lotura **erreonomoa** edo **higikorra** da. Partikula bat $f(\mathbf{r})$ ekuazioak emandako gainazalean higitu beharra da lotura holonomo egonkorren adibide ezagunena.



1.2 IRUDIA Pendulu matematikoa.

Adibide moduan, 1.2 irudia pendulu matematikoaren kasuan bi lotura holonomo eskleronomo ditugu:

$$z = 0, \tag{1.3}$$
$$x^2 + y^2 - l^2 = 0, \tag{1.4}$$

edota

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} = 0, \tag{1.5}$$
$$|\mathbf{r}| - l = 0. \tag{1.6}$$

Penduluaren luzera, konstantea izan beharrean, $l(t)$ lege *ezagun* baten arabera aldatzen bada, lotura holonomo higikor bat bete behar du sistemak.

1.1.2 Lotura ez-holonomoak

Denborarekiko deribatua kalkulatuz, (1.1) loturaren forma diferentziala lortzen dugu:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_k} \cdot \dot{\mathbf{r}}_k = 0. \tag{1.7}$$

Hemen, gradientearen orokorpena den ondoko notazio laburtu erabilgarriaz baliatu gara:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \equiv \nabla_{\mathbf{u}} \equiv \frac{\partial}{\partial u_x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial u_y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial u_z}\,\mathbf{k}. \tag{1.8}$$

Jakina, $\partial/\partial\mathbf{r}$ gradientea nabla eragilea da. (1.7) ekuazioan, beraz, hauxe dugu:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_k} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_k}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y_k}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z_k}\,\mathbf{k}. \tag{1.9}$$

dt diferentzialarekin biderkatuz, (1.7) forma diferentzial baten moduan idazten da:

$$A\,dt + \sum_{k=1}^{N} \mathbf{B}_k \cdot d\mathbf{r}_k = 0. \tag{1.10}$$

Ageri denez, honako definizio hauek erabili ditugu:

$$A \equiv \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{B}_k \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_k}. \tag{1.11}$$

(1.10) egiturako baldintza bat **lotura diferentziala** edo **zinematikoa** deitzen da. (1.11) baldintzak betetzen baditu, f funtzio egoki batekin (ikus A.2.3 ataleko Poincaréren lema), lotura **integragarria** dela esaten da eta hautazko C parametro konstantearen funtzioan adierazitako lotura holonomoen familia baten baliokidea da:

$$f\left(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N\right) - C = 0. \tag{1.12}$$

1.1 ARIKETA Adibide moduan kontsidera dezagun OXY planoan higitzen diren bi partikula. Bien arteko L distantzia konstantea da eta masa-zentroaren abiadura posizio erlatiboarekiko paraleloa (irristailu batean bezala). Hortaz, honela idazten dira lotura-ekuazioak:

$$z_1 = 0, \tag{1.13}$$

$$z_2 = 0, \tag{1.14}$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L^2 = 0, \tag{1.15}$$

$$\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{x_2 - x_1} - \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{y_2 - y_1} = 0. \tag{1.16}$$

Froga ezazu (1.16) ez dela integragarria eta, ondorioz, sistema ez dela holonomoa.

Bestalde, orain arte aztertutako lotura guztiak **aldebikoak** izan dira; baina, adibidez,

$$f\left(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N\right) \geq 0 \tag{1.17}$$

lotura **aldebakarrekoa** da. Horrelakoa da hari malgu baten bidez lotutako bi partikulen sistemakoa. Horrelako lotura bat **tentsiopean** dago (1.17) baldintzan berdintza betetzen denean eta higidura bi zatitan azter daiteke: lotura tentsiopean dagoenean lotura holonomoa dela kontsidera dezakegu eta bestela ez dela existitzen. (Ikus 2.14 problema.)

Hemendik aurrera aztertuko ditugun sistema guztietan loturak holonomoak izango dira, hau da, (1.1) egiturakoak.

1.1.3 Desplazamendu birtualak

Eman dezagun sisteman L lotura holonomak independente daudela:

$$f_l\left(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N\right) = 0, \qquad (l = 1, 2, \ldots, L). \tag{1.18}$$

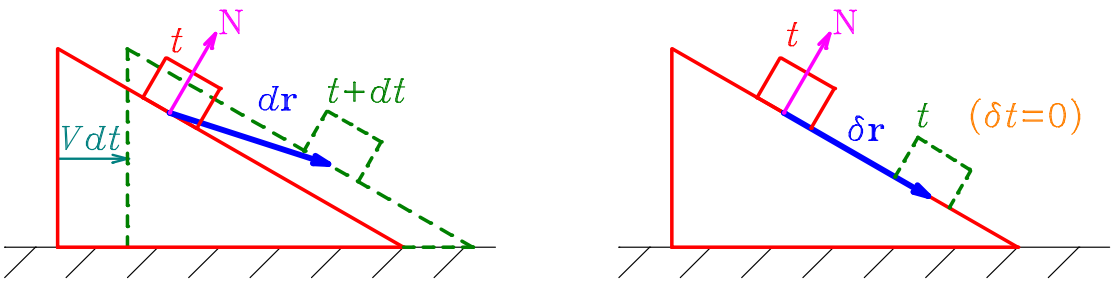
Modu diferentzialean honela idazten dira:

$$\frac{\partial f_l}{\partial t}\, dt + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f_l}{\partial \mathbf{r}_k} \cdot d\mathbf{r}_k = 0, \qquad (l = 0, 1, \ldots, L). \tag{1.19}$$

Higiduran gertatzen diren $d\mathbf{r}_k = \dot{\mathbf{r}}_k\, dt$ desplazamendu infinitesimalek baldintza hauek bete behar dituzte. Geroago ikusiko dugunez, mekanika analitikoa egitean oso erabilgarriak izango dira bestelako desplazamendu infinitesimal batzuk: **desplazamendu birtualak** deitzen diren hauek denbora aldatu gabe, lotura higikorrak *izoztuta* baleude bezala, gertatzen dira. Desplazamendu matematikoak dira hauek, geure buruan gertatzen direnak: izan ere, loturak mantendu behar direnez, ondoko baldintza betetzen dituzten desplazamendu infinitesimal geometriko guztiak izango dira:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f_l}{\partial \mathbf{r}_k} \cdot \delta\mathbf{r}_k = 0, \qquad (l = 0, 1, \ldots, L). \tag{1.20}$$

(δ notazioa erabiliko dugu desplazamendu birtualak adierazteko eta d diferentziala higiduran barrena gertatzen direnekin.)



1.3 IRUDIA Desplazamendu erreala eta birtuala.

Adibidez moduan, kontsidera dezagun 1.3 irudiko sistema: plano aldapatsu leuna V abiadura horizontal konstantez higitzen da eta gainean duen blokea grabitazioaren eraginpean. Ezkerrean erakusten da higiduran gerta litekeen $d\mathbf{r}$ desplazamendu bat eta eskuinean desplazamendu birtual bat (jakina, gauzak ikusi ahal izateko, irudiko desplazamenduak ez dira infinitesimalak). Marruskadura arbuiatzen dugunez, blokeak pairatutako lotura-indarra $\mathbf{N}$ normala izango da. Agerian dago $\mathbf{N} \cdot \delta\mathbf{r}$ **lan birtual** infinitesimala zero dela, $d\mathbf{r}$ desplazamenduan normalak lan infinitesimal bat egiten badu ere:

$$\mathbf{N} \cdot d\mathbf{r} \neq 0, \qquad \text{baina} \qquad \mathbf{N} \cdot \delta\mathbf{r} = 0. \tag{1.21}$$

Sistemak $n \equiv 3N - L$ **askatasun-gradu** dituenez, nahi den moduan aukera daitezke δx_k, δy_k eta δz_k desplazamendu birtualen arteko n. Besteak ondoko $3N - n$ ekuazioek emandakoak izango dira:

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial f_l}{\partial x_k}\, \delta x_k + \frac{\partial f_l}{\partial y_k}\, \delta y_k + \frac{\partial f_l}{\partial z_k}\, \delta z_k \right) = 0, \qquad (l = 0, 1, \ldots, L). \tag{1.22}$$

1.2 irudiko pendulu matematikoaren kasuan (1.3)–(1.4) lotura holonomoetatik lortzen dira desplazamendu birtualek bete behar dituzten bi baldintzak:

$$\delta z = 0, \tag{1.23}$$
$$x\,\delta x + y\,\delta y = 0. \tag{1.24}$$

Partikula batek pairatzen dituen indarrak bi zatitan bilduko ditugu:

- $\mathbf{N}_k$ **lotura-indarrean** loturek k. partikulan eragindakoak eta
- $\mathbf{F}_k$ **indar eragilean** partikula horretan aplikatutako beste guztiak.

Hemendik aurrera lan birtual osoa *zero dela suposatuko dugu beti:*

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbf{N}_k \cdot \delta\mathbf{r}_k = 0. \tag{1.25}$$

Baldintza hori betetzen denean, loturak **idealak** direla esaten da eta praktikan horrelakoak dira, marruskadura lehor dinamikoa (baina ez estatikoa) arbuiatzen bada. Beste kasu batzuetan, (1.25) lortzeko nahikoa da lan birtuala egiten duten lotura-indarrak indar eragileen artean jartzea. Pendulu matematikoaren kasuan, lotura-indarra izango da sokak eragindako ukipen-indarra (sokaren tentsioaren berdina dena, sokaren masa arbuiagarria denean) eta indar eragilea $m\mathbf{g}$ pisua.

1.1.4 Dinamikaren ekuazio orokorra

Dinamika egiteko, partikula bakoitzak betetzen duen Newtonen bigarren legea erabili behar dugu:

$$m_k\ddot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{N}_k + \mathbf{F}_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{1.26}$$

Ekuazio hauek

$$\mathbf{N}_k + \mathbf{F}_k - m_k\ddot{\mathbf{r}}_k = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, N), \tag{1.27}$$

moduan idatziz, hautazko $\delta\mathbf{r}_k$ desplazamendu birtualekin biderkatu ondoren, k partikula-indizearekiko batzen baditugu,

$$\sum_{k=1}^{N} (\mathbf{N}_k + \mathbf{F}_k - m_k\ddot{\mathbf{r}}_k) \cdot \delta\mathbf{r}_k = 0 \tag{1.28}$$

lortzen da eta loturak idealak direla eta (1.25) betetzen dela (edo, nahiago bada, lan birtuala egiten duten indar guztiak $\mathbf{F}_k$ gaietan batu direla) suposatuz **dinamikaren ekuazio orokorra** lortzen da:

$$\sum_{k=1}^{N} (\mathbf{F}_k - m_k\ddot{\mathbf{r}}_k) \cdot \delta\mathbf{r}_k = 0. \tag{1.29}$$

Hala ematen badu ere, hau ez da ekuazio bakar bat, desplazamendu birtualak (1.20) definizioaren edozein soluzio izan baitaitezke. Baina gogoratu desplazamendu birtualek loturak mantendu behar dituztela eta, oro har, $\delta\mathbf{r}_k$ bektore guztiak ez direla independenteak. Horrexegatik, kasu orokorrean ezin ondoriozta daiteke (1.29) ekuaziotik batugai bakoitza zero denik. Izan ere, $\mathbf{F}_k - m_k\ddot{\mathbf{r}}_k = 0$ ekuazioa, loturik gabeko kasuari dagokio bakarrik eta, oro har, ez da problema

orokorraren (1.27) ekuazio dinamikoa. Ez da beti egia desplazamendu infinitesimal bakoitzaren koefizientea nulua denik: $\delta\mathbf{r}_i$ aldaketa infinitesimalak loturak bermatzeko moduan —hau da, (1.20) betetzeko moduan— aukeratu behar dira.

Sistemak n askatasun-gradu baditu, n modu independentera aukera daitezke desplazamendu birtualak eta n higidura-ekuazio independente geratuko dira. Horrela kalkula daitezke, printzipioz, n koordenatu cartesiarren eboluzioa, $\mathbf{F}_k$ indar eragileak eta hastapen-baldintza egokiak ezagunak badira. Beste $3N - n = L$ koordenatuen eboluzioa (1.18) lotura-ekuazioek emandakoak izango dira. Amaitzeko, (eta praktikan gutxitan egin nahi dugu hori fisikan) (1.26) ekuazioak erabil daitezke lotura-indarrak kalkulatzeko.

1.2 irudiko pendulu matematikoan honela idazten da dinamikaren ekuazio orokorra:

$$(m\mathbf{g} - m\ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta\mathbf{r} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -m\ddot{x}\,\delta x + (mg - m\ddot{y})\,\delta y - m\ddot{z}\,\delta z = 0. \tag{1.30}$$

Hemen (1.23)–(1.24) baldintzak erabiltzen badira,

$$-m\left[\ddot{x} + \frac{x}{y}\,(g - \ddot{y})\right]\delta x = 0 \tag{1.31}$$

lortzen da, eta orain δx nahi den moduan aukera daitekeenez,

$$y\ddot{x} + x\,(g - \ddot{y}) = 0. \tag{1.32}$$

1.2 ARIKETA Egiaztatu (1.32) eta penduluaren ohiko higidura-ekuazioa baliokideak direla.

1.2 Koordenatu orokortuak

(1.18) lotura-ekuazioen soluzioak errazago aurkitzen dira parametroak erabiliz, hau da, une bakoitzean definitzen duten $\mathbb{R}^{3N}$ espazioko gainazala (n dimentsiokoa dena) modu parametrikoan idazten bada $q_1, q_2, \ldots, q_n$ parametroen bidez:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k\,(t, q_1, q_2, \ldots, q_n)\,, \qquad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{1.33}$$

Soluzio parametrikoak direnez, **transformazio-ekuazio** hauek (1.18) lotura-ekuazioetan ordezkatzen badira, azken hauek identitate bihurtzen dira.

Denbora aldatzean, (1.33) transformazio-ekuazioetan definitutako $q_1, q_2, \ldots, q_n$ **koordenatu orokortuak** ere aldatuko dira. Koordenatu orokortuen balioen $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ multzo bakoitzak sistemaren **konfigurazio** bat definitzen du: (1.33) ekuazioek emandako partikula guztien posizioen multzo bat. Konfigurazio guztien multzoa, hau da, koordenatu orokortuetako $\mathcal{Q}$ espazio abstraktua, **konfigurazio-espazioa** deitzen da eta hor aztertuko dugu sistemaren eboluzioa. Loturak egonkorrak badira, denbora ez da esplizituki agertuko (1.33) transformazio-ekuazioetan, $\partial\mathbf{r}_k/\partial t = 0$, eta konfigurazio-espazioa beti da $\mathbb{R}^{3N}$ espazioaren n dimentsioko azpiespazio bera.

1.2 irudiko pendulu matematikoak askatasun-gradu bakarra du, konfigurazio-espazioa l erradioko zirkunferentzia bat da, eta koordenatu orokortutzat $q = \theta$ aukeratzen bada, transformazio-ekuazioa

$$\mathbf{r} = l\,(\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}) \tag{1.34}$$

da eta (1.5)–(1.6) lotura-ekuazioetan ordezkatuz identitateak geratzen dira.

Erabil ditzagun (1.33) transformazio-ekuazioak desplazamendu birtualak koordenatu orokortuetan kalkulatzeko:

$$\delta \mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i, \qquad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{1.35}$$

(Gogoratu $\delta t = 0$ dela.) Pendulu matematikoaren kasuan, hauxe dugu:

$$\delta \mathbf{r} = l \left(\cos\theta \, \mathbf{i} - \sin\theta \, \mathbf{j} \right) \delta\theta. \tag{1.36}$$

Dinamikaren ekuazio orokorrean (1.35) ordezkatuz, batuketa-ordena aldatzen bada, honako hau dugu:

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{F}_k - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{N} \left(\mathbf{F}_k - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0. \tag{1.37}$$

Baina orain koordenatu orokortuak elkarren independenteak direnez, δq_i balioak nahi den moduan aukera daitezke eta, azken berdintza betetzeko, mako arteko batugai bakoitzak zero izan behar du nahitaez:

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\mathbf{F}_k - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.38}$$

(Nahikoa da, adibidez, $\delta q_j = 0$ hartzea $j \neq i$ balio guztietarako, i indizeari dagokion batugaia berreskuratzeko.) Beraz, honela idazten dira n higidura-ekuazio independenteak:

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{N} m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.39}$$

Orain koordenatu orokortuak eta euren deribatuak (abiadura eta azelerazio orokortuak direnak) erabiliz idatzi behar dira ekuazio hauen gaiak.

1.2.1 Energia zinetikoa

Hasteko, (1.39) higidura-ekuazioen eskuineko gaiaren esanahia aztertuko dugu. $\dot{\mathbf{r}}_k$ abiadurak $\dot{q}_i$ abiadura orokortuen bidez nola adierazten diren ikusteko, posizio-bektoreak (eta koordenatu cartesiarrak) koordenatu orokortuen bidez ematen dituzten (1.33) transformazio-ekuazioak deribatuko ditugu:

$$\dot{\mathbf{r}}_k = \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j. \tag{1.40}$$

Loturak holonomoak direnez, (1.40) deribatuan abiadura orokortuak esplizituki agertzen dira soilik, eta ez deribatu partzialetan. Beraz,

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}. \tag{1.41}$$

Koordenatu orokortuak, ordea, inplizituki bakarrik agertzen dira eta t-rekiko deribatu osoa eta q_i-rekiko partziala elkarrekin truka daitezke:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}. \tag{1.42}$$

Orain, (1.39) higidura-ekuazioen eskuineko gaian zatikako integrazioa eginez,

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \tag{1.43}$$

dugu eta (1.41)–(1.42) erabiliz,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} &= \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_k}{\partial q_i} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \dot{\mathbf{r}}_k \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \dot{\mathbf{r}}_k \right]. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Mako artean bi aldiz agertzen den

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \, \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \dot{\mathbf{r}}_k \tag{1.45}$$

magnitudea sistemaren energia zinetiko osoa dela kontuan hartuz, hauxe dugu:

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}. \tag{1.46}$$

1.3 ARIKETA Egiaztatu pendulu matematikoaren kasuan, hauxe dugula:

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2, \tag{1.47}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = m l^2 \ddot{\theta}. \tag{1.48}$$

(1.40) abiadurak (1.45) definizioan ordezkatzen badira, energia zinetikoa $\dot{q}_i$ abiadura orokortuekiko bigarren mailako polinomio bat dela ikusten dugu:

$$T = T_0 + T_1 + T_2, \tag{1.49}$$

$$T_0 \equiv a_0, \tag{1.50}$$

$$T_1 \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i \dot{q}_i, \tag{1.51}$$

$$T_2 \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \tag{1.52}$$

non denboraren eta koordenatuen ondoko funtzioak erabili ditugun:

$$a_0 \left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n\right) \equiv \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \right)^2, \tag{1.53}$$

$$a_i \left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n\right) \equiv \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.54}$$

$$a_{ij} \left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n\right) \equiv \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} = a_{ji}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.55}$$

Gainera, [1] testuan frogatzen denez, n koordenatu orokortuak independenteak direnez, T_2 forma koadratikoa ez da endekatua, hau da, koefizienteen matrizea alderanzgarria da:

$$\det\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n} \neq 0. \tag{1.56}$$

1.2.2 Indar orokortuak

(1.39) higidura-ekuazioen ezkerreko gaiak definitzen du q_i koordenatu orokortuari dagokion Q_i indar orokortua:

$$Q_i \equiv \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}. \tag{1.57}$$

Jakina, horrelako bat dugu askatasun-gradu bakoitzeko: denetara n. Gainera, dimentsioen aldetik q_i edonolakoa izan daitekeenez, gauza bera gertatzen da Q_i indar orokortuarekin; baina, hori bai, beti dugu $[q_i Q_i] = [\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k] = ML^2T^{-2}$.

Pendulu matematikoaren kasuan $\mathbf{F} = mg\,\mathbf{j}$ eta (1.34) —edo (1.36)— erabiliz, honela idazten da indar orokortua, indar-momentuaren $-\left(\mathbf{r} \times m\mathbf{g}\right)_z$ osagaia dena:

$$Q = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = mg\,\mathbf{j} \cdot l\left(\cos\theta\,\mathbf{i} - \sin\theta\,\mathbf{j}\right) = -mgl\sin\theta. \tag{1.58}$$

1.3 Bigarren motako Lagrangeren ekuazioak

(1.46) eta (1.57) kontuan hartuz, honela idazten dira (1.39) higidura-ekuazioak:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.59}$$

Eman dezagun Q_i indar orokortuak t denboraren, q_i koordenatu orokortuen eta $\dot{q}_i$ abiadura orokortuen funtzioen ezagutzen direla. (1.59) ekuazioen lehen gaiak garatzen badira, 1.2.1 atalean energia zinetikoaren egiturari buruzko ikasitakoa erabiliz, honela geratzen dira higidura--ekuazioak:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ddot{q}_j + \cdots = Q_i\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2 \ldots, \dot{q}_n\right), \tag{1.60}$$

non eten-puntuak jarri ditugun $\ddot{q}_j$ azelerazio orokorturik gabeko gaien ordez. (1.56) propietatearen ondorioz, beti aska daitezke azelerazio orokortuak ekuazio horietatik:

$$\ddot{q}_i = \Phi_i\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2 \ldots, \dot{q}_n\right), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.61}$$

Existentzia eta bakartasunaren teoremaren ondorioz (ikus, adibidez, [22]), bigarren ordenako n ekuazio diferentzial hauek soluzio bakar bat onartzen dute $(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$ aldagaien $2n$ hastapen-baldintzen multzo bakoitzeko.

Pendulu matematikoaren kasuan (1.47) eta (1.58) emaitzen ondorioz ohiko higidura ekuazioa berreskuratzen dugu:

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0. \tag{1.62}$$

Jarraian ikusiko dugu nola erabiltzen diren bigarren motako Lagrangeren ekuazio hauek zenbait kasu interesgarritan.

Loturarik gabeko partikula-sistema

Koordenatu orokortutzat cartesiarrak erabiltzen baditugu, energia zinetikoa

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k\,\dot{\mathbf{r}}_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k\left(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2\right) \tag{1.63}$$

da eta $q_i = x_j$ denean, i eta j indize egokietarako, (1.59) ekuazioen ezkerreko gaia hauxe:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial T}{\partial x_j} = m_j\,\ddot{x}_j. \tag{1.64}$$

Dagokion indar orokortua,

$$Q_i \equiv \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial x_j} = \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{i} = F_{jx}, \tag{1.65}$$

j partikularen gainean eragiten duen $\mathbf{F}_j$ indarraren x osagaia da, eta Lagrangeren ekuazioa

$$m_j\,\ddot{x}_j = F_{jx}. \tag{1.66}$$

y_j eta z_j koordenatuekin antzeko gauza bat dugu, noski, eta, ondorioz, sistemako partikulen higidura-ekuazioak, Newtonen bigarren legeak emandakoak, berreskuratzen dira:

$$m_j\,\ddot{\mathbf{r}}_j = \mathbf{F}_j. \tag{1.67}$$

(Adibide honetan loturarik ez dagoenez, partikularen gainean eragiten duen $\mathbf{F}_j$ indar osoa da indar eragilea.)

Partikula bakarra koordenatu esferikoetan

Partikularen higidura aztertzeko koordenatu esferikoak aukeratzen badira, honela idazten da energia zinetikoa A.1.3 ataleko emaitzak erabiliz:

$$T = \frac{1}{2}m\,\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\right]. \tag{1.68}$$

Hemendik, hauexek ditugu higidura-ekuazioak:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} &= m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\\ &= Q_r = \mathbf{F}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{r}} = F_r,\end{aligned} \tag{1.69}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= m\left(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\\ &= Q_\theta = \mathbf{F}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r\,\mathbf{F}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = rF_\theta = (\mathbf{r}\times\mathbf{F})_\varphi,\end{aligned} \tag{1.70}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= m\left(r^2\ddot{\varphi}\sin^2\theta + 2r\dot{r}\dot{\varphi}\sin^2\theta + 2r^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\right)\\ &= Q_\varphi = \mathbf{F}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = r\sin\theta\,\mathbf{F}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}} = r\sin\theta F_\varphi = -\sin\theta\,(\mathbf{r}\times\mathbf{F})_\theta.\end{aligned} \tag{1.71}$$

Beraz, koordenatu esferikoetan azelerazioaren osagaiak, kalkulu zuzenaren bidez A.4 ariketan aurkitzen direnak, hauexek dira:

$$a_r = \frac{F_r}{m} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta, \tag{1.72}$$

$$a_\theta = \frac{F_\theta}{m} = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta, \tag{1.73}$$

$$a_\varphi = \frac{F_\varphi}{m} = r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta. \tag{1.74}$$

Koordenatu zilindrikoen kasua 1.1 probleman aztertzen da.

Erreferentzia-sistema birakaria

Loturarik gabeko partikula baten higidura deskribatzeko, S_0 erreferentzia-sistema inertzialean $\boldsymbol{\omega}$ abiadura angeluarraz biratzen ari den S sistema *ez-inertzialaren* koordenatu cartesiarrak aukeratuko ditugu. Inertzia-indarren eragina esplizituki ez sartzeko, energia zinetikoa S_0 sistema inertzialean kalkulatuko dugu, nahiz eta S sistemako koordenatuez baliatu. Coriolisen teoremaren arabera, S sisteman partikularen abiadura $\dot{\mathbf{r}}$ denez, S_0 delakoan $\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ da eta, beraz, energia zinetikoa

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}_0^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\right)^2. \tag{1.75}$$

Koordenatu orokortuak cartesiarrak direnez, badakigu loturarik gabe indar orokortuak indar osoaren osagai cartesiarrak izango direla: $Q_x = F_x$, $Q_y = F_y$ eta $Q_z = F_z$. Koordenatu bakoitzari dagokion Lagrangeren ekuazioa ez idazteko, (1.8) bektore-notazio erabilgarriaz baliatuko gara $n = 3$ ekuazioak honela idazteko:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{F}. \tag{1.76}$$

1.4 ARIKETA Frogatu hurrengo bi emaitzak:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\left(\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\right), \tag{1.77}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} = -m\boldsymbol{\omega} \times \left(\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\right). \tag{1.78}$$

Ondorioztatu bigarren motako Lagrangeren (1.76) ekuazioak honako hauek direla:

$$m\left[\ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\right] = \mathbf{F}. \tag{1.79}$$

Hortaz, sistema birakariaren koordenatuak erabili dugunez, biraketak sorturiko inertzia-indarrak agertzen dira azelerazioari dagokion gaia askatzean:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - m\boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\right). \tag{1.80}$$

1.2 probleman aztertuko da translazioak sorturiko inertzia-indarren agerpena.

1.4 Indar kontserbatzaileak

Eman dezagun $\mathbf{F}_k$ indar eragile guztiak kontserbatzaileak direla eta sistemaren energia potentzial osoa $V(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N)$:

$$\mathbf{F}_k = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_k} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_k}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y_k}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z_k}\mathbf{k}\right). \tag{1.81}$$

Orduan, (1.33) transformazio-ekuazioak erabiliz, energia potentziala $V(t, q_1, q_2, \ldots, q_n)$ moduan[1] idazten bada, hauxe dugu:

$$\begin{aligned} Q_i &= \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = -\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \\ &= -\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial V}{\partial x_k}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y_k}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z_k}\mathbf{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\mathbf{i} + \frac{\partial y_k}{\partial q_i}\mathbf{j} + \frac{\partial z_k}{\partial q_i}\mathbf{k}\right) \\ &= -\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial V}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right). \end{aligned} \tag{1.82}$$

Beraz, indar orokortu kontserbatzaileen eta energia potentzialaren arteko erlazioa ezin errazagoa da:

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}. \tag{1.83}$$

Energia potentziala $\dot{q}_i$ abiadura orokortuen menpekoa ez denez, $\partial V/\partial \dot{q}_i = 0$, modu honetan ere idatz daitezke indar orokortuak:

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i}. \tag{1.84}$$

(Oraintxe ikusiko dugu zergatik idatzi diren era horretan.)

Pendulu matematikoaren kasuan, honela berreskuratzen da (1.58) indar orokortua energia potentzialetatik:

$$V = -mgl\cos\theta, \tag{1.85}$$

$$Q = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta. \tag{1.86}$$

1.4.1 Potentzial orokortuak

Indar orokortua $V(t, q_1, q_2, \ldots, q_2)$ potentzial arrunt batetik, (1.83) ekuazioaren bidez, lortzen ez bada ere, batzuetan badago $U(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$ egiturako potentzial orokortu bat, (1.84) erlazioaren antzeko bat betetzeko modukoa:

$$Q_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}. \tag{1.87}$$

[1] Notazio zehatzagoa erabiliz, balio bera baina egitura matematiko desberdinak dituzten funtzioak adierazteko, letra desberdinak erabili beharko genituzke: $\tilde{V}(t, q_1, q_2, \ldots, q_n) = V(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N)$ adibidez. Horrela egingo dugu, esate baterako, 1.7 atalean; baina beti egitea laster bihurtzen astun eta aspergarri.

Elektrodinamikan aurkitzen dugu kasurik interesgarriena. Eman dezagun q karga bat $\mathbf{E}$ eremu elektrikoan eta $\mathbf{B}$ eremu magnetikoan higitzen dela. Pairatzen duen indar elektromagnetikoa, Lorentzen indarra da:

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}\right). \tag{1.88}$$

Bestalde, eremu elektromagnetikoaren potentzial eskalarra $\Phi(t, \mathbf{r})$ bada eta potentzial bektoriala $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$, honela idazten dira eremuak.

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{1.89}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{1.90}$$

Kontsidera ditzagun

$$U = q\left(\Phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}\right) = q\left(\Phi - \dot{x}A_x - \dot{y}A_y - \dot{z}A_z\right) \tag{1.91}$$

energia potentzial orokortua eta dagokion indar orokortua:

$$\begin{aligned}
Q_x &= \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial x} \\
&= q\left(-\frac{dA_x}{dt} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \\
&= q\left(-\frac{\partial A_x}{\partial t} - \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} - \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} - \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \\
&= -q\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) + q\left[\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right] \\
&= -q\left(\nabla\Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)_x + q\left[\dot{y}\left(\nabla \times \mathbf{A}\right)_z - \dot{z}\left(\nabla \times \mathbf{A}\right)_y\right] \\
&= -q\left(\nabla\Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)_x + q\left[\dot{\mathbf{r}} \times \left(\nabla \times \mathbf{A}\right)\right]_x \\
&= q\left(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}\right)_x.
\end{aligned} \tag{1.92}$$

y eta z koordenatuekin kalkulu bertsua eginez, Lorentzen indarra (1.91) potentzial orokortutik lortzen dela frogatzen da.

1.5 Lehen motako Lagrangeren ekuazioak

Orain arte egin dugun hipotesi bakarra lotura guztiak holonomoak eta idealak direla izan da. Hemendik aurrera, gainera, hurrengo bi hipotesietako bat egingo dugu beti.

1. Indar eragileak kontserbatzaileak dira eta, ondorioz, (1.84) adierazpenaren bidez lor daitezke $V\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n\right)$ energia potentzial arrunt batetik. Lagrangeren ekuazioak, beraz, honela idazten dira:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i}, \tag{1.93}$$

   edo, eragile diferentzialak linealak direla erabiliz,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_i} = 0. \tag{1.94}$$

Sistemaren **lagrangearra**

$$L \equiv T - V \tag{1.95}$$

moduan definitzen badugu, honela idazten dira (lehen motako) **Lagrangeren ekuazioak**:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.96}$$

2. Indar orokortuak $U\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n\right)$ energia potentzial orokortu batetik lor daitezke (1.87) adierazpenaren bidez. Lagrangeren ekuazioak, beraz, honela idazten dira:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}, \tag{1.97}$$

edo, eragile diferentzialen linealtasuna erabiliz,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_i} = 0. \tag{1.98}$$

Sistemaren lagrangearra orain

$$L \equiv T - U \tag{1.99}$$

moduan definitzen badugu, Lagrangeren (1.96) ekuazioak lortzen dira, berriro ere.

1.5.1 Problemen ebazpena mekanika analitikoan

Orain arte ikusitakoa laburbilduz, mekanika analitikoan problema mekaniko bat ebazteko hurrengo metodoa erabili behar dela azpimarratu nahi dugu.

1. Kalkulatu zenbat diren loturak (edo konfigurazioa zehazteko behar diren aldagai independenteak), askatasun-graduen kopurua jakiteko.

2. Aukeratu koordenatu orokortu *egokiak* (problemaren simetriak gordetzeko moduan, adibidez).

3. Idatzi (1.33) transformazio-ekuazioak eta kalkulatu (1.40) abiadurak aurrekoak deribatuz. (Urrats hau ez da guztiz beharrezkoa problema errazetan.)

4. Idatzi sistemaren energia zinetiko osoa koordenatu orokortuetan.

5. Idatzi sistemaren energia potentzial (orokortu) osoa koordenatu orokortuetan.

6. Kalkulatu (1.95) —edo (1.99)— lagrangearra eta Lagrangeren (1.96) ekuazioak. Lagrangearrean $\dot{q}_i$ abiadura orokortuak agertzen direnez, denborarekiko deribatua egitean $\ddot{q}_i$ azelerazio orokortuak agertuko dira. Lagrangeren ekuazioak, beraz, bigarren ordenako n ekuazio diferentzial arrunt izango dira.

7. Aztertu (eta, ahal delarik, ebatzi) higidura-ekuazioak (agian, geroago ikusiko ditugun kontserbazio-printzipioez baliatuz).

Adibidez, pendulu matematikoaren kasuan, (1.47) energia zinetikoa eta (1.85) energia potentziala erabiliz, honela idazten dira lagrangearra eta higidura-ekuazioa:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta, \tag{1.100}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0. \tag{1.101}$$

Loturarik gabeko partikula koordenatu cartesiarretan

Partikularen masa m bada eta koordenatu orokortuak (x, y, z) cartesiarrak badira, honela idazten da energia zinetikoa:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right). \tag{1.102}$$

Energia potentziala $V(x, y, z)$ bada, lagrangearra

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V(x, y, z) \tag{1.103}$$

izango da eta Lagrangeren ekuazioak hurrengoak:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \tag{1.104}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = m\ddot{y} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \tag{1.105}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = m\ddot{z} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0. \tag{1.106}$$

Argi dago $m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V$ higidura-ekuazioaren osagai cartesiarrak direla aurrekoak. Izan ere, notazio laburraz baliatuz honela ere lortzen dira:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = m\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} = 0. \tag{1.107}$$

1.5 ARIKETA **Indar zentralak**.Aurkitu indar zentralen menpeko higidura-ekuazioak, atal honetako formalismoaren bidez.

1.6 Indar ez-kontserbatzaileak

Kontsidera dezagun lotura holonomo eskleronomoek definituriko sistema mekaniko bat:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k\left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right), \qquad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{1.108}$$

Partikula bakoitzak pairatzen duen indar osoa $\mathbf{F}_k$ bada, indarrek egindako potentzia osoa, honela idazten da, (1.57) indar orokortuak erabiliz:

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{k=1}^{N}\mathbf{F}_k \cdot \dot{\mathbf{r}}_k = \sum_{k=1}^{N}\mathbf{F}_k \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{N}\mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i, \tag{1.109}$$

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i. \tag{1.110}$$

Indarrak kontserbatzaileak badira eta $V\left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right)$ energia potentziala denboraren independentea, hauxe lortzen da (1.83) erlaziotik:

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{k=1}^{N}\mathbf{F}_k \cdot \dot{\mathbf{r}}_k = \sum_{i=1}^{n} Q_i\dot{q}_i = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial q_i}\dot{q}_i = -\dot{V}. \tag{1.111}$$

Hemendik, indar bizien teoremaren arabera $\dot{T} = dW/dt$ dela gogoratuz, zuzenean berreskuratzen da energia mekanikoaren kontserbazio-printzipioa: indar guztiak kontserbatzaileak (edo lanik egiten ez dutenak) badira, $(T+V)^{\cdot} = 0$ dugu.

Batzuetan, indarrek ez badute lanik egiten, **giroskopikoak** direla esaten da:

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \cdot \dot{\mathbf{r}}_k = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i = 0. \tag{1.112}$$

Horrelakoak dira, adibidez, indar magnetikoak eta Coriolisenak, abiadurarekiko perpendikularrak baitira.

Potentzia beti negatiboa (edo zero) denean,

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \cdot \dot{\mathbf{r}}_k = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i \leq 0, \tag{1.113}$$

indarrak **iraungitzaileak** direla esaten da. Horrelakoak dira, adibidez, abiaduraren proportzionalak diren marruskadura-indarrak,

$$\mathbf{F}_k = -\beta_k \dot{\mathbf{r}}_k, \quad (\beta_k > 0), \tag{1.114}$$

zeren, orduan, hauxe baitugu:

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \cdot \dot{\mathbf{r}}_k = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i = -\sum_{k=1}^{N} \beta_k \dot{\mathbf{r}}_k^2 \leq 0. \tag{1.115}$$

1.6.1 Rayleighen iraungipen-funtzioa

Indarrak (1.114) egiturakoak direnean, honela idazten dira indar orokortuak (loturak egonkorrak badira):

$$Q_i = -\sum_{k=1}^{N} \beta_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = -\sum_{k=1}^{N} \beta_k \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_j. \tag{1.116}$$

Hemen

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} \equiv \sum_{k=1}^{N} \beta_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \tag{1.117}$$

definizioak erabiltzen badira, hauxe dugu:

$$Q_i = -\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \dot{q}_j. \tag{1.118}$$

(1.114) adierazpenetik lortzen ez badira ere, indar orokortuak (1.118) moduan idazten badira $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ koefiziente simetrikoen bidez, indarrak iraungikorrak izango dira $\sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ij} x_i x_j$ forma koadratikoa positiboa bada, zeren orduan —eta horrelakoa da (1.114) kasua— hauxe dugu potentzia:

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i = -\sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \leq 0. \tag{1.119}$$

Gainera, (1.118) indarren kasuan Rayleighen iraungipen-funtzioa

$$\mathcal{R} \equiv -\frac{1}{2}\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \geq 0 \tag{1.120}$$

moduan definitzen bada,

$$Q_i = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.121}$$

erlazioa dugu eta (1.59) higidura-ekuazioak ondoko moduan idazten dira:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.122}$$

Indarren artean batzuk kontserbatzaileak edo kontserbatzaile orokortuak badira eta besteak (1.118) motako indar iraungitzaileak,

$$Q_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.123}$$

honela idatziko dira higidura-ekuazioak $L = T - U$ definizioarekin:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.124}$$

1.7 Puntu-transformazioak

Eman dezagun $\mathcal{Q}$ konfigurazio-espazioan koordenatuak aldatzen direla ondoko adierazpenek emandako $q_i \to \tilde{q}_i$ legearen arabera:

$$\tilde{q}_i = f_i\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n\right), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.125}$$

Beti suposatuko dugu transformazioaren jacobiarra ez dela zero,

$$\frac{\partial\left(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_n\right)}{\partial\left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right)} \neq 0, \tag{1.126}$$

hau da, transformazioa alderanzgarria dela eta alderantzizko transformazioa existitzen dela:

$$q_i = \tilde{f}_i\left(t, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_n\right), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.127}$$

Abiadura orokortuen transformazioa, jakina, honako hau dugu:

$$\dot{\tilde{q}}_i = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial q_j}\dot{q}_j, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.128}$$

Lagrangearraren balioa puntu bakoitzean (konfigurazio bakoitzean) ez da aldatuko baina bai bere funtzio-egitura:

$$\tilde{L}\left(t, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_n, \dot{\tilde{q}}_1, \dot{\tilde{q}}_2, \ldots, \dot{\tilde{q}}_n\right) = L\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n\right). \tag{1.129}$$

Koordenatu cartesiarrak eta polarrak

Adibide ezaguna dugu nola idazten den indar zentralen menpeko higiduraren lagrangearra OXY higidura-planoan:

$$L\left(x,y,\dot{x},\dot{y}\right)=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)-V\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)= \tag{1.130}$$

$$\tilde{L}\left(r,\varphi,\dot{r},\dot{\varphi}\right)=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right)-V(r). \tag{1.131}$$

Translazioak

Hurrengo adibidean, eman dezagun partikula bat higitzen dela OX ardatzean, $V(x)$ energia potentzialaren eraginpean:

$$L\left(x,\dot{x}\right)=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-V(x). \tag{1.132}$$

Translazio konstante batean,

$$\tilde{x}=x+a, \tag{1.133}$$

$$\dot{\tilde{x}}=\dot{x}, \tag{1.134}$$

honela idazten da lagrangear berria

$$\tilde{L}\left(\tilde{x},\dot{\tilde{x}}\right)=\frac{1}{2}m\dot{\tilde{x}}^2-V(\tilde{x}-a). \tag{1.135}$$

Biraketak

Demagun, orain, partikula OXY plano cartesiarrean higitzen dela,

$$L\left(x,y,\dot{x},\dot{y}\right)=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)-V(x,y), \tag{1.136}$$

eta hurrengo biraketa egiten dugula:

$$\tilde{x}=x\cos\alpha-y\sin\alpha, \tag{1.137}$$

$$\tilde{y}=x\sin\alpha+x\cos\alpha. \tag{1.138}$$

Erraz ikusten da (alderantzizko biraketaz baliatuz) lagrangearra honela idazten dela orain:

$$\tilde{L}\left(\tilde{x},\tilde{y},\dot{\tilde{x}},\dot{\tilde{y}}\right)=\frac{1}{2}m\left(\dot{\tilde{x}}^2+\dot{\tilde{y}}^2\right)-V(\tilde{x}\cos\alpha+\tilde{y}\sin\alpha,-\tilde{x}\sin\alpha+\tilde{x}\cos\alpha). \tag{1.139}$$

1.6 ARIKETA Froga ezazu problema berean koordenatu polarrak erabiltzen badira hauxe dugula:

$$\tilde{r}=r, \tag{1.140}$$

$$\tilde{\varphi}=\varphi+\alpha, \tag{1.141}$$

$$L\left(r,\varphi,\dot{r},\dot{\varphi}\right)=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right)-V(r,\varphi), \tag{1.142}$$

$$\tilde{L}\left(\tilde{r},\tilde{\varphi},\dot{\tilde{r}},\dot{\tilde{\varphi}}\right)=\frac{1}{2}m\left(\dot{\tilde{r}}^2+\tilde{r}^2\dot{\tilde{\varphi}}^2\right)-V(\tilde{r},\tilde{\varphi}-\alpha). \tag{1.143}$$

1.7.1 Puntu-transformazioekiko aldaezintasuna

Koordenatu orokortu guztietan modu berean idazten dira Lagrangeren ekuazioak, puntu--transformazioekiko aldaezinak baitira:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,\ (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_j} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_j} = 0,\ (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.144}$$

Ez da zaila zuzenean hau egiaztatzea, baina ez da beharrezkoa, aurreko ataletako teorian ez baitugu zehaztu nolako koordenatu orokortuak erabiltzen genituen.

1.8 *Gauge* aldaezintasuna

Dakigunez, energia potentzialari konstante bat batzen bazaio, indar-eremua ez da aldatzen. Lagrangeren ekuazioek, honez gain, askoz ere zabalagoa eta garrantzitsuagoa den aldaezintasun bat erakusten dute: *lagrangearrari $G(t, q_1, q_2, \ldots, q_n)$ egiturako edozein funtzioren denborarekiko deribatu osoa batzen bazaio, Lagrangeren ekuazioak ez dira aldatzen, hau da, Lagrangeren higidura-ekuazio berberak lortzen dira L eta $L + dG/dt$ lagrangearretatik.*

Emaitza zuzenean egiaztatzeko, nahikoa da deribatu osoaren definizioa erabiltzea:

$$\dot{G} = \frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial q_j}\dot{q}_j, \tag{1.145}$$

$$\frac{\partial \dot{G}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial G}{\partial q_i}, \tag{1.146}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{G}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial^2 G}{\partial t \partial q_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 G}{\partial q_j \partial q_i}\dot{q}_j, \tag{1.147}$$

$$\frac{\partial \dot{G}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 G}{\partial q_i \partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 G}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_j, \tag{1.148}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{G}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \dot{G}}{\partial q_i} = 0, \qquad \forall\,(t, q_1, q_2, \ldots, q_n)\,. \tag{1.149}$$

Hortaz, Lagrangeren ekuazioetan L eta $L + \dot{G}$ erabiliz gauza bera lortuko da: bi lagrangearrak baliokideak dira. (Beste ikuspuntu batetik frogatuko dugu emaitza hau 2.1 probleman.)

Adibide interesgarriena 1.4.1 ataleko eremu elektromagnetikoarena da. Eman dezagun potentzialak ondoko modura aldatzen direla:

$$\Phi(t, \mathbf{r}) \quad \rightarrow \quad \Phi(t, \mathbf{r}) - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \tag{1.150}$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) + \nabla \Lambda, \tag{1.151}$$

non $\Lambda(t, \mathbf{r})$ funtzio eskalarra edonolakoa den.

1.7 ARIKETA Egiaztatu (1.89)–(1.90) eremuak ez direla aldatzen (1.150)–(1.151) transformazioan.

Eremuak aldatzen ez direnez, higidura-ekuazioak ere ez dira aldatuko. Izan ere, (1.91)-ren ondorioz, honela aldatzen da lagrangearra:

$$L = T - q\,(\Phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) \quad \rightarrow \quad L + q\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla \Lambda\right) = L + \frac{d}{dt}(q\Lambda)\,. \tag{1.152}$$

1.9 Problemak

1.1 Aurki bitez puntu materialaren azelerazioaren osagai zilindrikoak, Lagrangeren ekuazioen bidez.

1.2 S sistema ez-inertziala azeleraturik dago inertzia-sistema batean, baina sistema bien arteko orientazioa konstantea da. Aurki bitez puntu materialaren higidura-ekuazioak, koordenatu orokortutzat S sistemako cartesiarrak erabiliz. Iruzkina egin emaitzari.

1.3 Weberren elektrodinamikan bi kargen arteko elkarrekintza deskribatzeko honako potentzial orokortu hau agertzen zen partikulen arteko $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ distantzia erabiliz:

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}\left(1 - \alpha\frac{\dot{r}^2}{c^2}\right),$$

non α zenbakia konstantea den. Aurki itzazu indar horri dagokion indar-eremua eta higidura lauaren ekuazioak.

1.4 S erreferentzia-sistema inertzialean, $\tilde{S}$ sistemaren jatorriaren posizioa $\mathbf{R}(t)$ lege ezagunak emandakoa da. Koordenatu orokortuak $\tilde{S}$ sistemako cartesiarrak dira. Froga ezazu $-m\ddot{\mathbf{R}}(t)$ atoi--indarra $V(t,\mathbf{r}) = m\ddot{\mathbf{R}}(t)\cdot\mathbf{r}$ potentzial arruntetik eta $U(t,\dot{\mathbf{r}}) = -m\dot{\mathbf{R}}(t)\cdot\dot{\mathbf{r}}$ potentzial orokortutik lor daitekeela.

1.5 Karga baten lagrangearra. Eremu elektromagnetiko baten potentzial eskalarra $\Phi(t,\mathbf{r})$ bada eta potentzial bektoriala $\mathbf{A}(t,\mathbf{r})$, zein da bertan higitzen den q kargaren lagrangearra?

1.6 Nielsen-en ekuazioak. Froga ezazu bigarren motako (1.59) Lagrangeren ekuazioak ondoko era baliokidean idatz daitezkeela:

$$\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_i} - 2\frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

1.7 Bi partikula puntualez osaturiko sistema batean indarrak honelakoak dira:

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = -k\left(\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2\right), \qquad (k > 0).$$

Aurkitu dagokion Rayleighen iraungipen-funtzioa.

1.8 Azter dezagun

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - k(\alpha x - \beta y)$$

lagrangearra, non α eta β konstanteek ondoko baldintza betetzen duten:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Idatzi lagrangearra hurrengo puntu-transformazioa egin ondoren:

$$\tilde{x} = \alpha x - \beta y,$$
$$\tilde{y} = \beta x + \alpha y.$$

Zein da transformazio honen esanahia? Iruzkina egin emaitzari.

1.9 Kalkulatu nola idazten den

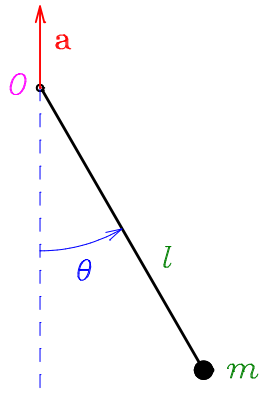
$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V\left(x\cos\frac{z}{h} + y\sin\frac{z}{h}\right)$$

lagrangearra hurrengo puntu-transformazioa egin ondoren:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x\cos\alpha - y\sin\alpha,\\ \tilde{y} &= x\sin\alpha + y\cos\alpha,\\ \tilde{z} &= z + h\alpha.\end{aligned}$$

Iruzkina egin emaitzari.

1.10 Irudiko pendulu matematikoaren O esekidura-puntua a azelerazio bertikal konstantez mugiarazten da. Koordenatu orokortua θ angelua da.
(a) Idatzi lagrangearra eta higidura-ekuazioa laborategiko S sisteman.
(b) Idatzi lagrangearra eta higidura-ekuazioa O-rekin batera higitzen den $\tilde{S}$ erreferentzia-sistema azeleratuan, inertzia-indarrak ahaztu gabe.
(c) Zergatik dira berdinak higidura-ekuazioak, nahiz eta lagrangearrak desberdinak izan?



1.11 S erreferentzia-sistema inertzialean, $\tilde{S}$ sistemaren jatorriaren posizioa $\mathbf{R}(t)$ lege ezagunak emandakoa da. Koordenatu orokortuak $\tilde{S}$ sistemako cartesiarrak dira. Frogatu hurrengo hiru lagrangearrekin higidura-ekuazio berdinak lortzen direla:

$$\begin{aligned}L_1 &= \frac{1}{2}m\left(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}\right)^2 - V(\mathbf{r}),\\ L_2 &= \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - \left[V(\mathbf{r}) + m\,\ddot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{r}\right],\\ L_3 &= \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - \left[V(\mathbf{r}) - m\,\dot{\mathbf{R}}\cdot\dot{\mathbf{r}}\right].\end{aligned}$$

Azaldu zein den lagrangear bakoitzaren esangura eta zergatik diren baliokideak.

2. GAIA

Aldakuntza-printzipioak

2.1 IRUDIA Leonhard Euler (1707, Basilea, Suitza – 1783, San Petersburgo, Errusia). 1740an argitaratu zuen *Methodus inveniendi lineas curvas…* izeneko liburuan hasten da aldakuntzen kalkuluaren azterketa sistematikoa.

Mekanika eta eremuen teoriak egiteko —eta, halaber, matematikan eta ingeniaritzan— hain emankorra den aldakuntzen kalkuluaren funtsezko kontzeptuak eta emaitzak aztertuko dira gai honetan. Fisikarien notazioa eta egiteko modua erabiliko dira, noski. Matematikarien oinarrizko ikuspuntua [24] testuan aurki daiteke.

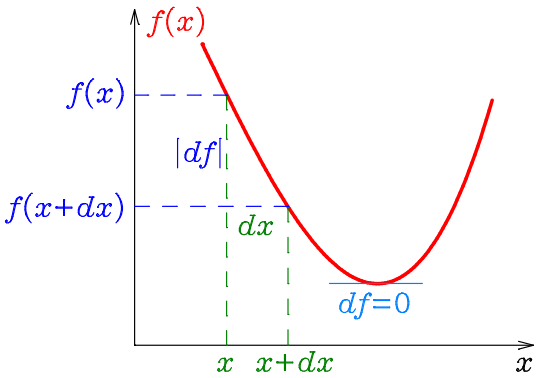
2.1 Aldaketa infinitesimalak eta mutur-puntuak

Funtzioen mutur-puntuak (maximoak, minimoak eta abar) kalkulatzeko deribatuak erabili ohi dira, baina, atal honetan ikusiko dugunez, aldaketa infinitesimalez baliatzea baliokidea da.

Aldagai bakarreko funtzioa

Kontsidera dezagun 2.2 irudiko funtzioa eta x puntu batean aldagai independentearen dx aldaketa infinitesimalari dagokion funtzioaren aldaketa:

$$df \equiv f(x+dx) - f(x) = \frac{df}{dx}(x)\,dx. \tag{2.1}$$

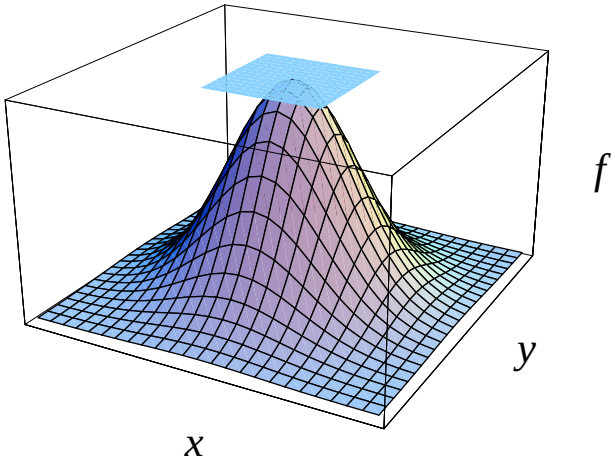


2.2 IRUDIA $f(x)$ funtzioaren aldaketa infinitesimalak.

Fisikariok «aldaketa infinitesimala» esatean, aldaketa lineala —Taylorren garapeneko gai lineala, hain zuzen— dugu buruan, azken adierazpenean egin dugun antzera. Bertan ikusten dugu deribatua zero izatea eta aldaketa infinitesimala zero izatea guztiz baliokideak direla, mutur-puntuak (maximoak, minimoak eta inflexio-puntuak) kalkulatzean. Azkena izango da hemen aukeratuko dugun ikuspuntua. Aldaketa infinitesimala zero deneko puntuak dira mutur-puntuak:

$$df = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{df}{dx} = 0. \tag{2.2}$$

Aldaketa infinitesimala zuzen tangentean gertatzen da, deribatuaren esangura geometrikoaren ondorioz. Hortaz, mutur-puntuetan zuzen horizontal batean jazotzen da aldaketa infinitesimala eta bere balioa zero da, irudiko adibidean erakusten den legez.



2.3 IRUDIA Maximoan $f(x, y)$ funtzioaren aldaketa infinitesimalak horizontalak dira.

Bi aldagaiko funtzioa

Funtzioa orain (x, y) planoan definiturik badago, dx eta dy aldaketei dagokien $f(x, y)$ funtzioaren aldaketa infinitesimala honako hau da:

$$df \equiv f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dy. \tag{2.3}$$

dx eta dy aldaketak elkarren independenteak direnez (adibidez, zero egin daiteke bat bestea aldatu gabe), deribatu partzialak edota funtzioaren aldaketa infinitesimal *guztiak* zero egitean lortzen dira mutur-puntuak:

$$df = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{2.4}$$

Aldaketa infinitesimalak (linealak) plano tangentean gertatzen dira, eta mutur-puntuetan azken hau horizontala da eta aldaketa linealak zero. (Ikus 2.3 irudiko adibidea.)

Aldaketa infinitesimal birtuala

Kontsidera dezagun orain $f(t, q_1, q_2, \ldots, q_n)$ funtzioa eta t aldatu gabe gertatzen diren aldaketak, mekanika analitikoan birtualak deitzen direnak: $\delta t = 0$. δq_i aldaketei dagokien aldaketa lineala hurrengoa da:

$$\delta f = f(t, q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \ldots, q_n + \delta q_n) - f(t, q_1, q_2, \ldots, q_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\, \delta q_i. \tag{2.5}$$

Ondorioz, t-ren balio finko bakoitzeko, mutur-puntuak aldaketa infinitesimal birtual posible guztiak zero direnean gertatuko dira:

$$\delta f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial q_1} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial q_n} = 0. \tag{2.6}$$

2.2 Loturadun muturrak

(2.5)-tik (2.6)-ra joateko aldagai guztien aldaketa infinitesimalak elkarren independenteak direla suposatu dugu. Azter dezagun orain zer gertatzen den hori egia ez bada, q_i aldagaien artean hurrengo moduko m baldintza independente bete behar baitira:

$$g_l\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n\right) = 0, \qquad (l = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.7}$$

Orain, aldaketa infinitesimalen arteko hurrengo erlazioak ditugu:

$$\delta g_l\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_l}{\partial q_i}\,\delta q_i = 0, \qquad (l = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.8}$$

Beraz, aldaketa infinitesimalak ezin dira nahi den moduan aukeratu: aurreko baldintzak bete behar dira.

2.2.1 Lagrangeren biderkatzaileak

Oraindik zehaztu gabe geratuko diren λ_l konstanteak sartzen baditugu, hasierako f funtzioak eta

$$\tilde{f} \equiv f + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l\, g_l\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n\right) \tag{2.9}$$

aldatuak mutur-puntu berdinak dituzte, (2.7) baldintzen ondorioz. Beraz, mutur-puntuak kalkulatzeko

$$\delta\tilde{f} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q_i}\,\delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_i}\right] \delta q_i = 0 \tag{2.10}$$

ebatzi ahal da. δq_i aldaketen artean $n - m$ bakarrik aukera ditzakegu nahi dugun moduan, baina orain λ_k biderkatzaileak ere aukeran daude. Beraz, denetara hautazko n magnitude daudenez, (2.10) baturako n batugaiak zero izateko eska dezakegu. Adibidez, eman dezagun aldagai independenteak hasierako $n-m$ koordenatu orokortuak direla. Kasu horretan, hurrengo m baldintzak betetzeko moduan aukera ditzakegu m biderkatzaileak:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial q_i} + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_i} = 0, \qquad (i = n-m+1, n-m+2, \ldots, n). \tag{2.11}$$

Hauekin

$$\delta\tilde{f} = \sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q_i}\,\delta q_i = \sum_{i=1}^{n-m} \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_i}\right] \delta q_i = 0 \tag{2.12}$$

baldintzan geratzen diren desplazamendu birtualak independenteak direnez, batugai bakoitzak zero izan behar du:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial q_i} + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-m). \tag{2.13}$$

Bete behar diren baldintzak, ondorioz, hurrengoak dira:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial q_i} + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.14}$$

$$g_l\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n\right) = 0, \qquad (l = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.15}$$

Beraz, $n + m$ ekuazio ebatzi behar dira mutur-puntuetako n koordenatuak eta m biderkatzaileak aurkitzeko.

Adibidea

Demagun ondoko ekuazioek emandako zirkunferentzian $f(x, y, z) = x - yz$ funtzioak dituen muturrak aurkitu nahi ditugula:

$$x + y + z = 1, \tag{2.16}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \tag{2.17}$$

Printzipioz (2.16)–(2.17) lotura-ekuazioak erabil daitezke problematik y eta z, adibidez, ezabatzeko. Baina erro karratuak daudenez, errazagoa da Lagrangeren biderkatzaileez baliatzea. Bete behar diren baldintzak,

$$1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0, \tag{2.18}$$

$$-z + \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0, \tag{2.19}$$

$$-y + \lambda_1 + 2\lambda_2 z = 0, \tag{2.20}$$

$$x + y + z = 1, \tag{2.21}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{2.22}$$

erraz ebazten dira. Bi soluzio daude:

$$x = -\frac{1}{3}, \quad y = z = \frac{2}{3}, \qquad \lambda_1 = -\frac{4}{9}, \qquad \lambda_2 = \frac{5}{6}, \tag{2.23}$$

$$x = 1, \qquad y = z = 0, \qquad \lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2}. \tag{2.24}$$

2.3 Funtzionalak

Atal honetan eta hurrengoan funtzioen menpekoak diren objektu matematikoak, funtzionalak, kontsideratu ditugu. Era askotakoak izan daitezke horrelakoak, baina fisikan gehienetan agertzen den kasu berezia aztertzera mugatuko gara hemen. t aldagai errealeko q_1, q_2, …, q_n funtzioak (infinitu dimentsio dituen konfigurazio-espazio batean) aukera bakoitzeko, hurrengo integral mugatuaren bidez definitzen da funtzionalaren balioa $[t_1, t_2]$ tartean:

$$I\left[q_1, q_2, \ldots, q_n\right] \equiv \int_{t_1}^{t_2} L\left[t, q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \ldots, \dot{q}_n(t)\right] \, dt. \tag{2.25}$$

Hemengo $L\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n\right)$ funtzioaren egitura, t_1 eta t_2 integrazio-mugak eta $q_1(t_1)$, $q_2(t_1)$, …,$q_n(t_1)$, $q_1(t_2)$, $q_2(t_2)$, …, $q_n(t_2)$ balioak ezagunak eta aldaezinak dira problema bakoitzean.

Funtzionalen adibiderik garrantzitsuena mekanika analitikoan agertzen zaigu: 2.4 atalean definituko dugun ekintza. Kasu horretan q_i funtzioak konfigurazio-espazioan definiturikoak dira. Baina azter dezagun lehenago adibide geometriko bat.

Kurben luzera

Kontsidera ditzagun espazioko bi puntu —$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ eta $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$— lotzen dituzten kurba guztiak, $\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ erako ekuazioen bidez adieraziko ditugunak, t parametro egoki baten bidez. $t = t_1,\ t_2$ balioei dagozkien kurbetako puntuak P_1 eta P_2 izateko moduan aukeratzen dugu t parametroa. Kurba bakoitzaren luzera hurrengo funtzionalak emandakoa da:

$$s = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\, dt. \tag{2.26}$$

Beraz, $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$ eta

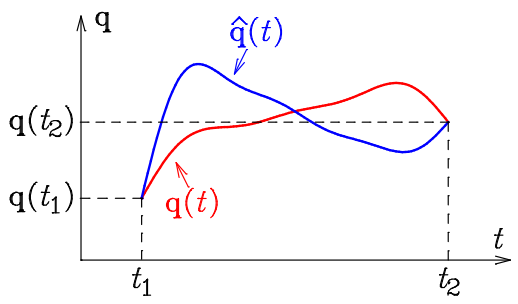
$$L = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2} \tag{2.27}$$

aukerekin, (2.25) moduko funtzionala da luzera.

Notazioa

Hemendik aurrera, n dimentsioko espazio abstraktuetan $\mathbf{q} \equiv (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ bektore-notazio laburtua erabiliko dugu komeni denean. Adibidez, honela idatziko dugu (2.25) funtzionala:

$$I\,[\mathbf{q}] \equiv \int_{t_1}^{t_2} L\,[t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}]\ dt. \tag{2.28}$$



2.4 IRUDIA Ekintza kalkulatzeko bi bide.

2.4 Ekintza

Eman dezagun t_1 eta t_2 aldiuneak hautatu ondoren dagozkien bi konfigurazio aukeratzen ditugula mekanika analitikoan: $\mathbf{q}_1 \equiv \mathbf{q}\,(t_1)$ eta $\mathbf{q}_2 \equiv \mathbf{q}\,(t_2)$. Aipaturiko aldiuneak eta konfigurazioak ez dira aldatuko, baina beste t bakoitzeko $\mathbf{q}(t)$ konfigurazio bat aukeratzen dugu, $q_i(t)$ funtzioak erregularrak[1] izateko baldintza bakarra betetzeko moduan. Azpimarratu behar da, konfigurazioak

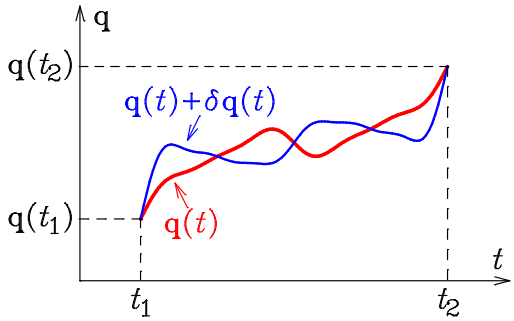
[1]Funtzio bat **erregularra** izateko, berak eta bere deribatuek «erregular» adjektiboa agertzen den enuntziatua bermatzeko jarraitutasun-baldintzak bete behar dituzte. Aipaturiko baldintza beharrezkoak, puntu (edo leku geometriko) berezi batzuetan izan ezik, bete egiten direla suposatzen dugu beti testu honetan. Puntu **singular** horiek, hala ere, garrantzi handikoak izaten dira fisikan (bertan dago, adibidez, grabitazio-eremurik errazena sortzen duen masa puntuala).

aukeratu ditugunez, t aldiune bakoitzean loturak bete behar direla; baina, oro har, higidura-ekuazioak ez dira beteko aipaturiko aukeretan. t aldatzean t_1 eta t_2 aldiunetan aukeraturiko konfigurazioak lotzen dituen kurba erregular bat lortzen da, q_i koordenatuetako $\mathcal{Q}$ konfigurazio-espazio abstraktuan. Konfigurazio-bide horri dagokion sistema mekanikoaren ekintza, definizioz, hurrengo integralaren balioa da:

$$I\left[q_1, q_2, \ldots, q_n\right] \equiv \int_{t_1}^{t_2} L\left[t, q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \ldots, \dot{q}_n(t)\right]\, dt, \tag{2.29}$$

non $L\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n\right)$ funtzioa sistemaren lagrangearra den.

2.1 ARIKETA Froga ezazu ekintza eta Plancken h konstantea dimentsio berekoak direla. Bestelako zer magnitude fisiko ezagunen dimentsioak dira ekintzarenak?



2.5 IRUDIA Funtzionalaren bi integrazio-bide $n = 1$ kasuan.

2.5 Muturreko kurbak

Horrelako funtzionaletan argumentuek $\delta\mathbf{q} \equiv (\delta q_1, q_2, \ldots, \delta q_n)$ aldaketa infinitesimalak (funtzio osoak direla kontuan harturik **aldakuntza** infinitesimalak deitzen direnak) pairatzen dituztenean, honela aldatzen da funtzionala bera:

$$\begin{aligned}
\delta I &\equiv I\left[\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}\right] - I\left[\mathbf{q}\right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} L\left[t, \mathbf{q}(t) + \delta\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) + \delta\dot{\mathbf{q}}(t)\right]\, dt - \int_{t_1}^{t_2} L\left[t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)\right]\, dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left\{L\left[t, \mathbf{q}(t) + \delta\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) + \delta\dot{\mathbf{q}}(t)\right] - L\left[t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)\right]\right\}\, dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \delta L\, dt.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Hemen inplizituki eta 2.5 irudian esplizituki egin dugun bezala, *t_1 eta t_2 integrazio-mugak aldatzen ez direlako hipotesia* egingo dugu beti. Gainera, tarteko puntuetan q_i funtzioak aldatu arren, *aipaturiko integrazio-mugetan ez direla aldatzen*, hau da,

$$\delta t_1 = \delta t_2 = 0, \qquad \delta\mathbf{q}\left(t_1\right) = \delta\mathbf{q}\left(t_2\right) = 0 \tag{2.31}$$

betetzen dela suposatuko dugu. Hipotesi hau,

$$\delta\dot{q}_i(t) = \frac{d}{dt}\delta q_i(t) \tag{2.32}$$

erlazioa eta zatikako integrazioa erabiliz, hauxe dugu:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\delta\dot{q}_i\,dt &= \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\delta q_i\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\delta q_i\right]dt \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\delta q_i\,dt = -\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\delta q_i\,dt.\end{aligned} \tag{2.33}$$

Ondorioz, (2.5) erabiliz, funtzionalaren aldakuntza hauxe dela ikusten dugu:

$$\begin{aligned}\delta I = \int_{t_1}^{t_2}\delta L\,dt &= \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\,\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\delta\dot{q}_i\right)dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\right]dt.\end{aligned} \tag{2.34}$$

Horrelako funtzional bat maximoa edo minimoa denean bere aldakuntza infinitesimal (lineal) guztiak zero izango dira. Kasu horietan —eta funtzionalaren aldakuntza infinitesimala zero den beste guztietan ere— funtzionala **egonkorra** dela esango dugu eta hori gertatzeko aukeratu behar diren $\mathbf{q} \equiv (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ funtzioek definituriko kurba **muturrekoa** dela. δq_i aldakuntzak elkarren independenteak direnez,

$$\delta I = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.35}$$

Funtzionala egonkorra izateko baldintza beharrezkoa eta nahikoa, hortaz, **Euler eta Lagrangeren ekuazioak** betetzea da:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.36}$$

Hauxe frogatu dugu, beraz: *Euler eta Lagrangeren ekuazioen soluzioak dira, (2.25) funtzionala egonkor egiten duten muturreko kurbak*. Ekintzaren kasuan, lehen motako Lagrangeren (1.96) ekuazioak dira Euler eta Lagrangeren ekuazioak.

Distantzia minimoa

Kontsidera ditzagun espazioko bi puntu lotzen dituzten kurba erregular guztiak, t parametro geometrikoa erabiliz $\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ moduan idazten direnak. Kurba bakoitzean zehar neurtutako puntuen arteko distantzia (2.26) da:

$$s = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt. \tag{2.37}$$

Hau minimoa izateko bete behar den $\delta s = 0$ baldintza hurrengo hiru ekuazioen baliokidea da:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} = 0, \tag{2.38}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} = 0, \tag{2.39}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{dt}\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} = 0. \tag{2.40}$$

Ekuazio hauen lehen integralak honako hauek dira:

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} = C_1, \tag{2.41}$$

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} = C_2, \tag{2.42}$$

$$\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} = C_3, \tag{2.43}$$

non C_1, C_2 eta C_3 integrazio-konstanteak diren. Ekuazio hauen esanahia argia da, muturreko kurbarekiko tangentea den $\dot{\mathbf{r}}/\left|\dot{\mathbf{r}}\right|$ bektore unitarioa konstantea da eta, ondorioz, muturrekoa zuzena. Izan ere, $\alpha \equiv C_2/C_1$ eta $\beta \equiv C_3/C_1$ definizioekin

$$\dot{y} = \alpha\dot{x}, \qquad \dot{z} = \beta\dot{x}, \tag{2.44}$$

dugu eta, x_0, y_0 eta z_0 integrazio-konstanteak erabiliz,

$$y - y_0 = \alpha\left(x - x_0\right), \qquad z - z_0 = \beta\left(x - x_0\right). \tag{2.45}$$

Distantziarik laburrena, beraz, bi puntuak lotzen dituen lerro zuzenean barrena lortzen da:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \alpha, \qquad \frac{z - z_0}{x - x_0} = \beta. \tag{2.46}$$

2.6 Hamiltonen printzipioa

Gogora dezagun nola egin daitekeen mekanika analitikoa guztiz desberdina den beste abiapuntu batetik. Ikuspuntu hau, behar bezala egokitu ondoren, oso emankorra izaten da fisika modernoan eremuen teoriak eraikitzean.

2.6.1 Ekintza minimoaren printzipioa

Ekintza kalkulatzeko, $\mathcal{Q}$ konfigurazio-espazioko bi puntu lotzen dituen edozein kurba izan daiteke integrazio-bidea: loturak bete egingo dira, baina ez beti higidura-ekuazioak. Integrazio-bidea aldatzean ekintza bera ere aldatuko da eta minimoa izateko bete behar den baldintza beharrezkoa ekintza egonkorra izatea da, 2.5 atalean azaldu denez. Baina azken baldintza hori lehen motako Lagrangeren ekuazioen baliokidea dela frogatu da 2.5 atalean. Beraz, mekanikaren oinarrizko printzipiotzat har dezakegun Hamiltonen printzipioa frogatu dugu:

Eman dezagun sistema mekaniko batean lotura guztiak holonomoak eta idealak direla eta indar eragileak kontserbatzaileak (edo potentzial orokortu batetik lortzen direnak). Bi konfigurazio ezagun lotzen dituzten ibilbide guztien artean, higidurari dagokiona muturrekoa da, hau da, ekintza egonkorra izateko aukeratu behar dena:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\left[t, q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \ldots, \dot{q}_n(t)\right] \, dt = 0. \tag{2.47}$$

Kasu interesgarri gehienetan (bi konfigurazioak behar bezain hurbil badaude, adibidez) higidurari dagokion $\mathcal{Q}$ konfigurazio-espazioko ibilbidean ekintza minimoa bada ere, zela-puntu bat izatea ere gerta daiteke[2]. Baina hemen ez gara horrelako ñabardurez arduratuko.

Printzipio honen garrantzia teorikoa da, gaur eguneko fisikan ere hainbat fenomenoren deskribapenaren funtsezko abiapuntutzat hartzen baita. Baina praktikan, higidura-ekuazioak idazteko, ikuspuntu matematikotik baliokideak diren Euler eta Lagrangeren (2.36) ekuazioak, hau da, lehen motako Lagrangeren (1.96) ekuazioak erabiltzen dira.

2.7 Loturadun muturrekoak

(2.34)-tik Euler eta Lagrangeren ekuazioak lortzeko q_i guztien aldaketa infinitesimalak elkarren independenteak direla suposatu dugu. Azter dezagun orain zer gertatzen den hori egia ez bada eta q_i aldagaien artean modu honetako m lotura independente bete behar badira:

$$g_l\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n\right) = 0, \qquad (l = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.48}$$

Beraz, aldaketa infinitesimalen artean

$$\delta g_l\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_l}{\partial q_i} \delta q_i = 0, \qquad (l = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.49}$$

erlazioak bete behar direnez, aldaketa infinitesimalak ezin dira aukeratu nahi den moduan.

2.7.1 Lagrangeren biderkatzaileak

λ_l biderkatzaile konstanteak erabiltzen baditugu, hasierako L funtzioak eta

$$\tilde{L} = L + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \, g_l\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n\right) \tag{2.50}$$

aldatuak muturreko berdinak dituzte, (2.48) baldintzen ondorioz. Beraz, muturrekoak aurkitzeko,

$$\begin{aligned} \delta \tilde{I} = \delta \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L} \, dt &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] dt = 0 \end{aligned} \tag{2.51}$$

[2] Ikus, adibidez, [25] artikulua.

ebatzi behar da. δq_i aldaketen arteko $n-m$ bakarrik hauta ditzakegu nahi dugun moduan, baina orain λ_k biderkatzaileak ere aukeran daude. Beraz, denetara hautazko n magnitude daudenez, (2.51) baturako n batugaiak zero izateko eska dezakegu. Baldintza hauek eta (2.48) direlakoak erabiliz, muturrekoek

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.52}$$

$$g_l\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n\right) = 0, \qquad (l = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.53}$$

edo

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.54}$$

$$g_l\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n\right) = 0, \qquad (l = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.55}$$

sistema baliokidea bete behar dute.

2.7.2 Geodesikoak

Kontsidera dezagun $\mathbb{R}^3$ espazioan ondoko ekuazioak definitzen duen gainazala:

$$\Phi(x, y, z) = 0. \tag{2.56}$$

Gainazalean dagoen kurba bat noiz den geodesikoa, hau da, (2.37) luzera noiz den minimoa (edo maximoa) jakiteko, $\delta(s + \lambda\Phi) = 0$ baldintza aztertu behar da, (2.56) loturarekin batera. Horretarako, $s = \int \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2}\, dt = \int |\dot{\mathbf{r}}|\, dt$ dela erabiliz, (2.54) ekuazioak bete behar dira:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\, |\dot{\mathbf{r}}|}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - \frac{\partial\, |\dot{\mathbf{r}}|}{\partial \mathbf{r}} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}}. \tag{2.57}$$

Baina, kurbaren bektore unitario tangentea, kurbadura-erradioa, eta bektore unitario normala

$$\hat{\mathbf{e}}_{\mathrm{t}} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \frac{\partial\, |\dot{\mathbf{r}}|}{\partial \dot{\mathbf{r}}}, \tag{2.58}$$

$$\rho = \left| \frac{d\hat{\mathbf{e}}_{\mathrm{t}}}{ds} \right|^{-1}, \tag{2.59}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{\mathrm{n}} = \rho \frac{d\hat{\mathbf{e}}_{\mathrm{t}}}{ds} = \frac{\rho}{\dot{s}} \frac{d\hat{\mathbf{e}}_{\mathrm{t}}}{dt} = \frac{\rho}{\dot{s}} \frac{d}{dt} \frac{\partial\, |\dot{\mathbf{r}}|}{\partial \dot{\mathbf{r}}}, \tag{2.60}$$

dira. Gainera, $|\dot{\mathbf{r}}|$ ez da $\mathbf{r}$-ren menpekoa. Ondorioz, geodesikoak, (2.56) ekuazioaz gain, bete behar duen baldintza, hauxe da:

$$\frac{|\dot{\mathbf{r}}|}{\rho}\, \hat{\mathbf{e}}_{\mathrm{n}} = \lambda \nabla \Phi. \tag{2.61}$$

$\nabla\Phi$ bektorea gainazalarekiko normala denez, *geodesikoaren normal nagusia gainazalarekiko perpendikularra da.* Erraz ikusten da propietate hau betetzen dela gainazal esferiko bateko geodesikoak diren zirkunferentziak maximoetan: normala erradiala da. Paralelo baten kasuan, ordea, normal nagusia paraleloaren planoan dago eta ez da erradiala (paraleloa ez bada ekuatorea).

2.8 Lotura-indarrak eta Lagrangeren biderkatzaileak

Mekanika analitikoaren abantailen artean, lotura-indarrak desagertzea dago; baina, noizean behin, horiek ere kalkulatu nahi (edo behar) ditugu. Adibidez, lotura-indarra noiz egiten den zero kalkulatu behar da lotura ez-holonomoak dituzten zenbait sistema mekaniko aztertzeko (ikus, adibidez, 2.14 problema).

Hauxe da lotura-indarrak kalkulatzeko egin behar den oinarrizko hipotesia: koordenatu orokortu independenteak aukeratzean ez ditugula lotura-ekuazio guztiak erabili. Beraz, gure sistemaren konfigurazioak adierazteko aukeratu ditugun q_i koordenatu orokortuak independenteak izan beharrean, era honetako m lotura-ekuazio independente betetzen dituztela suposatuko dugu:

$$g_l\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n\right) = 0, \qquad (l = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.62}$$

Hamiltonen printzipioaren arabera higidura-ekuazioak hurrengoaren baliokideak dira:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0. \tag{2.63}$$

Baina, orain, δq_i guztiak independenteak ez direnez, 2.7 atalean azaltzen den Lagrangeren biderkatzaileen metodoa erabili behar da. Beraz,

$$\tilde{L} = L + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l\, g_l\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n\right) \tag{2.64}$$

lagrangear aldatua erabiliz, ekintza egonkorra izateko bete behar diren baldintzak,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.65}$$

$$g_l\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n\right) = 0, \qquad (l = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.66}$$

edota

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.67}$$

$$g_l\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n\right) = 0, \qquad (l = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.68}$$

moduan idatzi behar dira.

Ikus dezagun nola aplika daitekeen metodo hau pendulu matematikoaren kasuan. Koordenatu esferikoetan, $\varphi = 0$ lotura erabiliz, koordenatu orokortutzat r eta θ aukeratzen baditugu, lagrangearra

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2\right) + mgr\cos\theta \tag{2.69}$$

da eta $r = l$ lotura-ekuazioa (hau da, $g_1 \equiv r - l = 0$) betetzen denez, ebatzi behar diren ekuazioak honako hauek dira:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - g\cos\theta\right) \qquad = \lambda \frac{\partial g_1}{\partial r} = \lambda, \tag{2.70}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = m\left(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} + gr\sin\theta\right) = \lambda \frac{\partial g_1}{\partial \theta} = 0, \tag{2.71}$$

$$r = l. \tag{2.72}$$

Azken ekuazioa aurreko bietan ordezkatuz,

$$-ml\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta = \lambda, \tag{2.73}$$

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0. \tag{2.74}$$

Bigarren adierazpena (1.62) higidura-ekuazioa da eta lehenengoa λ biderkatzailearen balioa.

2.8.1 Lotura-indar orokortuak

Lagrangeren biderkatzaileen esangura fisikoa aztertzeko, idatz dezagun lagrangearra $L = T - V$ (edo $L = T - U$) moduan eta, 1.5 ataleko kalkulua deseginez, (2.67)–(2.68) ekuazioak

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.75}$$

$$g_l\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n\right) = 0, \qquad (l = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.76}$$

eran, indar eragileei dagozkien indar orokortuen bidez:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = \begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial q_i}, \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial U}{\partial q_i}. \end{cases} \tag{2.77}$$

Ageri denez, (2.75) ekuazioak bigarren motako Lagrangeren (1.59) ekuazioen egitura dute eta, ondorioz, $\sum_{l=1}^{m} \lambda_l \, \partial g_l / \partial q_i$ gaia indar orokortutzat ulertu behar da, problema baliokideen kontzeptu emankorraz baliatuz ikusiko dugun bezala. Eman dezagun, (2.76) loturak kentzen ditugula, baina jatorrizko kasuko lotura-indarren berdinak diren $\mathbf{N}_k$ indar eragileak gehitzen ditugula. Argi dago bi problemak guztiz baliokideak izango direla. Adibidez, pendulu matematikoaren kasuan soka (eta $r = l$ lotura) kendu ondoren, jatorrizko probleman sokak eragindako $\mathbf{N}$ indarraren berdina den indar eragile bat (konputagailuz kontrolaturiko suziri txiki batek eragindakoa edo) sartzen dugu problema baliokidean. Bi kasuetan m masa modu berean higituko da (berdin baita zein den 1.2 irudiko gorputz askearen diagramako N indarraren jatorria, sokak edo suziriak). Problema berriaren higidura-ekuazioak bigarren motako Lagrangeren (2.75) ekuazioen antzekoak izango dira, baina orain indar orokortuetan bi ekarpen egongo dira: jatorrizko problemako indar eragileen (2.77) adierazpenetako Q_i indar orokortuak eta hango lotura-indarren berdinak diren $\mathbf{N}_k$ indar eragile berriei dagozkienak:

$$Q_i^{(L)} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{N}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}. \tag{2.78}$$

Higidura-ekuazioak, beraz, hauexek dira:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + Q_i^{(L)}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.79}$$

(2.75) eta (2.79) baliokideak direnez, argi dago jatorrizko problemaren $\mathbf{N}_k$ lotura indarrei dagozkien indar orokortuak direla (2.67) ekuazioetako eskuineko gaiak:

$$Q_i^{(L)} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{N}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_i}. \tag{2.80}$$

Ondorioz, Lagrangeren biderkatzaileak kalkulatu ondoren, lotura-indar orokortuak zuzenean ezagutzen ditugu.

Adibidez, pendulu matematikoaren kasuan lotura-indar orokortuak (2.73)–(2.74) ekuazioetako eskuineko gaiak dira:

$$Q_r^{(L)} = \mathbf{N} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad = \lambda, \tag{2.81}$$

$$Q_\theta^{(L)} = \mathbf{N} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r\mathbf{N} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = 0. \tag{2.82}$$

Beraz, sokak eragindako ukipen-indarra denez, lotura-indarra erradiala da ($N_\theta = 0$) eta bere osagai erradiala $N_r = \lambda = -(ml\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta)$.

2.8.2 Estatika analitikoa

Estatika analitikoan ere erabil daiteke Lagrangeren biderkatzaileen metodoa lotura-indarrak kalkulatzeko. (2.62) loturak kentzen badira, oreka-baldintzak (2.75)–(2.76) higidura-ekuazioetan $T = 0$ eginez lortzen dira:

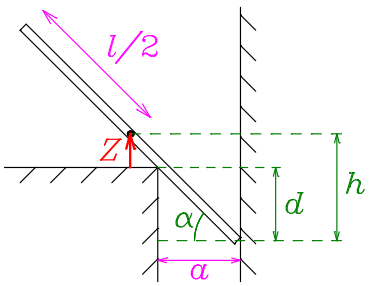
$$Q_i + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.83}$$

$$g_l\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n\right) = 0, \qquad (l = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.84}$$

Hemendik oreka-konfigurazioa(k) eta λ_l biderkatzaileak kalkulatu ondoren, lotura-indar orokortuak (2.80) dira. Jakina, indar eragileak kontserbatzaileak badira, oreka-ekuazioak honako hauek dira, (1.83) erlazioen ondorioz:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.85}$$

$$g_l\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n\right) = 0, \qquad (l = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.86}$$



2.6 IRUDIA Hagatxoaren oreka.

Adibide moduan kontsidera dezagun 2.6 irudiko hagatxo homogeneoaren oreka. Koordenatu orokortutzat α angelua eta mahaiaren ertzetik neurturiko masa-zentroaren X eta Z koordenatuak aukeratzen baditugu, $V = mgZ$ dugu eta bi lotura-ekuazio geratzen zaizkigu:

$$g_1 = X + \frac{l}{2}\cos\alpha - a = 0, \tag{2.87}$$

$$g_2 = Z - \frac{l}{2}\sin\alpha + a\tan\alpha = 0. \tag{2.88}$$

(2.85) ekuazioak, beraz, hauexek dira:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0 \quad = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial X} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial X} = \lambda_1, \tag{2.89}$$

$$\frac{\partial V}{\partial Z} = mg = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial Z} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial Z} = \lambda_2, \tag{2.90}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0 \quad = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial \alpha} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} = \lambda_1 \left(-\frac{l}{2} \sin\alpha \right) + \lambda_2 \left(-\frac{l}{2} \cos\alpha + \frac{a}{\cos^2\alpha} \right). \tag{2.91}$$

Beraz, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = mg$ eta ondoko oreka-baldintza lortzen dira:

$$\alpha = \arccos \sqrt[3]{\frac{2a}{l}}. \tag{2.92}$$

Lotura-indar orokortuak, (2.89)–(2.91) ekuazioetako azken gaiak dira:

$$Q_X^{(L)} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{N}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial X} = \left(\sum_{k=1}^{N} \mathbf{N}_k \right) \cdot \mathbf{i} \qquad = 0, \tag{2.93}$$

$$Q_Z^{(L)} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{N}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial Z} = \left(\sum_{k=1}^{N} \mathbf{N}_k \right) \cdot \mathbf{k} \qquad = mg, \tag{2.94}$$

$$Q_\alpha^{(L)} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{N}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \alpha} = \left(\sum_{k=1}^{N} \mathbf{r}_k^* \times \mathbf{N}_k \right) \cdot \mathbf{j} = mg \left(-\frac{l}{2} \cos\alpha + \frac{a}{\cos^2\alpha} \right) = 0. \tag{2.95}$$

Hasierako bi adierazpenek hagatxoaren gainean eragiten duen indar osoa zero dela baieztatzen dute:

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbf{N}_k - mg\mathbf{k} = 0. \tag{2.96}$$

Masa-zentroarekiko lotura-indarren momentuaren y osagaia zero dela dio hirugarrenak (masa--zentrotik neurtutako posizio-bektorea da $\mathbf{r}_k^*$ bakoitza). Informazio gehiago erabili behar da (edo lotura gehiago kendu behar dira) lotura-indar bakoitzaren balioa aurkitzeko.

2.2 ARIKETA Erabili lotura-indarrak bi puntutan aplikatzen direla eta loturak idealak direla — eta, beraz, $\mathbf{N}_1$ hagatxoarekiko perpendikularra eta $\mathbf{N}_2$ horizontala— $\mathbf{N}_1$ eta $\mathbf{N}_2$ kalkulatzeko. Egiaztatu (2.95) baldintzak masa-zentroarekiko lotura-indarren momentua zero dela adierazten duela.

2.9 Problemak

2.1 ***Gauge* aldaezintasuna**. Erabili Hamiltonen printzipioa 1.8 ataleko emaitza berriro frogatzeko.

2.2 Aurkitu nolakoak diren gainazal zilindriko bateko geodesikoak.

2.3* **Brakistokronoa**. Partikula puntual bat burdinazko hari leun batean barrena higitzen da grabitatearen eraginpean, bi puntu finkoren artean. Pausagunetik askatzen bada, nolakoa izan behar du hariaren formak, bidea egiteko behar den denbora minimoa izateko?
Iradokizuna: Suposatu hariaren forma $y = f(x)$ ekuazioak emandakoa dela. Erabili energia mekanikoaren kontserbazio-printzipioa abiadura kalkulatzeko. Adierazi integral baten moduan bidea egiteko behar den denbora eta balia zaitez aldakuntzen kalkuluaz denboraren minimoa aurkitzeko.

2.4* Loturak eragindakoa da gainazal esferiko batean higi daitekeen partikula puntual batek pairatzen duen indar bakarra. Kalkulatu bi punturen arteko soluzio fisikoari dagokion I_0 ekintza eta frogatu esplizituki balio hori dela bi puntuak lotzen dituzten kurba guztietan barrena kalkulatutako ekintzen minimo absolutua.
Iradokizuna: Aukeratu koordenatu polar esferikoak modu egokian.

2.5 **Hamiltonen printzipio orokortua**. Problema batzuetan ondoko erako Hamiltonen printzipioa erabiltzen da, lagrangearra azelerazio orokortuen menpekoa baita:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\left(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}\right) = 0.$$

Egin berriro 2.5 ataleko kalkulua orain higidura-ekuazioak ondokoak direla frogatzeko:

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

2.6 Aplikatu 2.5 problema emaitza ondoko lagrangearrari:

$$L = \frac{1}{2} m x \ddot{x} + \frac{1}{2} k x^2.$$

Nolako sistema deskribatzen du?

2.7 Azter dezagun nola aldatzen den (2.29) ekintza, *soluzio fisiko batean*, integralaren muturrak aldatzen direnean. Froga ezazu Lagrangeren ekuazioak betetzen dituzten $\mathbf{q}(t)$ funtzioak ordezkatzen badira ekintzan eta honetan $t_i \longrightarrow t_i + \delta t_i$ moduan aldatzen badira muturrak, honela aldatzen dela ekintza:

$$\delta I = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i\, \delta q_i - H\, \delta t\right]_1^2,$$

non geroago aztertuko dugun hamiltondarra erabili dugun:

$$H \equiv \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L.$$

Oharra. Emaitza nagusian agertzen den goiko muturraren aldaketan bi ekarpen daude:

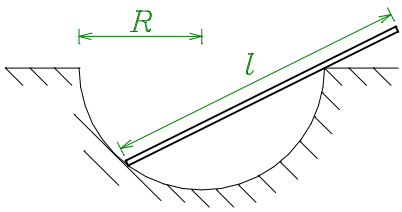
$$\delta\left[q_i\left(t_2\right)\right] = \delta q_i\left(t_2\right) + \dot{q}_i\left(t_2\right)\,\delta t_2.$$

(Jakina, antzeko gauza bat gertatzen da beheko muturran.)

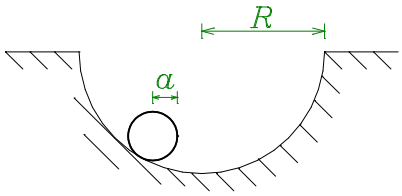
2.8 Bi puntu finkoren arteko distantzia d da eta soka tenkatu baten bidez lotu dira. Bigarren sokaren luzera $L_0 \geq d$ da. Nola jarri behar da azken hau aipaturiko puntuen artean, bi sokek definitutako azalera maximoa izateko?

- Aukeratu triedro egokiena kalkuluak egiteko.
- Idatzi problema aldakuntza-problema baten moduan (ez da orain arte ikusitakoen berdina, baina bai antzekoa).
- Ebatzi problema, ekuazio traszendente baten soluzioaren funtzioan.
- Ebatzi aipaturiko ekuazioa zenbait kasu partikularretan, L_0/d zatiduraren balio egokiak aukeratuz.
- Zein da Lagrangeren biderkatzailearen esanahia?
- Zein da analisiak emandako azalera minimoa? Zergatik?

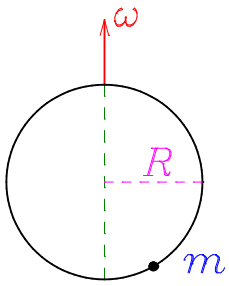
2.9* Irudiko hagatxoa orekan dago hemisferio leun batean. Kalkulatu lotura-indarrak, Lagrangeren biderkatzaileen metodoaren bidez. Eztabaidatu lortzen dituzun ekuazioen esanahia.



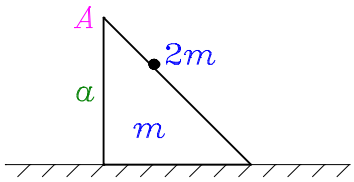
2.10 Irudiko esfera gainazal hemisferiko batean ari da higitzen labainketarik gabe. Kalkulatu higidura lauaren ekuazioa(k), lotura-indarrak eta oszilazio txikien maiztasuna.



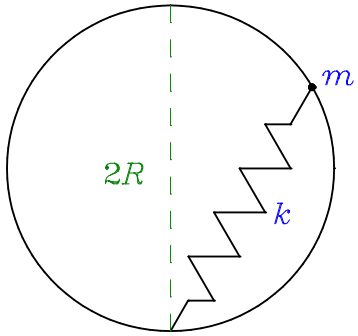
2.11 Irudiko zirkunferentzia ω abiadura angeluar konstantez ari da biratzen bere diametro bertikalaren inguruan. Demagun partikula puntual bat zirkunferentzian zehar higi daitekeela marruskadurarik gabe. Aurki bedi dagokion higidura-ekuazioa. Konstantea al da partikularen energia? Zein puntutan egon daiteke oreka erlatiboan? Egonkorra al da aipaturiko oreka? Zein da oreka erlatibo egonkorreko puntuen inguruko oszilazio txikien maiztasuna? Kalkula itzazu lotura-indarrak.



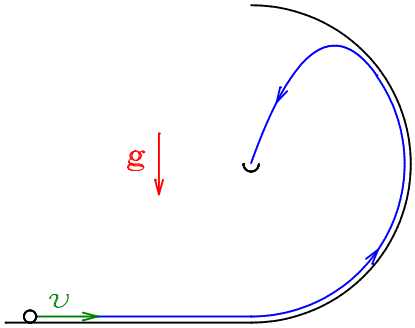
2.12 Irudiko prisma isoszelea gainazal leun horizontal batean zehar higi daiteke. Hasieran prisma eta partikula puntuala pausagunean daude eta partikula A puntuan. Marruskadura arbuiagarria bada, noiz iritsiko da partikula gainazal horizontalera? Aurkitu bi higidura-konstante. Kalkula itzazu lotura-indarrak.



2.13 Eraztun bertikal leun batean higitzen den partikula beheko puntuarekin loturik dago malguki baten bidez, irudian erakusten den bezala. Goiko puntutik abiadura arbuiagarriarekin askatzen bada, zein izango da partikularen abiadura behean? Erabili Lagrangeren biderkatzaileak, eraztunak partikularen gainean eragiten duen lotura indarra posizioaren menpean kalkulatzeko.
Oharra: Kalkuluak errazteko malgukiaren luzera propioa arbuiagarria dela suposa dezakezu.



2.14* Aurkitu zein den bolatxoari eman behar zaion v abiadura, irudiko billar bertikaleko zentroan dagoen zuloan sartzeko.
Oharra: Arbuiatu bolatxoaren erradioa eta marruskadura. Billarraren erradioa R da.



3. GAIA

Simetriak eta kontserbazio-legeak

3.1 IRUDIA Emmy Amalie Noether (1882, Erlangen, Alemania – 1935, Bryn Mawr, AEB). 1915ean argitaratu zuen gai honetan aztertuko dugun teorema.

Simetrien eta kontserbazio-legeen arteko erlazio sakona aztertuko da gai honetan. Hemen ikusiko duguna, behar den bezala orokortu eta egokitu ondoren, oso emankorra izaten da eremuen teoria modernoetan.

3.1 Momentu kanoniko konjugatuak

Dakigunez, q_i koordenatu orokortuari dagokion momentu kanoniko konjugatua honako hau da:

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{3.1}$$

(1.100) gogoratuz, pendulu matematikoaren momentu kanonikoa momentu angeluarra dela ikusten dugu:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}. \tag{3.2}$$

Horrexegatik momentu hauek, koordenatuak bezala, «orokortuak» dira: edonolakoak izan daitezke dimentsioen aldetik, baina $p_i q_i$ biderkaduraren dimentsioak ekintzarenak dira beti, $[p_i q_i] = [h]$.

3.1.1 Koordenatu ziklikoak eta kontserbazio-printzipioak

Momentu kanonikoen definizioarekin, Lagrangeren ekuazioak

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.3}$$

eran idazten dira. Bestalde, q_j koordenatu orokortua **ziklikoa** edo **ahanzgarria** dela esaten dugu lagrangearrean esplizituki agertzen ez bada:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \tag{3.4}$$

Definizio hau eta (3.2) erabiliz, kontserbazio-printzipio bat frogatu dugu:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot{p}_j = 0, \tag{3.5}$$

hau da, *koordenatu zikliko bati dagokion momentu kanoniko konjugatua higidura-konstantea da*. Emaitza honek simetrien eta kontserbazio-legeen arteko erlazio estua dagoela frogatzen du. Izan ere, koordenatu bat aldatzean lagrangearra ez dela aldatzen adierazten du koordenatua ziklikoa izateak: halako simetria bat dugu kasu horretan eta, ondorioz, dagokion kontserbazio-lege bat.

3.1 ARIKETA **Indar zentralak**.Aztertu koordenatu ziklikoei dagozkien kontserbazio-legeak indar zentralen menpeko higiduran.

Momentu linealaren eta angeluarraren kontserbazio-printzipioen orokorpenak gogoratu ditugu atal honetan. Energia mekanikoari dagokiona ikusteko, magnitude berri bat definitu beharko dugu.

3.2 Hamiltondarra

Sistema mekanikoaren hamiltondarra energiaren dimentsioak dituen hurrengo magnitudea da:

$$H \equiv \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \, p_i - L = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L. \tag{3.6}$$

3.2.1 Hamiltondarra eta energia mekanikoa

Hamiltondarra energia mekanikoaren berdina izateko baldintza nahikoak emango ditugu jarraian. Horretarako, sistema mekaniko bat **naturala** dela esango dugu (loturak holonomoak eta idealak izateaz gain)

1. indar eragileak kontserbatzaileak badira,

$$L = T - V\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n\right), \tag{3.7}$$

2. eta denbora ez bada esplizituki agertzen (1.33) transformazio-ekuazioetan (lotura guztiak egonkorrak direlako edo):

$$\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k\left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right), \qquad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{3.8}$$

Definizio honekin, hauxe dugu hamiltondarraren esangura: *sistema mekaniko naturalen hamiltondarra energia mekanikoa da*,

$$H = T + V. \tag{3.9}$$

Izan ere, (1.33) transformazio-ekuazioetan denbora esplizituki agertzen ez bada, energia zinetikoaren (1.49) adierazpenean bakarrik geratzen da forma koadratikoa:

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl} \, \dot{q}_j \dot{q}_l, \tag{3.10}$$

non forma koadratiko honen koefiziente simetrikoak (1.55) diren. Koefiziente hauek q_i koordenatu orokortuen menpekoak izan arren, $\dot{q}_i$ abiadura orokortuen independenteak dira eta, batuketa-indize mutuen izenak aldatuz eta $a_{ij} = a_{ji}$ simetria erabiliz,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} a_{il} \, \dot{q}_l + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \, \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, \dot{q}_j \tag{3.11}$$

lortzen dugu, eta hortik

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \, \dot{q}_i \dot{q}_j = 2T. \tag{3.12}$$

Funtzio homogeneoen Eulerren teorema ezagunaren kasu berezia den emaitza hau, hamiltondarraren (3.6) definizioa eta (3.7) erabiliz, teoremaren frogapena amaitzen dugu:

$$H = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - L = 2T - (T - V) = T + V = E. \tag{3.13}$$

Ondorioz, pendulu matematikoaren hamiltondarra honako hau da:

$$H = T + V = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - m g l \cos\theta. \tag{3.14}$$

3.2.2 Hamiltondarraren kontserbazio-printzipioa: Jacobiren integrala

Hamiltondarraren (3.6) definizioa denborarekiko deribatuz,

$$\begin{aligned}\dot{H} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\ddot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \left(\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Denborarekiko deribatu osoa higiduran zehar kalkulatzen denez, azken baturako parentesiak nuluak dira, Lagrangeren ekuazioen ondorioz. Hortaz, *higiduran zehar*

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{3.16}$$

betetzen dela frogatu dugu. (Deribatu osoen eta partzialen arteko desberdintasuna azpimarratzeko, ez dugu hemen erabili $\dot{H} = -\partial L/\partial t$ notazio baliokide laburra.)

Badakigu orain noiz kontserbatzen den hamiltondarra: *hamiltondarra higidura-konstantea da baldin eta soilik baldin denbora ez bada esplizituki agertzen lagrangearrean*. Hemen ere simetria baten eta higidura-konstante baten arteko erlazioa ikusten dugu: denbora ez bada esplizituki agertzen lagrangearrean, denbora-translazioekiko aldaezina da.

3.3 Transformazio-taldeak

Ikuspuntu pasibotik aztertu genituen (1.125) puntu-transformazioak 1.7 atalean. Honekin esan nahi dugu $(\tilde{q}_1, q_2, \ldots, \tilde{q}_n)$ eta $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ multzoek puntu bera adierazten dutela bi koordenatu-sistema desberdinetan. Badago, ordea, aipaturiko transformazioak **ikuspuntu aktibotik** ulertzea: koordenatu-sistema berean $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ puntutik $(\tilde{q}_1, q_2, \ldots, \tilde{q}_n)$ delakora joateko araua izan daitezke (1.125) puntu-transformazioak. Ikuspuntu hau ez da oso naturala koordenatu cartesiarretik polarretara joateko transformazioen kasuan, baina, adibidez, (1.133) transformazioa izan daiteke puntua aldatu gabe koordenatuen jatorria $-a\,\mathbf{i}$ puntura eramatea edo koordenatuak aldatu gabe $\mathcal{Q}$ konfigurazio-espazioko puntuei $a\,\mathbf{i}$ balioko translazioa aplikatzea. Era berean, ardatz cartesiarrei OZ ardatzaren inguruan $-\alpha$ balioko biraketa aplikatzea izan daitezke (1.137)–(1.138) transformazioak; baina ekuazio berdinak erabili behar dira koordenatuak aldatu gabe puntuek α balioko biraketa pairatzen badute.

Ikuspuntu aktiboan koordenatuak aldatzen ez direnez, lagrangearraren funtzio-egitura ez da aldatzen, baina bai bere balioa, $\mathcal{Q}$ konfigurazio-espazioko puntua aldatzen baita:

$$q_i \quad \rightarrow \quad \tilde{q}_i = f_i\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n\right), \tag{3.17}$$

$$L\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n\right) \quad \rightarrow \quad L\left(t, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_n, \dot{\tilde{q}}_1, \dot{\tilde{q}}_2, \ldots, \dot{\tilde{q}}_n\right). \tag{3.18}$$

Horrela, (1.135) lagrangear berriaren ordez, orain

$$L\left(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}\right) = \frac{1}{2}m\dot{\tilde{x}}^2 - V(\tilde{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x+a) \tag{3.19}$$

dugu eta (1.143)-ren ordez honako hau:

$$L\left(\tilde{r},\tilde{\varphi},\dot{\tilde{r}},\dot{\tilde{\varphi}}\right)=\frac{1}{2}m\left(\dot{\tilde{r}}^2+\tilde{r}^2\dot{\tilde{\varphi}}^2\right)-V(\tilde{r},\tilde{\varphi})=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right)-V(r,\varphi+\alpha). \tag{3.20}$$

Azken bi adibideetan transformazioak parametro baten menpekoak dira: a eta α edonolako konstanteak dira. Oro har, (1.125) transformazioak a parametro konstantearen menpekoak badira, notazio esplizituagoa erabil daiteke:

$$\tilde{q}_i=f_i\left(a;t,q_1,q_2,\ldots,q_n\right),\qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{3.21}$$

Eman dezagun parametroaren bi balioetako transformazioak hurrenez hurren aplikatzean hauxe dugula:

$$q_i \quad\rightarrow\quad \tilde{q}_i=f_i\left(a;t,q_1,q_2,\ldots,q_n\right), \tag{3.22}$$
$$\tilde{q}_i \quad\rightarrow\quad \tilde{\tilde{q}}_i=f_i\left(b;t,\tilde{q}_1,\tilde{q}_2,\ldots,\tilde{q}_n\right), \tag{3.23}$$
$$q_i \quad\rightarrow\quad \tilde{\tilde{q}}_i=f_i\left(c;t,q_1,q_2,\ldots,q_n\right). \tag{3.24}$$

Transformazioen konposizioan agertzen den c parametroa

$$c=\Phi(a,b) \tag{3.25}$$

moduan idazten bada eta Φ funtzioak parametroen espazioan definituriko konposizio-legeak talde baten propietateak betetzen baditu, parametro bakarreko transformazio-talde bat definitzen dute (3.21) adierazpenek. Horixe gertatzen da goian ikusitako translazioen eta biraketen kasuan, bietan Φ konposizio-legea batuketa baita, $\Phi(a,b)=a+b$, eta, ondorioz, transformazio-talde horiek abeldarrak dira.

3.3.1 Transformazio infinitesimalak

Ez dugu hemen astirik, transformazio-taldeen teoria emankorra aztertzeko. Nahikoa izango da aipatzea parametroaren δa balio infinitesimalekoak konposatuz lortzen dela (3.21) transformazio finitua. Eman dezagun $a=a_0$ denean identitate transformazioa lortzen dela:

$$f_i\left(a_0;t,q_1,q_2,\ldots,q_n\right)=q_i,\qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{3.26}$$

Orduan, honela adierazten da transformazio infinitesimal bat, Taylorren garapenaz baliatuz:

$$\tilde{q}_i=f_i\left(a_0+\delta a;t,q_1,q_2,\ldots,q_n\right),\qquad (i=1,2,\ldots,n), \tag{3.27}$$
$$\tilde{q}_i=q_i+\delta q_i,\qquad (i=1,2,\ldots,n), \tag{3.28}$$
$$\delta q_i=g_i\left(t,q_1,q_2,\ldots,q_n\right)\,\delta a,\qquad (i=1,2,\ldots,n), \tag{3.29}$$
$$g_i\equiv\left.\frac{\partial f_i}{\partial a}\right|_{a=a_0},\qquad (i=1,2,\ldots,n), \tag{3.30}$$
$$\dot{\tilde{q}}_i=\dot{q}_i+\delta\dot{q}_i,\qquad (i=1,2,\ldots,n), \tag{3.31}$$
$$\delta\dot{q}_i=\frac{d\delta q_i}{dt}=\dot{g}_i\,\delta a=\left(\frac{\partial g_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial q_j}\,\dot{q}_j\right)\,\delta a,\qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{3.32}$$

Adibidez, (1.133) translazioaren kasu infinitesimalean

$$\delta x = \delta a, \tag{3.33}$$

dugu eta (1.137)–(1.138) biraketarenean

$$\delta x = -y\,\delta\alpha, \tag{3.34}$$
$$\delta y = \quad x\,\delta\alpha. \tag{3.35}$$

3.4 Noetherren teorema

Kalkula dezagun nola aldatzen den lagrangearra (3.28)–(3.29) transformazio infinitesimalean:

$$L\left(t, \mathbf{q} + \delta\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \delta\dot{\mathbf{q}}\right) = L\left(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right) + \delta L\left(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right), \tag{3.36}$$
$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\, g_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, \dot{g}_i \right) \delta a. \tag{3.37}$$

3.4.1 Simetria-transformazioak

(3.28)–(3.29) ekuazioek emandakoa simetria-transformazioa dela esango dugu lagrangearraren aldaketa $\Omega\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n\right)$ funtzio baten deribatua bada:

$$\delta L = \dot{\Omega}\,\delta a = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i}\, \dot{q}_i \right) \delta a. \tag{3.38}$$

1.8 ataleko gauge aldaezintasuna gogoratuz, argi dago simetria-transformazio batek ez dituela aldatzen higidura-ekuazioak (eta hauen soluzioak).

Adibide moduan, kontsidera dezagun $\mathbf{E} = E\,\mathbf{i}$ eremu elektrostatiko uniforme konstantearen eraginpean OX ardatzean barrena higitzen ari den q karga:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + qEx. \tag{3.39}$$

$x \longrightarrow x + \delta a$ translazioan, honela aldatzen da lagrangearra:

$$\delta L = qE\,\delta a. \tag{3.40}$$

Hortaz, aipaturiko translazioa simetria-transformazioa da, ondoko funtzioari dagokiona:

$$\Omega(t) = qEt. \tag{3.41}$$

Simetria-transformazioan $\Omega = 0$ aukera daitekeenean, **aldaezintasun-transformazioa** dela esango dugu, kasu horretan, Lagrangearra bera ere ez baita aldatzen. Jakina, horrelakoak dira aldagai zikliko bat aldatzen dutenak:

$$\delta q_i = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ \delta a, & i = j; \end{cases} \qquad \text{baldin} \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \tag{3.42}$$

3.1 TEOREMA (Noether) *(3.29) transformazioa simetria bat bada, ondoko magnitudea higidura-konstantea da:*

$$G \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} g_i - \Omega \left(\propto \sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta q_i - \delta \int L \, dt \right). \tag{3.43}$$

(3.37) aldaketa (3.38) baldintzan ordezkatu ondoren zatikako integrazioa eginez, hauxe dugu:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} g_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{g}_i \right) - \dot{\Omega} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} g_i - \Omega \right) - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) g_i. \tag{3.44}$$

Lagrangeren ekuazioen ondorioz higiduran azken parentesiak zero dira eta, hortaz, $\dot{G} = 0$.

Adibidez, (3.42) translazio orokortuari $G = p_j$ momentu kanonikoa dagokionez, koordenatu zikliko bati dagokion momentu kanoniko konjugatuaren kontserbazioa berreskuratzen dugu kasu berezi horretan.

Bestalde, (3.39) lagrangearraren kasuan (3.41) dugu eta dagokion higidura-konstantea hauxe:

$$G = m\dot{x} - qEt. \tag{3.45}$$

Momentu linealaren eboluzioa adierazten du honek, $t = t_0$ unean $\dot{x} = \dot{x}_0$ bada, hauxe baitugu:

$$m\dot{x} = m\dot{x}_0 + qE\,(t - t_0)\,. \tag{3.46}$$

3.4.2 Simetria orokortuak

Interpretazio geometrikoa hain argia ez bada ere, abiaduren menpekoak diren transformazioen kasura heda daiteke Noetherren teorema, frogapena aldatu gabe.

3.2 TEOREMA *Eman dezagun*

$$\delta q_i = g_i\,(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)\ \delta a, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.47}$$

$$\delta \dot{q}_i = \dot{g}_i\, \delta a, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.48}$$

transformazioa aplikatzean lagrangearraren aldaketa

$$\delta L \equiv L\,(t, \mathbf{q} + \delta\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \delta\dot{\mathbf{q}}) - L\,(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\Omega}\, \delta a \tag{3.49}$$

moduan idazten dela, $\Omega\,(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$ *funtzio egoki batekin*[1]*. Orduan, higidura--konstantea da (3.43) magnitudea.*

Adibide moduan, azter dezagun nola lor daitekeen Jacobiren integrala. Kontsidera dezagun higidurak berak sorturiko denbora-translazio inplizitua[2]:

$$\delta q_i = \dot{q}_i\, \delta a, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.50}$$

Denbora ez bada esplizituki agertzen lagrangearrean, $\partial L/\partial t = 0$, simetria orokortua da hau:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) \delta a = \dot{L}\, \delta a. \tag{3.51}$$

Dagokion higidura-konstantea hamiltondarra da, horixe lortzen baita (3.43) magnitudean $\Omega = L$ eta $g_i = \dot{q}_i$ ordezkatzean.

[1] Ohar zaitez orain $\dot{\Omega} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right)$ dela, oro har.

[2] 3.13 probleman aztertzen da nola sartzen den formalismoan $t \to t + \delta t$ denbora-translazio esplizitua.

3.5 Partikula-sistemen kontserbazio-legeak

Kontsidera dezagun loturarik gabe higitzen diren N partikula puntualez osaturiko ondoko sistema:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2 - U\left(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \ldots, \dot{\mathbf{r}}_N\right). \tag{3.52}$$

3.5.1 Energia mekanikoaren kontserbazioa

$\partial U/\partial t = 0$ bada, une guztiak baliokideak dira lagrangearra idazteko: *denboraren homogeneotasun honi hamiltondarraren kontserbazio-legea dagokio*. Sistema, gainera, naturala bada, $U = V\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N\right)$, energia mekanikoa hamiltondarraren berdina eta higidura-konstantea da. (Ikus, gainera, 3.13 problema.)

3.5.2 Momentu linealaren kontserbazioa

Eman dezagun (3.52) lagrangearra ez dela aldatzen ondoko translazioan:

$$\delta x_k = \delta a, \quad \delta y_k = \delta z_k = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{3.53}$$

Argi dago energia zinetikoa horrelako translazioekiko aldaezina dela, abiadurak ez baitira aldatzen. Energia potentziala ere aldaezina izateko, nahikoa da, adibidez, (denboraren, abiaduren eta) $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ posizio erlatiboen menpeko hutsa izatea: $U\left(t, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3, \ldots, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \ldots, \dot{\mathbf{r}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{r}}_N\right)$. Momentu lineal osoaren orokorpenaren x osagaia da dagokion higidura-konstantea:

$$G = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{x}_k - \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_k} \equiv P_x. \tag{3.54}$$

Antzeko emaitza dugu y eta z norabideetan, noski. *Puntu guztiak baliokideak badira lagrangearra idazteko, hau da espazioa homogeneoa bada,*

$$\mathbf{P} \equiv \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\mathbf{r}}_k - \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}_k} \tag{3.55}$$

momentu lineal orokortua higidura-konstantea da. Ageri denez, higidura-konstante hau ohiko momentu lineala da energia potentziala ez bada abiaduren menpekoa.

3.5.3 Momentu angeluarraren kontserbazioa

Kontsidera dezagun OZ ardatzaren inguruko (3.34)–(3.35) biraketa infinitesimala:

$$\delta x_k = -y_k\,\delta\alpha, \quad \delta y_k = x_k\,\delta\alpha, \quad \delta z_k = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{3.56}$$

3.2 ARIKETA Egiaztatu zuzenean energia zinetikoa aldaezina dela, abiaduren moduluen menpeko hutsa baita.

Energia potentziala ere aldaezina izateko, nahikoa da, adibidez, distantzia eta abiadura eskalar erlatiboen menpeko hutsa izatea: $U\left(t, |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|, \ldots, |\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2|, |\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_3|, \ldots\right)$. Momentu angeluar osoaren orokorpenaren z osagaia da dagokion higidura-konstantea:

$$G = \sum_{k=1}^{N} m_k \left(x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k\right) - \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{y}_k} x_k - \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_k} y_k\right) \equiv L_z. \tag{3.57}$$

Antzeko emaitza dugu beste norabideetan, noski. *Norabide guztiak baliokideak badira lagrangearra idazteko, hau da, espazioa isotropoa bada,*

$$\mathbf{L} \equiv \sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{r}}_k - \sum_{k=1}^{N} \mathbf{r}_k \times \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{r}}_k} \tag{3.58}$$

momentu angeluar orokortua higidura-konstantea da.

3.5.4 Masa-zentroaren teorema

Azter dezagun orain arte erabili dugun erreferentzia-sistema inertzialean $\delta a\,\mathbf{i}$ abiaduraz higitzen den bigarren erreferentzia-sistema inertzial paralelora joateko Galileoren transformazioa:

$$\delta x_k = t\,\delta\alpha, \qquad \delta y_k = \delta z_k = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, N), \tag{3.59}$$

$$\delta \dot{x}_k = \delta\alpha, \qquad \delta \dot{y}_k = \delta \dot{z}_k = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{3.60}$$

Energia potentziala transformazio honekiko aldaezina izango da, adibidez, $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ posizio eta abiadura erlatiboen menpeko hutsa denean:

$$U\left(t, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3, \ldots, \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2, \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_3, \ldots\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \delta U = 0. \tag{3.61}$$

Energia zinetikoa, ordea, ez da aldaezina izango baina, Taylorren garapena erabiliz, hauxe dugu:

$$\delta L = \delta T = \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{x}_k\,\delta a = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k x_k\right)\delta a. \tag{3.62}$$

Ondorioz, (3.61) betetzen bada, Galileoren transformazioa simetria bat da —erlatibitatearen printzipioa dugu hemen!— eta dagokion (3.43) higidura-konstantea hauxe:

$$G = t\sum_{k=1}^{N} m_k \dot{x}_k - \sum_{k=1}^{N} m_k x_k = tP_x - MX, \tag{3.63}$$

non P_x delakoa $\mathbf{P}$ momentu lineal osoaren x osagaia den, $M = \sum_{k=1}^{N} m_k$ sistemaren masa osoa, $X = \mathbf{R}\cdot\mathbf{i}$ masa-zentroaren abszisa eta MX masa-momentuaren x osagaia. Beste ardatz cartesiarren norabideetan gauza bera eginez, hauxe ikusten dugu: *(3.61) egiturakoa bada energia potentziala, Galileoren transformazioak simetriak dira eta dagozkien higidura-konstanteak, masa-zentroaren* $\mathbf{R}$ *posizioaren higidura ematen duen ondoko bektorearen hiru osagai independenteak:*

$$\mathbf{G} = t\mathbf{P} - M\mathbf{R}. \tag{3.64}$$

Aurreko ataletan ikusitakoaren ondorioz, (3.52) lagrangearrean energia potentzial orokortua $U\left(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|,|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3|,\ldots,|\dot{\mathbf{r}}_1-\dot{\mathbf{r}}_2|,|\dot{\mathbf{r}}_1-\dot{\mathbf{r}}_3|,\ldots\right)$ egiturakoa bada, hamar higidura-konstante ditugu:

$$H=\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{r}}_k}\cdot\dot{\mathbf{r}}_k-L=T+U-\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial U}{\partial\dot{\mathbf{r}}_k}\cdot\dot{\mathbf{r}}_k, \tag{3.65}$$

$$\mathbf{P}=\sum_{k=1}^{N}m_k\dot{\mathbf{r}}_k-\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial U}{\partial\dot{x}_k}, \tag{3.66}$$

$$\mathbf{L}=\sum_{k=1}^{N}m_k\mathbf{r}_k\times\dot{\mathbf{r}}_k-\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial U}{\partial\dot{y}_k}x_k-\frac{\partial U}{\partial\dot{x}_k}y_k\right), \tag{3.67}$$

$$\mathbf{G}=t\mathbf{P}-M\mathbf{R}. \tag{3.68}$$

Gainera sistema naturala bada, $U=V\left(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|,|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3|,\ldots\right)$, hauexek dira hamar kontserbazio-legeak:

$$H=T+V,\qquad \mathbf{P}=\sum_{k=1}^{N}m_k\dot{\mathbf{r}}_k,\qquad \mathbf{L}=\sum_{k=1}^{N}m_k\mathbf{r}_k\times\dot{\mathbf{r}}_k,\qquad \mathbf{G}=t\mathbf{P}-M\mathbf{R}. \tag{3.69}$$

3.6 Problemak

3.1 Lerro zuzen batean barrena higitzen den partikula baten lagrangearra honako hau da:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2\right)e^{2\gamma t}.$$

(m, ω eta γ konstanteak positiboak dira.)
(a) Higidura-konstantea al da hamiltondarra? Zergatik?
(b) Erabili $q \equiv e^{\gamma t}x$ puntu-transformazioa, higidura-konstante bat aurkitzeko.
(c) Nolako sistema mekanikoari dagokio lagrangear hori?
Iruzkina egin emaitzei.

3.2 Kontsidera dezagun hurrengo lagrangearra:

$$L = \frac{1}{8}\,\alpha\frac{\dot{x}^2}{x}.$$

(α konstantea da.) Aurkitu koordenatu berria zikliko bihurtzen duen $q = q(t, x)$ puntu-transformazio egoki bat. Iruzkina egin emaitzari.

3.3 Erabili 3.2 probleman ikasitakoa ondoko lagrangearraren soluzio orokorra idazteko, ia kalkulurik egin gabe:

$$L = \frac{1}{8}\,\alpha\frac{\dot{x}^2}{x} - \frac{1}{2}\,\beta x.$$

(α eta β konstanteak dira.) Iruzkina egin emaitzari.

3.4 Momentu linealaren kontserbazioa. Froga ezazu nahikoa dela

$$Z = \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial U}{\partial x_k}$$

magnitudea zero izatea, 3.5 ataleko partikula-sistemaren (3.53) translazioa aldaezintasun-transformazioa izateko. Zer gertatzen da Z konbinazioa $\Lambda\left(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N\right)$ funtzio baten denborarekiko deribatu osoa denean?

3.5 Momentu angeluarraren kontserbazioa. 3.4 ildotik, aurkitu U energiak bete behar duen baldintza nahiko bat, 3.5 ataleko (3.56) biraketa (3.52) lagrangearraren simetria izateko.

3.6 Masa-zentroaren teorema. Aurkitu U energia potentzialak bete behar duen baldintza nahiko bat, 3.5 ataleko (3.59)–(3.60) transformazioa (3.52) lagrangearraren simetria izateko.

3.7 Indar zentralak. Partikula puntual bat indar-eremu zentral batean higitzen bada, honela idazten da lagrangearra indar-poloan zentratutako koordenatu polar esferikoetan:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) - V(r).$$

Aztertu 3.5 ataleko kontserbazio-printzipioen artean zeintzuk aplikatzen diren.

3.8 Bi gorputzen problema. Bi partikula puntualen masak m_1 eta m_2 dira eta bakoitzak pairatzen du besteak sorturiko indar zentrala. Idatzi sistemaren lagrangear osoa eta aztertu 3.5 ataleko kontserbazio-printzipioen artean zeintzuk aplikatzen diren.

3.9 ** **Keplerren problema**. Kontsidera dezagun Keplerren problema koordenatu cartesiarretan:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{k}{r}, \qquad r^2 = \mathbf{r}^2.$$

Froga ezazu ondoko transformazioa simetria orokortua dela:

$$\delta\mathbf{r} = m\left[2x\dot{\mathbf{r}} - \dot{x}\mathbf{r} - (\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})\,\mathbf{i}\right]\delta a.$$

Frogatu dagokion higidura-konstantea **Laplace, Runge eta Lenz-en bektorearen** A_x osagaia dela:

$$\mathbf{A} = \mathbf{p}\times\mathbf{L} - mk\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Erabili $\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}$ biderkadura orbitaren ekuazioa berreskurazteko. Zenbat higidura-konstante berri lortzen dira bektore honen bidez?

3.10 * Kontsidera dezagun berriro 1.8 problemako sistema. Frogatu ondoko hiru transformazioak simetriazkoak direla eta aurkitu dagozkien higidura-konstanteak:

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta a, & \delta y &= 0,\\ \delta x &= 0, & \delta y &= \delta a,\\ \delta x &= \beta\,\delta a, & \delta y &= \alpha\,\delta a. \end{aligned}$$

Zein da transformazio bakoitzaren eta dagokion higidura-konstantearen esangura? Aurkitu lau higidura-konstante funtzionalki independente. Zertarako erabil daitezke? Zure ustez, gauza bera egin daiteke problema askotan?

3.11 Aurkitu 1.9 problemako sistemaren bi higidura-konstante.

3.12 Noetherren teorema. Eman dezagun, koordenatu orokortuez gain, denbora ere aldatzen dela transformazio infinitesimal batean:

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= t + \delta t \quad = t + h(t,\mathbf{q})\,\delta a,\\ \tilde{q}_i &= q_i + \delta q_i = q_i + g_i(t,\mathbf{q})\,\delta a, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

Eman dezagun ekintza ez dela aldatzen transformazio honetan,

$$\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} L\left(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}\right)\, d\tilde{t} = \int_{t_1}^{t_2} L\left(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right)\, dt,$$

edo, orokorpen moduan, ondoko baldintza betetzeko moduko $\Omega(t,\mathbf{q})$ funtzio bat existitzen dela:

$$\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} L\left(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}\right)\, d\tilde{t} = \int_{t_1}^{t_2} \left[L\left(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right) + \dot{\Omega}\,\delta a\right] dt,$$

Froga ezazu transformazioa aplikatzean ez direla aldatzen higiduraren soluzioak (hau da, simetria-transformazioa dela) eta ondoko magnitudea higidura-konstantea dela:

$$G = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(g_i - h\dot{q}_i\right) + Lh - \Omega.$$

3.13 Denbora-translazioa. Kontsidera dezagun denbora-translazio esplizitu konstante bat:

$$\delta t = \delta a, \qquad \delta q_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Froga ezazu lagrangearra ez denean denboraren esplizituki menpekoa ($\partial L/\partial t = 0$), transformazio hau 3.12 probleman aztertutako simetria-transformazioetakoa dela. Zein da dagokion higidura-konstantea?

3.14 Partikula puntual bat loturarik gabe higitzen da bigarren mailako funtzio homogeneoa den energia potentzial batean:

$$V(a\mathbf{r}) = a^{-2}V(\mathbf{r}), \quad \forall a.$$

Erabili energia mekanikoaren kontserbazio-legea, Noetherren teoremaren bidez bigarren higidura-konstante bat aurkitzeko. Zer adierazten du kontserbazio-legeak, aipaturiko higidura-konstantearen deribatuan higidura-ekuazioak ordezkatzean?

4. GAIA

Formalismo hamiltondarra

4.1 IRUDIA Sir William Rowan Hamilton (1805, Dublin – 1865, Dublin).

Hamiltonen formalismo kanonikoari buruz [7] liburuan ikusitakoa berrikusteaz eta sakontzeaz gain, notazio erabilgarri bat sartuko dugu, kalkulu eta frogapen batzuk egiteko oso lagungarria izango dena.

4.1 Legendreren transformazioa

Gai honetan kontsideratu ditugun lagrangearrak beti izango dira **ez-singularrak**, hau da, abiadurekiko hesiarra ez da zero izango:

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right)_{i,j=1}^{n} \neq 0. \tag{4.1}$$

Baldintza hau, adibidez, beti beteko da energia potentziala ez bada abiadura orokortuen menpekoa, $V\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n\right)$ egiturak eta (1.49)–(1.56) emaitzek frogatzen duten bezala.

Lagrangeren (1.96) ekuazioetan oinarrizko aldagai independenteak t denbora, q_i koordenatu orokortuak eta $\dot{q}_i$ abiadura orokortuak dira. Bestalde, momentu kanonikoak aipaturiko aldagaien menpean adierazten dira (3.1) definizioan:

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n\right), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.2}$$

(4.1) baldintzaren ondorioz, n definizio hauetatik n abiadura orokortuak aska daitezke denboraren, koordenatu orokortuen eta momentu orokortuen funtzioan:

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n\right). \tag{4.3}$$

Hauxe da Legendreren transformazioa eta hemendik aurrera honetaz baliatuko gara magnitude fisiko guztiak, oinarrizko aldagai independente berriak diren denboraren, koordenatu orokortuen eta momentu orokortuen menpean idazteko. Adierazpenak arintzeko, lehenago ere egin dugunez, n dimentsioko espazio abstraktuetako $\mathbf{q} \equiv (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ eta $\mathbf{p} \equiv (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ bektore--notazio laburtua erabiliko dugu askotan. Honela idazten da aipaturiko transformazioa, beraz:

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}\left(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}\right). \tag{4.4}$$

Pendulu matematikoaren kasuan, (3.2) momentua erabiliz, hauxe dugu Legendreren transformazioa:

$$\dot{\theta} = \frac{p}{ml^2}. \tag{4.5}$$

4.1.1 Hamiltondarra

Hemendik aurrera hamiltondarra, (3.6) barik,

$$H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, \dot{q}_i(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) - L\left[t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})\right] \tag{4.6}$$

izango da, non $\dot{q}_i$ abiadura orokortuak Legendreren (4.3) transformazioa erabiliz ezabatu ditugun.

Honela idatziko dugu, beraz, pendulu matematikoaren (3.14) hamiltondarra gai honetan:

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta. \tag{4.7}$$

Kalkula ditzagun (4.6) hamiltondarraren deribatuak oinarrizko aldagai berri hauetan, momentuen (3.1) definizioa erabiliz:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} - \left[\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} \right] = -\frac{\partial L}{\partial t}, \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} - \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} \right] = -\frac{\partial L}{\partial q_j}, \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j} = \dot{q}_j(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}). \tag{4.10}$$

4.2 Hamiltonen ekuazio kanonikoak

Lagrangeren (3.3) ekuazioak honela idazten dira (4.9) deribatuaren bidez:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{4.11}$$

Baina n ekuazio hauek momentuen eboluzioa ematen digute, baina ez koordenatuena, honetarako (4.10) ekuazioak behar baitira. Hamiltonen formalismoan higidura-ekuazioak, Lagrangeren (1.96) ekuazioen baliokideak diren ekuazio kanonikoak, honela idazten dira:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.12}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.13}$$

Adibidez, honela idazten dira ekuazioa kanonikoak pendulu matematikoaren kasuan:

$$\dot{\theta} = \frac{p}{ml^2}, \qquad \dot{p} = -mgl \sin\theta. \tag{4.14}$$

4.1 ARIKETA **Loturarik gabeko partikula koordenatu cartesiarretan**. Frogatu (1.103) lagrangearretik lortutako hamiltondarra eta ekuazio kanonikoak hauexek direla:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}), \tag{4.15}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \tag{4.16}$$

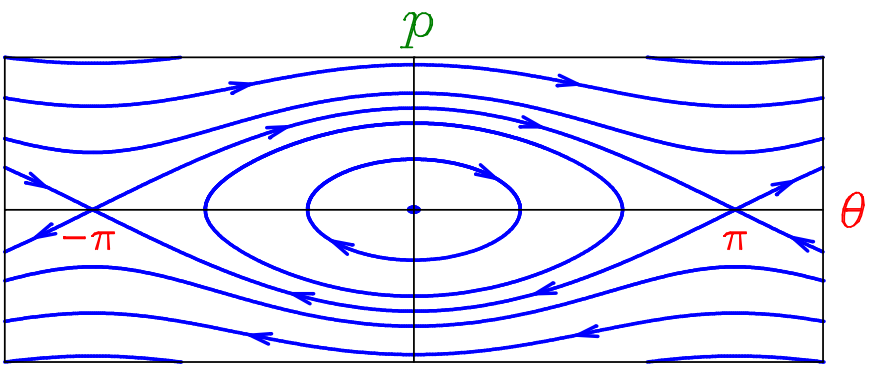
$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} = -\nabla V. \tag{4.17}$$

4.3 Fase-espazioa

Lagrangeren formalismoan (1.96) higidura-ekuazioak bigarren ordenako n ekuazio diferentzial arrunt dira. Aldagai independentea denbora da eta menpekoak n koordenatu orokortuak.

Ekuazio diferentzialak ebatziz gero, n koordenatu orokortuen eta n abiadura orokortuen hastapen-baldintzen multzo bakoitzeko soluzio bat dugu, q_i koordenatu orokortuek konfigurazio-espazioan duten eboluzioa ematen duena. Adibidez, pendulu matematikoaren $\theta(t)$ eboluzioa konfigurazio-espazioan kalkulatzeko, (1.101) ekuazioa ebatzi behar da hasierako θ angelua eta $\dot{\theta}$ abiadura angeluarra erabiliz.

Hamiltonen formalismoan (4.12)–(4.13) higidura-ekuazioak lehen ordenakoak dira, baina $2n$ denetara. Aldagai independentea denbora da eta menpekoak n koordenatuak eta n momentu orokortuak. Eboluzioa, beraz, fase-espazioa deritzon $(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ koordenatuen espazio abstraktuan gertatzen da. Hastapen-baldintzak, berriro ere, $2n$ dira: hasierako koordenatuak eta momentuak.



4.2 IRUDIA Pendulu matematikoaren fase-espazioa[1].

Adibidez, pendulu matematikoaren kasuan, (θ, p) fase-espazioan sistema adierazten duen puntuaren eboluzioa ematen dute ekuazio kanonikoek. 4.2 irudian erakusten dira fase-ibilbide batzuk.

(4.12) ekuazioak Legendreren transformazioak dira, $\dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ funtzioak ematen baitizkigute. Hortik, alderantzizko $\mathbf{p}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ funtzioak askatu ondoren (4.13) ekuazioetan ordezkatzen badira, Lagrangeren bigarren ordenako n ekuazio diferentzialak berreskuratzen dira, jakina.

4.3.1 Notazio laburtua

Fase-espazioaren aldagai guztiak batera adierazteko, ondoko notazioa erabiliko dugu:

$$s_i \equiv q_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.18}$$

$$s_{n+i} \equiv p_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.19}$$

Horrela puntu baten koordenatuak, $(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ edo $(s_1, s_2, \ldots, s_{2n})$ moduan adieraz daitezke.

Gainera,

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} \equiv \begin{cases} 1, & \beta = \alpha + n; \\ -1, & \alpha = \beta + n; \\ 0, & \text{bestela} \end{cases} \tag{4.20}$$

[1]Ikus `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/analitikoa/faseak.html` simulazioa.

indizeak erabiliz, honela definitzen da $2n \times 2n$ **matrize sinplektikoa**:

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\omega_{\alpha\beta}\right)_{\alpha,\beta=1}^{2n} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

Ageri denez, $\boldsymbol{\omega}$ matrizea antisimetrikoa, ortogonala, unimodularra eta alderanzgarria da:

$$\boldsymbol{\omega}^\top \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}^\top = -\boldsymbol{\omega}^2 = \mathbf{1}_{2n}, \tag{4.22}$$

$$\boldsymbol{\omega}^{-1} = \boldsymbol{\omega}^\top = -\boldsymbol{\omega}, \tag{4.23}$$

$$\det \boldsymbol{\omega} = \det \boldsymbol{\omega}^\top = \det \boldsymbol{\omega}^{-1} = 1. \tag{4.24}$$

(4.22) propietatearen osagaiak

$$\sum_{\alpha=1}^{2n} \omega_{\alpha\beta}\omega_{\alpha\gamma} = \sum_{\alpha=1}^{2n} \omega_{\beta\alpha}\omega_{\gamma\alpha} = \delta_{\beta\gamma}, \qquad (\beta, \gamma = 1, 2, \ldots, 2n) \tag{4.25}$$

moduan idazten dira esplizituki, identitatearen osagaiak diren Kroneckerren deltaren balioak erabiliz:

$$\delta_{\alpha\beta} \equiv \begin{cases} 1, & \alpha = \beta; \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{4.26}$$

Baina hemendik aurrera, 1-tik $2n$-ra doazen indize grekoekin **Einsteinen batuketa-hitzarmena**erabiliko dugu: *indize greko bat behin baino gehiagotan agertzen bada adierazpen batean, dagozkion $2n$ balioetarako batuketa egiten dela ulertu behar da*. Horrela, (4.25) ekuazioak honela idazten dira α-rekiko batuketa inplizituarekin:

$$\omega_{\alpha\beta}\omega_{\alpha\gamma} = \omega_{\beta\alpha}\omega_{\gamma\alpha} = \delta_{\beta\gamma}, \qquad (\beta, \gamma = 1, 2, \ldots, 2n). \tag{4.27}$$

4.3.2 Sistema dinamiko hamiltondarrak

Sistema hamiltondar batean, honela agertuko zaizkigu notazio laburrean Hamiltonen (4.12)–(4.13) ekuazio kanonikoak:

$$\dot{s}_\alpha = \omega_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial s_\beta}, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2n). \tag{4.28}$$

Alderantziz, eman dezagun $2n$ dimentsioko espazio batean ondoko **sistema dinamikoa** (hau da, lehen ordenako $2n$ ekuazio diferentzial arrunten sistema) dagoela definiturik:

$$\dot{s}_\alpha = S_\alpha\left(t, s_1, s_2, \ldots, s_{2n}\right), \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2n). \tag{4.29}$$

Argi dago (4.28) sistema hamiltondar guztiak direla (4.29) egiturakoak. Eta alderantziz? Noiz izango da hamiltondarra (4.29) sistema dinamikoa? Hau da, noiz existituko da

$$S_\alpha = \omega_{\alpha\beta}\frac{\partial H}{\partial s_\beta}, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2n) \tag{4.30}$$

baldintzak betetzen dituen $H\left(t, s_1, s_2, \ldots, s_{2n}\right)$ funtzio bat? (4.27) erabiliz, modu baliokide honetan idazten dira azken baldintzak:

$$\xi_\gamma \equiv S_\alpha \omega_{\alpha\gamma} = \frac{\partial H}{\partial s_\gamma}, \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, 2n). \tag{4.31}$$

A.2.3 ataleko Poincaréren lema gogoratuz, argi dago —azken hauek betetzeko eta— *(4.29) sistema dinamikoa hamiltondarra izateko bete behar diren baldintza beharrezko eta nahikoak hauexek direla:*

$$\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial s_\beta} = \frac{\partial \xi_\beta}{\partial s_\alpha}, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 2n). \tag{4.32}$$

Era baliokide honetan ere idazten dira baldintza horiek:

$$\omega_{\alpha\gamma}\frac{\partial S_\gamma}{\partial s_\beta} = \omega_{\beta\gamma}\frac{\partial S_\gamma}{\partial s_\alpha}, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 2n). \tag{4.33}$$

Baldintza hauek betetzen direnean, (4.30) adierazpeneko H hamiltondarra bakarra da, denboraren menpeko hautazko funtzio gehigarri bat izan ezik.

Adibidez, $n = 1$ bada,

$$\dot{s}_1 = s_1, \tag{4.34}$$

$$\dot{s}_2 = s_2 \tag{4.35}$$

ez da hamiltondarra, hauxe baitugu:

$$\omega_{1\gamma}\frac{\partial S_\gamma}{\partial s_2} = \frac{\partial S_2}{\partial s_2} = 1 \neq \omega_{2\gamma}\frac{\partial S_\gamma}{\partial s_1} = -\frac{\partial S_1}{\partial s_1} = -1. \tag{4.36}$$

4.4 Aldagai dinamikoak fase-espazioan

Hamiltonen formalismoan aldagai dinamikoa deritzo oinarrizko aldagaien edozein funtziori: $F(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = F\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n\right)$ Aldagai dinamikoen arteko kasu bereziak dira q_i koordenatu bakoitza, p_i momentuetako bat eta H hamiltondarra, besteak beste.

4.4.1 Koordenatu ziklikoak eta kontserbazio-printzipioak

Formalismo lagrangearrean koordenatu bat ziklikoa dela esaten da lagrangearrean esplizituki agertzen ez bada, baina, (4.9) erabiliz, argi dago koordenatua hamiltondarrean ez agertzea dela ziklikoa izateko baldintza beharrezkoa eta nahikoa:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0. \tag{4.37}$$

Horrelako kasuetan lagrangearrak eta hamiltondarrak duten simetria honi dagokion kontserbazio--printzipioa (3.2) ekuaziotik lortzen zen han eta horren ordezkoa den (4.13) ekuazioaren ondorio zuzena da hemen:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot{p}_j = 0. \tag{4.38}$$

4.4.2 Hamiltondarraren kontserbazio-printzipioa

Hamiltondarraren kontserbazio-legea ikusi baino lehenago, azter dezagun aldagai dinamiko baten eboluzio-ekuazioa:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial s_\alpha}\,\dot{s}_\alpha = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial s_\alpha}\,\omega_{\alpha\beta}\,\frac{\partial H}{\partial s_\beta}. \tag{4.39}$$

Adierazpen honetan $F = H$ egiten bada,

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{4.40}$$

lortzen dugu $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ antisimetriaren ondorioz eta, (4.8) gogoratuz:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{4.41}$$

Ondorioz, *hamiltondarra higidura-konstantea da baldin eta soilik baldin denboraren funtzio esplizitua ez bada edo, gauza bera dena, denbora ez bada esplizituki agertzen lagrangearrean*:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot{H} = 0. \tag{4.42}$$

Penduluaren kasuan hamiltondarra higidura-konstantea eta energia mekanikoaren berdina da:

$$H(\theta, p) = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta = E. \tag{4.43}$$

Kontserbazio-printzipio honek fase-espazioko θ eta p aldagaien arteko erlazio bat ematen duenez, 4.2 irudiko fase-orbiten (edo fase-ibilbideen) ekuazioa da. Oszilazio txikien kasuan osziladore harmonikoaren fase-orbitak elipseak direla ikusten dugu:

$$\frac{1}{2ml^2}\,p^2 + \frac{mgl}{2}\,\theta^2 \approx E + mgl. \tag{4.44}$$

Horixe bera ikusten da 4.2 irudiko jatorriaren inguruan.

4.5 Poissonen makoak

(4.39) ekuazioko azken gaian oinarritzen gara $F(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ eta $G(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ aldagai dinamikoen Poissonen makoa (edo parentesia[2]) definitzeko:

$$[F, G] \equiv \frac{\partial F}{\partial s_\alpha}\,\omega_{\alpha\beta}\,\frac{\partial G}{\partial s_\beta} \tag{4.45}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(F, G)}{\partial(q_i, p_i)}. \tag{4.46}$$

Ageri denez, antisimetrikoak dira Poissonen makoak,

$$[G, F] = -\,[F, G]\,, \tag{4.47}$$

$$[F, F] = 0, \tag{4.48}$$

[2]Liburu batzuetan, $[\cdot,\cdot]$ notazioaren ordez, $(\cdot,\cdot)$ edo $\{\cdot,\cdot\}$ erabiltzen da.

eta erraz egiaztatzen da ezkerretik eta eskuinetik linealak direla, hauxe baitugu a eta b konstanteak badira:

$$[F, aG + bK] = a\,[F, G] + b\,[F, K]\,, \tag{4.49}$$
$$[aF + bG, K] = a\,[F, K] + b\,[G, K]\,. \tag{4.50}$$

Bestalde, honela geratzen da Leibnizen erregela:

$$[F, GK] = [F, G]\,K + [F, K]\,G, \tag{4.51}$$
$$[FG, K] = F\,[G, K] + G\,[F, K]\,. \tag{4.52}$$

Garrantzi handikoa da 4.13 probleman frogatuko dugun **Jacobiren identitatea**:

$$\big[F, [G, K]\big] + \big[G, [K, F]\big] + \big[K, [F, G]\big] = 0. \tag{4.53}$$

$G = s_\alpha$ eginez,

$$[s_\alpha, F] = \omega_{\alpha\beta}\,\frac{\partial F}{\partial s_\beta}, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2n), \tag{4.54}$$
$$[q_i, F] = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.55}$$
$$[p_i, F] = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.56}$$

dugunez, honela geratzen dira **oinarrizko makoak**:

$$\big[s_\alpha, s_\beta\big] = \omega_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 2n), \tag{4.57}$$
$$\big[q_i, q_j\big] = 0, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.58}$$
$$\big[p_i, p_j\big] = 0, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.59}$$
$$\big[q_i, p_j\big] = \delta_{ij}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.60}$$

(Baliokide kuantikoak diren trukatzaileek ere propietate hauek betetzen dituzte, azken emaitzan $i\hbar$ bat sartzen bada Kroneckerren deltaren aurrean.)

4.5.1 Eboluzio-ekuazioak

Aldagai dinamiko baten (4.39) eboluzio-ekuazioa, honela idazten da, beraz,

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H]. \tag{4.61}$$

Adierazpen honetan $F = H$ egiten badugu, (4.48)-ren ondorioz (4.40) berreskuratzen dugu. Bestalde, $F = s_\alpha$ eginez, era baliokide honetan idazten dira Hamiltonen ekuazio kanonikoak:

$$\dot{s}_\alpha = [s_\alpha, H]\,, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2n), \tag{4.62}$$

edo, nahiago bada,

$$\dot{q}_i = [q_i, H]\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.63}$$
$$\dot{p}_i = [p_i, H]\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.64}$$

4.5.2 Higidura-konstanteak

Azken ekuazioan, p_i momentu kanonikoa higidura-konstantea izateko bete behar den baldintza, hamiltondarrarekin duen makoa zero izatea dela ikusten dugu:

$$\big[p_j, H\big] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{p}_j = 0. \tag{4.65}$$

Orokorki, F aldagaia higidura-konstantea izango da ondoko baldintza betetzen denean:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + [F, H] = 0. \tag{4.66}$$

Bereziki denboraren menpekotasun espliziturik gabeko $F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ aldagai dinamikoaren eboluzio--ekuazioa

$$\dot{F} = [F, H] \tag{4.67}$$

denez, *$F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ aldagaia higidura-konstantea izango da baldin eta soilik baldin hamiltondarrarekin duen makoa zero bada: $[F, H] = 0$.*

4.6 Liouvilleren teorema

Kalkuluak errazteko, eman dezagun sistema mekanikoak askatasun-gradu bakarra duela[3]; fase-espazioaren dimentsioa 2 izango da, beraz. Kasu berezi honetako fase-planoaren azaleraren (eta kasu orokorrean, fase-espazioaren hiperbolumenaren) eboluzioa aztertzeko, ikus dezagun nola aldatzen den higiduran zehar 4.3 irudiko $E(t)$ eremu bat[4]. Sistema bat t unean adierazten duen (q, p) puntua t' aldiunean $(q', p') \equiv (\phi(t'), \psi(t'))$ puntuan egongo da, baldin eta $\phi(t')$ eta $\psi(t')$ funtzioek sistemaren soluzio bat osatzen badute:

$$\dot{\phi}(t') = \frac{\partial H}{\partial p}\left[\phi(t'), \psi(t')\right], \qquad \dot{\psi}(t') = -\frac{\partial H}{\partial q}\left[\phi(t'), \psi(t')\right], \tag{4.68}$$

$$\phi(t) = q, \qquad \psi(t) = p. \tag{4.69}$$

t' aldiunean 4.3 irudiko $E(t)$ eremuko puntuak $E(t')$ delakoan egongo dira, eta azken honen azalera hurrengoa izango da:

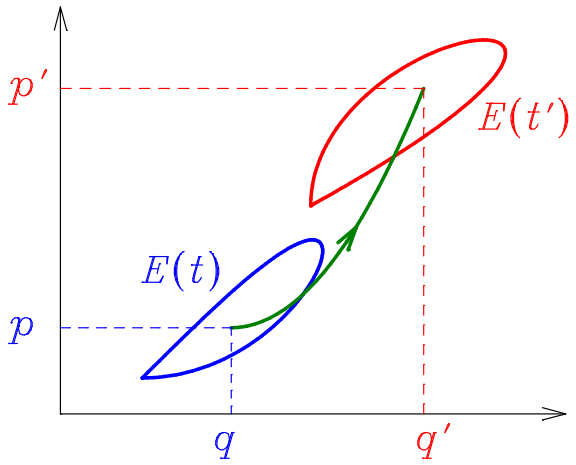
$$S(t') = \int_{E(t')} dq'\, dp' = \int_{E(t)} \frac{\partial\left(\phi(t'), \psi(t')\right)}{\partial(q, p)}\, dq\, dp. \tag{4.70}$$

Integrala (q, p) koordenatu konstanteen bidez adierazteko, aldagai-aldaketa egokia egin dugu bigarren integralean; horrela, t' aldagaiarekiko menpekotasuna integrazio-eremutik integrakizunera igarotzen da eta bertan errazago deribatzen da, azaleraren aldaketa kalkulatzeko:

$$\frac{dS}{dt} = \left.\frac{dS(t')}{dt'}\right|_{t'=t} = \int_{E(t)} D(q, p)\, dq\, dp, \tag{4.71}$$

[3] 5.6.1 atalean ikusiko dugu frogapen orokorra.

[4] Ikus `http://tp.lc.ehu.es/jma/mekanika/analitikoa/Liouville.html` orriko simulazioa.



4.3 IRUDIA Fase-espazioko eremu baten eboluzioa.

non integrakizuna jacobiarraren deribatua den,

$$D(q,p) = \frac{d}{dt'} \left. \frac{\partial\left(\phi(t'), \psi(t')\right)}{\partial(q,p)} \right|_{t'=t} . \tag{4.72}$$

Hau erraz kalkulatzen da (4.68) eta (4.69) erabiliz:

$$D(q,p) = \frac{d}{dt'} \left| \begin{matrix} \frac{\partial\phi}{\partial q} & \frac{\partial\phi}{\partial p} \\ \frac{\partial\psi}{\partial q} & \frac{\partial\psi}{\partial p} \end{matrix} \right|_{t'=t} = \left| \begin{matrix} \frac{\partial\dot{\phi}}{\partial q} & \frac{\partial\dot{\phi}}{\partial p} \\ \frac{\partial\psi}{\partial q} & \frac{\partial\psi}{\partial p} \end{matrix} \right|_{t'=t} + \left| \begin{matrix} \frac{\partial\phi}{\partial q} & \frac{\partial\phi}{\partial p} \\ \frac{\partial\dot{\psi}}{\partial q} & \frac{\partial\dot{\psi}}{\partial p} \end{matrix} \right|_{t'=t}$$

$$= \left| \begin{matrix} \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} & \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \\ 0 & 1 \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} \end{matrix} \right| = \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = 0. \tag{4.73}$$

Askatasun-gradu guztietarako betetzen den emaitza honen orokorpena, mekanika estatistikoan garrantzi handia duen Liouvilleren teorema da: *fase-espazioaren hiperbolumena higidura--konstantea da*. Hastapen-baldintza desberdinei dagozkien fase-espazioko puntuak fluido konprimiezinen antzera higitzen dira: horrexegatik, jario hamiltondarra deitzen zaio higidura (abstraktu) honi batzuetan.

4.7 Hamiltonen printzipio aldatua

Ikus dezagun nola lor daitezkeen aldakuntza-printzipio batetik ekuazioa kanonikoak. Hasteko, ondoko lagrangear aldatua definituko dugu:

$$L^*(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}}) \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}). \tag{4.74}$$

(Ageri denez, $\partial L^*/\partial \dot{p}_i = 0$ dugu.) Azpimarratu behar da hau bakarrik dela ohiko lagrangearraren berdina higiduran barrena; bestela, askatasun osoa daukagu p_i momentuak nahi den moduan aukeratzeko. Horrela, bi aldiune (t_1 eta t_2) eta fase-espazioko bi puntu ($P_1 = (\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1)$ eta $P_2 = (\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2)$ lotzen dituen kurba geometriko bat

$$q_i = q_i(t), \quad p_i = p_i(t), \qquad (t_1 \leq t \leq t_2;\ i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.75}$$

aukeratzen badira, dagokien ekintza aldatua hauxe izango da:

$$I^*[\mathbf{q}, \mathbf{p}] \equiv \int_{t_1}^{t_2} L^*\, dt. \tag{4.76}$$

Horrelako kurba geometrikoen artean, ekintza aldatua minimoa (muturrekoa) egiten duena izango da higidura fisikoa. Izan ere,

$$\delta I^*[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = 0 \tag{4.77}$$

ebazteko askatu behar diren Euler eta Lagrangeren ekuazioak hauexek dira orain:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L^*}{\partial q_i} = \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.78}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial L^*}{\partial p_i} = -\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.79}$$

Argi dago ekuazio kanonikoak direla.

4.8 Problemak

4.1 Aurkitu ondoko lagrangearrari dagokion hamiltondarra:

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)^2 - V\left(q_1, q_2\right).$$

4.2 Karga baten lagrangearra. Eremu elektromagnetiko baten potentzial eskalarra $\Phi(t, \mathbf{r})$ bada eta potentzial bektoriala $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$, zein da bertan higitzen den q kargaren lagrangearra?

4.3 Koordenatu parabolikoak. m masako partikula puntuala $V(\mathbf{r})$ energia potentzialean higitzen da. Idatzi koordenatu parabolikoetan[5] dagokion hamiltondarra.

4.4 Koordenatu eliptikoak. m masako partikula puntuala $V(\mathbf{r})$ energia potentzialean higitzen da. Idatzi koordenatu eliptikoetan[6] dagokion hamiltondarra.

4.5 Lagrangear ez-singularrak. Erabili (1.126) propietatea, (1.125) puntu-transformazio batean lagrangearra singularra (ez) izateko propietatea ez dela aldatzen.

4.6 Hamiltondar ez-singularrak. Froga ezazu lagrangearra singularra ez izatea eta hamiltondarra singularra ez izatea propietate baliokideak direla:

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right)_{i,j=1}^{n} \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)_{i,j=1}^{n} \neq 0.$$

4.7 Legendreren alderantzizko transformazioa. Froga ezazu hamiltondar bat singularra ez denean, hau da, 4.6 problemako baldintza betetzen denean,

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ekuazioetatik lor daitezkeela $p_i = p_i\left(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right)$ transformazioak eta lagrangearra

$$L = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \, p_i\left(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right) - H\left[t, \mathbf{q}, \mathbf{p}\left(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right)\right]$$

moduan definitzen bada, Hamiltonen ekuazio kanonikoak Lagrangeren ekuazioetara laburtzen direla:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad (i, = 1, 2, \ldots, n).$$

4.8* Eztabaidatu hurrengo sistema dinamikoa hamiltondarra den:

$$\dot{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad \dot{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

4.9 Nola aldatzen dira momentu kanonikoak eta hamiltondarra, $G(t, \mathbf{q})$ funtzioak definitutako $L \to L + \dot{G}$ gauge transformazioan? Zer gertatzen da Jacobiren integralarekin?

[5] Ikus A.1.4 atala.
[6] Ikus A.1.5 atala.

4.10 Demagun $\boldsymbol{\omega}$ bektorea konstantea dela eta partikula puntual bati koordenatu cartesiarretan dagokion hamiltondarra

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}).$$

Kalkulatu dagokion lagrangearra. Nolako sistema fisikoa deskribatzen du?

4.11 Partikula erlatibista. Egiaztatu $V(\mathbf{r})$ energia potentzialean higitzen den partikula erlatibista baten hamiltondarra honako hau dela:

$$H = \sqrt{m^2c^4 + c^2\mathbf{p}^2} + V(\mathbf{r}).$$

Zein da honen esangura fisikoa? Eta dagokion lagrangearra? Zer gertatzen da abiadura txikiko limitean?

4.12** Azter dezagun koordenatu cartesiarretan idatzitako ondoko hamiltondarra:

$$H = \frac{cp}{n(\mathbf{r})},$$

non $p = |\mathbf{p}|$ den, c konstante bat eta $n(\mathbf{r})$ posizioaren funtzio ezagun bat. Aurkitu higidura-ekuazioak eta dagokion lagrangearra. Idatzi $\omega \equiv H$ eta $\mathbf{k} = \mathbf{p}$, hamiltondarrak nolako sistema fisikoa deskribatzen duen ikusteko. Ebatzi higidura-ekuazioak, $n = ax$ kasu partikularrean (a konstante batekin).

4.13* Jacobiren identitatea. Frogatu (4.53) propietatea.

4.14 Egiaztatu Poissonen makoen ondoko propietateak, kalkulu asko egiteko oso erabilgarriak direnak:

$$\begin{aligned}
\big[f(s_\alpha), F\big] &= f'(s_\alpha)\,\omega_{\alpha\beta}\,\frac{\partial F}{\partial s_\beta}, \\
\big[f(q_i), F\big] &= \quad f'(q_i)\,\frac{\partial F}{\partial p_i}, \\
\big[f(p_i), F\big] &= -f'(p_i)\,\frac{\partial F}{\partial q_i}.
\end{aligned}$$

Oharra: Azpimarratu behar da kasu bakoitzean aldagai bakarreko funtzioa dela f.

4.15* Poissonen makoen teorema. Demagun $2n$ dimentsioko espazio batean ondoko sistema dinamikoa dugula:

$$\dot{s}_\alpha = S_\alpha\left(t, s_1, s_2, \ldots, s_{2n}\right), \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Frogatu ondoko hiru baieztapenak baliokideak direla:

1. Sistema hamiltondarra da.

2. Soluzio guztietan betetzen da ondoko baldintza F eta G aldagai dinamiko guztiekin:

$$\frac{d}{dt}[F, G] = [\dot{F}, G] + [F, \dot{G}].$$

3. Ondoko baldintzak betetzen dira:

$$\left[s_\alpha, S_\beta\right] = \left[s_\beta, S_\alpha\right], \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 2n).$$

4.16 Levi-Civitaren permutazio-ikurra. Kalkulu batzuk egiteko, $(1, 2, 3)$-ren permutazio baten zeinua adierazten duen ϵ_{ijk} ikurra erabiltzen da:

$$\epsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} 1, & (i, j, k) \text{ hirukotea } (1, 2, 3)\text{-ren permutazio bikoitia da;} \\ -1, & (i, j, k) \text{ hirukotea } (1, 2, 3)\text{-ren permutazio bakoitia da;} \\ 0, & \text{bestela;} \end{cases} \qquad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

Frogatu ondoko propietateak:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} &= \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki}, \\ \epsilon_{ijk} &= -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji}, \\ \epsilon_{iik} &= \epsilon_{ijj} = \epsilon_{kjk} = 0. \end{aligned}$$

4.17 Einsteinen batuketa-hitzarmena. Beste testuinguru askotan ere erabil daiteke (erabiltzen da) hitzarmen hau. Horrela, Levi-Civitaren permutazio-ikurraren

$$\sum_{k=0}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

propietatea, honela idazten da:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}.$$

Egiaztatu propietate hori eta hurrengoak:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} &= 2\delta_{il}, \\ \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} &= 3!, \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \epsilon_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k} = \epsilon_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3}. \end{aligned}$$

4.18 Biderkadura bektoriala eta momentu angeluarra. 4.16 eta 4.17 problemetako emaitzak erabiliz, egiaztatu honela idazten direla $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ biderkadura bektorialaren osagaiak:

$$a_i = \epsilon_{ijk}b_jc_k, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Ondorioz, partikula puntual baten $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ momentu angeluarraren osagai cartesiarrak hauexek dira:

$$L_i = \epsilon_{ijk}x_jp_k, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Egiaztatu hauxe ere betetzen dela:

$$\epsilon_{ijk}L_k = x_ip_j - x_jp_i.$$

4.19 Poissonen makoak eta momentu angeluarra. Erabili 4.16, 4.17 eta 4.18 problemak, partikula puntual baten ondoko makoak kalkulatzeko, koordenatu cartesiarretan:

$$[\mathbf{r}, \mathbf{L}],\ [r^2, \mathbf{L}],\ [\mathbf{p}, \mathbf{L}],\ [p^2, \mathbf{L}],\ [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{L}],\ [\mathbf{L}, \mathbf{L}],\ [L^2, \mathbf{L}].$$

4.20 Poissonen teorema. Demagun F eta G aldagai dinamikoak higidura-konstanteak direla. Frogatu $[F, G]$ makoa ere higidura-konstantea dela.

4.21 Demagun hamiltondarra eta F aldagai dinamikoak higidura-konstanteak direla. Frogatu $\partial F/\partial t$ deribatu partziala ere higidura-konstantea dela.

5. GAIA

Transformazio kanonikoak

5.1 IRUDIA Siméon Denis Poisson (1781, Pithiviers, Frantzia – 1840, Sceaux, Frantzia).

Hemen aztertuko ditugun transformazio kanonikoak, berez garrantzi teorikoa dutenak, 6. eta 7. gaietan beharko ditugu.

5.1 Transformazio kanonikoak

Kontsidera ditzagun fase-espazioaren koordenatu-aldaketa alderanzgarriak, 1.7 ataleko puntu-transformazioen orokorpenak direnak:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_i &= f_i(t,\mathbf{q},\mathbf{p}),\\ \tilde{p}_i &= g_i(t,\mathbf{q},\mathbf{p}),\end{aligned}\qquad \left(i=1,2,\ldots,n;\ \frac{\partial\left(f_1,f_2,\ldots,f_n,g_1,g_2,\ldots,g_n\right)}{\partial\left(q_1,q_2,\ldots,q_n,p_1,p_2,\ldots,p_n\right)}\neq 0\right). \tag{5.1}$$

Puntu-transformazio bat egitean, higidura-ekuazioak beti dira Lagrangerenak eta lagrangearraren balioa (egitura ez bezala) ez da aldatzen: $\tilde{L}(t,\tilde{\mathbf{q}},\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = L(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$. Baina puntu-transformazio batean, $\mathbf{q}\to\tilde{\mathbf{q}}$ aldaketa definitzen duten n funtzioak aukeratu ondoren abiadura orokortuen transformazioa (1.128) da. Formalismo kanonikoan, ordea, askatasun handiagoa dugu, $2n$ funtzio aukera baititzakegu nahi den moduan. Horrexegatik higidura-ekuazioak ez dira halabeharrez izango (4.12)–(4.13) ekuazio kanonikoen egiturakoak.

Azter dezagun adibide erraz bat. Dimentsio bakarreko $H = p^2/2m + kq^2/2$ osziladore harmonikoan

$$\tilde{q} = q, \qquad \tilde{p} = \sqrt{p} - aq^2 \tag{5.2}$$

aldagai-aldaketa egingo dugu, dimentsio egokietako a konstantea erabiliz. Higidura-ekuazioak hauexek dira:

$$\dot{\tilde{q}} = \dot{q} = \frac{p}{m} \qquad = \frac{\left(\tilde{p}+a\tilde{q}^2\right)^2}{m} \qquad \stackrel{?}{=} \quad \frac{\partial\tilde{H}}{\partial\tilde{p}}, \tag{5.3}$$

$$\dot{\tilde{p}} = \frac{\dot{p}}{2\sqrt{p}} - 2aq\dot{q} = -\frac{k\tilde{q}}{2\left(\tilde{p}+a\tilde{q}^2\right)} - \frac{2a\tilde{q}\left(\tilde{p}+a\tilde{q}^2\right)^2}{m} \stackrel{?}{=} -\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\tilde{q}}. \tag{5.4}$$

Erraz ikusten da kasu askean ($k=0$) aldagai berrietan sistema hamiltondarra dela, galdera-ikurreko berdintzak betetzen baitira $\tilde{H} = \left(\tilde{p}+a\tilde{q}^2\right)^3/3m$ hamiltondarra erabiliz (baina ohar zaitez $\tilde{H}$ hau ez dela $H = p^2/2m$ hamiltondarrean aldagai-aldaketa egitean lortzen dena). Bestalde, aipaturiko berdintzak ez dira inoiz betetzen $k\neq 0$ bada, hau da, aldagai berrietan sistema dinamikoa ez da hamiltondarra, (4.33) baldintzak betetzen ez baitira:

$$\frac{\partial\dot{\tilde{q}}}{\partial\tilde{q}} = \frac{4a\tilde{q}\left(\tilde{p}+a\tilde{q}^2\right)}{m} \neq -\frac{\partial\dot{\tilde{p}}}{\partial\tilde{p}} = \frac{4a\tilde{q}\left(\tilde{p}+a\tilde{q}^2\right)}{m} - \frac{ka\tilde{q}^2}{\left(\tilde{p}+a\tilde{q}^2\right)^2}. \tag{5.5}$$

Hau dela eta, (5.2) transformazioa, $p^2/2m$ hamiltondarrarekiko **kanonoidea** dela esaten da, baina (5.1) erako transformazio bat **kanonikoa** izateko, aldagai berrietan ere *hamiltondar guztiei* dagozkien sistema dinamikoak hamiltondarrak izateko eskatzen da. *Alabaina, ez da eskatzen aldagai berrietan hamiltondarra hasierakotik aldagai-aldaketa egitean lortzen dena izateko*.

Transformazio kanonikoen adibiderik errazena (identitatea honen kasu partikularra baino ez baita) eskala-aldaketa da:

$$\tilde{q}_i = aq_i, \quad \tilde{p}_i = bp_i, \qquad (i=1,2,\ldots,n), \tag{5.6}$$

non a eta b konstante ez-nuluak diren: $ab \neq 0$. Izan ere, agerian dago (4.12)–(4.13) ekuazio kanonikoak ondoko moduan idazten direla:

$$\dot{\tilde{q}}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{5.7}$$

$$\dot{\tilde{p}}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{5.8}$$

$$\tilde{H} \equiv abH. \tag{5.9}$$

Jakina azken adierazpenean ulertu behar da H funtzioan ere egin dela aldagai-aldaketa. Era berean, erraz ikusten da koordenatuak eta momentuak elkarrekin trukatzen dituen

$$\tilde{q}_i = ap_i, \quad \tilde{p}_i = bq_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ ab \neq 0), \tag{5.10}$$

transformazioa ere kanonikoa dela, $\tilde{H} = -abH$ hamiltondar berriarekin.

Transformazio kanonikoa denboraren menpekoa izan daiteke. Horrela,

$$\tilde{q} = \frac{a}{t}\, p, \qquad \tilde{p} = -\frac{t}{a}\, q \tag{5.11}$$

transformazioa kanonikoa da ($t > 0$ balioetan, adibidez), hauxe baitugu:

$$\tilde{H} \equiv H - \frac{\tilde{q}\tilde{p}}{t}, \tag{5.12}$$

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{a}{t}\,\dot{p} - \frac{a}{t^2}\,p = -\frac{a}{t}\,\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{a}{t^2}\,p = \frac{\partial H}{\partial q}\,\frac{\partial q}{\partial \tilde{p}} - \frac{\tilde{q}}{t} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}}, \tag{5.13}$$

$$\dot{\tilde{p}} = -\frac{t}{a}\,\dot{q} - \frac{q}{a} = -\frac{t}{a}\,\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{q}{a} = -\frac{\partial H}{\partial p}\,\frac{\partial p}{\partial \tilde{q}} + \frac{\tilde{p}}{t} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}}. \tag{5.14}$$

5.2 Poissonen makoak

Honela idazten da, 4.3.1 ataleko notazio laburtuan, n askatasun-graduko espazioko aldagai--aldaketa alderanzgarri bat:

$$\tilde{s}_\alpha = h_a\left(t, s_1, s_2, \ldots, s_{2n}\right), \qquad \left(\alpha = 1, 2, \ldots, 2n;\ \frac{\partial\left(h_1, h_2, \ldots, h_{2n}\right)}{\partial\left(s_1, s_2, \ldots, s_{2n}\right)} \neq 0\right). \tag{5.15}$$

5.1 TEOREMA *Ondoko hiru baieztapenak baliokideak dira (5.15) transformazioarentzat:*

1. *Transformazioa kanonikoa da, hau da, n askatasun-graduko $H\left(t, s_1, s_2, \ldots, s_{2n}\right)$ hamiltondar bakoitzeko $\tilde{H}\left(t, \tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \ldots, \tilde{s}_{2n}\right)$ funtzio bat existitzen da,*

$$\dot{s}_\alpha = \omega_{\alpha\beta}\,\frac{\partial H}{\partial s_\beta}, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2n) \tag{5.16}$$

eboluzio-ekuazioak aldagai berrietan honela idazteko modukoa:

$$\dot{\tilde{s}}_\alpha = \omega_{\alpha\beta}\,\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{s}_\beta}, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2n). \tag{5.17}$$

2. *Hamiltondarraren independente den $c \neq 0$ konstante bat existitzen da, oinarrizko aldagai zaharren Poissonen makoak aldagai berrietan honelakoak izateko moduan:*

$$\widetilde{[s_\alpha, s_\beta]} = \frac{1}{c}[s_\alpha, s_\beta] = \frac{1}{c}\,\omega_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 2n). \tag{5.18}$$

($\tilde{s}_\alpha$ aldagai berriekiko Poissonen makoa da $\widetilde{[\ ,\ ]}$.)

3. *Badago $c \neq 0$ konstante bat, (F, G) aldagai dinamikoen bikote guztien Poissonen makoak honelakoak izateko modukoa:*

$$\widetilde{[F, G]} = \frac{1}{c}[F, G]. \tag{5.19}$$

Teorema frogatzen hasteko, eman dezagun hasteko transformazioa kanonikoa dela. Frogatuko dugun bezala, hipotesi horrekin, $m_{\alpha\beta} \equiv \widetilde{[s_\alpha, s_\beta]}$ makoak konstanteak dira eta $\omega_{\alpha\beta}/c$ balioen berdinak.

Hasteko, hamiltondar guztien artean aukera dezagun konstante bat: $H = C$. Ageri denez, $\dot{s}_\alpha = 0$ dira orduan higidura-ekuazioak eta makoen eboluzioa erraz kalkulatzen da aldagai berrietan eta zaharretan:

$$\begin{aligned} \dot{m}_{\alpha\beta} &= \widetilde{[\dot{s}_\alpha, s_\beta]} + \widetilde{[s_\alpha, \dot{s}_\beta]} = 0 = \\ &= \frac{\partial m_{\alpha\beta}}{\partial t} + [m_{\alpha\beta}, C] = \frac{\partial m_{\alpha\beta}}{\partial t} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial m_{\alpha\beta}}{\partial t} = 0. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Makoak, hortaz, ez dira denboraren esplizituki menpekoak. Koordenatuen independenteak direla ikusteko, aukera ditzagun C_α hautazko konstanteen bidez $H = C_\alpha s_\alpha$ moduan idazten diren hamiltondar lineal guztiak. Aurreko kalkulua berriro egiten badugu, higidura-ekuazioak $\dot{s}_\alpha = \omega_{\alpha\beta} C_\beta$ direla kontuan hartuz, hauxe dugu:

$$\begin{aligned} \dot{m}_{\alpha\beta} &= \widetilde{[\dot{s}_\alpha, s_\beta]} + \widetilde{[s_\alpha, \dot{s}_\beta]} = \widetilde{[\omega_{\alpha\gamma} C_\gamma, s_\beta]} + \widetilde{[s_\alpha, \omega_{\beta\gamma} C_\gamma]} = 0 = \\ &= [m_{\alpha\beta}, C_\mu s_\mu] = \frac{\partial m_{\alpha\beta}}{\partial s_\lambda}\,\omega_{\lambda\mu} C_\mu \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial m_{\alpha\beta}}{\partial s_\lambda} = 0. \end{aligned} \tag{5.21}$$

(C_α hautazkoak direla erabili dugu $\partial m_{\alpha\beta}/\partial s_\lambda\, \omega_{\lambda\mu} = 0$ ondorioztatzeko, eta hortik azken emaitza lortzeko $\boldsymbol{\omega}$ matrizea alderanzgarria dela.)

Mako konstante horien balioak lortzeko, erabil ditzagun $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$ hautazko konstanteen menpeko hamiltondar koadratikoak: $H = \frac{1}{2} C_{\alpha\beta} s_\alpha s_\beta$. Higidura-ekuazioak $\dot{s}_\alpha = \omega_{\alpha\beta} C_{\beta\gamma} s_\gamma$ dira eta, ondorioz,

$$\dot{m}_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\lambda} C_{\lambda\mu}[s_\mu, s_\beta] + [s_\alpha, s_\mu]\omega_{\beta\lambda} C_{\lambda\mu} = \omega_{\alpha\lambda} C_{\lambda\mu} m_{\mu\beta} - m_{\alpha\mu} C_{\mu\lambda}\omega_{\lambda\beta} = 0. \tag{5.22}$$

Hemen (4.21) eta

$$\mathbf{M} \equiv \left(m_{\alpha\beta}\right)_{\alpha,\beta=1}^{2n}, \qquad \mathbf{C} \equiv \left(C_{\alpha\beta}\right)_{\alpha,\beta=1}^{2n} = \mathbf{C}^\top \tag{5.23}$$

matrizeak erabiliz, honela geratzen zaigu lortutakoa: $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{M} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$. Emaitza hau ezkerretik eta eskuinetik $\boldsymbol{\omega}^{-1} = -\boldsymbol{\omega}$ matrizearekin biderkatzen bada, $\mathbf{C} \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{C}$ dugu eta, $\mathbf{C} = \mathbf{1}$ aukerarekin, $\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}$ eta, ondorioz, $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}) = (\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{C}$. Baina, A.1 teoreman frogatzen den bezala, matrize simetriko guztiekin dituen biderkadura trukakorra bada, matrizea identitatearen multiploa da: $\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = k\mathbf{1}$. Azken hau $\boldsymbol{\omega}^{-1} = -\boldsymbol{\omega}$ matrizearekin

biderkatuz, $\mathbf{M} = -k\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}/c$ geratzen zaigu, $c \equiv -1/k$ definizioarekin. Azken emaitza hau da frogatu nahi genuen (5.18) baldintza:

$$m_{\alpha\beta} = \frac{\partial s_\alpha}{\partial \tilde{s}_\mu}\omega_{\mu\nu}\frac{\partial s_\beta}{\partial \tilde{s}_\nu} = \frac{1}{c}\,\omega_{\alpha\beta}. \tag{5.24}$$

Honekin, (5.19)-ren frogapena kalkulu zuzena da:

$$\widetilde{[F,G]} = \frac{\partial F}{\partial \tilde{s}_\alpha}\omega_{\alpha\beta}\frac{\partial G}{\partial \tilde{s}_\beta} = \frac{\partial F}{\partial s_\mu}\frac{\partial s_\mu}{\partial \tilde{s}_\alpha}\omega_{\alpha\beta}\frac{\partial s_\nu}{\partial \tilde{s}_\beta}\frac{\partial G}{\partial s_\nu} = \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial s_\mu}\omega_{\mu\nu}\frac{\partial G}{\partial s_\nu} = \frac{1}{c}[F,G]. \tag{5.25}$$

Amaitzeko, (5.19) betetzen bada, 4.15 problemako Poissonen makoen teorema gogoratuz, aldagai berrietan ere hamiltondarra dela sistema frogatuko dugu, jatorrizko aldagaietan hamiltondarra dela erabiliz:

$$\frac{d}{dt}\widetilde{[F,G]} = \frac{1}{c}\frac{d}{dt}[F,G] = \frac{1}{c}[\dot{F},G] + \frac{1}{c}[F,\dot{G}] = \widetilde{[\dot{F},G]} + \widetilde{[F,\dot{G}]}. \tag{5.26}$$

Balentzia deitzen zaio $c \neq 0$ konstanteari, eta beti har daiteke $c = 1$, (5.6) eskala-aldaketa osagarri bat egiten bada $c = ab$ balioarekin.

Frogatu berri dugun teoremarekin erraz egiaztatzen da *transformazio kanoniko baten alderantzizkoa ere kanonikoa dela*. Izan ere, (5.18) betetzen bada,

$$\frac{\partial s_\alpha}{\partial \tilde{s}_\mu}\omega_{\mu\nu}\frac{\partial s_\beta}{\partial \tilde{s}_\nu} = \frac{1}{c}\,\omega_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha,\beta = 1,2,\ldots,2n) \tag{5.27}$$

dugu eta, beraz,

$$[\tilde{s}_\alpha,\tilde{s}_\beta] = \frac{\partial \tilde{s}_\alpha}{\partial s_\mu}\omega_{\mu\nu}\frac{\partial \tilde{s}_\beta}{\partial s_\nu} = c\,\frac{\partial \tilde{s}_\alpha}{\partial s_\mu}\frac{\partial s_\mu}{\partial \tilde{s}_\sigma}\omega_{\sigma\rho}\frac{\partial s_\nu}{\partial \tilde{s}_\rho}\frac{\partial \tilde{s}_\beta}{\partial s_\nu} \tag{5.28}$$

$$= c\,\delta_{\alpha\sigma}\omega_{\sigma\rho}\delta_{\rho\beta} = c\,\omega_{\alpha\beta} = c\,\widetilde{[\tilde{s}_\alpha,\tilde{s}_\beta]}, \qquad (\alpha,\beta = 1,2,\ldots,2n). \tag{5.29}$$

Alderantzizkoaren balentzia, hortaz, $1/c$ da. Ildo beretik, 5.1 probleman frogatuko dugu n askatasun-graduko fase-espazioan definitutako transformazio kanonikoen multzoa, dimentsio infinituko transformazio-talde bat dela eta bi transformaturen balentziak c_1 eta c_2 badira, bien konposizioarena c_1c_2 dela.

Atal honetan ikasitakoarekin badaukagu (5.15) transformazioa kanonikoa denetz jakiteko era erraz bat, nahikoa baita

$$[\tilde{s}_\alpha,\tilde{s}_\beta] = c\,\omega_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha,\beta = 1,2,\ldots,2n), \tag{5.30}$$

edo, nahiago bada,

$$[\tilde{q}_i,\tilde{q}_j] = [\tilde{p}_i,\tilde{p}_j] = 0, \quad [\tilde{q}_i,\tilde{p}_j] = c\,\delta_{ij}, \qquad (i,j = 1,2,\ldots,n), \tag{5.31}$$

betetzen den egiaztatzea.

Adibide moduan, kontsidera dezagun 2 askatasun-gardutan definitutako ondoko transformazioa:

$$\tilde{q}_1 = q_1\cos\alpha - \frac{p_2}{a}\sin\alpha, \qquad \tilde{p}_1 = aq_2\sin\alpha + p_1\cos\alpha, \tag{5.32}$$

$$\tilde{q}_2 = q_2\cos\alpha - \frac{p_1}{a}\sin\alpha, \qquad \tilde{p}_2 = aq_1\sin\alpha + p_2\cos\alpha, \tag{5.33}$$

(a eta α konstanteak dira.) Transformazio hau kanonikoa dela frogatzeko, nahikoa da alderantzizkoa horrelakoa dela egiaztatzea:

$$[\tilde{q}_1, \tilde{q}_2] = -\frac{1}{a} \sin\alpha \cos\alpha \left([q_1, p_1] + [p_2, q_2]\right) = 0, \tag{5.34}$$
$$[\tilde{p}_1, \tilde{p}_2] = a \sin\alpha \cos\alpha \left([q_2, p_2] + [p_1, q_1]\right) = 0, \tag{5.35}$$
$$[\tilde{q}_1, \tilde{p}_1] = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \tag{5.36}$$
$$[\tilde{q}_1, \tilde{p}_2] = 0, \tag{5.37}$$
$$[\tilde{q}_2, \tilde{p}_1] = 0, \tag{5.38}$$
$$[\tilde{q}_2, \tilde{p}_2] = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \tag{5.39}$$

Bestalde, (5.2) transformazioa kanonikoa ez dela arinago ikusteko nahikoa da ondoko makoa ez dela konstantea frogatzea:

$$[\tilde{q}, \tilde{p}] = [q, \sqrt{p}] = \frac{1}{2\sqrt{p}}. \tag{5.40}$$

5.3 Lagrangeren parentesiak

Atal honetan kalkulu guztiak egingo dira une batean eta, notazioa errazteko, ez dugu esplizituki idatziko t parametroa. s_α aldagaien $2n$ funtzio independente baditugu,

$$\left\{ u_\alpha\left(s_1, s_2, \ldots, s_{2n}\right), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, 2n; \qquad \frac{\partial\left(u_1, u_2, \ldots, u_{2n}\right)}{\partial\left(s_1, s_2, \ldots, s_{2n}\right)} \neq 0 \right\}, \tag{5.41}$$

lehenengoak bigarrenen menpean idatz daitezke eta honela definitzen dira, kasu partikular honetan, Lagrangeren parentesiak:

$$\{u_\alpha, u_\beta\} \equiv \omega_{\mu\nu} \frac{\partial s_\mu}{\partial u_\alpha} \frac{\partial s_\nu}{\partial u_\beta}. \tag{5.42}$$

Adibidez, $u_\alpha = s_\alpha$ aukeratzen bada, erraz egiaztatzen dira hurrengo propietateak:

$$\{s_\alpha, s_\beta\} = \omega_{\alpha\beta}, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 2n, \tag{5.43}$$

edota

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.44}$$

Hurrengo propietatea frogatzeko, (4.27) eta

$$\frac{\partial s_\alpha}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu}{\partial s_\beta} = \frac{\partial s_\alpha}{\partial s_\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \qquad \frac{\partial u_\alpha}{\partial s_\mu} \frac{\partial s_\mu}{\partial u_\beta} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial u_\beta} = \delta_{\alpha\beta} \tag{5.45}$$

erabili behar dira:

$$\begin{aligned}
[u_\alpha, u_\lambda]\{u_\beta, u_\lambda\} &= \omega_{\mu\nu}\omega_{\rho\sigma} \frac{\partial u_\alpha}{\partial s_\mu} \frac{\partial u_\lambda}{\partial s_\nu} \frac{\partial s_\rho}{\partial u_\beta} \frac{\partial s_\sigma}{\partial u_\lambda} = \omega_{\mu\nu}\omega_{\rho\sigma}\delta_{\nu\sigma} \frac{\partial u_\alpha}{\partial s_\mu} \frac{\partial s_\rho}{\partial u_\beta} \\
&= \omega_{\mu\nu}\omega_{\rho\nu} \frac{\partial u_\alpha}{\partial s_\mu} \frac{\partial s_\rho}{\partial u_\beta} = \delta_{\mu\rho} \frac{\partial u_\alpha}{\partial s_\mu} \frac{\partial s_\rho}{\partial u_\beta} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial s_\mu} \frac{\partial s_\mu}{\partial u_\beta} \\
&= \delta_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Hemen, $u_\alpha = \tilde{s}_\alpha$ aukeratu ondoren,

$$\mathbf{M} \equiv \left([\tilde{s}_\alpha, \tilde{s}_\beta]\right)_{\alpha,\beta=1}^{2n}, \qquad \mathbf{L} \equiv \left(\{\tilde{s}_\alpha, \tilde{s}_\beta\}\right)_{\alpha,\beta=1}^{2n} \tag{5.47}$$

matrizeak erabiliz, $\mathbf{M}\cdot\mathbf{L}^\top = \mathbf{1}$ lortzen dugu eta, (5.30) emaitza eta $\boldsymbol{\omega}^\top = \boldsymbol{\omega}^{-1} = -\boldsymbol{\omega}$ gogoratuz,

$$\mathbf{M} = c\,\boldsymbol{\omega} \quad\Longleftrightarrow\quad c\,\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{L}^\top = \mathbf{1} \quad\Longleftrightarrow\quad c\,\mathbf{L}^\top = -\boldsymbol{\omega} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{L} = \frac{1}{c}\,\boldsymbol{\omega}. \tag{5.48}$$

Beraz, (5.15) transformazioa kanonikoa izateko (5.30) baldintza beharrezkoa eta nahikoa

$$\{\tilde{s}_\alpha, \tilde{s}_\beta\} = \frac{1}{c}\,\omega_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha,\beta = 1,2,\ldots,2n), \tag{5.49}$$

da edota

$$\{\tilde{q}_i, \tilde{q}_j\} = \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} = 0, \quad \{\tilde{q}_i, \tilde{p}_j\} = \frac{1}{c}\,\delta_{ij}, \qquad (i,j = 1,2,\ldots,n), \tag{5.50}$$

Jakina, alderantzizko transformazioa erabiliz, ondokoa ere baliokidea da:

$$\widetilde{\{s_\alpha, s_\beta\}} = c\,\omega_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha,\beta = 1,2,\ldots,2n). \tag{5.51}$$

Baldintza hau

$$\frac{\partial\tilde{s}_\mu}{\partial s_\alpha}\omega_{\mu\nu}\frac{\partial\tilde{s}_\nu}{\partial s_\beta} = c\,\omega_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha,\beta = 1,2,\ldots,2n) \tag{5.52}$$

denez, transformazioaren matrize jacobiarra,

$$\mathbf{J} \equiv \left(\frac{\partial\tilde{s}_\alpha}{\partial s_\beta}\right)_{\alpha,\beta=1}^{2n} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}}{\partial\mathbf{q}}\right) & \left(\frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}}{\partial\mathbf{p}}\right) \\ \left(\frac{\partial\tilde{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{q}}\right) & \left(\frac{\partial\tilde{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{p}}\right) \end{pmatrix}, \tag{5.53}$$

erabiliz, honela idazten da kanonikoa izateko baldintza beharrezkoa eta nahikoa:

$$\mathbf{J}^\top\cdot\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J} = c\,\boldsymbol{\omega}. \tag{5.54}$$

Baldintza hau $c = 1$ balentziarekin betetzen duten matrizeei, **sinplektikoak** deitzen zaie eta $c \neq 0,1$ denean matrize sinplektiko orokortuak. (5.54) baldintzaren determinantea kalkulatuz, $(\det\mathbf{J})^2\det\boldsymbol{\omega} = c^{2n}\det\boldsymbol{\omega}$, eta $\det\boldsymbol{\omega} = 1$ erabiliz, transformazio kanonikoaren jacobiarra honelakoa dela ikusten dugu:

$$\det\mathbf{J} = \frac{\partial\left(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \ldots, \tilde{s}_{2n}\right)}{\partial\left(s_1, s_2, \ldots, s_{2n}\right)} = c^n. \tag{5.55}$$

(Ondorioz, transformazio bat kanonikoa izateko baldintza beharrezkoa —baina ez nahikoa— da jacobiarra konstantea izatea.)

5.4 Funtzio sortzailea

Hemen ere t denboraren balio finko bat hartzen dugula azpimarratzeko, desplazamendu birtualen notazioa erabiliko dugu, (5.15) transformazioari dagokion ondoko forma diferentziala definitzeko:

$$\theta \equiv \sum_{i=1}^{n}\tilde{p}_i\,\delta\tilde{q}_i - c\sum_{i=1}^{n}p_i\,\delta q_i = \gamma_{\alpha\beta}\tilde{s}_\alpha\,\delta\tilde{s}_\beta - c\,\gamma_{\alpha\beta}s_\alpha\,\delta s_\beta. \tag{5.56}$$

Hemen ondoko notazioa erabili dugu:

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv \delta_{\alpha\,\beta+n} = \begin{cases} 1, & (\alpha,\beta) = (n+1,1),(n+2,2),\ldots,(2n,n); \\ 0, & \text{bestela}; \end{cases} \tag{5.57}$$

$$\left(\gamma_{\alpha\beta}\right)_{\alpha,\beta=1}^{2n} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix}. \tag{5.58}$$

Aldagai independentetzat $\{s_\alpha\}$ aukeratuz, honela idazten da forma hori:

$$\theta = A_\alpha\,\delta s_\alpha, \qquad A_\alpha \equiv \gamma_{\mu\nu}\tilde{s}_\mu \frac{\partial \tilde{s}_\nu}{\partial s_\alpha} - c\,\gamma_{\mu\alpha}s_\mu. \tag{5.59}$$

Forma itxia den jakiteko,

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial s_\beta} = \gamma_{\mu\nu}\left(\frac{\partial \tilde{s}_\mu}{\partial s_\beta}\frac{\partial \tilde{s}_\nu}{\partial s_\alpha} + \tilde{s}_\mu \frac{\partial^2 \tilde{s}_\nu}{\partial s_\beta \partial s_\alpha}\right) - c\,\gamma_{\beta\alpha}, \tag{5.60}$$

$$\frac{\partial A_\beta}{\partial s_\alpha} = \gamma_{\mu\nu}\left(\frac{\partial \tilde{s}_\mu}{\partial s_\alpha}\frac{\partial \tilde{s}_\nu}{\partial s_\beta} + \tilde{s}_\mu \frac{\partial^2 \tilde{s}_\nu}{\partial s_\beta \partial s_\alpha}\right) - c\,\gamma_{\alpha\beta}, \tag{5.61}$$

kalkulatu eta erkatu behar dira. Ageri denez,

$$\gamma_{\alpha\beta} - \gamma_{\beta\alpha} = -\omega_{\alpha\beta} \tag{5.62}$$

dugu eta, ondorioz,

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial s_\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial s_\alpha} = \omega_{\mu\nu}\frac{\partial \tilde{s}_\mu}{\partial s_\alpha}\frac{\partial \tilde{s}_\nu}{\partial s_\beta} - c\,\omega_{\alpha\beta} = \widetilde{\{s_\alpha, s_\beta\}} - c\,\omega_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha,\beta = 1,2,\ldots,2n) \tag{5.63}$$

dugu. Poincaréren lema eta (5.51) gogoratuz, hauxe frogatu dugu *(5.15) transformazioa kanonikoa dela baldin eta soilik baldin θ forma diferentziala zehatza bada, hau da, ondoko baldintza betetzeko moduko $F\,(t, s_1, s_2, \ldots, s_{2n})$ funtzio sortzaile bat existitzen bada*:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i\,\delta\tilde{q}_i - c\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i = \gamma_{\alpha\beta}\tilde{s}_\alpha\,\delta\tilde{s}_\beta - c\,\gamma_{\alpha\beta}s_\alpha\,\delta s_\beta = -\delta F, \qquad (\delta t = 0). \tag{5.64}$$

δs_α-ren koefizienteak kalkulatuz, honela ere idazten da aurrekoa:

$$\frac{\partial F}{\partial s_\alpha} = c\,\gamma_{\mu\alpha}s_\mu - \gamma_{\mu\nu}\tilde{s}_\mu\frac{\partial \tilde{s}_\nu}{\partial s_\alpha}, \qquad (\alpha = 1,2,\ldots,2n). \tag{5.65}$$

Honako hau ere gauza bera da:

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} = cp_i - \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_j\,\frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q_i}, \qquad (i = 1,2,\ldots,n), \tag{5.66}$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = \quad -\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_j\,\frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p_i}, \qquad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{5.67}$$

Kalkulu honetan denbora parametroa izan denez, F sortzailea bakarra da, denboraren funtzio gehigarri bat izan ezik. Horrela F eta $F + g(t)$ transformazio kanoniko berdinari dagozkio $g(t)$ guztietarako.

Hori kontuan hartuz, (5.6) eskala-aldaketa hauexek ditugu (5.66)–(5.67) baldintzak:

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} = abp_i - abp_i = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad F = 0. \tag{5.68}$$

(5.10) transformazioaren kasuan

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} = -abp_i, \quad \frac{\partial F}{\partial p_i} = -abq_i \qquad \Longrightarrow \qquad F = -ab\sum_{i=1}^{n} q_i p_i \tag{5.69}$$

lortzen da eta (5.11) transformazioarekin honako hau:

$$\frac{\partial F}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = q \qquad \Longrightarrow \qquad F = qp. \tag{5.70}$$

Hiru adibideetan ikusten da funtzio sortzaile bakoitza hainbat transformazio kanonikori dagokiela.

5.4.1 Hamiltondar berria

Koordenatu berrietan eta zaharretan kalkula daiteke $\dot{\tilde{s}}_\alpha$ deribatua, ondokoa lortzeko:

$$\dot{\tilde{s}}_\alpha = \omega_{\alpha\beta}\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{s}_\beta} = \frac{\partial \tilde{s}_\alpha}{\partial t} + \omega_{\mu\nu}\frac{\partial \tilde{s}_\alpha}{\partial s_\mu}\frac{\partial H}{\partial s_\nu} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial \tilde{s}_\alpha}{\partial t} = \omega_{\alpha\beta}\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{s}_\beta} - \omega_{\mu\nu}\frac{\partial \tilde{s}_\alpha}{\partial s_\mu}\frac{\partial H}{\partial s_\nu}. \tag{5.71}$$

Emaitza hau, (5.51) eta zatikako integrazioa (5.65) delakoaren deribatuan erabiliz, hauxe dugu:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial s_\alpha} &= -\gamma_{\mu\nu}\tilde{s}_\mu \frac{\partial^2 \tilde{s}_\nu}{\partial t \partial s_\alpha} - \gamma_{\mu\nu}\frac{\partial \tilde{s}_\mu}{\partial t}\frac{\partial \tilde{s}_\nu}{\partial s_\alpha} \\
&= -\gamma_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial s_\alpha}\left(\tilde{s}_\mu \frac{\partial \tilde{s}_\nu}{\partial t}\right) + \gamma_{\mu\nu}\frac{\partial \tilde{s}_\mu}{\partial s_\alpha}\frac{\partial \tilde{s}_\nu}{\partial t} - \gamma_{\mu\nu}\frac{\partial \tilde{s}_\mu}{\partial t}\frac{\partial \tilde{s}_\nu}{\partial s_\alpha} \\
&= -\frac{\partial}{\partial s_\alpha}\left(\gamma_{\mu\nu}\tilde{s}_\mu \frac{\partial \tilde{s}_\nu}{\partial t}\right) - \omega_{\mu\nu}\frac{\partial \tilde{s}_\mu}{\partial s_\alpha}\frac{\partial \tilde{s}_\nu}{\partial t} \\
&= -\frac{\partial}{\partial s_\alpha}\left(\gamma_{\mu\nu}\tilde{s}_\mu \frac{\partial \tilde{s}_\nu}{\partial t}\right) - \omega_{\mu\nu}\omega_{\nu\sigma}\frac{\partial \tilde{s}_\mu}{\partial s_\alpha}\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{s}_\sigma} + \omega_{\mu\nu}\omega_{\rho\sigma}\frac{\partial \tilde{s}_\mu}{\partial s_\alpha}\frac{\partial \tilde{s}_\nu}{\partial s_\rho}\frac{\partial H}{\partial s_\sigma} \\
&= -\frac{\partial}{\partial s_\alpha}\left(\gamma_{\mu\nu}\tilde{s}_\mu \frac{\partial \tilde{s}_\nu}{\partial t}\right) + \delta_{\mu\sigma}\frac{\partial \tilde{s}_\mu}{\partial s_\alpha}\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{s}_\sigma} + \omega_{\rho\sigma}\widetilde{\{s_\alpha, s_\rho\}}\frac{\partial H}{\partial s_\sigma} \\
&= -\frac{\partial}{\partial s_\alpha}\left(\gamma_{\mu\nu}\tilde{s}_\mu \frac{\partial \tilde{s}_\nu}{\partial t}\right) + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{s}_\mu}\frac{\partial \tilde{s}_\mu}{\partial s_\alpha} + c\,\omega_{\rho\sigma}\omega_{\alpha\rho}\frac{\partial H}{\partial s_\sigma} \\
&= -\frac{\partial}{\partial s_\alpha}\left(\gamma_{\mu\nu}\tilde{s}_\mu \frac{\partial \tilde{s}_\nu}{\partial t}\right) + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial s_\alpha} - c\frac{\partial H}{\partial s_\alpha}.
\end{aligned} \tag{5.72}$$

Ondorioz,

$$\frac{\partial}{\partial s_\alpha}\left(\tilde{H} - cH - \gamma_{\mu\nu}\tilde{s}_\mu \frac{\partial \tilde{s}_\nu}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0 \tag{5.73}$$

dugu eta parentesi artekoa t-ren funtzio hutsa da. Baina $\tilde{H}$-ri (edo F-ri) t-ren funtzio bat batzeak ezer aldatzen ez duenez, hamiltondar berria beti aukera daiteke ondoko moduan:

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= cH + \frac{\partial F}{\partial t} + \gamma_{\mu\nu}\tilde{s}_\mu \frac{\partial \tilde{s}_\nu}{\partial t} \\ &= cH + \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial t}.\end{aligned} \tag{5.74}$$

Adibidez, (5.11) transformazioan $F = qp$ eta $c = 1$ direnez,

$$\tilde{H} = H - \frac{t}{a}\, q \left(-\frac{a}{t^2}\, p\right) = H + \frac{qp}{t} = H - \frac{\tilde{q}\tilde{p}}{t}, \tag{5.75}$$

73. orrian aurkitu genuen bezala.

Bestalde, (5.65) eta (5.74) erabiliz, hauxe lortzen dugu:

$$\begin{aligned}\dot{F} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial s_\alpha}\dot{s}_\alpha = \tilde{H} - cH - \gamma_{\mu\nu}\tilde{s}_\mu \frac{\partial \tilde{s}_\nu}{\partial t} + c\,\gamma_{\mu\alpha} s_\mu \dot{s}_\alpha - \gamma_{\mu\nu}\tilde{s}_\mu \frac{\partial \tilde{s}_\nu}{\partial s_\alpha}\dot{s}_\alpha \\ &= \tilde{H} - cH - \gamma_{\mu\nu}\tilde{s}_\mu \dot{\tilde{s}}_\alpha + c\,\gamma_{\mu\alpha} s_\mu \dot{s}_\alpha = \tilde{H} - cH - \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i + c \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i,\end{aligned} \tag{5.76}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i - \tilde{H} = c\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H\right) - \dot{F}. \tag{5.77}$$

Azken adierazpena erabiliz, beste ikuspuntu batetik uler daitezke transformazio kanonikoak. Izan ere, (4.74) lagrangear aldatua eta (4.76) ekintza aldatua gogoratuz,

$$\tilde{L}^* = cL^* - \dot{F}, \tag{5.78}$$

$$\tilde{I}^* = cI^* - (F_2 - F_1)\,, \tag{5.79}$$

$$\delta\tilde{I}^* = c\delta I^* \tag{5.80}$$

dugu: $\delta\tilde{I}^* = 0$ eta $\delta I^* = 0$ baldintzak guztiz baliokideak dira eta aldagai multzo bietan higidura--ekuazioak hamiltondarrak dira.

5.5 Transformazio kanonikoen motak

Orain arte kalkulu guztietan $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}\}$ aukeratu ditugu aldagai independentetzat; baina badaude bestelako aukerak. Oraintxe ikusiko dugun bezala, horrelako aukerek transformazio kanonikoen sailkapen partzial bat ematen digute.

5.5.1 Lehen motako transformazio kanonikoak

Eman dezagun (5.1) transformazio alderanzgarriak ondoko baldintza betetzen duela:

$$\frac{\partial\left(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_n\right)}{\partial\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right)} \neq 0. \tag{5.81}$$

Adierazpen honetan t denbora eta q_i guztiak parametrotzat joz, p_i momentu bakoitza denboraren eta $\mathbf{q}$ eta $\tilde{\mathbf{q}}$ koordenatuen funtzioan idatz daiteke eta, ondorioz, $\{t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_n\}$ aukera daitezke koordenatu independentetzat.

5.2 TEOREMA *(5.81) baldintza betetzen duen (5.1) transformazio alderanzgarria kanonikoa da baldin eta soilik baldin*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial q_i} &= c p_i, \\ \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i} &= -\tilde{p}_i, \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5.82}$$

baldintzak identikoki betetzeko moduko $c \neq 0$ konstante bat eta $F_1(t, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}})$ funtzio bat existitzen badira. Gainera, horrela bada, funtzio sortzailea eta hamiltondar berria

$$F(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = F_1\left(t, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})\right), \tag{5.83}$$

$$\tilde{H} = cH + \frac{\partial F_1}{\partial t} \tag{5.84}$$

dira eta baldintza hau betetzen da:

$$\det\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial \tilde{q}_j}\right)_{i,j=1}^{n} \neq 0. \tag{5.85}$$

Alderantziz, $c \neq 0$ konstante bakoitzeko (5.85) baldintza betetzen duen F_1 funtzio batek transformazio kanoniko bat definitzen du (5.82) ekuazioen bidez eta (5.81) eta (5.84) propietateak betetzen dira.

$F_1(t, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}) \equiv F\left(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}(t, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}})\right)$ idatzi ondoren

$$\delta F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\,\delta q_i + \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i}\,\delta \tilde{q}_i \tag{5.86}$$

ondorioa erabiltzen badugu, (5.64) baldintza beharrezko eta nahikoaren baliokideak dira (5.82) ekuazioak, zeren orain independentetzat aukeratu ditugun $\{\delta q_i, \delta \tilde{q}_i\}$ diferentzialen koefizienteak baitira. Orain, $\partial F/\partial t$ deribatua (5.74) eta (5.83) emaitzetatik kalkulatzen bada, (5.82) ekuazioak erabiliz,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i}\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial t} = \frac{\partial F_1}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial t} \tag{5.87}$$

$$= \tilde{H} - cH - \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial t} \tag{5.88}$$

dugu eta (5.84) erlazioa dago hor. Bestalde, alderantzizko transformazioaren jacobiarra alderantzizkoa denez, (5.82) transformazioa berriro erabiliz, hauxe dugu:

$$\det\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial \tilde{q}_j}\right)_{i,j=1}^{n} = c^n \frac{\partial\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right)}{\partial\left(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_n\right)} = c^n \left[\frac{\partial\left(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_n\right)}{\partial\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right)}\right]^{-1} \tag{5.89}$$

eta (5.81) eta (5.85) baliokideak dira.

Horrelako transformazio kanonikoak lehen motakoak direla esango dugu. (5.6) eskala-aldaketa eta identitatea, adibidez ez dira lehen motakoak, (5.81) adierazpeneko jacobiarra zero delako. (5.10) transformazioaren kasuan, ordea,

$$\frac{\partial\left(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_n\right)}{\partial\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right)} = a^n \neq 0 \tag{5.90}$$

dugu eta (5.69)-ren ondorioz hauxe:

$$F_1 = -b \sum_{i=1}^{n} q_i \tilde{q}_i. \tag{5.91}$$

Argi dago (5.11) transformazioa ere lehen motakoa dela eta hurrengoa dugula:

$$F_1 = \frac{t}{a} q\tilde{q}. \tag{5.92}$$

5.5.2 Bigarren, hirugarren eta laugarren motako transformazio kanonikoak

5.3 TEOREMA *Eman dezagun (5.1) transformazio alderanzgarriak ondoko baldintzetako bat betetzen duela:*

$$\frac{\partial\left(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_n\right)}{\partial\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right)} \neq 0, \quad \frac{\partial\left(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_n\right)}{\partial\left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right)} \neq 0, \quad \frac{\partial\left(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_n\right)}{\partial\left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right)} \neq 0. \tag{5.93}$$

Horrela bada, koordenatu independentetzat ondokoak aukeratuko ditugu:

$$\{t, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}\}, \quad \{t, \mathbf{p}, \tilde{\mathbf{q}}\}, \quad \{t, \mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}}\}. \tag{5.94}$$

Transformazioa kanonikoa da baldin eta soilik baldin

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = c p_i, \quad \frac{\partial F_3}{\partial p_i} = -c q_i, \quad \frac{\partial F_4}{\partial p_i} = -c q_i, \tag{5.95}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_i} = \tilde{q}_i, \quad \frac{\partial F_3}{\partial \tilde{q}_i} = -\tilde{p}_i, \quad \frac{\partial F_4}{\partial \tilde{p}_i} = \tilde{q}_i, \tag{5.96}$$

baldintzak identikoki betetzeko moduko $c \neq 0$ konstante bat eta

$$F_2(t, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}) \quad F_3(t, \mathbf{p}, \tilde{\mathbf{q}}) \quad F_4(t, \mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}}) \tag{5.97}$$

funtzio bat existitzen badira. Gainera, horrela bada, funtzio sortzailea eta hamiltondar berria

$$F = F_2 - \sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i \tilde{p}_i, \quad F = F_3 + c \sum_{i=1}^{n} q_i p_i, \quad F = F_4 + \sum_{i=1}^{n} \left(c q_i p_i - \tilde{q}_i \tilde{p}_i\right), \tag{5.98}$$

$$\tilde{H} = cH + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad \tilde{H} = cH + \frac{\partial F_3}{\partial t} \quad \tilde{H} = cH + \frac{\partial F_4}{\partial t} \tag{5.99}$$

dira eta baldintza hau betetzen da:

$$\det\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial \tilde{p}_j}\right)_{i,j=1}^{n} \neq 0, \quad \det\left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial p_i \partial \tilde{q}_j}\right)_{i,j=1}^{n} \neq 0, \quad \det\left(\frac{\partial^2 F_4}{\partial p_i \partial \tilde{p}_j}\right)_{i,j=1}^{n} \neq 0. \tag{5.100}$$

Alderantziz, $c \neq 0$ konstante bakoitzeko (5.100) baldintza betetzen duen funtzio batek transformazio kanoniko bat definitzen du (5.95)–(5.95) ekuazioen bidez eta (5.93) eta (5.99) propietateak betetzen dira.

5.1 ARIKETA Egiaztatu (5.6) eskala-aldaketa bigarren eta hirugarren motakoa dela, ondoko funtzio sortzaileekin:

$$F_2 = a\sum_{i=1}^{n} q_i \tilde{p}_i, \qquad F_3 = -b\sum_{i=1}^{n} p_i \tilde{q}_i. \tag{5.101}$$

Frogatu laugarren motakoa ere dela (5.10) transformazioa ondoko funtzio sortzailearekin:

$$F_4 = a\sum_{i=1}^{n} p_i \tilde{p}_i. \tag{5.102}$$

Egiaztatu gauza bera gertatzen dela (5.11) transformazioaren kasuan hurrengoarekin:

$$F_4 = \frac{a}{t}\, p\tilde{p}. \tag{5.103}$$

Aztertu ditugun lau motak transformazio kanonikoen sailkapen partziala besterik ez dira: adibideetan ikusi dugunez, transformazio bat bi motatakoa izan daiteke eta, 5.9 probleman frogatu dugunez, gerta daiteke transformazio kanoniko bat ez izatea mota horietakoa. Beste motak eta sailkapen partzial orokorra [1] testuan aurki daitezke.

5.6 Transformazio kanoniko infinitesimalak

a parametroaren balio bakoitzeko

$$\tilde{s}_\alpha = h_\alpha\left(a; t, s_1, s_2, \ldots, s_{2n}\right), \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2n) \tag{5.104}$$

transformazioa kanonikoa bada, parametro bakarreko transformazio kanonikoen familia bat dugu. Eman dezagun balentzia $c = 1$ dela eta $a = a_0$ denean transformazioa identitatera laburtzen dela. Orduan δa balio infinitesimal bakoitzeko, ondoko transformazio infinitesimala dugu:

$$\tilde{s}_\alpha = h_\alpha\left(a_0 + \delta a; t, s_1, s_2, \ldots, s_{2n}\right), \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n), \tag{5.105}$$

$$\tilde{s}_\alpha = s_\alpha + \delta s_\alpha, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n), \tag{5.106}$$

$$\delta s_\alpha = g_\alpha\left(t, s_1, s_2, \ldots, s_{2n}\right)\, \delta a, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n), \tag{5.107}$$

$$g_\alpha \equiv \left.\frac{\partial h_\alpha}{\partial a}\right|_{a=a_0}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n). \tag{5.108}$$

5.4 TEOREMA $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \to (\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}, \mathbf{p} + \delta\mathbf{p})$ *transformazio infinitesimala kanonikoa (1 balentziakoa) da baldin eta soilik baldin ondoko baldintzak betetzeko moduko $G(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ aldagai dinamiko bat existitzen bada:*

$$\delta q_i = \frac{\partial G}{\partial p_i}\,\delta a, \quad \delta p_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i}\,\delta a, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.109}$$

Notazio laburtua erabiliz, honela idazten da kasu honetan (5.51) baldintza:

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{s}_\mu}{\partial s_\alpha}\omega_{\mu\nu}\frac{\partial \tilde{s}_\nu}{\partial s_\beta} = \left(\delta_{\alpha\mu} + \frac{\partial g_\mu}{\partial s_\alpha}\,\delta a\right)\omega_{\mu\nu}\left(\delta_{\beta\nu} + \frac{\partial g_\nu}{\partial s_\beta}\,\delta a\right)$$
$$= \omega_{\alpha\beta} + \left(\omega_{\alpha\nu}\frac{\partial g_\nu}{\partial s_\beta} + \omega_{\mu\beta}\frac{\partial g_\mu}{\partial s_\alpha}\right)\,\delta a. \tag{5.110}$$

Beraz, transformazio kanonikoa izateko baldintza beharrezkoa eta nahikoa

$$\frac{\partial}{\partial s_\alpha}\left(g_\mu\omega_{\mu\beta}\right) - \frac{\partial}{\partial s_\beta}\left(g_\mu\omega_{\mu\alpha}\right) = 0, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 2n) \tag{5.111}$$

da eta, Poincaréren lemaren arabera azken hau ondoko baldintza betetzen duen $G(t, \mathbf{s})$ funtzioaren existentziaren baliokidea da:

$$g_\mu\omega_{\mu\beta} = \frac{\partial G}{\partial s_\beta}, \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, 2n). \tag{5.112}$$

Hau $\omega_{\alpha\beta}$-rekin biderkatu ondoren batura kalkulatzen bada,

$$\omega_{\alpha\beta}\frac{\partial G}{\partial s_\beta} = g_\mu\omega_{\mu\beta}\omega_{\alpha\beta} = g_\mu\delta_{\mu\alpha} = g_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2n), \tag{5.113}$$

moduan idazten da eta, ondorioz, (5.109) baldintzen baliokidea den ondoko eran ere bai:

$$\delta s_\alpha = \omega_{\alpha\beta}\frac{\partial G}{\partial s_\beta}\,\delta a, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2n). \tag{5.114}$$

$G(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ aldagaia transformazio kanoniko infinitesimalaren **sortzaile infinitesimala** da eta bakarra da, denboraren hautazko funtzio gehigarri bat izan ezik.

Ikuspuntu aktiboan, $(s_\alpha) \to (s_\alpha + \delta s_\alpha)$ transformazioak, koordenatu kanonikoen aldaketa bat izan beharrean, puntua nola aldatzen den adierazten du eta honela aldatzen da $F(t, \mathbf{s})$ aldagai dinamiko bat:

$$\delta F \equiv F(t, \mathbf{s} + \delta\mathbf{s}) - F(t, \mathbf{s}) = \frac{\partial F}{\partial s_\alpha}\,\delta s_\alpha = \frac{\partial F}{\partial s_\alpha}\,\omega_{\alpha\beta}\frac{\partial G}{\partial s_\beta}\,\delta a, \tag{5.115}$$
$$\delta F = [F, G]\,\delta a. \tag{5.116}$$

Kasu partikularrak dira (5.114),

$$\delta s_\alpha = [s_\alpha, G]\,\delta a, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2n), \tag{5.117}$$

eta (5.109):

$$\delta q_i = [q_i, G]\,\delta a, \quad \delta p_i = [p_i, G]\,\delta a, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.118}$$

Adibidez, $G = p_k$ sortzaile infinitesimalak q_k koordenatuaren translazio abstraktua (benetako translazioa, biraketa edo bestelako transformazioa izan daitekeena) sortzen du:

$$\delta q_i = [q_i, p_k]\,\delta a = \delta_{ik}\,\delta a, \tag{5.119}$$
$$\delta p_i = [p_i, p_k]\,\delta a = 0, \tag{5.120}$$
$$\delta F = [F, G]\,\delta a = \frac{\partial F}{\partial q_k}\,\delta a = \frac{\partial F}{\partial q_k}\,\delta q_k. \tag{5.121}$$

Bestalde, transformazio kanonikoetan denbora aldatzen ez denez, $\delta F = \partial F/\partial t\, \delta t$ denbora-translazio esplizitua ez da kanonikoa, baina bai denbora-translazio inplizitua, hamiltondarrak sortzen duena:

$$G = H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \tag{5.122}$$

$$\delta a \equiv dt, \tag{5.123}$$

$$\delta F = [F, H]\, dt = \left(\dot{F} - \frac{\partial F}{\partial t}\right) dt = dF - \frac{\partial F}{\partial t}\, dt, \tag{5.124}$$

$$\delta q_i = dq_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{5.125}$$

$$\delta p_i = dp_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.126}$$

(Aurrekoetan, $\delta a \equiv dt$ egin ondoren, $dF = \dot{F}\, dt$ idatzi dugu eboluzioan barrena gertatzen den aldaketa infinitesimala adierazteko.)

Ikuspuntu aktiboan, eboluzioak berak (hau da, higidura-ekuazioen soluzioak) definitzen duen $\big(\mathbf{q}(t_0), \mathbf{p}(t_0)\big) \to \big(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)\big)$ transformazioa, t parametroko transformazio kanonikoen familia bat da, (5.31) baldintzak une guztietan betetzen baitira $c = 1$ balentziarekin. (5.122), (5.125) eta (5.126) adierazpenetan ikusten dugu eboluzioaren sortzaile infinitesimala hamiltondarra bera dela (denboraren esplizituki menpekoak ez diren aldagai dinamikoen kasuan, behintzat).

5.6.1 Liouvilleren teorema

Emaitza hau eta (5.55) erabiliz, honela geratzen da (4.69) adierazpena kasu orokorrean:

$$\begin{aligned} S(t') &= \int_{E(t')} ds'_1\, ds'_2 \ldots ds'_{2n} = \int_{E(t)} \left| \frac{\partial\left(s'_1, s'_2, \ldots, s'_{2n}\right)}{\partial\left(s_1, s_2, \ldots, s_{2n}\right)} \right| ds_1\, ds_2 \ldots ds_{2n} \\ &= \int_{E(t)} ds_1\, ds_2 \ldots ds_{2n} = S(t). \end{aligned} \tag{5.127}$$

Honela frogatzen dugu, berriro, fase-espazioaren hiperbolumena higidura-konstantea dela.

5.6.2 Simetriak eta kontserbazio-legeak

$G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ aldagaiak sortutako transformazio kanonikoa, simetria-transformazioa dela esango dugu hamiltondarra aldatzen ez badu:

$$\delta H = [H, G]\, \delta a = 0. \tag{5.128}$$

Hau eta (4.61) erabiliz, argi dago *$G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ aldagaia higidura-konstantea dela baldin eta soilik baldin sortzen duen transformazio kanoniko infinitesimala sistemaren simetria bat bada*. Berriro ikusten dugu, 3. gaian bezala, simetrien eta kontserbazio-legeen arteko erlazio estua.

5.7 Problemak

5.1 Froga ezazu itzazu ondoko hiru emaitzak:

- transformazio kanonikoen multzoa talde bat da,
- bi transformaturen balentziak c_1 eta c_2 badira, bien konposizioarena $c_1 c_2$ da,
- c balentziako transformazio kanoniko baten alderantzizkoaren balentzia $1/c$ da.

5.2 Puntu-transformazioak. Aurkitu zein den (1.125) transformazioak (Legendreren transformazioaren bidez) definitzen duen (5.1) transformazioa eta frogatu azken hau beti dela alderanzgarria eta kanonikoa. Aurkitu balentzia eta funtzio sortzaileak.

5.3 Aurkitu

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x\cos\alpha - y\sin\alpha,\\ \tilde{y} &= x\sin\alpha + y\cos\alpha,\\ \tilde{z} &= z + h\alpha\end{aligned}$$

puntu-transformazioari dagokion transformazio kanonikoa eta dagozkien balentzia eta funtzio sortzaileak.

5.4 Partikula erlatibista. Erabili transformazio kanoniko egokia, 4.11 problemako hamiltondarra koordenatu polar lauetan honela idazten dela frogatzeko:

$$H = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right)} + V(\mathbf{r}).$$

5.5 Partikula erlatibista. Egin berriro 5.4 problema hiru dimentsiotan.

5.6 Aztertu ondoko transformazioa kanonikoa den eta izatekotan zein den bere balentzia, hamiltondarren arteko erlazioa, mota(k) eta funtzio sortzailea(k):

$$\tilde{q} = q, \qquad \tilde{p} = p + q.$$

5.7 Aztertu ondoko transformazioa kanonikoa den eta izatekotan zein den bere balentzia, hamiltondarren arteko erlazioa, mota(k) eta funtzio sortzailea(k):

$$\tilde{q} = \frac{p}{m}, \qquad \tilde{p} = \frac{pt}{m} - q.$$

5.8 Aztertu ondoko transformazioa kanonikoa den eta izatekotan zein den bere balentzia, hamiltondarren arteko erlazioa, mota(k) eta funtzio sortzailea(k):

$$\tilde{q} = \ln\left(1 + \sqrt{q}\,\cos p\right) \qquad \tilde{p} = 2\left(1 + \sqrt{q}\,\cos p\right)\sqrt{p}\,\sin p.$$

5.9 Frogatu ondoko transformazioa kanonikoa dela baina ez azterturiko motetakoa:

$$\tilde{q}_1 = q_1, \quad \tilde{q}_2 = p_2, \quad \tilde{p}_1 = p_1, \quad \tilde{p}_2 = -q_2.$$

Kalkulatu balentzia, funtzio sortzailea eta $\tilde{H}$.

5.10 Osziladore harmonikoa. Erabili ondoko funtzioak sorturiko $c = 1$ balentziako transformazio kanonikoa osziladore harmonikoaren soluzioa aurkitzeko:

$$F_1 = \frac{1}{2}\, m\omega x^2 \cot \tilde{x}.$$

Iruzkina egin emaitzari.

5.11 Frogatu (5.109) transformazio kanonikoa bigarren motakoa dela. Aurkitu dagokion F_2 funtzioa.

5.12 *Gauge* transformazioa. Frogatu $G(t, \mathbf{q})$ funtzio bakoitzeko $L \to \tilde{L} \equiv L + \dot{G}$ gauge--transformazioak transformazio kanoniko bat definitzen duela. Aurkitu dagozkion balentzia eta funtzio sortzaileak.

5.13* Aurkitu koordenatu kanonikoak aldatzen ez dituzten transformazio kanoniko guztiak, dagozkien funtzio sortzaileak eta nola aldatzen diren hamiltondarra eta lagrangearra. Iruzkina egin emaitzari.

5.14 Froga ezazu ondoko transformazio infinitesimala kanonikoa dela:

$$\delta x = -p\, \delta a, \quad \delta p = m^2\omega^2 x\, \delta a.$$

Egiaztatu *zuzenean* transformazioa ondoko hamiltondarraren simetria bat dela:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\, m\omega^2 x^2.$$

Zein da dagokion higidura-konstantea?

5.15 Aurkitu 5.3 problemako transformazioari dagokion transformazio kanoniko infinitesimala ($\alpha = \delta a$ eginez lortzen dena) eta dagokion sortzaile infinitesimala. Aurreko gaietan aurkitu dugun sistema baten simetria da hau, ez al da?

6. GAIA

Hamilton eta Jacobiren ekuazioa

6.1 IRUDIA Carl Gustav Jacob Jacobi (1804, Potsdam, Prusia – 1851, Berlin).

Testu honetan aztertuko dugun mekanikaren azken formalismoa da gai honetakoa. Ikuspuntu teorikotik duen garrantzia ahaztu gabe, esan behar da problema zailak ebazteko (agian 7. gaiko perturbazioen bidez) oso egokia izaten dela. Gainera, Hamilton eta Jacobiren ekuazioaren ordezko kuantikoa da Schrödingerrena.

6.1 Hamiltonen funtzio nagusia

Eman dezagun

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6.1}$$

sistema hamiltondarra ebatzi nahi dugula eta

$$\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \tilde{p}_i = \tilde{p}_i(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6.2}$$

transformazio kanonikoa aplikatuz lortzen den hamiltondar berria $\tilde{H} = 0$ (edo konstantea edo $\tilde{H} = f(t)$) dela. Horrela bada, aldagai berrietan sistema dinamikoaren soluzio orokorra honela idazten da $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ hautazko konstanteen bidez:

$$\tilde{q}_i = a_i, \quad \tilde{p}_i = b_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.3}$$

Baina hau (6.2) transformazioaren

$$q_i = q_i(t, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}), \quad p_i = p_i(t, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6.4}$$

alderantzizkoan ordezkatzen bada, aldagai berrietan ere lortzen da (printzipioz) soluzio orokorra:

$$q_i = q_i(t, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n), \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.5}$$

$$p_i = p_i(t, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n), \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.6}$$

Kontua da nola aurkitu horrelako transformazio kanonikoren bat.

Hasteko, eman dezagun horrelako bat existitzen dela, $c = 1$ balentzia duela eta bigarren motakoa dela, hau da, $F_2 = S(t, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}})$ funtzio sortzaile egoki batetik lortzen dela: (5.100) baldintza betetzen da,

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \tilde{p}_j} \right)_{i,j=1}^{n} \neq 0, \tag{6.7}$$

(5.95)–(5.96) transformazioa

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}_i} = \tilde{q}_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6.8}$$

da eta hamiltondar berria (5.99) delakoa:

$$\tilde{H} = H\left[t, \mathbf{q}, \mathbf{p}(t, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}})\right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{6.9}$$

Baina hemen (6.8) transformazioak emandako $p_i(t, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}})$ funtzioak ordezkatzen badira, Hamilton eta Jacobiren ekuazioa lortzen da:

$$H\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{6.10}$$

Deribatu partzialetako ekuazio hau da, **Hamiltonen funtzioa nagusia** deitzen zaion S funtzioak bete behar duen baldintza beharrezkoa eta, oraintxe frogatuko dugunez, nahikoa.

6.1.1 Soluzio osoa

$\{t, q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ aldagai independenteak $n+1$ direnez, soluzio oso bakoitzean $n+1$ hautazko konstante egongo dira; baina (6.10) ekuazioan bakarrik agertzen dira S ezezagunaren deribatuak eta, ondorioz, hautazko konstante bat beti izan daiteke gehigarria (hau da, S soluzioa bada, $S+C$ ere soluzioa da, C balio konstante guztietarako). Argi dago horrelako konstante batek ez duela aldatzen aurkitu nahi dugun (6.8) transformazioa eta, ondorioz, ez du inolako eraginik sistema hamiltondarraren soluzioan (eta gauza bera gertatzen da (6.10)-ren bigarren gaian, 0-ren ordez, konstante bat edo $f(t)$ funtzio bat jartzen badugu). Horrexegatik, gai honetan, $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ hautazko konstanteen bidez adierazten den $S(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, b_1, b_2, \ldots, b_n)$ funtzio bat (6.10) ekuazioaren soluzio oso bat dela esango dugu baldin eta ekuazioaren soluzioa izateaz gain ondoko baldintza betetzen badu:

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial b_j}\right)_{i,j=1}^{n} \neq 0. \tag{6.11}$$

Azpimarratu behar da soluzio osoa ez dela, oro har, bakarra baina bat nahikoa (osoa) da, sistema hamiltondarraren soluzioa orokorra honela kalkula baitaiteke printzipioz:

- S soluzio oso bat ezagutzen bada,
- (6.1) sistema dinamikoaren soluzio orokorra, honela idazten da $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ hautazko konstanteak erabiliz:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.12}$$

$$\frac{\partial S}{\partial b_i} = a_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.13}$$

  Izan ere, ekuazio hauek lortzeko nahikoa da (6.8) transformazio-ekuazioetan $\tilde{H} = 0$ hamiltondarrari dagokion (6.3) soluzioa ordezkatzea.

- (6.11) baldintza betetzen denez, (6.13) ekuazioen alderantzizkoak existitzen dira:

$$q_i = q_i\left(t, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n\right), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.14}$$

  Hauek (6.12) ekuazioetan ordezkatuz, zuzenean lortzen da soluzio orokorraren bigarren erdia:

$$p_i = p_i\left(t, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n\right), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.15}$$

Adibide moduan, kontsidera dezagun kasurik errazena: zuzen batean higitzen den partikula aske bat. Hamiltondarra $H = p^2/2m$ denez, Hamilton eta Jacobiren ekuazioa

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{6.16}$$

da. Agerian dago soluzio bat lortzen dela batugai bakoitza konstantea bada,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} &= b \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= c \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad S = bx + ct, \tag{6.17}$$

eta $b^2/2m + c = 0$ baldintza betetzen bada. Ondorioz,

$$S = bx - \frac{b^2}{2m}\,t \tag{6.18}$$

funtzioa soluzio osoa da,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial b} = 1 \neq 0, \tag{6.19}$$

eta sistema hamiltondarraren (6.14)–(6.15) soluzioa ondokoa:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = a \quad \Longrightarrow \quad x - \frac{b}{m}\,t = a, \qquad p = \frac{\partial S}{\partial x} = b. \tag{6.20}$$

6.1 ARIKETA Aurkitu eta ebatzi hiru dimentsiotan higitzen den partikula askearen Hamilton eta Jacobiren ekuazioa.

6.1.2 Ekintza

Eman dezagun hastapen-baldintzak $t = t_0$ unean ematen direla. Higidurak berak definitzen duen $\big(\mathbf{q}\,(t_0)\,,\mathbf{p}\,(t_0)\big) \to \big(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)\big)$ transformazioa kanonikoa da, t bakoitzeko, eta gauza bera gertatzen da alderantzikoarekin: $\big(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)\big) \to (\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}) \equiv \big(\mathbf{q}\,(t_0)\,,\mathbf{p}\,(t_0)\big)$. Baina azken balioak higidura-konstanteak direnez, hauxe da gaiaren hasieratik bilatzen genituen transformazio kanonikoetako bat. Gainera, dagokion funtzio sortzailea, hau da, Hamiltonen funtzio nagusia, *higiduran barrena* kalkulatutako ekintza da. Izan ere, 2.7 probleman $t_1 = t_0$ eta $t_2 = t$ egiten badugu, hauxe dugu:

$$\frac{\partial I}{\partial \tilde{q}_i} = -\tilde{p}_i, \quad \frac{\partial I}{\partial q_i} = p_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.21}$$

Lehen motako funtzio sortzailea da hau (aldagai independenteak $\{\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}\}$ baitira); baina horrelakoekin lortzen den Hamilton eta Jacobiren ekuazioa berriro da (6.10), $\tilde{H} = H + \partial S/\partial t$ erlazioa eta momentuen $p_i = \partial S/\partial q_i$ adierazpenak berdinak baitira lehen eta bigarren motako transformazio kanonikoekin.

Badirudi hauxe izan zela Hamiltonek lehenengoz proposatu zuen funtzio nagusia, baina hori aurkitzeko higidura-ekuazioen soluzioa ezagutu behar denez, ez du laguntzen problema ebazten, garrantzi teoriko handikoa bada ere. Jacobi konturatu zen horretarako (6.10) ekuazioaren *edozein soluzio oso erabil daitekeela*.

Dimentsio batean higitzen den partikula askearen kasuan, higidura-ekuazioaren soluzioa $x = x_0 + v\,(t - t_0)$ da eta ekintza honako hau:

$$I = \frac{1}{2}m\int_{t_0}^{t} \dot{x}^2\,dt = \frac{1}{2}mv^2\,(t - t_0) = \frac{1}{2}m\frac{(x - x_0)^2}{t - t_0}. \tag{6.22}$$

Erabili dugun soluzioa berreskuratzen dugu hemendik:

$$-\,p_0 = \frac{\partial I}{\partial x_0} = -m\frac{x - x_0}{t - t_0}, \quad p = \frac{\partial I}{\partial x} = m\frac{x - x_0}{t - t_0}. \tag{6.23}$$

6.2 Hamiltonen funtzio karakteristikoa

Hamiltondarra higidura-konstantea denean, denbora ez da esplizituki agertzen Hamilton eta Jacobiren ekuazioan:

$$H\left(q_1, q_2, \ldots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{6.24}$$

Horrelakoetan beti saia daiteke

$$S = W\left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right) - Et \tag{6.25}$$

egiturako funtzio nagusia, E hautazko konstantea erabiliz. Izan ere, honako ekuazio hau geratzen zaigu:

$$H\left(q_1, q_2, \ldots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right). = E \tag{6.26}$$

Aldagai independente bat kendu (banandu) dugu eta problema nolabait erraztu. Horixe izan da aurreko adibidean (6.18) emaitzan egin duguna. Izan ere, adibide horretan honela geratzen da (6.26) ekuazioa:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 = E. \tag{6.27}$$

Hemendik zuzenean lortzen dira $W = \sqrt{2mE}\,x$ eta $S = \sqrt{2mE}\,x - Et$.

(6.25) ekuazioaren soluzio osoan $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ hautazko konstanteak agertuko dira, E bakoitzeko. Osoa izateko, hortaz, hauxe eskatuko dugu, $b_n \equiv E$ notazioaz baliatuz:

$$\det\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial b_j}\right)_{i,j=1}^{n} = \det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial b_j}\right)_{i,j=1}^{n} \neq 0. \tag{6.28}$$

Horrelako bat dugunean, (6.13) ekuazioak

$$\frac{\partial W}{\partial b_i} = a_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{6.29}$$

$$\frac{\partial W}{\partial E} = t - t_0 \tag{6.30}$$

moduan agertzen dira ($a_n \equiv -t_0$ egiten badugu). (6.29) ekuazioetan denbora agertzen ez denez, ibilbideen ekuazioak dira eta (6.30) delakotik lortzen da denborarekiko menpekotasuna.

(6.29)–(6.30) erlazioen alderantzizkoek koordenatuak ematen dituzte:

$$q_i = q_i\left(t, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n\right), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.31}$$

Hauek ordezkatzen badira (6.12) ekuazioetan, momentuak lortzen ditugu:

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i\left(t, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n\right), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.32}$$

Adibidez, osziladore harmonikoaren kasuan,

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = E \tag{6.33}$$

ekuaziotik,

$$W = \int \sqrt{2mE - m^2\omega^2 x^2}\, dx \tag{6.34}$$

lortzen da eta (6.30) ekuazioak ematen digu soluzio orokorra:

$$t - t_0 = \frac{\partial W}{\partial E} = m \int \frac{dx}{\sqrt{2mE - m^2\omega^2 x^2}} = \frac{1}{\omega} \int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}, \qquad \left(A \equiv \frac{2E}{m\omega^2}\right), \tag{6.35}$$

$$t - t_0 = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{x}{A}, \tag{6.36}$$

$$x = A \sin \omega \left(t - t_0\right). \tag{6.37}$$

Momentua nahi bada,

$$p = \frac{\partial W}{\partial x} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 x^2} = mA\omega \cos\left(t - t_0\right). \tag{6.38}$$

6.3 Aldagaien banantzea

Orain arte aztertu ditugun adibide guztietan, Hamilton eta Jacobiren ekuazioan eta Hamiltonen funtzio nagusian $\{t, q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ aldagai independenteak banandurik agertu dira. Problema baten ebazpena (edo azterketa partziala) erraztu egiten da hori gertatzen denean aldagai batzuekin (edo, hobe, guztiekin).

6.3.1 Koordenatu ziklikoak

Denbora esplizituki agertzen ez denean hamiltondarrean, t banandu dugu 6.2 atalean. Antzeko gauza bat egin daiteke koordenatu orokorturen bat agertzen ez denean. Horrela, q_j ziklikoak badira $j = k+1, k+2, \ldots, n$ balioetarako,

$$S = U\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_k\right) + \sum_{j=k+1}^{n} b_j q_j \tag{6.39}$$

saiatzen badugu (6.10) ekuazioan, hauxe geratzen da:

$$H\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_k, \frac{\partial U}{\partial q_1}, \frac{\partial U}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial U}{\partial q_k}, b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_n\right) + \frac{\partial U}{\partial t} = 0. \tag{6.40}$$

Denbora ere ez bada esplizituki agertzen eta

$$S = U\left(q_1, q_2, \ldots, q_k\right) + \sum_{j=k+1}^{n} b_{j-1} q_j - Et \tag{6.41}$$

saiatzen badugu, honela geratzen zaigu (6.10) ekuazioa:

$$H\left(q_1, q_2, \ldots, q_k, \frac{\partial U}{\partial q_1}, \frac{\partial U}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial U}{\partial q_k}, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_{n-1}\right) = E. \tag{6.42}$$

Adibide moduan, kontsidera dezagun higidura laua potentzial zentral batean:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r). \tag{6.43}$$

(Keplerren problema laua berreskuratzen dugu $V = -k/r$ denean.) Hemendik lortzen den

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + V(r) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{6.44}$$

Hamilton eta Jacobiren ekuazioan

$$S = U(r) + \ell\varphi - Et \tag{6.45}$$

saiatzean,

$$\frac{U'^2}{2m} + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r) = E \tag{6.46}$$

geratzen da eta hortik, energia potentzial eraginkorraren definizioa gogoratuz,

$$U = \pm \int \sqrt{2m\left[E - V_{\mathrm{e}}(r)\right]}\, dr, \qquad V_{\mathrm{e}}(r) \equiv V(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}. \tag{6.47}$$

Emaitza honekin, $t = t_0$ denean hastapen-baldintzak $(r, \varphi) = (r_0, \varphi_0)$ badira, honela geratzen dira (6.13) soluzioak:

$$\varphi_0 = \frac{\partial S}{\partial \ell} = \varphi \mp \int_{r_0}^{r} \frac{\ell\, dr}{r^2\sqrt{2m\left[E - V_{\mathrm{e}}(r)\right]}}, \tag{6.48}$$

$$-t_0 = \frac{\partial S}{\partial E} = -t \pm \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V_{\mathrm{e}}(r)\right]}}. \tag{6.49}$$

Horrela berreskuratzen ditugu [7] liburuko emaitzak. Orbitaren ekuazioa da (6.48) eta $r(t)$ eboluzio erradiala ematen du (6.49) delakoak.

Hemendik aurrera hamiltondarra higidura-konstantea dela, $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, suposatuko dugu gai honetan.

6.3.2 Hamiltondar banangarriak

Eman dezagun

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i\left(q_i\right) \tag{6.50}$$

egiturako funtzio karakteristikoa saiatzean (ohartu zaitez batugai bakoitzean bakarrik agertzen dela koordenatu orokortu bat) deribatu partzialetako (6.26) ekuazioa n ekuazio diferentzial arrunten sistema batera laburtzen dela:

$$H_i\left[q_i, W_i'\left(q_i\right)\right] = b_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.51}$$

$H_i\left(q_i, p_i\right)$ funtzio egokiekin. Aldagai guztiekin hori gertatzen denean, sistema hamiltondarra **banangarria** dela esaten da eta ebazpena $W_i\left(q_i, a_i, b_i\right)$ funtzioak ematen dituzten koadraturetara laburtzen da, ekuazio bakoitzean bakarrik baitago aldagai independente bat. Arrazoi beragatik,

$$p_i = \frac{\partial W_i}{\partial q_i} \tag{6.52}$$

dugu eta momentu bakoitza bakarrik izango da (integrazio-konstanteen eta) dagokion koordenatuaren menpekoa.

Hamiltondar banangarrien artean, ondoko egiturakoak dira errazenak:

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n} H_i\left(q_i, p_i\right). \tag{6.53}$$

Horrela gertatzen da, adibidez, oszilazio txikietan koordenatu normalak erabiltzen badira, zeren orduan lagrangearra

$$L = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{2}\left(\dot{Q}_i^2 - \omega_i^2 Q_i^2\right)\right] \tag{6.54}$$

moduan idazten denez (ikus [7]), hauxe baita hamiltondarra:

$$H = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{2}\left(P_i^2 + \omega_i^2 Q_i^2\right)\right]. \tag{6.55}$$

Baina (6.53) egitura nahikoa bada ere, ez da beharrezkoa, (6.43) hamiltondarrarekin, adibidez, ikusten den bezala. Izan ere,

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + V(r) = E \tag{6.56}$$

ekuazioan

$$W = A(r) + B(\varphi) \tag{6.57}$$

ordezkatzen badugu,

$$r^2\left\{\left[A'(r)\right]^2 - 2m\left[E - V(r)\right]\right\} + \left[B'(\varphi)\right]^2 = 0 \tag{6.58}$$

lortzen da eta, aldagai independenteak gai banatan agertzen direnez, ondoko modu baliokidean idatz daiteke hau ℓ banantze-aldagaia erabiliz:

$$B'(\varphi) = \ell, \tag{6.59}$$

$$A'(r) = \pm\sqrt{2m\left[E - V(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2}\right]}. \tag{6.60}$$

Ageri denez, 6.3.1 ataleko adibidearen soluzioa berreskuratzen dugu hemendik aurrera.

Azpimarratu behar da aukeratu diren koordenatu orokortuen menpeko propietatea dela sistema bat banangarria izatea (edo aldagairen bat banandurik agertzea): sistema bat banangarria izan daiteke koordenatu polarretan, adibidez, koordenatu cartesiarretan propietate hori eduki gabe, $V(r)$ potentzial zentral gehienen kasuan gertatzen den bezala. Berriro ere ikusten dugu koordenatu orokortuen aukera egokiak duen eragina problemaren ebazpena erraztean.

Kasu batzuetan, bakarrik banan daitezke $1 \leq k < n$ aldagaiak honelako saio bat eginez:

$$W = \sum_{j=1}^{k} W_j\left(q_j\right) + U\left(q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_n\right). \tag{6.61}$$

Horrela, sistema partzialki banangarria izateak problemaren ebazpena erraz dezake.

Egitura bereziko beste hamiltondar batzuekin, bestelako metodoak erabili behar dira problema ebazteko. Kasu batzuk aztertzen dira, adibidez, [1] testuko 27. atalean.

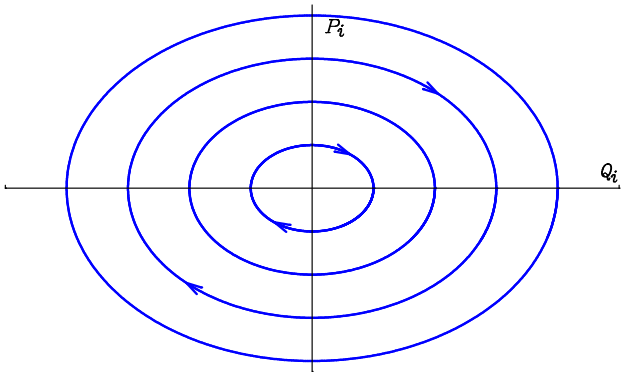
6.4 Higidura kuasi-periodikoa

Sistema banangarri batean, (6.51) ekuazioak ematen du fase-orbita bakoitzak (q_i, p_i) planoan duen proiekzioa:

$$H_i\left(q_i, p_i\right) = b_i. \tag{6.62}$$

Garrantzi fisikoko problema askotan, momentuekiko koadratikoa da hamiltondarra eta, hortaz, (higidura-konstanteen eta) q_i koordenatuaren balio bakoitzeko p_i momentuaren bi balio daude eta, askotan (higidura bornatua bada), higiduraren proiekzio hori periodikoa, itxia, da. Horrela gertatzen da oszilazio txikien kasuan, non proiekzio bakoitza elipse bat den:

$$\frac{Q_i^2}{2b_i/\omega_i^2} + \frac{P_i^2}{2b_i} = 1. \tag{6.63}$$



6.2 IRUDIA (Q_i, P_i) bikote normalaren eboluzioa.

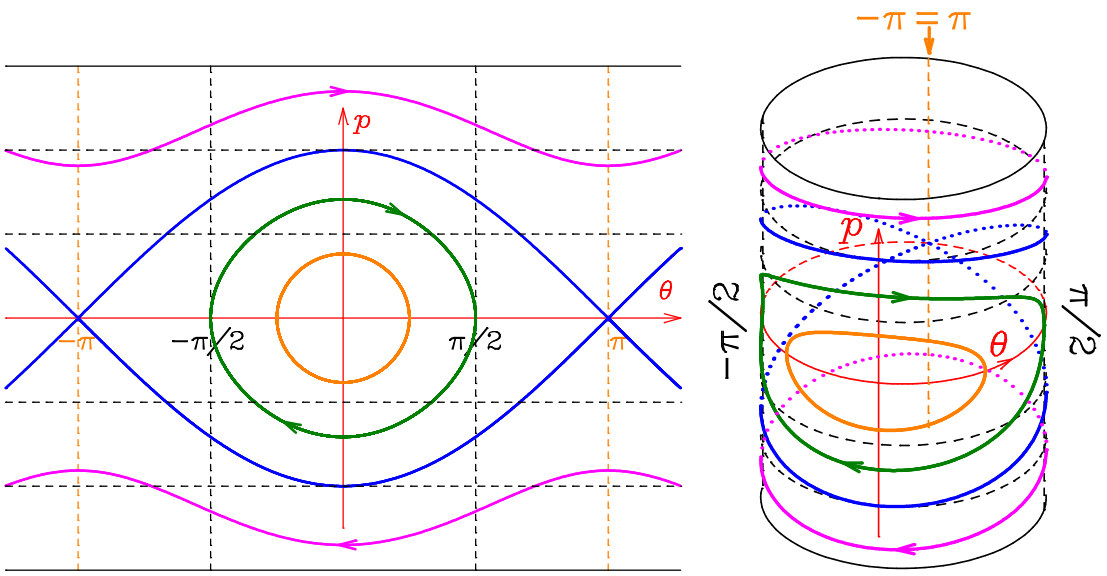
Jakina, oro har, proiekzio horiek, itxiak badira ere, ez dira elipseak izango. Adibide moduan, kontsidera dezagun pendulu matematikoa. Askatasun gradu bakarreko hamiltondar guztiak bezala, bananduta dago eta energiaren kontserbazioak ematen digu fase-orbiten ekuazioa:

$$\frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta = E. \tag{6.64}$$

Anplitude (energia) txikiko orbitak bakarrik dira eliptikoak hurbilketa onean. Gainera, adibide honetaz baliatuko gara kontuzko puntu matematiko bat aztertzeko. Penduluaren energia $E > mgl$ bada, $\theta = \pi$ edo $\theta = -\pi$ maximoraino helduko da eta harantzago joango da: θ koordenatua etengabe handituko edo txikituko da (p momentuaren zeinuaren arabera). Hala ere, ez da pentsatu behar higidura hau periodikoa ez dela: pendulua behin eta berriro igarotzen da posizio beretik abiadura berdinarekin! Kontua da $\theta = -\pi$ eta $\theta = \pi$ balioak konfigurazio fisiko bakar bati dagozkiola, pendulua garaiera maximoan egoteari, alegia. Horrexegatik, benetako fase-espazioa ez da $\{-\infty < \theta < \infty, -\infty < p < \infty\}$ plano osoa, $\{-\pi < \theta \leq \pi, -\infty < p < \infty\}$ zilindroa baizik, $\theta + 2n\pi$ balio guztiak baliokideak baitira $n \in \mathbb{Z}$ guztietarako.

Ikuspuntu fisikotik orbiten energia da desberdintasun bakarra, baina ikuspuntu geometrikotik badago beste bat: $E > mgl$ energiako fase-orbitek zilindroa inguratzen dute eta ezin dira puntu batera laburtu deformazio jarraitu baten bidez. Batzuetan esaten da horrelako higidura **biraketa** dela eta $E < mgl$ kasuko bakoitza **librazioa**. Alabaina, kasu bietan (hau da, $E = -mgl$

[1] http://tp.lc.ehu.es/jma/mteorikoa/jacobi/pendulua.ds



6.3 IRUDIA Penduluaren fase-espazioa[1].

oreka-puntua[2] eta $E = mgl$ energiari dagokion **banantzailea** kenduta) fase-orbitaren topologia $\mathbb{S}^1$ zirkunferentziarena[3] da: hau da, badago orbita bakoitzaren eta zirkunferentzia baten puntuen arteko bana-banako korrespondentzia jarraitu bat, 6.3 irudian ikusten den bezala.

Salbuespen batzuk alde batera utzita, fase-orbitek (q_i, p_i) plano guztietan dituzten $\mathcal{C}_i$ proiekzioak $\mathbb{S}^1$ topologiakoak badira, orbita gehienen topologia $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ toruarena izango da eta sistema dinamikoa **osoki integragarria** dela esaten da. Toruaren azalean biribilkatzen dira fase-orbitak eta (q_i, p_i) plano bakoitzean duten proiekzioa zirkunferentzia baten baliokidea da. Torua bera **aldaezina** da: toru batean aukeratzen baditugu hastapen-baldintzak, soluzio betidanik eta betiko dago toru horretan: fase-orbitek ez dute torurik zeharkatzen, toru baten barrena higitzen baitira.

Donuts baten azala da toru bat topologian; baina gogoratu mekanika hamiltondarrean lau dimentsioko fase-espazio bateko bi dimentsioko gainazala dela $\mathbb{T}^2$ torua. Horrexegatik, kontuz ibili behar da torua irudikatzen saiatzean.

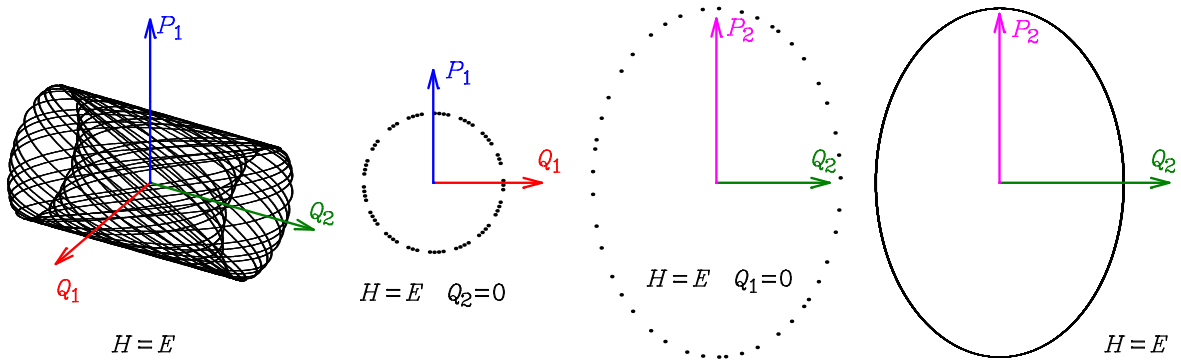
Bi askatasun-graduko fase-espazio batek dituen lau dimentsioetatik hirura jaitsi daiteke hamiltondar kontserbatuaren E balio bakoitzeko $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = E$ ekuazioak definitzen duen hiru dimentsioko **energia-gainazala** aztertuz.

Kasu erraz bat marraztu dugu 6.4 irudian. Oszilazio txikien (6.55) hamiltondarraren $E = 1/2$ balioa (unitate egokietan) aukeratu dugu eta $P_2 = \pm\sqrt{2E - P_1^2 - \omega_1^2 Q_1^2 - \omega_2^2 Q_2^2}$ denez, bakarrik geratzen zaizkigu (Q_1, Q_2, P_1) koordenatuak. Fase-orbita baten zati bat proiektatu da ezkerrean, baina ez da erraz ulertzen toruaren proiekzioa zilindro zati bat dela koordenatu horietan! Horrexegatik, dimentsio bat gutxiago (eta horrela irudi ulergarriak) lortzeko, **Poincaréren sekzioak** erabiltzen dira askotan: energia-gainazalean orbitak duen proiekzio osoa marraztu beharrean,

[2] $(\theta, p) = (0, 0)$ puntuan oreka egonkorra da eta **zentro** bat dela esaten da, bere inguruko orbiten geometria kontuan hartuz.

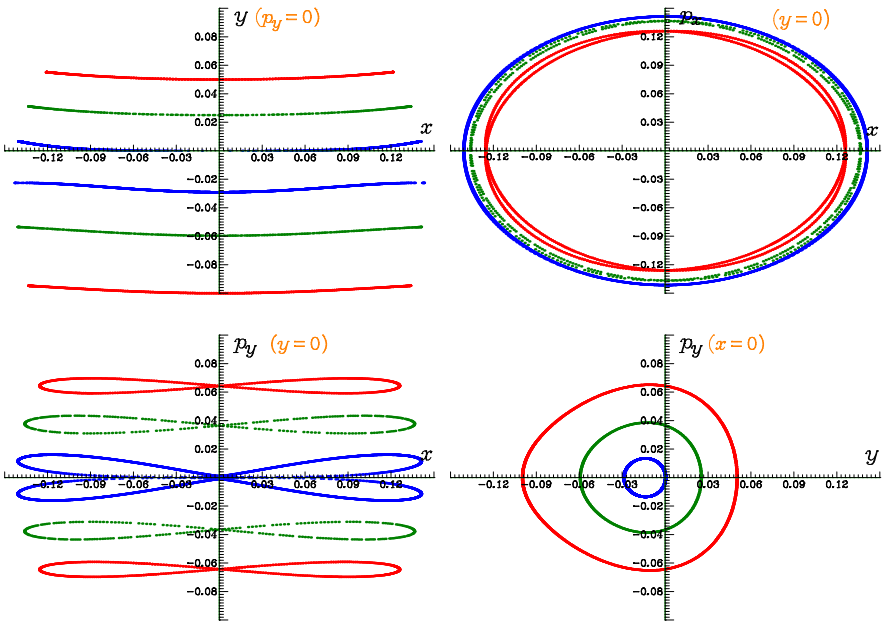
[3] $\mathbb{S}^n$ ikurra erabiltzen da n dimentsioko esfera topologikoak adierazteko. Horrela, $\mathbb{S}^1$ zirkunferentzia da eta $\mathbb{S}^2$ ohiko gainazal esferikoa.

[4] `http://tp.lc.ehu.es/jma/mteorikoa/jacobi/txikiak.ds`. Gainera, `http://tp.lc.ehu.es/jma/mteorikoa/jacobi/Henon_Poincare.html`



6.4 IRUDIA (6.55) hamiltondarraren fase-orbita baten proiekzioak eta Poincaréren sekzioak[4].

bakarrik azaltzen dira aukeratutako gainazal baten eta orbitaren arteko ebakidura-puntuak. Adibidez, bigarren irudian, $H = 1/2$ baldintzaz gain, $Q_2 = 0$ betetzen den bakoitzean (Q_1, P_1) koordenatuetako puntua marraztu da. Ageri denez, zirkunferentzia batean daude: Q_2-ren balio guztietarako marraztuko bagenitu (Q_1, P_1) puntuak, orbitaren $\mathcal{C}_1$ proiekzio jarraitua izango litzateke azpian dagoen zirkunferentzia hori (zirkularra da $\omega_1 = 1$ aukeratu dugulako). $Q_1 = 0$ denean fase-orbitak dituen (Q_2, P_2) koordenatuetako puntuak marraztu dira hirugarren irudian. (Q_2, P_2) planoan orbitak duen $\mathcal{C}_2$ proiekzioa aurkezten da laugarren irudian. Gogoratu, gainera, adibide hau errazena dela eta toruak topologikoak direla: euren geometrikoa nahiko korapilatsua izan daiteke.



6.5 IRUDIA Hénon eta Heilesen hamiltondarraren hiru toru[5].

6.5 irudian aztertzen da $H = 1/2\left(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2\right) + x^2y + 2y^3$ hamiltondarra (ikus, 105. orrian, Hénon eta Heilesen hamiltondarra) $E = 0.01$ energia-gainazalean (dimentsio gabeko aldagaietan). Hiru toruren launa ebaki erakusten dira.

[5]Ikus `http://tp.lc.ehu.es/jma/mteorikoa/jacobi/Henon_Heiles_int.ds` simulazioa.

Oro har, proiekzio bakoitzaren T_i periodoa aldatu egingo da orbita batetik bestera (baina ez oszilazio txikien kasuan, non $T_i = 2\pi/\omega_i$ den). Gerta daiteke orbita batzuetan n periodoak elkarneurgarriak izatea, hau da multiplo komun bat edukitzea: higidura periodikoa izango da kasu horretan. Baina gehienetan periodoak ez dira elkarneurgarriak izango eta koordenatu guztien balioak ez dira aldi berean gertatuko bi aldiz: higidura kuasi-periodikoa, **periodo anitzekoa**, izango da eta soluzioak torua betetzen du $t \to \infty$ limitean. Horixe da 6.4 irudian gertatzen dena: $\omega_2/\omega_1 = \sqrt{2}$ denez, bakarrik marraztu da orbitaren proiekzioaren zati labur bat, irudiaren bereizmen finituaren ondorioz irudi bete beltz bat lortzen baita oso arin.

6.5 Angelu- eta ekintza-aldagaiak

Sistema hamiltondar banangarri bat osoki integragarria denean, $\mathcal{C}_i$ ziklo bakoitzeko definitzen da ekintza-aldagai bat[6]:

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}_i} p_i \, dq_i. \tag{6.65}$$

Ekintzaren dimentsioak ditu honek eta $\mathcal{C}_i$ proiekzioaren periodo osoa erabili denez, higidura--konstantea izango da. Izan ere, argi dago $\mathcal{C}_i$ kurbak (q_i, p_i) planoan inguratzen duen azalera dela $|2\pi J_i|$ eta, torua bezala, aldaezina da bere barruaren proiekzioen azalera.

q_i koordenatua ziklikoa bada, p_i momentua higidura-konstantea da eta periodo guztiak onartzen ditu. Hemen 2π aukeratuko dugu eta dagokion ekintza-aldagaia hauxe izango da:

$$J_i = p_i. \tag{6.66}$$

(6.65) ekuazioan (6.52) ordezkatzen badugu,

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}_i} \frac{\partial W_i}{\partial q_i} \, dq_i \tag{6.67}$$

geratzen da eta, integrala egitean q_i desagertzen denez, $J_i = J_i(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ funtzioa geratuko zaigu. Gainera, $\partial W_i/\partial q_i = \partial W/\partial q_i$ denez,

$$\begin{aligned} \det\left(\frac{\partial J_i}{\partial b_j}\right)_{i,j=1}^{n} &\propto \det\left(\frac{\partial}{\partial b_j}\oint_{\mathcal{C}_i}\frac{\partial W}{\partial q_i}\,dq_i\right)_{i,j=1}^{n} = \det\left(\oint_{\mathcal{C}_i}\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial b_j}\,dq_i\right)_{i,j=1}^{n} \\ &= \oint_{\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2\times\cdots\times\mathcal{C}_n} \det\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial b_j}\right)_{i,j=1}^{n} dq_1\, dq_2 \ldots dq_n \qquad \neq 0 \end{aligned} \tag{6.68}$$

dugu, zeren (6.28) baldintzaren ondorioz integrakizuna ez da inoiz zero eta ondorioz beti positiboa edo beti negatiboa. Baina emaitza honek esan nahi du $J_i = J_i(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ funtzioen alderantzizkoak existitzen direla, $b_i(J_1, J_2, \ldots, J_n)$, eta horiek erabiliz, Hamiltonen funtzio karakteristikoa $W(q_1, q_2, \ldots, q_n, J_1, J_2, \ldots, J_n)$ moduan idatz daitekeela. Beraz, $H = b_n$ hamiltondarra ekintza-aldagaien funtzio hutsa da:

$$H = H(J_1, J_2, \ldots, J_n). \tag{6.69}$$

6.2 ARIKETA Egiaztatu (6.68) kalkuluko azken urratsa $n = 3$ kasuan.

[6] Liburu batzuetan $J_i = \oint_{\mathcal{C}_i} p_i \, dq_i$ definizioa erabiltzen da.

$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\boldsymbol{\phi}, \mathbf{J})$ transformazio kanonikoa osatzeko, bigarren motako $W(\mathbf{q}, \mathbf{J})$ funtzio sortzailea erabiliko dugu, (5.96) ekuazioetan J_i momentu berriei dagozkien koordenatu kanoniko konjugatu berriak, **angelu-aldagaiak** deitzen direnak, honela definitzeko:

$$\phi_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.70}$$

(6.69) emaitzaren ondorioz, koordenatu hauek guztiak ziklikoak dira (eta dagozkien J_i momentu kanonikoak higidura-konstanteak) eta modu linealean aldatzen dira:

$$\dot{\phi}_i = \omega_i \left(J_1, J_2, \ldots, J_n\right) \equiv \frac{\partial H}{\partial J_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.71}$$

Aldagai hauetan, beraz, soluzioa modu honetan idazten da:

$$\phi_i = \omega_i t + a_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.72}$$

Angelu-aldagaien esanahi fisikoa ulertzeko ikus dezagun nola aldatzen den ϕ_i aldagaia $\mathcal{C}_j$ zikloan barrena, bakarrik aldatzen bada q_j koordenatua. Zikloan ekintza-aldagai guztiak konstanteak direnez,

$$\delta_j \phi_i = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial W}{\partial J_i} \right) dq_j \tag{6.73}$$

dugu aipaturiko desplazamendu birtualean eta ϕ_i-ren aldaketa honako hau da:

$$\begin{aligned} \Delta_j \phi_i \equiv \oint_{\mathcal{C}_j} \delta_j \phi_i &= \oint_{\mathcal{C}_j} \frac{\partial^2 W}{\partial J_i \partial q_j} dq_j = \oint_{\mathcal{C}_j} \frac{\partial^2 W_j}{\partial J_i \partial q_j} dq_j = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint_{\mathcal{C}_j} \frac{\partial W_j}{\partial q_j} dq_j \\ &= \frac{\partial}{\partial J_i} \oint_{\mathcal{C}_j} p_j \, dq_j = 2\pi \frac{\partial J_j}{\partial J_i} = 2\pi \delta_{ij}. \end{aligned} \tag{6.74}$$

Beraz, ϕ_i bakarrik aldatzen da bere zikloan barrena eta bertan duen aldaketa 2π da, angelu batena bezalakoa. Ondorioz, $(J_1, J_2, \ldots, J_n)$ aukera bakoitzeko toru bat —eta dagokion (6.69) hamiltondarraren balioa— dugu eta toru horretako puntu bakoitzaren $(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ posizioa deskribatzeko, $\mathcal{C}_i$ ziklo bakoitzean duen proiekzioaren posizioa ematen duen ϕ_i angelua erabiltzen da.

Interpretazio honez gain, beste abantaila bat du formalismo honek: higidura kuasi-periodikoen maiztasunak kalkula daitezkeela Hamilton eta Jacobiren ekuazioa osorik ebatzi gabe. Horretarako nahikoa da

- aldagaiak banantzea Hamilton eta Jacobiren ekuazioan,
- (6.65) ekintza-aldagaiak kalkulatzea,
- hamiltondarra azken hauen menpean, (6.69) eran, idaztea eta
- maiztasunak (6.71) formularen bidez kalkulatzea:

$$\omega_i \left(J_1, J_2, \ldots, J_n\right) = \frac{\partial H}{\partial J_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.75}$$

Osziladore harmonikoa

(6.34) funtzio karakteristikoa

$$W = m\omega \int \sqrt{A^2 - x^2}\, dx, \qquad \left(A \equiv \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \right) \tag{6.76}$$

moduan idazten badugu, agerian dago hor (edo, nahiago bada, energia mekanikoaren kontserbazio-legean) $-A \leq x \leq A$ dugula. Horrela, ziklo bat izan daiteke x koordenatua 0-tik A handitzea, hortik $-A$-raino txikitzea eta berriro handitzea 0-raino. Hau errazago idazteko, ekintza-aldagaia definitzen duen integralean, $x = A \sin\theta$ aldagai-aldaketaz baliatzen bagara, hauxe dugu:

$$J = \frac{m\omega}{2\pi} \oint_C \sqrt{A^2 - x^2}\, dx = \frac{m\omega A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2} m\omega A^2 = \frac{E}{\omega}. \tag{6.77}$$

Beraz, torua bereizten duen ekintza-aldagaiaren balioa energia mekanikoa proportzionala da. Honekin erraz idazten da $H = E$ hamiltondarra J-ren funtzioan eta maiztasuna berreskuratzen da:

$$H = \omega J, \tag{6.78}$$

$$\omega = \frac{dH}{dJ}. \tag{6.79}$$

Beharrezkoa ez bada ere, kalkula dezagun angelu-aldagaia, bere esanahi fisikoa aztertzeko:

$$\phi = \frac{\partial W}{\partial J} = \frac{2}{m\omega} \frac{\partial W}{\partial A^2} = \int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = -\arccos\frac{x}{A} + C_1 = \arcsin\frac{x}{A} + C_2. \tag{6.80}$$

(6.72) ekuazioa $\phi = \omega t + a$ denez, $x = A\cos(\omega t + a)$ soluzio ezaguna berreskuratzen dugu eta ϕ angelu-aldagaia osziladorearen fasea[7] (hau da, fasorearen orientazioa) dela ikusten dugu.

6.6 Keplerren problema

Propietate orokorrak aztertzeko eta perturbazio-teoria prestatzeko (zeruko mekanikan erabiltzeko edo sateliteen higiduraren perturbazioak aztertzeko), ez dugu hemen hasieratik erabiliko orbita laua dela. Koordenatu polar esferikoetan, honela idazten dira $V = -k/r$ energia potentzialean higitzen den partikularen lagrangearra, momentu kanonikoak, hamiltondarra eta Hamilton eta Jacobiren ekuazioa:

$$L = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 + r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2 \right) \right] - \frac{k}{r}, \tag{6.81}$$

$$p_r = m\dot{r}, \tag{6.82}$$

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \tag{6.83}$$

$$p_\varphi = mr^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}, \tag{6.84}$$

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2\theta} - \frac{k}{r}, \tag{6.85}$$

$$E = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2 \sin^2\theta} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{k}{r}. \tag{6.86}$$

[7] Zehazkiago, fasea gehi konstante bat da ϕ.

Aldagaiak banantzeko

$$W = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\varphi(\varphi) \tag{6.87}$$

saiatzen badugu,

$$\frac{1}{2m}\left[W_r'(r)\right]^2 + \frac{1}{2mr^2}\left[W_\theta'(\theta)\right]^2 + \frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\left[W_\varphi'(\varphi)\right]^2 - \frac{k}{r} = E \tag{6.88}$$

geratzen da eta, aldagaien menpekotasuna kontuan hartuz, ondoko hiru ekuazio diferentzialak lortzen ditugu:

$$W_\varphi'(\varphi) = b_\varphi, \tag{6.89}$$

$$\left[W_\theta'(\theta)\right]^2 + \frac{b_\varphi^2}{\sin^2\theta} = b_\theta^2, \quad (b_\theta \geq 0), \tag{6.90}$$

$$\left[W_r'(r)\right]^2 + \frac{b_\theta^2}{r^2} = 2m\left(E + \frac{k}{r}\right). \tag{6.91}$$

6.3 ARIKETA Egiaztatu aurreko hiru ekuazioek hurrengo hiru magnitudeen kontserbazio-legeak adierazten dituztela: momentu angeluarraren $L_z = b_\varphi$ osagaia eta $L = b_\theta$ modulua eta E energia mekanikoa.

Higidura periodikoa izateko, $k > 0$, $E < 0$ kasua aztertuko dugu bakarrik: horrela, r eta θ-ren eboluzioak librazioak izango dira eta φ-rena biraketa. Azken aldagaia ziklikoa denez, (6.66) hitzarmenak ematen digu dagokion ekintza-aldagaia:

$$J_\varphi = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathcal{C}_\varphi} W_\varphi'(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathcal{C}_\varphi} b_\varphi\,d\varphi = b_\varphi. \tag{6.92}$$

Formulak errazteko, $b_\varphi > 0$ izateko moduan aukeratuko dugu OZ ardatzaren noranzkoa.

Bigarren ekintza-aldagaiaren

$$J_\theta = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathcal{C}_\theta} W_\theta'(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathcal{C}_\theta}\sqrt{b_\theta^2 - \frac{b_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta \tag{6.93}$$

definizioan $(\arcsin b_\varphi/b_\theta, \pi/2 - \arcsin b_\varphi/b_\theta)$ tartea bi aldiz egiten denez, hauxe dugu (A.40) integralaren ondorioz:

$$J_\theta = \frac{4b_\theta}{2\pi}\int_{\arcsin b_\varphi/b_\theta}^{\pi/2}\sqrt{1 - \frac{b_\varphi^2/b_\theta^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta = b_\theta - b_\varphi. \tag{6.94}$$

Azken ekintza-aldagaiaren

$$J_r = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathcal{C}_r} W_r'(\varphi)\,dr = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathcal{C}_r}\sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{b_\theta^2}{r^2}}\,dr \tag{6.95}$$

integralean r distantzia bi aldiz aldatzen da, $\dot{r} = 0$ baldintzak definitutako absideen artean, hau da, $r_- \leq r \leq r_+$ dugu, erraz egiaztatzen diren hurrengo balio ezagunekin:

$$r_\pm \equiv \frac{p}{1 \mp \varepsilon}, \tag{6.96}$$

$$p \equiv \frac{b_\theta^2}{mk}, \tag{6.97}$$

$$\varepsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2b_\theta^2 E}{mk^2}}. \tag{6.98}$$

Orain (A.48) integrala erabiliz, hauxe dugu azkenean:

$$J_r = \frac{b_\theta}{\pi}\int_{r_-}^{r_+}\sqrt{\left(\frac{1}{r_-}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_+}\right)}\,dr = b_\theta\left(\frac{r_-+r_+}{2\sqrt{r_-r_+}}-1\right) = \frac{b_\theta}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}-b_\theta$$
$$= k\sqrt{\frac{m}{-2E}}-b_\theta. \tag{6.99}$$

Hortaz, honela idazten da energia mekanikoa (6.92), (6.94) eta (6.99) ekintza-aldagaien funtzioan:

$$E = -\frac{mk^2}{2\left(J_r+J_\theta+J_\varphi\right)^2}. \tag{6.100}$$

Hiru ekintza-aldagaiak batura moduan agertzen direnez, osoki endekatua da higidura, maiztasun bakarra baitu:

$$\omega = \frac{\partial E}{\partial J_r} = \frac{\partial E}{\partial J_\theta} = \frac{\partial E}{\partial J_\varphi} = \frac{mk^2}{\left(J_r+J_\theta+J_\varphi\right)^3}. \tag{6.101}$$

Horrexegatik, higidura laua eta itxia da (eta Böhrren atomoan zenbaki kuantiko bakar bat behar da energia idazteko). 6.6 probleman aztertuko dugun Keplerren problema erlatibistan endekapen bakarra geratuko da: higidura laua izango da baina, oro har, ez periodikoa.

(6.101) emaitza eta ardatz nagusiaren luzera $2a = r_- + r_+ = -k/E$ dela erabiliz, Keplerren hirugarren legea berreskuratzen dugu:

$$\omega = \sqrt{\frac{-8E^3}{mk^2}}, \tag{6.102}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi k\sqrt{\frac{m}{-2E^3}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 ma^3}{k}}. \tag{6.103}$$

6.7 Hamiltondar osoki integragarriak

Aurreko ataletan aurkitu ditugun sistema hamiltondar osoki integragarriak banangarriak izan dira; baina baldintza hau ez da beharrezkoa. Nahikoa da higidura bornatua izatea eta orain aztertuko ditugun baldintzak betetzea. Sistema banangarria bada, ekintza-aldagaiak higidura-konstanteak dira,

$$[J_i, H] = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.104}$$

eta, momentu kanonikoak direnez, independenteak dira eta **inboluzioan** daude:

$$[J_i, J_j] = 0, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.105}$$

6.1 TEOREMA (Liouville, Arnold) *Eman dezagun n askatasun-graduko $H(\mathbf{q},\mathbf{p})$ hamiltondarraren $\{I_i(\mathbf{q},\mathbf{p});\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ aldagai dinamikoak*

- *funtzionalki independenteak izateaz gain,*
- *higidura-konstanteak direla,*

$$[I_i, H] = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.106}$$

- *eta inboluzioan daudela:*

$$[I_i, I_j] = 0, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.107}$$

Orduan,

- $(I_1, I_2, \ldots, I_n) = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$ *aukera konstante bakoitzeko toru*[8] *aldaezin bat dugu eta horrelakoetan biribilkatzen dira fase-orbitak.*
- *Higidura kuasi-periodikoa da.*
- *Angelu- eta ekintza-aldagaien sistema bat onartzen du sistema hamiltondarrak.*

[16] testuan aurki daiteke teorema zail honen frogapena. Hemen ohar batzuk egingo ditugu bakarrik.

- Teoremaren hipotesiak betetzen badira, sistema osoki integragarria da (*banangarria ez bada ere*) eta *printzipioz* problemaren ebazpena koadraturetara laburtzen da.
- Beti aukera daiteke $I_1 = H$.
- Ondorioz, $n = 2$ askatasun-graduko sistemetan nahikoa da aurkitzea bigarren higidura--konstante independente bat, sistema osoki integragarria izateko.

6.7.1 Hamiltondar ez-integragarriak

Jakina, badaude integragarriak ez diren sistema hamiltondar asko eta garrantzi handikoak dira kaos deterministaren teorian. Hemen adibide famatu bat aipatzera mugatuko gara.

Kontsidera dezagun Hénon eta Heilesen hamiltondarra, galaxia batean izar bat nola higitzen den (eta molekula triatomikoen oszilazioak) aztertzeko eredu erraztua dena. Honela idazten da dimentsio-gabeko aldagaietan:

$$H = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2 + Ax^2 + By^2\right) + Cx^2y + Dy^3. \tag{6.108}$$

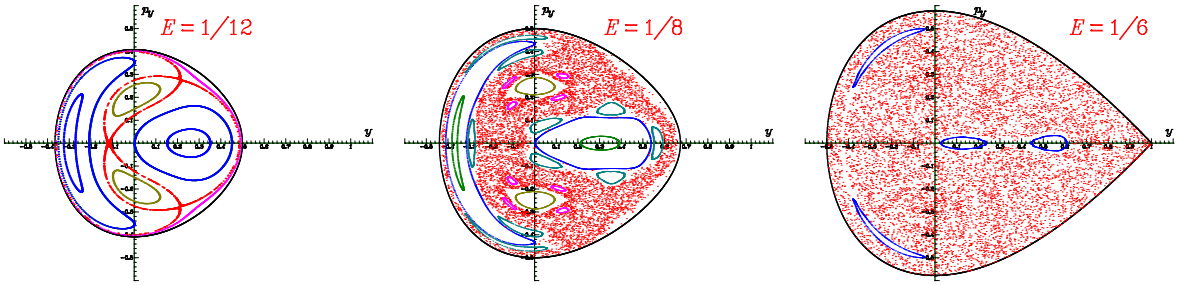
A, B, C eta D konstanteak aldatzean, sistema integragarria da hurrengo lau kasuetan:

1. $C = 0$ (ikus 6.1 problema).
2. $A = B$ eta $C = 3D$ (ikus 6.2 problema).
3. $D = 2C$ (ikus 6.13 problema).
4. $B = 16A$ eta $16C = 3D$ (ikus [20]).

Kaos deterministaren historian aparteko garrantzia du $A = B = C = -3D = 1$ kasuak, integragarria ez denak. 6.6 irudian erakusten dira $x = 0$ Poincaréren sekzioetako (y, p_y) puntuak,

[8] Fase-espazioa trinkoa eta konexua (eta, beraz, higidura bornatua) delako hipotesia egiten ari gara.

[9] http://tp.lc.ehu.es/jma/mteorikoa/jacobi/Henon-Heiles1.ds
http://tp.lc.ehu.es/jma/mteorikoa/jacobi/Henon-Heiles2.ds
http://tp.lc.ehu.es/jma/mteorikoa/jacobi/Henon-Heiles3.ds
http://tp.lc.ehu.es/jma/mteorikoa/jacobi/Henon_Poincare.html



6.6 IRUDIA Hénon eta Heilesen sistemaren $x = 0$ Poincaréren sekzioak[9].

energiaren hiru baliotarako. $E = 1/12$ denean, orbita gehienak toruetan daude eta Poincaréren sekzioak kurba itxietan gertatzen dira. $E = 1/8$ balioarekin, orbita batzuk toruetan gertatzen badira ere, toruen arteko espazioa betetzen dute beste batzuek. Irudian horrelako soluzio *bakar* batek sortutako puntuak erakusten dira gorriz: orbita ez da kuasi-periodikoa, kaotikoa baizik. $E = 1/6$ denean, ia-ia espazio osoa betetzen du orbita batek, baina oraindik ikus daitezke toru txiki batzuk.

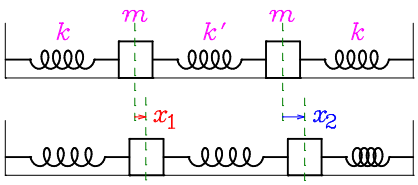
6.8 Problemak

6.1 Hénon eta Heilesen hamiltondarra (I). Frogatu (6.108) banangarria dela $C = 0$ denean.

6.2 Hénon eta Heilesen hamiltondarra (II). Frogatu (6.108) banangarria dela konstanteak honela aukeratzen direnean: $A = B$ eta $C = 3D$.

6.3 m masako partikula bat $g\,\mathbf{k}$ eremu grabitatorio uniformean higitzen ari da. Ebatzi dagokion Hamilton eta Jacobiren ekuazioa funtzio nagusia erabiliz, soluzio osoa lortzeko.

6.4 Irudiko sistema mekanikoan marruskadura arbuiagarria da eta goiko konfigurazioan malgukiak deformatu gabe daude. Aurkitu koordenatu egokiak hamiltondarra banantzeko eta ebatzi higidura-ekuazioak Hamiltonen funtzio nagusia erabiliz.



6.5 m masako partikula bat $g\,\mathbf{k}$ eremu grabitatorio uniformean higitzen ari da. Ebatzi dagokion Hamilton eta Jacobiren ekuazioa funtzio karakteristikoa erabiliz, zuzenean ibilbidearen ekuazioa lortzeko, soluzio osoa kalkulatu gabe.

6.6* Keplerren problema erlatibista (I). Azter dezagun $V = -k/r$ energia potentzialean higitzen ari den partikula erlatibistaren higidura laua.
(a) Gogoratu 4.11 eta 5.4 problemak, Hamilton eta Jacobiren ekuazioa koordenatu polarretan idazteko.
(b) Frogatu banangarria dela eta idatzi Hamiltonen funtzio nagusia koadratura baten bidez.
(c) Balia zaitez (6.13) ekuazio egokiaz, orbitaren $r(\varphi)$ ekuazioa integral baten bidez idazteko.
(d) Erabili $u = 1/r$ aldagai-aldaketa integrala egiteko eta egiaztatzeko honela idazten dela, bi kasu desberdinetan:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cosh \mu\,(\varphi - \varphi_0)},$$
$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \mu\,(\varphi - \varphi_0)}.$$

(e) Sailkatu orbitak eta eztabaidatu euren forma kualitatiboa. Iruzkina egin emaitzari.
(f) Kalkulatu, hurbilketa egokian, planeten perihelioaren prezesioa erlatibitate berezian.
(g) Aplikatu emaitzak Merkurioren perihelioaren aurrerapenaren kasuan eta erkatu erlatibitate orokorraren emaitzarekin (ikus 7.4 problema).
Oharrak: Erabili hurrengo integrala, $\Delta \equiv 4AC - B^2 < 0$ denean:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{A}} \operatorname{arccosh} \dfrac{2Ax + B}{\sqrt{-\Delta}}, & (A > 0); \\ \dfrac{1}{\sqrt{-A}} \arccos \dfrac{2Ax + B}{\sqrt{-\Delta}}, & (A < 0). \end{cases}$$

Ondoko helbidean aurki daitezke Merkurioren datuak:
`http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/mercuryfact.html`.

6.7* Partikula bat hurrengo energia potentzialean higitzen da:

$$V = -\frac{k}{r} + mgz.$$

Hau da, indar newtondar bat eta eremu uniforme bat pairatzen ditu. Laburtu problema koadraturetara, A.1.4 ataleko koordenatu parabolikoak erabiliz.

6.8 q karga plano batean higitzen da eremu magnetiko uniforme eta konstante baten eraginpean. Erabili Coulomben gaugea,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r},$$

Hamilton eta Jacobiren ekuazioa idazteko. Saiatu

$$W = U(x) + V(y) + Cxy$$

egiturako funtzio karakteristiko bat eta aukeratu C konstantea eta $V(y)$ funtzioa aldagaiak banantzeko. Aurkitu ibilbidearen ekuazioa eta eboluzioa.

6.9 Ebatzi 6.8 problema Landauren gaugea erabiliz:

$$\mathbf{A} = Bx\,\mathbf{j} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{B} = B\,\mathbf{k}.$$

Iruzkina egin emaitzari.

6.10 Banantzailea. Zenbat fase-orbita daude pendulu matematikoaren banantzailean?

6.11 Osziladore harmonikoa. Froga ezazu osziladore harmonikoaren angelu- eta ekintza aldagaiak honako hauek direla:

$$\phi = \arctan\frac{m\omega x}{p}, \qquad J = \frac{p^2}{2m\omega} + \frac{1}{2}m\omega x^2.$$

Zein da alderantzizko transformazioa?

6.12 Osziladore harmonikoa. Aurkitu $(x, p) \to (\phi, J)$ transformazio kanonikoaren F_1 sortzailea, osziladore harmonikoaren kasuan. Iruzkina egin emaitzari.

6.13 Hénon eta Heilesen hamiltondarra (III). $D = 2C$ denean (6.108) osoki integragarria dela frogatzeko, ondoko aldagai dinamikoa higidura-konstantea dela esaten da [20] liburuan:

$$F = x^4 + 4x^2y^2 - 4p_x(p_xy - p_yx) + 4Ax^2y + (4A - B)\left(p_x^2 + Ax^2\right).$$

Egiaztatu hori ez dela egia (akatsen bat dagoelako aurreko adierazpenean) eta erabili arrazoibide fisiko bat, higidura-konstantea zein den asmatzeko.

6.14 Keplerren problema. Kontsidera dezagun hiru dimentsioko Keplerren problemaren $\mathbf{L}$ momentu angeluarra. Frogatu H hamiltondarrak, L_z osagaiak eta L^2 moduluaren karratuak, Jacobiren teoremaren hipotesiak betetzen dituztela. Higidura-konstanteak izango dira L_x eta L_y? Inboluzioan egongo dira?

6.15 OX ardatzean barrena higitzen da partikula bat, $V = F|x|$ energia potentzialean. (Zer da F konstante positiboa?) Erabili ekintza-aldagaien metodoa, oszilazioen periodoa energiaren funtzioan aurkitzeko.

6.16 Pendulu zikloidala. Burdin hari bertikal baten itxura zikloide batena da, hurrengo ekuazio parametrikoek emandakoa:

$$x = a(\theta - \sin\theta), \quad y = a(1 + \cos\theta), \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

Kalkulatu marruskadurarik gabe higitzen den iduneko baten oszilazioen periodoa. Iruzkina egin emaitzari.

6.17 Orbitaren prezesioa. Partikula puntual bat ondoko potentzial zentralean higitzen da:

$$V = -\frac{k}{r} + \frac{C}{r^2}, \qquad (k > 0).$$

Idatzi orbita bornatuen energia ekintza-aldagaien funtzioan eta kalkulatu maiztasunak. Aurkitu perizentroaren prezesioa, momentu angeluarraren funtzioan. Noiz da itxia orbita? Zer gertatzen da C txikia denean?
Oharra: Ia-ia ez da kalkulurik egin behar.

6.18* **Keplerren problema erlatibista (II)**. Egin berriro 6.6 ataleko kalkulua erlatibitate berezian, energia ekintza-aldagaien funtzioan idazteko. Nola aldatzen da endekapena? Zein da horren ondorio fisikoa?
Oharra: Ia-ia ez da kalkulurik egin behar.

6.19* **Keplerren problema erlatibista (III)**. Erabili 6.18 problema, maiztasunen lehen hurbilketa erlatibista kalkulatzeko. Idatzi maiztasunak energia eta momentu angeluarraren funtzioan. Kalkulatu orbitaren prezesioa eta alderatu 6.6 problemako emaitzarekin.
Oharra: Erabili ikur-kalkulua egiteko sistemaren bat.

7. GAIA

Perturbazio-teoria

7.1 IRUDIA Jules Henri Poincaré (1854, Nancy, Frantzia – 1912, Paris).

Era zehatzean ebatz daitezkeen sistema dinamikoak oso urriak dira eta hurbilketa-metodoetara jo behar da gehienetan. Azken hauen artean, zenbakizko metodoak oso erabilgarriak (eta erabiliak) izaten dira, ordenagailuen bidez problema *partikularrak* askatzeko; baina propietate kualitatiboak aztertzeko, guztiz beharrezkoak dira metodo analitiko hurbilduak. Zorionez, perturbazio-kalkulu astunetan ikur-kalkulua egiteko ere erabil daiteke ordenagailua (Delauney-ek 20 urtetan egindako kalkulu famatua minutu batzuetan egiaztatzeko, adibidez).

XIX. mendean zeruko mekanikan garatu ziren perturbazio-metodoak, Ilargiaren eta beste astroen higidurak aztertzeko (eta geroago aipatuko ditugun oztopoak aurkitu zituzten bidean). Gaur egun, gainean, perturbazio-teoria klasikoa beharrezkoa da, adibidez, azeleragailuetako partikula--sorten egonkortasuna aztertzeko.

Nolabait ebatzi dugun sistema baten oso desberdina ez den beste sistema baten soluzioa, lehenengoaren soluzioaren oso desberdina ez dela izango da perturbazio-teoriaren oinarrizko ideia. Zehaztugabekoa (eta batzuetan okerra) bada ere, horixe izango da gure abiapuntua gai honetan.

7.1 Perturbazio erregularrak

Eman dezagun ondoko osziladore ez-linealaren soluzio periodikoak aurkitu nahi ditugula, ϵ parametroa txikia denean:

$$\ddot{x} + 2x = \sin t + \epsilon x^2. \tag{7.1}$$

Hasteko, $\epsilon = 0$ denean oinarrizko osziladore lineala (harmonikoa) berreskuratzen dugu.

7.1 ARIKETA Froga ezazu $\ddot{x} + 2x = \sin t$ ekuazioaren soluzio periodiko bakarra $x = \sin t$ dela.

Kasu ez-lineala zailagoa da, noski. Funtsezko ideia erabiliz,

$$x = \sin t + \epsilon x_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{7.2}$$

erako soluzio hurbildua bilatuko dugu, ekuazioa ϵ parametroaren lehen ordenaraino betetzeko moduan.

7.2 ARIKETA Egiaztatu (7.2) hurbilketa (7.1) ekuazioan ordezkatuz gero hauxe lortzen dela:

$$\epsilon \left[\ddot{x}_1 + 2x_1 = \frac{1 - \cos 2t}{2} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{7.3}$$

Askatu ekuazioa eta frogatu soluzio periodikorako lehen ordenako hurbilketa honako hau dela:

$$x = \sin t + \epsilon \frac{1 + \cos 2t}{4} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

7.2 Poincaré eta Lindstedt-en metodoa

Azter dezagun hurrengo hamiltondarra duen osziladore kuasi-harmonikoa:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 \left(1 + \frac{1}{2}\epsilon x^2 \right), \tag{7.4}$$

non ϵ perturbazio-parametroa positiboa eta txikia den.

7.3 ARIKETA Egiaztatu (7.4) hamiltondarrari dagokion higidura-ekuazioa

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \left(x + \epsilon x^3\right) = 0 \tag{7.5}$$

dela eta soluzio guztiak periodikoak direla.

$\epsilon = 0$ denean ω_0 maiztasuneko osziladore harmonikoa dugu eta, ondorioz, badirudi naturala dela ondoko egiturako soluzioa saiatzea:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \delta) + \epsilon y + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{7.6}$$

7.4 ARIKETA Egiaztatu (7.6) soluzioa (7.5) higidura-ekuazioan saiatzean

$$\epsilon \left\{ \ddot{y} + \omega_0^2 y + \frac{\omega_0^2 A^3}{4} \left[\cos 3(\omega_0 t + \delta) + 3\cos(\omega_0 t + \delta)\right] \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0 \tag{7.7}$$

geratzen dela. Aurkitu honen soluzioa eta ondorioztatu (7.5) ekuazioarena honela idazten dela

$$x = \left[A - \epsilon\frac{3A^3}{16}\right]\cos(\omega_0 t + \delta) + \epsilon\frac{A^3}{32}\left[\cos 3(\omega_0 t + \delta) - 12t\omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta)\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0. \tag{7.8}$$

Soluzio honetan bi gai periodikoak dira, baina hirugarrena ϵt-rekiko proportzionala da eta, hasieran txikia bada ere, mugarik gabe handituko da. Hortaz, ϵy gaia zero ordenakoa baino askoz txikiagoa delako funtsezko hipotesia, gezur bihurtuko da azkenean: erabili dugun perturbazio--metodoa ez da tinkoa eta hurbilketa ez da ona izango $|t| \ll 1/|\epsilon|$ tartetik kanpo. Lehenengoz astronomiako problemak aztertzean agertu zirenez, gai horiek **mendetakoak** direla esaten da eta **erresonantzia** dagoelako agertzen dira. Izan ere, (7.7) ekuazioa

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = -\frac{\omega_0^2 A^3}{4}\left[\cos 3(\omega_0 t + \delta) + 3\cos(\omega_0 t + \delta)\right] \tag{7.9}$$

moduan idazten badugu, gai ez-homogeneoan osziladore askearen maiztasun bera duen gai bat (kanpo-indar bat) agertzen dela ikusten dugu.

Oztopo hau gainditzeko, osziladore ez-linealaren maiztasuna, ω_0 izan beharrean, anplitudearen menpekoa dela erabil dezakegu. Gainera, dimentsioak kontuan hartuz, dimentsio gabeko ϵA^2 parametroaren menpekoa izango dela espero dezakegu. Horrexegatik, A^2 gaia ω_n-ren definizioan sartzen badugu,

$$\omega = \omega_0 + \epsilon\omega_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{7.10}$$

garapena erabiliz, hauxe dugu lehen ordenako hurbilketaren egitura:

$$x = A\cos\left[\omega_0 t + \delta + \epsilon t\omega_1\right] + \epsilon y + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{7.11}$$

7.5 ARIKETA Egiaztatu (7.11) soluzioa (7.5) higidura-ekuazioan saiatzean

$$\epsilon \left\{ \ddot{y} + \omega_0^2 y + \frac{\omega_0^2 A}{4}\left[A^2\cos 3(\omega_0 t + \delta) + \left[3A^2 - 8\frac{\omega_1}{\omega_0}\right]\cos(\omega_0 t + \delta)\right] \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0. \tag{7.12}$$

geratzen dela.

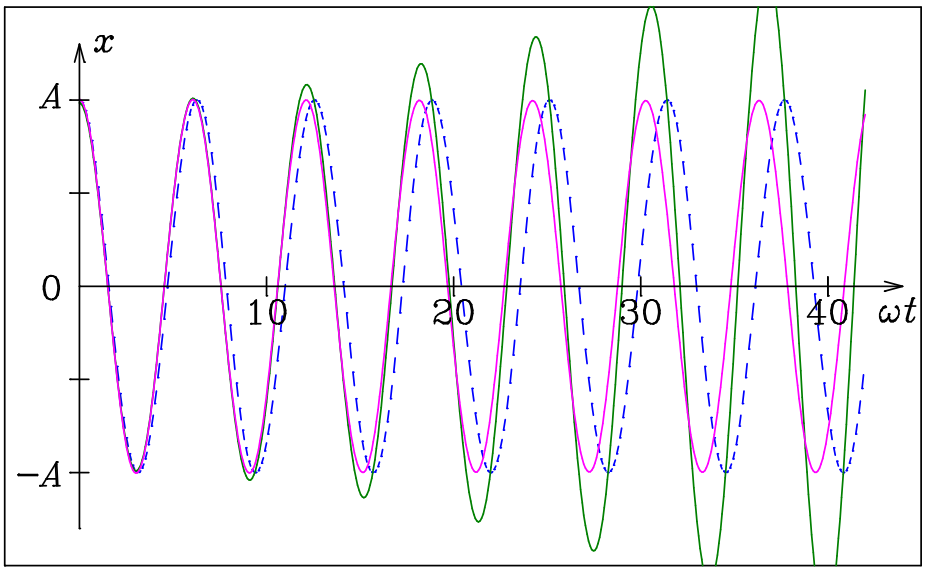
(7.12) ekuazioan ere mendetako gai bat dugu; baina orain, askatasun handiagoa dagoenez, gai erresonante hori ezabatu dezakegu bere koefiziente konstantea deuseztatzen badugu hurrengo aukerarekin:

$$\omega_1 = \frac{3}{8} A^2 \omega_0, \tag{7.13}$$

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{3}{8}\epsilon A^2\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{7.14}$$

7.6 ARIKETA Egiaztatu (7.13) aukerarekin, soluzioa honela idazten dela:

$$x = A\cos\left[\omega_0\left(1 + \frac{3}{8}\epsilon A^2\right)t + \delta\right] + \epsilon\frac{A^3}{32}\cos 3(\omega_0 t + \delta) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{7.15}$$



7.2 IRUDIA Osziladore kuasi-harmonikoaren soluzioa[1].

7.2 irudian dugu $\epsilon A^2 = 0.1$ kasuko soluzio bat, $x(0) = A$ eta $\dot{x}(0) = 0$ baldintzei dagokiena. Lerro etenaz marrazten da 0 ordenako $x = A\cos(\omega_0 t + \delta)$ soluzioa eta lerro jarraituez (7.8) adierazpeneko lehen ordenako hurbilketa gorakorra eta Poincaré eta Lindstedt-en metodoak emandako (7.15) hurbilketa periodikoa eta ekuazio osoaren zenbakizko soluzioa. Azken biak ez dira bereizten irudian eta agerian dago beren periodoa (maiztasuna) txikiagoa (handiagoa) dela.

7.3 Perturbazio-teoria kanonikoa

Transformazio kanonikoak erabiliko ditugu atal honetan, soluzio periodikoetarako hurbilketak kalkulatzeko. Nolabait ebatzi dugun H_0 hamiltondar banangarri bat izango da gure abiapuntua eta funtsezko hipotesiak hurrengoak:

- Hamiltondar osoa ez dela oso desberdina, hau da,

$$H = H_0 + \epsilon H_1, \qquad (|\epsilon| \ll 1) \tag{7.16}$$

  egiturakoa dela

[1] http://tp.lc.ehu.es/jma/mteorikoa/poincare/eregularra.ds

- eta sistema osoaren soluzioak (kuasi-)periodikoak direla (hortaz, H_0 eta H osoki integragarriak dira).

7.3.1 Dimentsio bakarreko sistemak

Eman dezagun nolabait kalkulatu ditugula H_0-ren (ϕ_0, J_0) angelu- eta ekintza-aldagaiak. Horiek erabiliz, $H_0 = H_0(J)$ izango da, dagokion maiztasuna

$$\omega_0(J) = H_0'(J), \tag{7.17}$$

eta hamiltondar osoa

$$H(\phi_0, J_0) = H_0(J_0) + \epsilon H_1(\phi_0, J_0). \tag{7.18}$$

Hamiltondar osoari dagozkien (ϕ, J) angelu- eta ekintza-aldagaiak urratsez urrats lortzea izango da gure asmoa. Horretarako perturbazio-serieen bidez eraikiko ditugu $(\phi_0, J_0) \to (\phi, J)$ transformazio kanonikoa eta dagokion bigarren motako $F_2 = S(\phi_0, J)$ funtzio sortzailea:

$$S(\phi_0, J) = \phi_0 J + \epsilon S_1(\phi_0, J) + \epsilon^2 S_2(\phi_0, J) + \cdots \tag{7.19}$$

$$J_0 = \frac{\partial S}{\partial \phi_0} = J + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \phi_0} + \epsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial \phi_0} + \cdots \tag{7.20}$$

$$\phi = \frac{\partial S}{\partial J} = \phi_0 + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial J} + \epsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial J} + \cdots \tag{7.21}$$

Hamiltondar osoa J-ren funtzio hutsa izango da,

$$E(J) \equiv H\left[\phi_0(\phi, J), J_0(\phi, J)\right] = E_0(J) + \epsilon E_1(J) + \epsilon^2 E_2(J) + \cdots \tag{7.22}$$

eta $J_0 = J$ puntuaren inguruan garatzen badugu, ϕ_0 aldatu gabe,

$$H(\phi_0, J_0) = H(\phi_0, J) + (J_0 - J)\frac{\partial H}{\partial J_0}(\phi_0, J) + \frac{1}{2}(J_0 - J)^2 \frac{\partial^2 H}{\partial J_0^2}(\phi_0, J) + \cdots, \tag{7.23}$$

hauxe dugu (7.20)-ren ondorioz:

$$\begin{aligned} H(\phi_0, J_0) &= H(\phi_0, J) + \left(\epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \phi_0} + \epsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial \phi_0} + \cdots\right) \frac{\partial H}{\partial J_0}(\phi_0, J) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \phi_0} + \epsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial \phi_0} + \cdots\right)^2 \frac{\partial^2 H}{\partial J_0^2}(\phi_0, J) + \cdots \\ &= H(\phi_0, J) + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \phi_0}\frac{\partial H}{\partial J} + \epsilon^2 \left[\frac{\partial S_2}{\partial \phi_0}\frac{\partial H}{\partial J} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \phi_0}\right)^2 \frac{\partial^2 H}{\partial J^2}\right] + \cdots \end{aligned} \tag{7.24}$$

Azken adierazpenean ondoko notazio erraztua erabili da:

$$\frac{\partial H}{\partial J} \equiv \frac{\partial H(\phi_0, J)}{\partial J} = \frac{\partial H}{\partial J_0}(\phi_0, J). \tag{7.25}$$

Orain (7.24) garapenean (7.18) egitura ordezkatzen badugu, ondokoak dira (7.22) seriearen koefizienteak, (7.17) funtzioa erabiliz:

$$E_0(J) = H_0(J), \tag{7.26}$$

$$E_1(J) = H_1(\phi_0, J) + \frac{\partial H_0}{\partial J}\frac{\partial S_1}{\partial \phi_0} = H_1(\phi_0, J) + \omega_0(J)\frac{\partial S_1}{\partial \phi_0}, \tag{7.27}$$

$$E_2(J) = \frac{\partial H_1}{\partial J}\frac{\partial S_1}{\partial \phi_0} + \omega_0(J)\frac{\partial S_2}{\partial \phi_0} + \frac{1}{2}\omega_0'(J)\left(\frac{\partial S_1}{\partial \phi_0}\right)^2. \tag{7.28}$$

E_j eta S_j funtzioak kalkulatu behar dira ekuazio hauetatik eta horretarako batez besteko batzuk erabiliko ditugu. J_0 aldatzen ez denean ϕ_0-ren aldaketa 2π bada, H_0 hamiltondarraren C_0 ziklo batean barrena higitzen da fase-espazioko puntua eta, ondorioz, hasierako eta amaierako puntuak berdinak dira eta bertan J-ren balioa berdina da, ϕ_0 eta J aldagai independenteak baitira. Ondorioz, J aldatu gabe, ϕ_0-ren aldaketa 2π bada hasierako eta amaierako puntu berdinak dituen beste kurba itxi bat lortuko dugu fase-espazioan eta, (7.20)–(7.21) ekuazioak ϵ guztietarako betetzen direnez, $\partial S_j/\partial\phi_0$ eta $\partial S_j/\partial J$ ez dira aldatzen: periodikoak izango dira J konstante bakoitzeko. S_j funtzioak ere periodikoak izango dira[2] eta honelako Fourieren garapen bat onartuko dute:

$$S_j\left(\phi_0, J\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{jm}(J)\, e^{im\phi_0}. \tag{7.29}$$

J balio bakoitzeko, ϕ_0-rekiko batez bestekoa

$$\langle F\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\left(\phi_0, J\right)\, d\phi_0 \tag{7.30}$$

moduan definitzen bada —eta deribatuan (7.29) garapenetako gai konstantea desagertzen dela kontuan hartuz— hauxe lortzen dugu:

$$\left\langle \frac{\partial S_j}{\partial \phi_0}\right\rangle = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{7.31}$$

Emaitza hau eta $\left\langle E_j\right\rangle = E_j$ erabiliz, hauxe da (7.27) adierazpenaren batez bestekoa:

$$E_1(J) = H_1\left(\phi_0, J\right) + \omega_0(J)\frac{\partial S_1}{\partial \phi_0} = \langle E_1\rangle = \langle H_1\rangle\,. \tag{7.32}$$

Emaitza hau

$$\frac{\partial S_1}{\partial \phi_0} = \frac{\langle H_1\rangle - H_1\left(\phi_0, J\right)}{\omega_0(J)} \tag{7.33}$$

ekuazio diferentziala denez, printzipioz hemendik kalkula daiteke S_1 funtzioa. Izan ere, 7.8 probleman frogatuko dugunez, hauxe dugu:

$$S_1 = \frac{i}{\omega_0}\sum_{k\neq 0}\frac{a_k(J)}{k}\, e^{ik\phi_0}, \tag{7.34}$$

$$a_k(J) \equiv \left\langle \left[H_1\left(\phi_0, J\right) - \langle H_1\rangle\right] e^{-ik\phi_0}\right\rangle. \tag{7.35}$$

Era berean, 7.9 probleman ikusiko dugunez, hauxe da S_2 lortzeko ebatzi behar dugun ekuazio diferentziala:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_2}{\partial \phi_0} = {}& \frac{1}{\omega_0^2}\left[\left\langle H_1'\right\rangle\langle H_1\rangle - \left\langle H_1 H_1'\right\rangle + \left(H_1 - \langle H_1\rangle\right) H_1'\right] \\ & + \frac{\omega_0'(J)}{2\omega_0^3}\left[\left\langle H_1^2\right\rangle - H_1^2 + 2\langle H_1\rangle\left(H_1 - \langle H_1\rangle\right)\right],\end{aligned} \tag{7.36}$$

[2]Printzipioz, deribatuak ϕ_0-rekiko periodikoak badira, S_j funtzioan $C_j\phi_0$ gai bat egon daiteke; baina bakarrik behar dugu transformazio kanoniko egoki bat eta hemen eraikitzen ari garen transformazio partikularrean $C_j = 0$ hartuko dugu beti.

non $H_1' \equiv \partial H_1/\partial J$ idatzi dugun.

S_1 eta S_2 kalkulatu gabe ere aurki daiteke $E(J)$ funtzioa, (7.26)–(7.28) eta (7.33)–(7.36) ekuazioak (7.22) garapenean ordezkatuz, hauxe baitugu:

$$E(J) = H_0(J) + \epsilon \langle H_1 \rangle + \frac{\epsilon^2}{\omega_0} \left[\langle H_1' \rangle \langle H_1 \rangle - \langle H_1 H_1' \rangle + \frac{\omega_0'(J)}{2\omega_0} \left(\left\langle H_1^2 \right\rangle - \langle H_1 \rangle^2 \right) \right] + \cdots \tag{7.37}$$

Hemendik kalkula daiteke, hurbilketa berean, $\omega = E'(J)$ maiztasun berria.

7.3.2 Osziladore kuasi-harmonikoa

Azter dezagun berriro (7.4) hamiltondarra. 6.11 probleman frogatu dugunez, hauexek dira hasierako angelu- eta ekintza-aldagaiak:

$$\phi_0 = \arctan \frac{m\omega_0 x}{p}, \qquad J_0 = \frac{p^2}{2m\omega_0} + \frac{1}{2} m\omega_0 x^2. \tag{7.38}$$

(Aurreko ataleko notazioarekin bat etortzeko, osziladore askearen maiztasuna ω_0 dela idatzi dugu hemen.) Hemendik erraz lortzen dira hurrengoak:

$$p = m\omega_0 x \cot \phi_0, \tag{7.39}$$

$$\frac{1}{2}\omega_0 x^2 = \frac{J_0}{m} \sin^2 \phi_0, \tag{7.40}$$

$$H_0 = \omega_0 J_0, \tag{7.41}$$

$$H_1 = \frac{1}{m} J_0^2 \sin^4 \phi_0. \tag{7.42}$$

$J_0 \to J$ aldaketa eginez, honela geratzen zaigu (7.32) gaia:

$$E_1 = \langle H_1 \rangle = \frac{J^2}{2\pi m} \int_0^{2\pi} \sin^4 \phi_0 \, d\phi_0 = \frac{3J^2}{8m}. \tag{7.43}$$

Ondorioz, hauxe dugu sistema osoaren maiztasuna:

$$\omega = E'(J) = \omega_0 + \epsilon E_1'(J) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \omega_0 + \frac{3\epsilon J}{4m} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{7.44}$$

7.10 probleman frogatuko dugu (7.14) emaitzaren baliokidea dela hau eta 7.11 probleman aurkituko dugu $(\phi_0, J_0) \to (\phi, J)$ transformazio kanonikoa, lehen ordenako hurbilketa honetan.

7.3.3 n dimentsioko sistemak

Ideiak berdinak dira, baina kalkuluak apur bat luzeagoak. Hemen bakarrik bilduko ditugu lehen ordenako emaitzak notazio laburtua erabiliz. Hamiltondarra, zero ordenako angelu- eta ekintza-aldagaietan

$$H\left(\boldsymbol{\phi}_0, \mathbf{J}_0\right) = H_0\left(\mathbf{J}_0\right) + \epsilon H_1\left(\boldsymbol{\phi}_0, \mathbf{J}_0\right) \tag{7.45}$$

bada, hauxe dugu:

$$E(\mathbf{J}) = H_0\left(\mathbf{J}\right) + \epsilon \langle H_1 \rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{7.46}$$

$$\langle F \rangle \equiv \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{2\pi} d\phi_2 \cdots \int_0^{2\pi} d\phi_n \, F\left(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \mathbf{J}\right). \tag{7.47}$$

Badirudi dena dela oso antzekoa, baina ikus dezagun nola idazten den funtzio sortzailea:

$$S\left(\boldsymbol{\phi}_0, \mathbf{J}\right) = \boldsymbol{\phi}_0 \cdot \mathbf{J} + i\epsilon \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} \frac{a_{\mathbf{k}}(\mathbf{J})\, e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\phi}_0}}{\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega}_0}, \tag{7.48}$$

$$a_{\mathbf{k}}(\mathbf{J}) \equiv \left\langle \left[H_1\left(\boldsymbol{\phi}_0, \mathbf{J}\right) - \langle H_1\rangle\right] e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\phi}_0} \right\rangle. \tag{7.49}$$

$\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ denez,

$$\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega}_0 = k_1\omega_{01} + k_2\omega_{02} + \cdots + k_n\omega_{0n} \tag{7.50}$$

izendatzaileren batzuk nuluak dira zero ordenako maiztasunak elkarneurgarriak direnean, hau da, **erresonantzia** dagoenean. Ageri denez, kasu endekatu horiekin ezin da erabili perturbazio-teoria kanonikoa. Areago, erresonantzia zehatzik ez badago ere, $\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega}_0$ izendatzaileren bat txikia bada, nahiz eta ϵ txikia izan, (7.48) funtzio sortzailearen bigarren gaia lehenengoa baino askoz handiagoa izan daiteke: perturbazio-seriea ez da nahitaez hurbiltzailea izango. **Izendatzaile txikien problema** hau gertatzen denean kontuz ibili behar da, perturbazio txiki batek zero ordenako toruak deusezta baititzake eta sistema osoa integragarria delako hipotesia ez da beti egia izango: perturbazio-metodoa ez da egokia. Toruen deuseztapena nola gertatzen den aztertzen da **KAM teoreman**[3].

7.4 Teorema adiabatikoa

Eman dezagun a parametroaren balio konstante bakoitzeko $H(\mathbf{s}; a)$ hamiltondarra osoki integragarria dela. Angelu- eta ekintza-aldagaiak a-ren menpekoak izango dira, oro har. Orain a parametroaren ordez, $a(t)$ funtzio bat badago —adibidez, pendulu matematikoaren luzera aldatzen delako—, sistema ez da oro har integragarria izango; baina t bakoitzean lehenago bezala kalkula daitezke angelu- eta ekintza-aldagaiak. Alabaina, orain J_i aldagai bakoitza ez da higidura-konstantea izango, denboraren menpekoa baizik.

Hemendik aurrera a parametroaren aldaketa **adiabatikoa** dela suposatuko dugu: periodo batean energiaren $\Delta E/E$ aldaketa proportzionala txikia da eta ez da inolako erresonantziaren sortzen. Gainera, periodo batean $\dot{a}$ ia konstantea eta txikia dela emango dugu, $\dot{a}^2$ eta ordena handiagoko gaiak arbuiatu ahal izateko. Orain $W(\mathbf{q}, \mathbf{J})$ funtzio sortzailea denboraren esplizituki menpekoa denez, honako hauek izango dira hamiltondar berria eta ekintza-aldagaien deribatua:

$$\tilde{H} = H(\mathbf{J}) + \frac{\partial W}{\partial t} = H(\mathbf{J}) + \frac{\partial W}{\partial a}\,\dot{a},$$

$$\dot{J}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \phi_i} = -\frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial a}\,\dot{a}.$$

T periodoko ziklo batean barrena kalkulatutako

$$\left\langle \dot{J}_i \right\rangle = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial a}\,\dot{a}\, d\phi_i \tag{7.51}$$

batez bestekoan hauxe dugu, $\dot{a}$ ia konstantea baita:

$$\left\langle \dot{J}_i \right\rangle \approx -\frac{\dot{a}}{2\pi}\left[\left.\frac{\partial W}{\partial a}\right|_{\phi_i+2\pi, a(t+T)} - \left.\frac{\partial W}{\partial a}\right|_{\phi_i, a(t)}\right]. \tag{7.52}$$

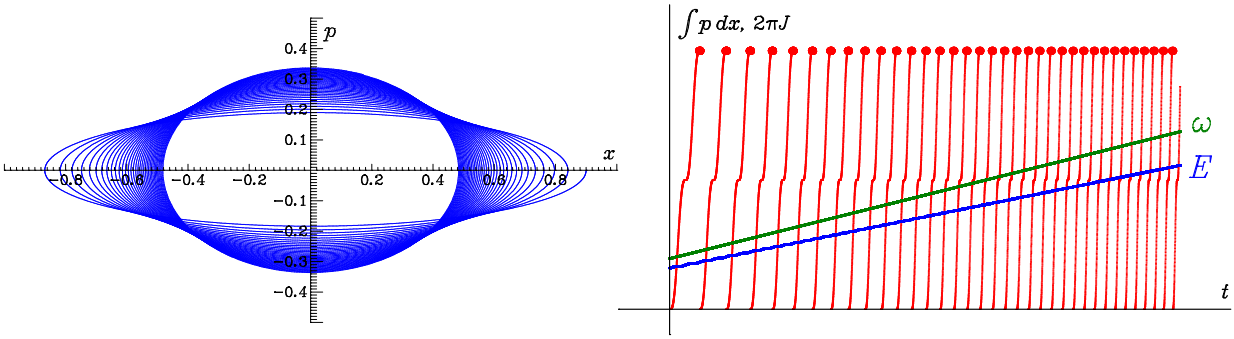
[3] Kolmogorov, Arnold eta Moser matematikariek enuntziatu eta frogatu zuten teorema famatu eta zail hau.

W sortzailea ϕ_i-rekiko periodikoa denez, honako hau lortzen dugu:

$$\left\langle \dot{J}_i \right\rangle \approx -\frac{T}{2\pi}\frac{\partial^2 W}{\partial a^2}\,\dot{a}^2 \approx 0. \tag{7.53}$$

Hauxe dugu teorema adiabatikoa: a funtzioa oso astiro aldatzen bada, J_i ia-ia konstantea izango da, batez beste. **Aldaezin adiabatikoa** dela esaten da. Ondorioz, $E(\mathbf{J}, a)$ energiaren aldaketa ia-ia a parametroaren aldaketaren ondorio hutsa izango da.

Osziladore harmonikoaren kasuan, fase-orbita eliptikoaren azalerarekiko proportzionala da $J = E/\omega$ ekintza-aldagaia. Osziladorearen ω maiztasun propioa, konstantea izan beharrean, oso astiro aldatzen bada, $\omega(t)$ lege baten arabera, orbita astiro-astiro aldatzen den elipse bat da; baina bere azalera ia konstantea izango da eta energia $dE/E \approx d\omega/\omega$ legearen arabera aldatuko da.



7.3 IRUDIA Osziladore harmonikoaren eboluzio adiabatikoa[4].

7.3 irudian ikusten dugu zer gertatzen den $\dot{\omega}$ konstantea eta txikia denean. Ezkerrean dago fase-orbitaren zati bat eta eskuinean ω eta E-ren eboluzioa eta ziklo bat ($\dot{x} = 0$ denean) hasi zenetik kalkulatutako $\int p\,dx$ magnitudea. Ziklo bat amaitzen denean (grafikoaren goiko puntu lodi batean) zikloaren azaleraren berdina da magnitude hori. Agerian dago ia konstantea dela. Gainera, ω handituz doanean, periodoa (eten-puntu lodien arteko distantzia) txikituz doa.

[4]Ikus http://tp.lc.ehu.es/jma/mteorikoa/poincare/adiabatikoa.ds eta http://tp.lc.ehu.es/jma/mteorikoa/poincare/adiabatikoa.html

7.5 Problemak

Oharra: Gai honetako problemak egiteko, biziki gomendatzen da ikur-kalkulua egiteko programaren bat erabiltzea.

7.1 Aurkitu 7.1 ataleko problemaren soluzioaren hurrengo hurbilketa.

7.2 Osziladore kuasi-harmonikoa (I). Egiaztatu (7.15) soluzioan maiztasuna ϵ-ekiko garatzen bada, (7.8) adierazpena berreskuratzen dela. Iruzkina egin emaitzari.

7.3* Osziladore kuasi-harmonikoa (II). Erabil ezazu energia mekanikoaren kontserbazio-legea, (7.4) osziladorearen periodoaren hurbilketa zuzenean lortzeko. Egiaztatu (7.14) emaitza.

7.4 Merkurioren perihelioaren prezesioa. Keplerren problema erlatibitate orokorrean aztertzen denean, orbitaren ekuazioa honela idatz daiteke koordenatu polarretan:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p} + \epsilon\, p\, u^2,$$

$u = 1/r$ izanik. $\epsilon = 0$ denean Bineten formula (ikus, adibidez, [7]) berreskuratzen dugu. Bestalde, ekuazio honek $\epsilon = 3M_\odot G/pc^2 \approx 8 \times 10^{-8}$ balioarekin emandakoa da Eguzkiaren inguruko Merkurioren orbita. Erabili lehen ordenako perturbazio-teoria orbita kalkulatzeko, mendetako gairik gabe. Ondoz ondoko perihelio biren arteko angelua —hau da, u-ren ondoz ondoko maximo biren arteko angelua— kalkulatu eta egiaztatu ez dela 2π balioaren berdina: perihelioa prezesatzen ari da, beraz. Merkuriok mende batean Eguzkiaren inguruko 415 bira egiten dituela erabiliz, frogatu erlatibitate orokorraren arabera Merkurioren perihelioaren prezesioa denbora-tarte berdinean $43''$ baliokoa dela. (Emaitza hau bat dator balio neurtuarekin: $43.11 \pm 0.45''$/mende.)

7.5 Osziladore harmoniko erlatibista Erabili Poincaré eta Lindstedten metodoa osziladore harmoniko erlatibistaren ekuazio kanonikoen soluzioaren lehen zuzenketa erlatibista kalkulatzeko, $1/c^2$-rekiko garapenean.

7.6* Osziladore indargetua (I). Poincaré eta Lindstedten metodoan higidura-ekuazio osoaren soluzioak ere periodikoak direla erabili da. Hori ez da egia izango ondoko probleman:

$$\ddot{x} + 2\epsilon\dot{x} + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = A_0.$$

Aurkitu soluzio analitikoa. Egiaztatu perturbazio erregularraren bidez mendetako gaiak agertzen direla. Perturbazio-metodo bat erabiltzeko, eman maitasuna *eta A anplitudea* direla ϵ parametroen menpekoak eta erabili hipotesi horiek erresonantziak ezabatzeko.
Iradokizuna: Aurkituko den $A'(0)$ eta $A(0) = A_0$ balioen arteko erlazioa $A'(t)$ eta $A(t)$ funtzioetara hedatu behar da.

7.7* Osziladore indargetua (II). 7.6 problemaren ildo beretik ebatzi

$$\ddot{x} + \epsilon\dot{x}^3 + x = 0$$

ekuazioa perturbazioen bidez eta erabili emaitza oreka-puntuaren egonkortasuna eztabaidatzeko, ϵ balio txiki positibo eta negatiboetarako.

7.8 Frogatu (7.34)–(7.35) emaitzak.

7.9 Frogatu (7.36) emaitza.

7.10* **Osziladore kuasi-harmonikoa**. Frogatu (7.44) emaitza lehenago lortu genuen (7.14) maiztasunaren baliokidea dela.

7.11* **Osziladore kuasi-harmonikoa**. Aurkitu $(\phi_0, J_0) \to (\phi, J)$ transformazio kanonikoa (ϵ-en lehen ordenaraino) (7.4) hamiltondarraren kasuan.

7.12 **Osziladore harmoniko erlatibista** Erabili perturbazio-teoria kanonikoa osziladore harmoniko erlatibistaren maiztasunaren lehen zuzenketa erlatibista kalkulatzeko, $1/c^2$-rekiko garapenean. Idatzi $\Delta\omega/\omega$ zuzenketa proportzionala energiaren funtzioan.

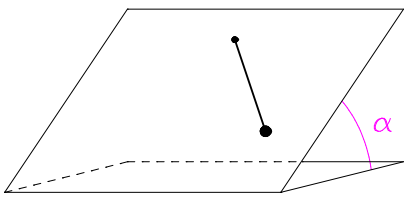
7.13* Bi osziladore harmonikoren arteko mihiztadura ez-lineala adierazteko ondoko hamiltondarra erabiltzen da, dimentsio egokiko aldagaietan:

$$H = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{1}{2}\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}\omega_y^2 y^2 + \epsilon\omega_x^2\omega_y^2 x^2 y^2.$$

Aurkitu bi maiztasunetarako lehen hurbilketa.

7.14 6.15 problemako F parametroa astiro-astiro aldatzen bada, nola aldatuko dira oszilazioen energia mekanikoa, anplitudea eta periodoa?

7.15 Pendulu matematiko bat plano aldapatsu leun baten gainean oszilatzen da. (a) Nola aldatzen da oszilazio txikien anplitudea, horizontalarekiko α angelua astiro-astiro aldatzean? (b) Adibidez, nola aldatzen da, α angelua $30°$-tik $60°$-ra joatean?



ERANSKINAK

A ERANSKINA

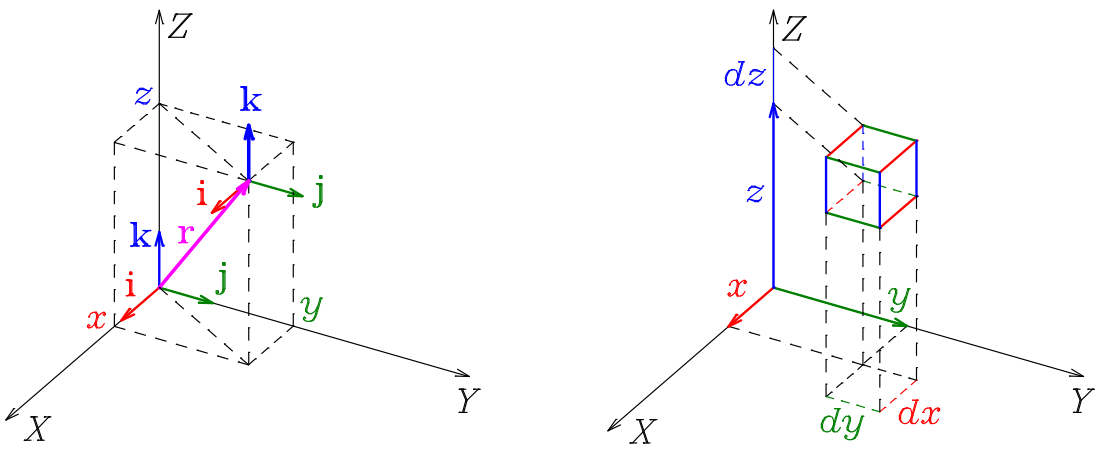
Osagarri matematikoak

A.1 Koordenatu-sistema erabilienak

A.1.1 Koordenatu cartesiarrak

Posizioa:	$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}.$	
Oinarria:	$\mathbf{i} = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial x},\ \mathbf{j} = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial y},\ \mathbf{k} = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial z},$	$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0,\ \ \mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}.$
Arkua:	$d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k},$	$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$
Bolumena:	$dV = dx\,dy\,dz.$	
Abiadura:	$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j} + \dot{z}\,\mathbf{k},$	$\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2.$
Transformazioak:	$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi; \\ z = z. \end{cases}$	$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi; \\ y = r\sin\theta\sin\varphi; \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$

A.1 TAULA Koordenatu cartesiarrak.

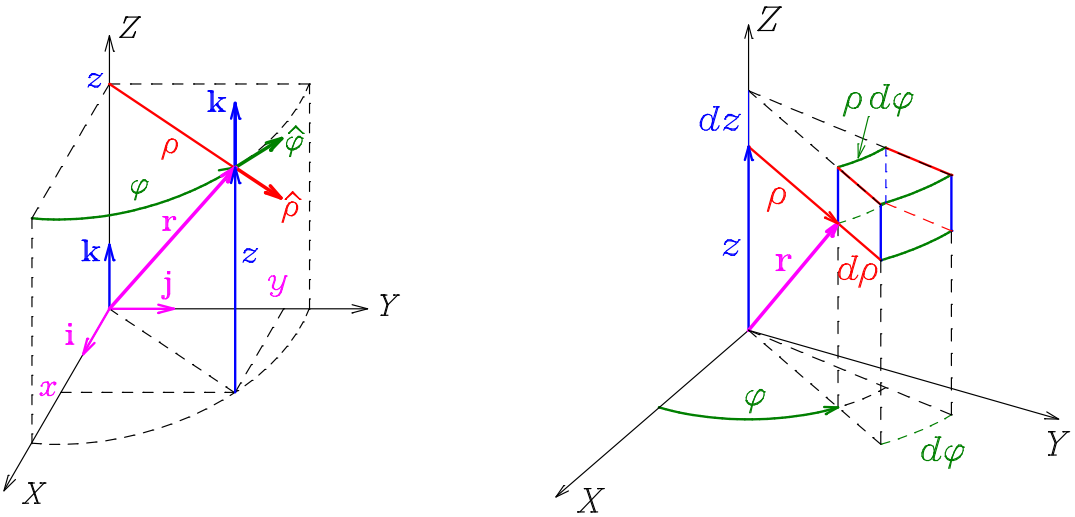


A.1 IRUDIA Koordenatu cartesiarrak.

A.1.2 Koordenatu polar zilindrikoak

Posizioa:	$\mathbf{r} = \rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\,\mathbf{k}.$	
Oinarria:	$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho},\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi},\ \mathbf{k} = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial z},$	$\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}} = 0,\ \ \hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{k}.$
Arkua:	$d\mathbf{r} = d\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\,d\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz\,\mathbf{k},$	$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2\,d\varphi^2 + dz^2}.$
Bolumena:	$dV = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz.$	
Abiadura:	$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\dot{\varphi}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{z}\,\mathbf{k},$	$\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2.$
Transformazioak:	$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}; \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x}; \\ z = z. \end{cases}$	$\begin{cases} \rho = r\sin\theta; \\ \varphi = \varphi; \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$

A.2 TAULA Koordenatu polar zilindrikoak.



A.2 IRUDIA Koordenatu polar zilindrikoak.

A.1 ARIKETA Froga ezazu koordenatu zilindrikoek definituriko bektore unitarioak

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j}, \tag{A.1}$$
$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j}, \tag{A.2}$$
$$\mathbf{k} = \mathbf{k} \tag{A.3}$$

moduan idazten direla $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ oinarrian eta egiaztatu euren propietateak.

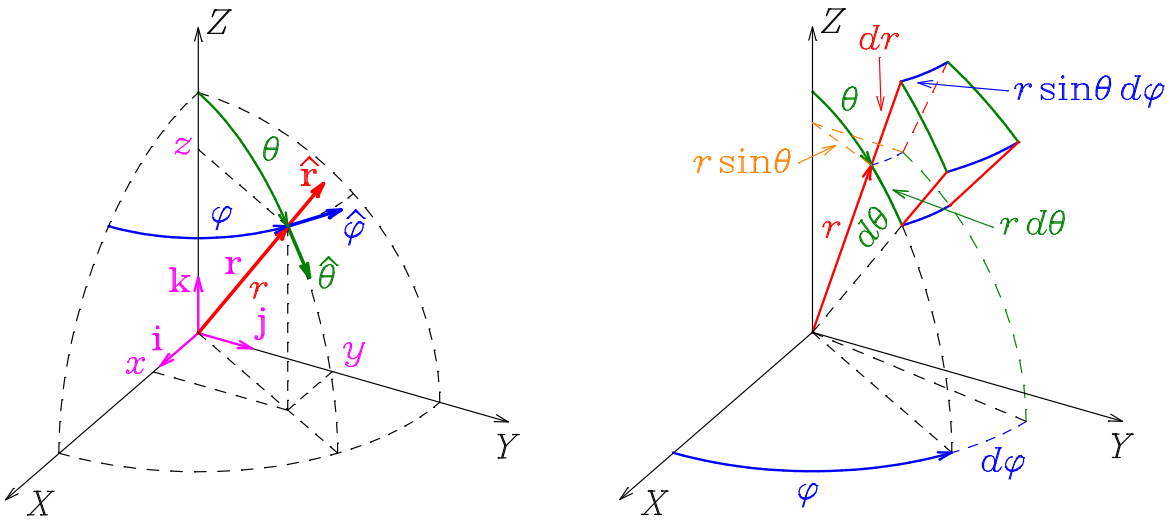
A.2 ARIKETA Frogatu honela idazten dela azelerazioa koordenatu zilindrikoetan:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\right)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \ddot{z}\,\mathbf{k}. \tag{A.4}$$

A.1.3 Koordenatu polar esferikoak

Posizioa:	$\mathbf{r} = r\,\hat{\mathbf{r}}$.	
Oinarria:	$\hat{\mathbf{r}} = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial r},\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta},\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi},$	$\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\hat{\mathbf{r}} = 0,\ \ \hat{\mathbf{r}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}.$
Arkua:	$d\mathbf{r} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}},$	$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\right)}.$
Bolumena:	$dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi.$	
Abiadura:	$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}},$	$\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right).$
Transformazioak:	$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}; \\ \theta = \arctan\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}; \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x}. \end{cases}$	$\begin{cases} r = \sqrt{\rho^2+z^2}; \\ \theta = \arctan\dfrac{\rho}{z}; \\ \varphi = \varphi. \end{cases}$

A.3 TAULA Koordenatu polar esferikoak.



A.3 IRUDIA Koordenatu polar esferikoak.

A.3 ARIKETA Froga ezazu koordenatu esferikoek definitzen dituzten bektore unitarioak

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\,(\cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j}) + \cos\theta\,\mathbf{k}, \tag{A.5}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\,(\cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j}) - \sin\theta\,\mathbf{k}, \tag{A.6}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j} \tag{A.7}$$

moduan idazten direla $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ oinarrian eta egiaztatu euren propietateak.

A.4 ARIKETA Frogatu honela idazten dela azelerazioa koordenatu esferikoetan:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} = &\left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 - r\,\dot{\varphi}^2\,\sin^2\theta\right)\hat{\mathbf{r}} + \\ &\left(r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta} - r\,\dot{\varphi}^2\,\sin\theta\,\cos\theta\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \\ &\left(r\,\ddot{\varphi}\,\sin\theta + 2\dot{r}\,\dot{\varphi}\,\sin\theta + 2r\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\,\cos\theta\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}.\end{aligned} \tag{A.8}$$

A.1.4 Koordenatu parabolikoak

Honela definitzen dira $\{\xi, \eta, \varphi\}$ koordenatu parabolikoak, zilindrikoak erabiliz:

$$\xi = \sqrt{\rho^2 + z^2} + z, \qquad (0 \leq \xi < \infty), \tag{A.9}$$

$$\eta = \sqrt{\rho^2 + z^2} - z, \qquad (0 \leq \eta < \infty). \tag{A.10}$$

A.5 ARIKETA Egiaztatu hauxe dela alderantzizko transformazioa:

$$\rho = \sqrt{\xi\eta}, \tag{A.11}$$

$$z = \frac{\xi - \eta}{2}. \tag{A.12}$$

A.6 ARIKETA Frogatu honela idazten dela abiaduraren karratua koordenatu parabolikoetan:

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{4}(\xi + \eta)\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi} + \frac{\dot{\eta}^2}{\eta}\right) + \xi\eta\dot{\varphi}^2. \tag{A.13}$$

A.7 ARIKETA Egiaztatu ondoko erlazioak eta ondorioztatu OZ simetria-ardatzeko biraketa-paraboloide bat dela ξ (η) konstanteko leku geometrikoa.

$$z = -\frac{\rho^2}{2\xi} + \frac{\xi}{2}, \tag{A.14}$$

$$z = \frac{\rho^2}{2\eta} - \frac{\eta}{2}. \tag{A.15}$$

A.1.5 Koordenatu eliptikoak

Honela definitzen dira, σ parametroaren balio bakoitzeko, $\{\xi, \eta, \varphi\}$ koordenatu eliptikoak, zilindrikoak erabiliz:

$$\xi = \frac{\sqrt{\rho^2 + (z+\sigma)^2} + \sqrt{\rho^2 + (z-\sigma)^2}}{2\sigma}, \qquad (1 \leq \xi < \infty), \tag{A.16}$$

$$\eta = \frac{\sqrt{\rho^2 + (z+\sigma)^2} - \sqrt{\rho^2 + (z-\sigma)^2}}{2\sigma}, \qquad (-1 \leq \eta \leq 1). \tag{A.17}$$

A.8 ARIKETA Egiaztatu hauxe dela alderantzizko transformazioa:

$$\rho = \sigma\sqrt{\left(\xi^2 - 1\right)\left(1 - \eta^2\right)}, \tag{A.18}$$

$$z = \sigma\xi\eta. \tag{A.19}$$

A.9 ARIKETA Frogatu honela idazten dela abiaduraren karratua koordenatu eliptikoetan:

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \sigma^2\left(\xi^2 - \eta^2\right)\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2 - 1} + \frac{\dot{\eta}^2}{1 - \eta^2}\right) + \sigma^2\left(\xi^2 - 1\right)\left(1 - \eta^2\right)\dot{\varphi}^2. \tag{A.20}$$

A.10 ARIKETA Egiaztatu ondoko erlazioak eta ondorioztatu ξ konstanteko leku geometrikoa OZ simetria-ardatzeko biraketa-elipsoide bat dela eta η konstanteko leku geometrikoa OZ ardatzeko biraketa-hiperboloide bat.

$$\frac{z^2}{\sigma^2\xi^2} + \frac{\rho^2}{\sigma^2\left(\xi^2 - 1\right)} = 1, \tag{A.21}$$

$$\frac{z^2}{\sigma^2\eta^2} - \frac{\rho^2}{\sigma^2\left(1 - \eta^2\right)} = 1. \tag{A.22}$$

A.2 Forma diferentzialak

Kontsidera dezagun $\mathbb{R}^n$ espazioko Ω eremu irekian definituriko $f_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ funtzio erregularrak[1]. Ondoko konbinazioak forma diferentzial lineal bat definitzen du:

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} f_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\, dx_i. \tag{A.23}$$

Partikula puntual baten gainean eragiten duen $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ indar-eremuak egindako lan infinitesimala dugu adibiderik ezagunena hiru dimentsiotan:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x(x, y, z)\, dx + F_y(x, y, z)\, dy + F_z(x, y, z)\, dz. \tag{A.24}$$

A.2.1 Forma zehatzak

(A.23) forma **zehatza** dela esaten da ondoko hiru baldintza baliokideak betetzen badira:

1. Formaren zirkulazioa zero da Ω-ko C kurba erregular itxi guztietan barrena:

$$\oint_C \sum_{i=1}^{n} f_i\, dx_i = 0. \tag{A.25}$$

2. Formaren lerro-integrala berdina da mutur komunak dituzten Ω-ko kurba erregular guztietan:

$$\int_{1,C_1}^{2} \sum_{i=1}^{n} f_i\, dx_i = \int_{1,C_2}^{2} \sum_{i=1}^{n} f_i\, dx_i. \tag{A.26}$$

3. Funtzio **potentzial** bat (eta, konstante gehigarri bat ahaztuta, soilik bat) existitzen da ondoko baldintzak betetzeko modukoa:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i\, dx_i = -dV \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{A.27}$$

Baldintza hauen arteko baliokidetasuna erraz frogatzen da formaren eta potentzialaren arteko erlazioa honako hau dela kontuan hartuz:

$$V\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = V_0 - \int_{P_0}^{P} \sum_{i=1}^{n} f_i\, dx_i, \tag{A.28}$$

non $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ den eta V_0 delakoa, $P_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ puntuan potentzialak duen balioa. (P_0 eta V_0 balioak eta P_0 eta P puntuak lotzen dituen integrazio-kurba nahi den moduan aukera daitezke.)

Horrela, zehatza da (A.24) lana $\mathbf{F}$ indar-eremua kontserbatzailea bada:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dV \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{F} = -\nabla V. \tag{A.29}$$

[1] Ikus 28. orriko oin-oharra.

A.2.2 Forma itxiak

(A.23) forma **itxia** dela esaten da deribatu gurutzatuak berdinak badira:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{A.30}$$

Dakigunez, (A.24) lana itxia da $\mathbf{F}$ indar-eremua irrotazionala denean:

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0. \tag{A.31}$$

A.2.3 Poincaréren lema

Ageri denez, forma zehatza (eta erregularra) bada, itxia izango da, (A.27) emaitzaren ondorioz. Gainera, Ω eremua konexua bada —hau da, ez badu *zulorik*—, (A.23) forma zehatza da baldin eta soilik baldin itxia bada. **Integragarritasun baldintzak** deitzen dira (A.30) baldintza beharrezko eta nahikoak eta eremu bektorial kontserbatzaileen errotazionala zero izatearen orokorpena dira.

Eremua zulorik gabekoa izateko eskatzearen arrazoia ikusteko, kontsidera dazagun OZ ardatzean barrena doan $I\,\mathbf{k}$ intentsitate konstanteko korronte infinituak sortutako eremu magnetikoa:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\frac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2}. \tag{A.32}$$

Ondo dakigunez, eremu magnetikoa ez da potentzial baten gradientearen kontrakoa: $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}$ forma ez da zehatza eta, Ampèreren legearen arabera, hauxe da eremu magnetikoaren zirkulazioa, erlojuaren orratzen kontrako noranzkoan korrontea behin inguratzen duen ibilbide itxi batean barrena I bada:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I. \tag{A.33}$$

Hala ere, erraz egiaztatzen da forma finitua deneko $\Omega = \left\{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 > 0\right\}$ eremuan itxia dela, honela idazten baita hor Ampèreren legea:

$$x^2 + y^2 > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla \times \mathbf{B} = 0. \tag{A.34}$$

Kontua da Ω eremuan $x^2 + y^2 = 0$ zuloa dagoela (eta bertan dago, hain zuzen ere, korrontea). Eremua konexua izateko baldintza nahikoa da, ez beharrezkoa: karga puntual batek sortzen duen eremu elektrostatikoa irrotazionala eta kontserbatzailea da, nahiz eta definituta dagoen eremuan zulo bat egon: karga bera.

A.3 Emaitza erabilgarriak

Testuan erabiltzen diren emaitza matematiko erabilgarri batzuen frogapenak biltzen dira atal honetan.

A.3.1 Teorema bat

A.1 TEOREMA *Matrize simetriko guztiekin biderkadura trukakorra duen matrize bat identitatearen multiploa da:*

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{S}=\mathbf{S}\cdot\mathbf{M},\ (\forall\mathbf{S}=\mathbf{S}^{\top})\qquad\Longrightarrow\qquad\mathbf{M}=k\,\mathbf{1},\ (k\in\mathbb{R},\mathbb{C}).\tag{A.35}$$

Izan ere, honela idazten da hipotesia indizeak erabiliz:

$$\sum_j M_{ij}S_{jk}=\sum_j S_{ij}M_{jk},\quad(\forall i,k).\tag{A.36}$$

Hemen hautazko matrize diagonal bat, $S_{ij}=\lambda_i\delta_{ij}$, ordezkatuz,

$$\sum_j M_{ij}\lambda_j\delta_{jk}=\sum_j\lambda_i\delta_{ij}M_{jk}\qquad\Longrightarrow\qquad\lambda_kM_{ik}=\lambda_iM_{ik},\quad(\forall i,k)\tag{A.37}$$

dugu eta $\lambda_i\neq\lambda_k$ aukeratuz ($i\neq k$ denean), $\mathbf{M}$ diagonala dela ondorioztatzen dugu:

$$M_{ij}=a_i\delta_{ij},\quad(\forall i,j).\tag{A.38}$$

Emaitza hau (A.36) hipotesian ordezkatuz,

$$\sum_j a_i\delta_{ij}S_{jk}=a_iS_{ik}=\sum_j S_{ij}a_j\delta_{jk}=a_kS_{ik},\quad(\forall i,k)\tag{A.39}$$

dugu eta, S_{ik} balioak hautazkoak direnez, $k\equiv a_1=a_2=\ldots$ dugu, frogatu nahi genuen bezala.

A.3.2 Integral pare bat

Hasteko,

$$I\equiv\int_{\arcsin a}^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{a^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta=\frac{\pi}{2}(1-a),\qquad(0\leq a\leq 1)\tag{A.40}$$

integrala kalkulatzeko, $\theta\to\psi$ aldagai-aldaketa egingo dugu, ondoko definizioaren bidez:

$$\cos\theta=\sqrt{1-a^2}\,\sin\psi,\qquad\left(\arcsin a\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},\quad\frac{\pi}{2}\geq\psi\geq 0\right),\tag{A.41}$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{\cos^2\psi+a^2\sin^2\psi},\tag{A.42}$$

$$d\theta=-\sqrt{1-a^2}\,\frac{\cos\psi}{\sin\theta}\,d\psi=-\sqrt{\frac{1-a^2}{\cos^2\psi+a^2\sin^2\psi}}\,\cos\psi\,d\psi,\tag{A.43}$$

$$I=\left(1-a^2\right)\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{1+a^2\tan^2\psi}.\tag{A.44}$$

Azkenik, ohi bezala, $u\equiv\tan\psi$ aldagai-aldaketa erabiliz, hauxe dugu:

$$\begin{aligned}I&=\left(1-a^2\right)\int_0^{\infty}\frac{d\psi}{\left(1+u^2\right)\left(1+a^2u^2\right)}=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+u^2}-\frac{a^2}{1+a^2u^2}\right)du\\&=\Big[\arctan u-a\arctan au\Big]_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}(1-a).\end{aligned}\tag{A.45}$$

Bestalde, taulak (edo ikur-kalkulua) erabiliz aurki daitekeen ondoko integrala erraz egiaztatzen da:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{(b-u)(u-a)}}{u^2}\,du = & -\frac{\sqrt{(b-u)(u-a)}}{u} \\ & + \frac{a+b}{\sqrt{ab}} \arctan\left[\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{u-a}{b-u}}\right] \\ & - 2\arctan\sqrt{\frac{u-a}{b-u}}, \qquad (0<a<u<b). \end{aligned} \tag{A.46}$$

Jarraitua denez, hauxe dugu:

$$\int_a^b \frac{\sqrt{(b-u)(u-a)}}{u^2}\,du = \pi\left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}-1\right), \qquad (0<a<b). \tag{A.47}$$

Hemen $r \equiv 1/u$, $r_- \equiv 1/b$ eta $r_+ \equiv 1/a$ eginez, honako hau lortzen da:

$$\int_{r_-}^{r_+} \sqrt{\left(\frac{1}{r_-}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_+}\right)}\,dr = \pi\left(\frac{r_-+r_+}{2\sqrt{r_-r_+}}-1\right), \qquad (0<r_-<r_+). \tag{A.48}$$

Plano konplexuan kalkulatzen da integral hau [2] liburuan.

B ERANSKINA

Problema batzuen soluzioak

1. GAIA

1.5 $L = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 - q\,(\Phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})$.

1.8 $\tilde{y}$ ziklikoa da.

1.9 $\tilde{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2 + \dot{\tilde{z}}^2\right) - V\left(\tilde{x}\cos\frac{\tilde{z}}{h} + \tilde{y}\sin\frac{\tilde{z}}{h}\right)$.

1.3 $\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\left(1 + \alpha\frac{\dot{r}^2 - 2r\ddot{r}}{c^2}\right)\frac{\mathbf{r}}{r}$.

1.10 $\tilde{L} - L = \frac{d}{dt}\left[malt\cos\theta + \frac{1}{6}ma(g-a)t^3\right]$.

1.11 Gauge aldaezintasunagatik.

2. GAIA

2.2 Helizeak.

2.3 (x_0, y_0) puntutik askatzen bada, φ parametroaren bidez emandako $x = x_0 \pm a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = y_0 - a(1 - \cos\varphi)$ zikloidea. Ibilbidea beste puntutik pasatzeko moduan aukeratu behar da $a > 0$ parametroa.

2.4 Bi puntuen arteko distantzia (zirkunferentzia maximo batean barrena neurtua) s bada eta bidaia egiteko denbora t, $I_0 = \frac{ms^2}{2t}$.

2.6 Osziladore harmonikoa.

2.9 $\mathbf{N} = -m\mathbf{g}$.

2.10 Normala $m\left(r\dot{\varphi}^2 + g\cos\varphi\right)$ da eta marruskadura $\frac{2}{7}mg\sin\varphi$.

2.11 $N_r = -mg\cos\theta - mR\omega^2\sin^2\theta - mR\dot{\theta}^2, \quad N_\theta = 0, \quad N_\varphi = 2mR\omega\dot{\theta}\cos\theta.$

2.12 $N = mg/\sqrt{2}$.

2.13 $N_r = kR - (mg + kR)(2 + 3\cos\varphi)$.

2.14 $v = \sqrt{(2+\sqrt{3})gR}$.

3. GAIA

3.2 $q = \sqrt{x}$.

3.3 A eta C integrazio-konstanteak erabiliz, $x = A^2\cos^2\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,t + C\right)$.

3.5 $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\left(x_k\frac{\partial U}{\partial y_k} - y_k\frac{\partial U}{\partial x_k} + \dot{x}_k\frac{\partial U}{\partial \dot{y}_k} - \dot{y}_k\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_k}\right) = \dot{\Lambda}.$

3.6 $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\left(t\,\frac{\partial U}{\partial x_k} + \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_k}\right) = \dot{\Lambda}.$

3.7 Hamiltondarra (energia mekanika) eta momentu angeluarraren hiru osagaiak.

3.8 Denak.

3.10 Lau higidura-konstante funtzionalki independente, adibidez, hauexek dira:

$$m\dot{x} + k\alpha t, \quad m\dot{y} - k\beta t, \quad mx - m\dot{x}t - \frac{1}{2}k\alpha t^2, \quad my - m\dot{y}t + \frac{1}{2}k\beta t^2.$$

3.11 Energia mekanikoa eta $\mathbf{L} + h\mathbf{p}$ bektorearen z osagaia.

3.13 Hamiltondarra.

3.14 $G = m\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}} - 2Et$. Funtzio homogeneoei buruzko Eulerren teorema.

4. GAIA

4.1 Bat ere ez.

4.2 $H = \dfrac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - q\mathbf{A}\right)^2 + q\Phi.$

4.3 $H = \dfrac{2}{m}\,\dfrac{\xi p_\xi^2 + \eta p_\eta^2}{\xi+\eta} + \dfrac{p_\varphi^2}{2m\xi\eta} + V(\xi,\eta,\varphi).$

4.4 $H = \dfrac{1}{2m\sigma^2\left(\xi^2-\eta^2\right)}\left[\left(\xi^2-1\right)p_\xi^2 + \left(1-\eta^2\right)p_\eta^2 + \left(\dfrac{1}{\xi^2-1}+\dfrac{1}{1-\eta^2}\right)p_\varphi^2\right] + V(\xi,\eta,\varphi).$

4.8 Lokalki bai, baina ez $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ osoan.

4.9 $H \to H - \partial G/\partial t.$

4.10 Partikula askea erreferentzia-sistema birakari batean.

4.11 $L = -mc^2\sqrt{1-\dot{\mathbf{r}}^2/c^2} - V(\mathbf{r}).$

4.12 Ardatzak beti aukera daitezke soluzio osoan $z = p_z = 0$ izateko moduan. Gainera, ibilbidearen ekuazioa $x = C\cosh\left(\dfrac{y}{C}+D\right)$ da.

4.19 $[x_i, L_j] = \epsilon_{ijk}x_k,\ [p_i, L_j] = \epsilon_{ijk}p_k,\ [L_i, L_j] = \epsilon_{ijk}L_k,\ [r^2, \mathbf{L}] = [p^2, \mathbf{L}] = [\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}, \mathbf{L}] = 0.$

5. GAIA

5.2 $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(t,\mathbf{q}),\ \tilde{p}_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_i}\,p_j.\quad c=1,\ F=0.\ F_2 = \sum_{i=1}^{n}\tilde{q}_i(t,\mathbf{q})\,\tilde{p}_i,\ F_3 = -\sum_{i=1}^{n} q_i(t,\tilde{\mathbf{q}})\,p_i.$

5.5 $H = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(p_r^2 + \dfrac{p_\theta^2}{r^2} + \dfrac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)} + V(\mathbf{r}).$

5.6 $c = 1,\quad \tilde{H} = H,\quad F_2 = q\tilde{p} - \frac{1}{2}q^2,\quad F_3 = -p\tilde{q} - \frac{1}{2}\tilde{q}^2,\quad F_4 = \frac{1}{2}(p-\tilde{p})^2.$

5.7 $c = 1/m,\quad F = \dfrac{qp}{m} - \dfrac{p^2 t}{2m^2}.$

5.8 $c = 1,\quad F_3 = -\left(e^{\tilde{q}}-1\right)^2\tan p.$

5.9 $c = 1,\quad F = q_2p_2,\quad \tilde{H} = H.$

5.11 $F_2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} q_i\tilde{p}_i + G(t,\mathbf{q},\tilde{\mathbf{p}})\,\delta a.$

5.12 $\tilde{q}_i = q_i,\ \tilde{p}_i = p_i + \dfrac{\partial G}{\partial q_i}.$

5.13 $\tilde{q}_i = q_i,\ \tilde{p}_i = cp_i + \dfrac{\partial f(t,\mathbf{q})}{\partial q_i}$, non $f(t,\mathbf{q})$ delakoa hautazko funtzioa den. $\tilde{L} = cL + \dot{f}.$

5.15 $G = xp_y - yp_x + hp_z$. Gogoratu 1.9 eta 3.11 problemak.

6. GAIA

6.10 Hiru.

6.11 $x = \sqrt{\dfrac{2J}{m\omega}}\,\sin\phi, \quad p = \sqrt{2m\omega J}\,\cos\phi.$

6.12 5.10 problemakoa.

6.13 $F = C\left(x^4 + 4x^2y^2\right) - 4p_x(p_xy - p_yx) + 4Ax^2y + \dfrac{4A-B}{C}\left(p_x^2 + Ax^2\right).$

6.14 Bai. Ez.

6.15 $T = \dfrac{\sqrt{32mE}}{F}.$

6.16 $T = 4\pi\sqrt{\dfrac{a}{g}}.$

6.17 $\delta\Phi = 2\pi\left[\left(1 + \dfrac{2mC}{L^2}\right)^{-1/2} - 1\right].$

6.18 $E = mc^2 / \sqrt{1 + \dfrac{k^2/c^2}{\left[J_r + \sqrt{\left(J_\theta + J_\varphi\right)^2 - k^2/c^2}\right]^2}}.$

6.19 E energiatik mc^2 gaia kentzen bada,

$$\begin{aligned}
\omega_r &= \omega_0\left[1 + \frac{3}{4}\frac{E}{mc^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right)\right],\\
\omega_\theta &=\\
\omega_\varphi &= \omega_0\left[1 + \frac{3}{4}\frac{E}{mc^2} + \frac{k^2}{2c^2\ell^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right)\right],\\
\delta\phi &\approx \frac{\pi k^2}{c^2\ell^2},\\
\left(\omega_0 \equiv \sqrt{-\frac{8E^3}{mk^2}}, \qquad \ell \equiv J_\theta + J_\varphi.\right)
\end{aligned}$$

7. GAIA

7.1 $x = \sin t + \epsilon\dfrac{1+\cos 2t}{4} + \epsilon^2\dfrac{7\sin t - \sin 3t}{28} + \mathcal{O}(\epsilon^3).$

7.5
$$\begin{cases} \omega = \omega_0 - \dfrac{3A^2\omega_0^3}{16c^2} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{c^4}\right), \\ x = A\cos(\omega t + \delta) + \dfrac{3A^3\omega_0^2}{28c^2}\cos 3(\omega t + \delta) + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{c^4}\right), \\ p = -mA\omega\sin(\omega t + \delta) - \dfrac{mA^3\omega_0^3}{56c^2}\left[21\sin(\omega t + \delta) + 11\sin 3(\omega t + \delta)\right] + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{c^4}\right). \end{cases}$$

7.6 $x = A_0 e^{-\epsilon t}\sin t + \mathcal{O}(\epsilon^2)$.

7.7 $x = \dfrac{2A_0}{\sqrt{4 + 3A_0^2\epsilon t}}\left\{\cos(t+\delta) + \epsilon\dfrac{A_0^2}{32}\sin\left[3(t+\delta)\right]\right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$.

7.11
$$\begin{cases} J = J_0 - \epsilon\dfrac{J_0^2}{8m\omega_0}(4\cos 2\phi_0 - \cos 4\phi_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \phi = \phi_0 + \epsilon\dfrac{J_0}{16m\omega_0}(8\sin 2\phi_0 - \sin 4\phi_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{cases}$$

7.12 $\dfrac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\dfrac{3}{8}\dfrac{E}{mc^2}$, (hemengo E energian ez dago mc^2 gaia).

7.13 $\omega_1 = \omega_x + \epsilon\omega_x\omega_y J_2 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad \omega_2 = \omega_y + \epsilon\omega_x\omega_y J_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$.

7.14 $\dfrac{\dot{E}}{E} = -\dfrac{\dot{T}}{T} = -2\dfrac{\dot{A}}{A} = \dfrac{2}{3}\dfrac{\dot{F}}{F}$.

7.15 (a) $\theta_{\max} \propto \sin^{-1/4}\alpha$. (b) $3^{-1/8} \approx 0.87$ balioarekin biderkatzen da.

BIBLIOGRAFIA

Irakurri eta ikasi beharreko testuak

[1] F. R. Gantmájer, *Mecánica Analítica*, Editorial URSS, Moscú (1996).

[2] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 3rd ed., Addison-Wesley, Reading, Mass. (2001); *Mecánica Clásica*, 2ª ed., Reverté, Barcelona (1994).

[3] J. Ibáñez, *Manual de Mecánica Teórica*, Euskal Herriko Unibertsitatea, Leioa (2001).

[4] J. J. José and E. J. Saletan, *Classical Dynamics*, Cambridge University Press, New York (1998).

[5] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, 3rd ed., Pergamon Press, New York (1976); *Mecánica*, Reverté, Barcelona (1994).

[6] L. Meirovitch, *Methods of Analytical Dynamics*, Dover, Mineola, NY (2003).

Testuak osagarriak

[7] J. M. Aguirregabiria, *Mekanika Klasikoa*, EHUko Ikasmaterialen Sare Argitalpenak, Euskara Errektoreordetza: http://testubiltegia.ehu.es Euskal Herriko Unibertsitatea, Leioa (2004).

[8] J. M. Agirregabiria eta J. R. Etxebarria, *Mekanika Analitikoa*, 2. argitarapena, Udako Euskal Unibertsitatea, Iruñea (1988).

[9] O. D. Johns, *Analytical Mechanics for Relativity and Quantum Mechanics*, Oxford University Press, Oxford (2005).

[10] L. N. Hand and J. D. Finch, *Analytical Mechanics*, Cambridge University Press, New York (1998).

Problema-bildumak

[11] G. L. Kotkin y V. G. Serbo, *Problemas de Mecánica Clásica*, 2ª ed., Mir, Moscú (1988).

[12] M. R. Spiegel, *Mecánica teórica*, Schaum, McGraw-Hill, Madrid (1996).

[13] D. A. Wells, *Dinámica de Lagrange*, Schaum, McGraw-Hill, México (1972).

[14] L. Yung - kuo, *Problems and Solutions on Mechanics*, World Scientific, Singapore (1994).

Testu aurreratuak

[15] R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Benjamin/Cummings, Reading, Mass. (1978).

[16] V. Arnold, *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*, Mir, Moscou (1976); *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer, New York (1978).

[17] E. Corinaldesi, *Classical Mechanics for Physics Graduate Students*, World Scientific, Singapore (1998).

[18] A. Fasano and S. Marmi, *Analytical Mechanics*, Oxford University Press, Oxford (2006).

[19] E. Ott, *Chaos in dynamical systems*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge (2002).

[20] M. Tabor, *Chaos and integrability in nonlinear dynamics: An introduction*, Wiley, New York (1989).

[21] W. Thirring, *Classical Mathematical Physics*, 3rd ed., Springer, New York (1997).

Bestelako erreferentziak

Osagarri matematikoak

[22] J. M. Aguirregabiria, *Fisika Ikasleentzako Ekuazio Diferentzial Arruntak*, Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua, Bilbo (2000).

[23] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 4th ed., Academic Press, San Diego (1995).

[24] L. Elsgoltz, *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*, 4ª ed., Editorial URSS, Moscú (1994).

Testuan aipatutako artikuluak

[25] C. G. Gray and E. F. Taylor, “When action is not least”, American Journal of Physics, Vol. **75**, 434–458 (2007).

Sistema dinamikoak ebazteko programa

[26] J. M. Aguirregabiria, *ODE Workbench*, Physics Academic Software, American Institute of Physics (1994);
Dynamics Solver, http://tp.lc.ehu.es/jma/ds/ds.html.

Mekanikaren historia

[27] R. Dugas, *A History of Mechanics*, Dover, New York (1988).

[28] J. J. O'Connor and E. F. Robertson, *MacTutor History of Mathematics archive*, http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html.

[29] T. H. Boyer "Unfamiliar trajectories for a relativistic particle in a Kepler or Coulomb potential", American Journal of Physics, Vol. **72**, 992–997 (2004).

AURKIBIDE ALFABETIKOA

A
Abiadura orokortua, 7, 8, 14, 56
Aldaezin adiabatikoa, 119
Aldaezintasun-transformazioa, 46, 51
Aldaezintasuna
    gauge aldaezintasuna, 19, 38, 46, 133
    puntu-transformazioekiko aldaezintasuna, 19
Aldagaia
    angelu-aldagaia, 100, 115, 118
    ekintza-aldagaia, 100, 104, 115, 118
    oinarrizko aldagaia, 56
Aldagai dinamikoa, 60–63
Aldagaien banantzea, 94
Aldaketa
    eskala-aldaketa, 72, 75, 79, 82, 83
Aldaketa adiabatikoa, 118
Aldaketa infinitesimala, 24–27
Aldaketa infinitesimal birtuala, 25
Aldakuntza, 29
Aldakuntza-printzipioa, 23
Aldakuntzen kalkulua, 24–33, 38
Aldebakarreko lotura, 3
Aldebiko lotura, 3
Alderantzizko transformazioa
    Legendreren alderantzizko transformazioa, 66
Ampèreren legea, 130
Angelu-aldagaia, 100, 115, 118
Askatasun-gradua, 4, 14
Atomoa
    Böhrren atomoa, 104
Azelerazioa
    koordenatu esferikoetan, 11
    koordenatu zilindrikoetan, 20
Azelerazio orokortua, 9, 14

B
Baldintza
    hastapen-baldintza, 6, 95
    integragarritasun-baldintza, 130
    oreka-baldintza, 36, 37
Balentzia
    transformazio kanonikoaren balentzia, 75
Banantzailea, 98, 108
Banantzea
    aldagaien banantzea, 94
Batuketa-hitzarmena
    Einsteinen batuketa-hitzarmena, 59, 68
Bektore-notazioa, 11
Bektorea
    Laplace, Runge eta Lenzen bektorea, 52
Bektore unitarioa, 31, 126, 127
Bektore unitario normala, 33
Bektore unitario tangentea, 33
Biderkadura bektoriala, 68
Biderkatzailea
    Lagrangeren biderkatzailea, 26, 32, 34–37, 39
Bigarren motako Lagrangeren ekuazioak, 9–11, 20
Bigarren motako transformazio kanonikoa, 82–83
Bigarren ordenako ekuazio diferentzial arrunta, 14, 57
Bi gorputzen problema, 52
Bineten formula, 120
Biraketa, 18, 97
Böhrren atomoa, 104
Brakistokronoa, 38

C
Coriolisen indarra, 16
Coriolisen teorema, 11

D
Delta
    Kroneckerren delta, 59, 62
Denbora-translazioa, 47, 53, 85
Desplazamendu birtuala, 4–5, 25
Diagrama
    gorputz askearen diagrama, 35
Dinamikaren ekuazio orokorra, 5–6
Distantzia minimoa, 30

E
Eboluzio-ekuazioa, 61–63
Einsteinen batuketa-hitzarmena, 59, 68
Ekintza, 28–29, 38, 92
Ekintza-aldagaia, 100, 104, 115, 118
Ekintza aldatua, 65, 80
Ekintza minimoaren printzipioa, 31–32
Ekuazioa
    eboluzio-ekuazioa, 61–63
    Hamilton eta Jacobiren ekuazioa, 89
    higidura-ekuazioa, 9
    ibilbidearen ekuazioa, 93, 107
    mekanikaren ekuazio orokorra, 5
    orbitaren ekuazioa, 52, 107
    transformazio-ekuazioa, 6, 7, 12, 14, 43
Ekuazioak

bigarren motako Lagrangeren ekuazioak, 9–11, 20
Euler eta Lagrangeren ekuazioak, 30, 65
Hamiltonen ekuazio kanonikoak, 57, 62
Lagrangeren ekuazioak, 31, 35, 42, 44, 47, 56–58, 66
lehen motako Lagrangeren ekuazioak, 13–15
Nielsenen ekuazioak, 20
Ekuazio diferentziala
bigarren ordenako ekuazio diferentzial arrunta, 14, 57
Ekuazio kanonikoak, 57, 62, 65
Hamiltonen ekuazio kanonikoak, 59, 66
Elektrodinamika
Weberren elektrodinamika, 20
Energia-gainazala, 98
Energia mekanikoaren kontserbazio-printzipioa, 16, 38, 48, 53, 120
Energia potentziala, 12, 13
Energia potentzial eraginkorra, 95
Energia potentzial orokortua, 14, 20
Energia zinetikoa, 7–9
Eragilea
nabla eragilea, 3
Erlatibitatearen printzipioa, 49
Erlatibitate orokorra, 120
Erradioa
kurbadura-erradioa, 33
Erreferentzia-sistema ez-inertziala, 11, 20, 21, 135
Erreferentzia-sistema inertziala, 2, 11, 49
Erresonantzia, 113, 118
Errotazionala, 130
Eskala-aldaketa, 72, 75, 79, 82, 83
Espazioa
fase-espazioa, 57–60
konfigurazio-espazioa, 6, 58
Eulerren teorema, 43
Euler eta Lagrangeren ekuazioak, 30, 65

F

Fase-espazioa, 57–60
Fase-ibilbidea, 58, 61
Fase-orbita, 61
Fasea, 102
Fasorea, 102
Fluido konprimiezina, 64
Forma diferentziala, 3, 129
Forma diferentzial itxia, 130
Forma diferentzial zehatza, 129
Forma koadratikoa, 9, 43
Formalismo hamiltondarra, 55, 57, 58, 60
Formalismo lagrangearra, 1, 57
Formula
Bineten formula, 120
Funtzio erregularra, 28
Funtzio homogeneoa, 43
Funtzio karakteristikoa
Hamiltonen funtzio karakteristikoa, 93, 100, 107
Funtzio nagusia
Hamiltonen funtzio nagusia, 90, 107
Funtzionala, 27–29
Funtzional egonkorra, 30
Funtzio potentziala, 129
Funtzio sortzailea, 77–80

G

Gainazala
energia-gainazala, 98
Galileoren transformazioa, 49
Garapena
Taylorren garapena, 24, 45
Gauge aldaezintasuna, 19, 38, 46, 133
Gauge transformazioa, 66, 87
Geodesikoa, 33
Gorputz askearen diagrama, 35
Gradua
askatasun-gradua, 4, 14

H

Hamiltonen ekuazio kanonikoak, 57, 59, 62, 66
Hamiltonen funtzio karakteristikoa, 93, 100, 107
Hamiltonen funtzio nagusia, 90, 107
Hamiltonen printzipioa, 31–32, 38
Hamiltonen printzipio aldatua, 64
Hamiltondar banangarria, 95, 107
Hamiltondar ez-integragarria, 105
Hamiltondar ez-singularra, 66
Hamiltondar osoki integragarria, 98, 104, 108
Hamiltondarra, 38, 43–57
Hénon eta Heilesen hamiltondarra, 99, 105, 107, 108
Hamiltondarra eta energia mekanikoa, 43
Hamiltondarraren esangura, 43
Hamiltondarraren kontserbazio-printzipioa, 44, 61
Hamilton eta Jacobiren ekuazioa, 89
Hastapen-baldintza, 6, 95
Hénon eta Heilesen hamiltondarra, 99, 105, 107, 108
Higidura
periodo anitzeko higidura, 100
Higidura-ekuazioa, 9
Higidura-konstantea, 52, 63, 69, 95, 104
Higidura kuasi-periodikoa, 97
Hirugarren motako transformazio kanonikoa, 82–83
Hurbilketa-metodoa, 112

I

Ibilbidea
fase-ibilbidea, 58, 61
Ibilbidearen ekuazioa, 93, 107
Identitatea
Jacobiren identitatea, 62, 67
Ikurra
Levi-Civitaren permutazio-ikurra, 68
Ikuspuntu aktiboa

transformazio baten ikuspuntu aktiboa, 44
Ikuspuntu pasiboa
transformazio baten ikuspuntu pasiboa, 44
Inboluzioa, 104
Indar bizien teorema, 16
Indar eragilea, 5, 43
Indar giroskopikoa, 16
Indar iraungitzailea, 15–17
Indar kontserbatzailea, 12, 13, 15, 32, 36, 43, 129
Indar magnetikoa, 16
Indar orokortua, 9, 35
Indarra
Coriolisen indarra, 16
inertzia-indarra, 11, 20, 21
Lorentzen indarra, 13
lotura-indarra, 4, 5, 34, 39
marruskadura-indarra, 16
Indar zentrala, 15, 18, 42, 51
Inertzia-indarra, 11, 20, 21
Inflexio-puntua, 24
Integragarritasun-baldintza, 130
Integrala
Jacobiren integrala, 44, 47, 61, 66
Integrazioa
zatikako integrazioa, 8, 30
Iraungipen-funtzioa
Rayleighen iraungipen-funtzioa, 16, 20
Izendatzaile txikien problema, 118

J

Jacobiren identitatea, 62, 67
Jacobiren integrala, 44, 47, 61, 66
Jacobiarra, 64
Jario hamiltondarra, 64

K

Kalkulua
aldakuntzen kalkulua, 24–33, 38
Kaos determinista, 105
Keplerren hirugarren legea, 104
Keplerren problema, 52, 95, 102, 108
Keplerren problema erlatibista, 104, 107, 109
Kepler-en problema, 120
Konfigurazio-espazioa, 6, 58
Konfigurazioa, 6, 32
Konstantea
higidura-konstantea, 52, 63, 69, 95, 104
Plancken konstantea, 29
Plancken konstante laburtua, 62
Kontserbazio-printzipioa, 14, 41, 42, 60, 85, 103
energia mekanikoaren kontserbazio-printzipioa, 16, 38, 48, 53, 120
hamiltondarraren kontserbazio-printzipioa, 44, 61
momentu angeluarraren kontserbazio-printzipioa, 48, 51
momentu linealaren kontserbazio-printzipioa, 48, 51
Koordenatu-sistema, 125
Koordenatua, 125
Koordenatu ahanzgarria, 42
Koordenatu cartesiarra, 7, 10, 11, 15, 18, 20, 57, 125
Koordenatu eliptikoa, 66, 128
Koordenatu esferikoa, 10, 34, 38, 127
Koordenatu normala, 96
Koordenatu orokortua, 6–9, 56, 58
Koordenatu parabolikoa, 66, 108, 128
Koordenatu polar esferikoa, 51, *ikus* koordenatu esferikoa
Koordenatu polar laua, 18
Koordenatu polar zilindrikoa, *ikus* koordenatu zilindrikoa
Koordenatu ziklikoa, 42, 60, 94
Koordenatu zilindrikoa, 20, 126
Kroneckerren delta, 59, 62
Kurba
loturadun muturrekoa, 32–33
muturreko kurba, 29–33
Kurba baten luzera, 28
Kurbadura-erradioa, 33

L

Lagrangeren biderkatzailea, 26, 32, 34–37, 39
Lagrangeren ekuazioak, 31, 35, 42, 44, 47, 56–58, 66
bigarren motako Lagrangeren ekuazioak, 9–11, 20
lehen motako Lagrangeren ekuazioak, 13–15
Lagrangeren parentesia, 76–77
Lagrangear aldatua, 64, 80
Lagrangear ez-singularra, 56, 66
Lagrangearra, 14, 29
Lan birtuala, 4
Laplace, Runge eta Lenzen bektorea, 52
Laugarren motako transformazio kanonikoa, 82–83
Legea
Ampèreren legea, 130
Keplerren hirugarren legea, 104
Newtonen bigarren legea, 5, 10
Legendreren alderantzizko transformazioa, 66
Legendreren transformazioa, 56–58
Lehen motako Lagrangeren ekuazioak, 13–15
Lehen motako transformazio kanonikoa, 80–82
Lema
Poincaréren lema, 3, 60, 78, 84, 130
Levi-Civitaren permutazio-ikurra, 68
Librazioa, 97
Liouvilleren teorema, 63, 85, 104
Liouville eta Arnolden teorema, 104
Lorentzen indarra, 13
Lotura, 2–6
aldebakarreko lotura, 3
aldebiko lotura, 3
diferentziala, 3
finitua, 2
geometrikoa, 2

holonomoa, 2
ideala, 5
integragarria, 3
zinematikoa, 3
Lotura-indarra, 4, 5, 34, 39
Loturadun muturra, 26–27
Loturadun muturrekoa, 32–33
Lotura egonkorra, 2, 6, 15, 16
Lotura erreonomoa, 2
Lotura eskleronomoa, 2
Lotura ez-holonomoa, 3
Lotura higikorra, 2
Lotura holonomoa, 2, 13, 32
Lotura ideala, 13, 32
Luzera
kurba baten luzera, 28

M

Makoa
Poissonen makoa, 67, 69, 73
Makoen teorema
Poissonen makoen teorema, 67, 75
Marruskadura-indarra, 16
Masa-zentroa, 3, 36
Masa-zentroaren teorema, 49, 51
Matrize jacobiarra, 77
Matrize sinplektikoa, 59, 77
Matrize sinplektiko orokortua, 77
Maximoa, 24
Mekanika
zeruko mekanika, 112
Mekanika estatistikoa, 64
Mendetako gaia, 113, 120
Merkurioren perihelioaren prezesioa, 120
Metodoa
hurbilketa-metodoa, 112
Poincaré eta Lindstedten metodoa, 112, 114, 120
Minimoa, 24
Momentu angeluarra, 68, 69
Momentu angeluarraren kontserbazio-printzipioa, 48, 51
Momentu kanonikoa, 42
Momentu linealaren kontserbazio-printzipioa, 48, 51
Momentu orokortua, 56, 58
Mutur-puntua, 24–27
loturadun muturra, 26–27
Muturreko kurba, 29–33
loturadun muturrekoa, 32–33

N

Nabla eragilea, 3
Newtonen bigarren legea, 5, 10
Nielsenen ekuazioak, 20
Noetherren teorema, 46–47, 52, 53
Normal nagusia, 33
Notazioa, 28
bektore-notazioa, 11
Notazio laburtua, 58–59

O

Oinarrizko aldagaia, 56
Oinarrizko Poissonen makoa, 62
Okinaren transformazioa, ii
Orbita
fase-orbita, 61
Orbitaren ekuazioa, 52, 107
Oreka-baldintza, 36, 37
Osziladore harmonikoa, 61, 72, 87, 93, 102, 108, 119, 133
Osziladore harmoniko erlatibista, 120, 121
Osziladore harmoniko indargetua, 120
Osziladore kuasi-harmonikoa, 112, 117, 120, 121

P

Parentesia
Lagrangeren parentesia, 76–77
Partikula-sistema, 10, 48
Partikula erlatibista, 67, 86, 107, 109
Pendulu matematikoa, 2, 5–9, 12, 14, 34, 36, 42, 43, 56–58, 61, 97, 108, 118
Periodo anitzeko higidura, 100
Permutazio-ikurra
Levi-Civitaren permutazio-ikurra, 68
Perturbazio-teoria, 111
Perturbazio-teoria kanonikoa, 114, 121
Perturbazio erregularra, 112, 120
Plancken konstantea, 29
Plancken konstante laburtua, 62
Poincaréren lema, 3, 60, 78, 84, 130
Poincaréren sekzioa, 98
Poincaré eta Lindstedten metodoa, 112, 114, 120
Poissonen makoa, 61–63, 67, 69, 73
oinarrizko Poissonen makoa, 62
Poissonen makoen teorema, 67, 75
Poissonen teorema, 69
Potentzial orokortua, 12–13
Prezesioa, 109
Merkurioren perihelioaren prezesioa, 120
Printzipioa
aldakuntza-printzipioa, 23
ekintza minimoaren printzipioa, 31–32
energia mekanikoaren kontserbazio-printzipioa, 38
erlatibitatearen printzipioa, 49
Hamiltonen printzipioa, 31–32, 38
Hamiltonen printzipio aldatua, 64
hamiltondarraren kontserbazio-printzipioa, 44, 61
kontserbazio-printzipioa, 14, 41, 42, 60, 85, 103
Problema
bi gorputzen problema, 52
izendatzaile txikien problema, 118
Keplerren problema, 52, 95, 102, 108
Keplerren problema erlatibista, 104, 107, 109
Keplerren problema erlatibitate orokorrean, 120

Kepler-en problema, 120
Problema baliokidea, 35
Problema erlatibista
Keplerren problema erlatibista, 104, 107, 109
Keplerren problema erlatibitate orokorrean, 120
Puntu-transformazioa, 17, 20, 21, 51, 66, 72, 86
Puntu-transformazioekiko aldaezintasuna, 19
Puntua
inflexio-puntua, 24
loturadun muturra, 26–27
mutur-puntua, 24–27
Puntu singularra, 28

R

Rayleighen iraungipen-funtzioa, 16, 20

S

Sekzioa
Poincaréren sekzioa, 98
Simetria, 41, 42
Simetria-transformazioa, 46, 52, 53, 85
Simetria orokortua, 47
Sistema
erreferentzia-sistema ez-inertziala, 11, 135
koordenatu-sistema, 125
partikula-sistema, 10, 48
Sistema dinamikoa, 59, 67
Sistema dinamiko hamiltondarra, 59–60
Sistema mekaniko naturala, 43
Soluzioa osoa, 91
Sortzaile infinitesimala, 84

T

Taldea
transformazio-taldea, 75
Taylorren garapena, 24, 45
Teorema
Coriolisen teorema, 11
Eulerren teorema, 43
indar bizien teorema, 16
Liouvilleren teorema, 63, 85, 104
Liouville eta Arnolden teorema, 104
masa-zentroaren teorema, 49, 51
Noetherren teorema, 46–47, 52, 53
Poissonen makoen teorema, 67, 75
Poissonen teorema, 69
Teorema adiabatikoa, 118
Teoria
perturbazio-teoria, 111
Teoria kanonikoa
perturbazio-teoria kanonikoa, 114, 121
Transformazio-ekuazioa, 6, 7, 12, 14, 43
Transformazio-taldea, 44–46, 75
Transformazioa
aldaezintasun-transformazioa, 46, 51
Galileoren transformazioa, 49
gauge transformazioa, 66, 87
Legendreren alderantzizko transformazioa, 66
Legendreren transformazioa, 56–58
okinaren transformazioa, ii
puntu-transformazioa, 17, 20, 21, 51, 66, 72, 86
simetria-transformazioa, 46, 52, 53, 85
Transformazio baten ikuspuntu aktiboa, 44
Transformazio baten ikuspuntu pasiboa, 44
Transformazio infinitesimala, 45
Transformazio kanonikoa, 71–85
bigarren motako transformazio kanonikoa, 82–83
hirugarren motako transformazio kanonikoa, 82–83
laugarren motako transformazio kanonikoa, 82–83
lehen motako transformazio kanonikoa, 80–82
Transformazio kanonikoaren balentzia, 75
Transformazio kanonikoaren mota, 80–83
Transformazio kanoniko infinitesimala, 83–85
Transformazio kanonoidea, 72
Translazioa, 18
denbora-translazioa, 47, 53, 85
Trukatzailea, 62

W

Weberren elektrodinamika, 20

Z

Zatikako integrazioa, 8, 30
Zentroa, 98
masa-zentroa, 3, 36
Zeruko mekanika, 112
Zikloidea, 109, 133

IZENDEGIA

Jarraian zerrendatzen dira testuan aipatutako zientzialari gehienen izen osoa, jaiotza- eta heriotza-urteekin. Gainera, mako artean adierazten da zein urtetan lortu zuten saria Nobel saridunek.

Ampère, André Marie (1775–1836)
Arnold, Vladimir Igorevich (1937–)
Binet, Jacques Philippe Marie (1786–1856)
Böhr, Niels Henrik David (1885–1962) [1922]
Coriolis, Gaspard Gustave de (1792–1843)
D'Alembert, Jean Le Rond (1717–1783)
Descartes, René (1596–1650)
Einstein, Albert (1879–1955) [1921]
Euler, Leonhard (1707–1783)
Galileo, Galileo Galilei (1564–1642)
Hamilton, Sir William Rowan (1805–1865)
Heiles, Carl (1939–)
Heisenberg, Werner Karl (1901–1976) [1932]
Hénon, Michel (1931–)
Jacobi, Carl Gustav Jacob (1804–1851)
Kepler, Johannes (1571–1630)
Kronecker, Leopold (1823–1891)
Lagrange, Joseph-Louis (1736–1813)
Laplace, Pierre-Simon (1749–1827)
Legendre, Adrien-Marie (1752–1833)
Lenz, Wilhelm (1888–1957)
Levi-Civita, Tullio (1873–1941)
Liouville, Joseph (1809–1882)
Lissajous, Jules Antoine (1822–1880)
Lorentz, Hendrik Antoon (1853–1928)
Newton, Sir Isaac (1643–1727)
Noether, Emmy Amalie (1882–1935)
Planck, Max Karl Ernst Ludwig (1858–1947) [1918]
Poincaré, Jules Henri (1854–1912)
Poisson, Siméon Denis (1781–1840)
Rayleigh, John William Strutt (Lord Rayleigh) (1842–1919)
Runge, Carle David Tolmé (1856–1927)
Schrödinger, Erwin Rudolf Josef Alexander (1887–1961) [1933]
Sommerfeld, Arnold Johannes Wilhelm (1868–1951)
Taylor, Brook (1685–1731)
Weber, Wilhelm Eduard (1804–1891)

HIZTEGIA

Testuan erabilitako zenbait hitz eta esapide tekniko biltzen dira hurrengo orrietan, irakurleak jakin dezan testu honetan euskaraz ikasten duena nola idazten den inguruko erdaretan eta nazioarteko fisikaren hizkuntzan. Matematika eta Fisika hiztegietan agertzen diren hainbat adiera ez daude hemen eta gehienok ezagutzen eta erabiltzen ditugunak ere kanpoan geratu dira. Orobat, [7] eta [22] testuliburuetan hiztegi luzeak bildu nituenez, hango sarrerak eta egitura berekoak ez dira hemen agertuko.

Euskara	Frantsesa	Gaztelania	Ingelesa
aldaezin adiabatiko	invariant adiabatique	invariante adiabático	adiabatic
aldaezintasun-transformazio	transformation d'invariance	transformación de invariancia	invariance transformation
aldagaien banantze	séparation de variables	separación de variables	separation of variables
aldebakarreko lotura	liaison unilatéral	ligadura unilateral	unilateral constraint
aldebiko lotura	liaison bilatéral	ligadura bilateral	bilateral constraint
angelu-aldagai	variable d'angle	variable de ángulo	angle variable
banantzaile	séparatrice	separatriz	separatrix
Einsteinen batuketa-hitzarmen	convention de sommation d'Einstein	convenio de suma de Einstein	Einstein summation convention
ekintza-aldagai	variable d'action	variable de acción	action variable
energia-gainazal	surface d'énergie	superficie de energia	energy surface
forma diferentzial	forme différentielle	forma diferencial	differential form
forma diferentzial itxi	forme différentielle fermée	forma diferencial cerrada	closed differential form
forma diferentzial zehatz	forme différentielle exacte	forma diferencial exacta	exact differential form
forma koadratiko	forme quadratique	forma cuadrática	quadratic form
funtzio karakteristiko	fonction caractéristique	función caracteristica	characteristic function
funtzio nagusi	fonction principale	función principal	principal function
funtzio sortzaile	fonction génératrice	función generatriz	generating fonction
gauge aldaezintasun	invariance jauge	invariancia gauge invariancia de escala invariancia de medida	gauge invariance
gauge transformazio	transformation de jauge	transformación gauge	gauge transformation
geodesiko	géodésique	geodésica	geodesic
Hamiltonen funtzio karakteristiko	fonction caractéristique de Hamilton	función caracteristica de Hamilton	Hamilton's characteristic function
Hamiltonen funtzio nagusi	fonction principale de Hamilton	función principal de Hamilton	Hamilton's principal function
hamiltondar banangarri	hamiltonien séparable	hamiltoniano separable	separable Hamiltonian
hamiltondar ez-integragarri	hamiltonien non intégrable	hamiltoniano no integrable	nonintegrable Hamiltonian non-integrable Hamiltonian
hamiltondar ez-singular	hamiltonien non singulier	hamiltoniano no singular	nonsingular Hamiltonian
hamiltondar osoki integragarri	hamiltonien séparable	hamiltoniano separable	separable Hamiltonian
higidura kuasi-periodiko	mouvement quasipériodique	movimiento cuasiperiódico	quasiperiodic motion
inboluzio	involution	involución	involution
indar giroskopiko	force gyroscopique	fuerza giroscópica	gyroscopic force
indar iraungitzaile	force dissipative	fuerza disipativa	dissipative force
integragarritasun-baldintza	condition d'intégrabilité	condición de integrabilidad	integrability condition
iraungipen-funtzio	fonction de dissipation	función de disipación	dissipation function
izendatzaile txikien problema	problème de petits diviseurs	problema de pequeños divisores	problem of small denominators

Euskara	Frantsesa	Gaztelania	Ingelesa
jario hamiltondar	flot hamiltonien	flujo hamiltoniano	Hamiltonian flux
Lagrangeren biderkatzaile	multiplieur de Lagrange	multiplicador de Lagrange	Lagrange multiplier
Lagrangeren parentesi	parenthèse de Lagrange	paréntesis de Lagrange	Lagrange bracket
lagrangear ez-singular	lagrangien non singulier	lagrangiano no singular	nonsingular Lagrangian
lan birtual	travail virtuel	trabajo virtual	virtual work
librazio	libration	libración	libration
matrize sinplektiko	matrice symplectique	matriz simpléctica	symplectic matrix
mendetako gai	terme séculaire	término secular	secular term
okinaren transformazio	transformation du boulanger	transformación del panadero	baker's transformation
periodo anitzeko higidura	mouvement multipériodique	movimiento multiperiódico	multiperiodic motion
permutazio-ikur	symbole de permutation	símbolo de permutación	permutation symbol
perturbazio erregular	perturbation régulière	perturbación regular	regular perturbation
perturbazio-teoria	théorie des perturbations	teoría de perturbaciones	perturbation theory
Poincaréren sekzio	section de Poincaré	sección de Poincaré	Poincaré section
Poissonen mako	crochet de Poisson	corchete de Poisson	Poisson bracket
prezesio	précession	precesión	precession
puntu-transformazio	transformation ponctuelle	transformación puntual	point transformation
simetria-transformazio	transformation de symétrie	transformación de simetría	symmetry transformation
sortzaile infinitesimal	générateur infinitésimal	generador infinitesimal	infinitesimal generator
teorema adiabatiko	théorème adiabatique	teorema adiabático	adiabatic theorem
transformazio kanoniko	transformation canonique	transformación canónica	canonical transformation
transformazio kanonoide	transformation canonoïde	transformación canonoide	canonoid transformation
transformazio-talde	group de transformations	grupo de transformación	transformation group
trukatzaile	commutateur	conmutador	commutator
zeruko mekanika	mécanique céleste	mecánica celeste	celestial mechanics