eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Pentsamendu espazialaren eraketa eta geometriaren ikaskuntza eta irakaskuntzari buruzko elementuak

Joxemari Sarasua

EUSKARA ETA ELEANIZTASUNEKO ERREKTOREORDETZAREN SARE ARGITALPENA

Liburu honek UPV/EHUko Euskara eta Eleaniztasuneko Errektoreordetzaren dirulaguntza jaso du

AURKIBIDEA

OR.

I. ATALA: PENTSAMENDU ESPAZIALAREN JATORRIA 3

II. ATALA: PIAGET ETA TEORIA PSIKOGENETIKOA 6
1.- ETAPA GENETIKOAK 7
2.- PIAGET-I EGINDAKO KRITIKAK 9

III. ATALA: VAN HIELE EREDUA 13
1.- ZER DA VAN HIELE EREDUA? 13
2.- VAN HIELE-REN ARRAZOIBIDE-MAILAK 15
3.- VAN HIELE-REN EREDUAREN EZAUGARRI OROKORRAK 17
4.- IKASKUNTZA-FASEAK 19

IV. ATALA: KONTZEPTU GEOMETRIKOEI BURUZKO ERROREAK 23
1.- OINARRI TEORIKOA 23
2.- OHIKO ERROREAK ETA HORIEK GAINDITZEKO ESTRATEGIAK 26

I. ATALA: PENTSAMENDU ESPAZIALAREN JATORRIA

Espazio nozioa nola bereganatzen den aztertu baino lehen, espaziotzat zer ulertzen dugun azaltzen saiatuko gara. Zoritxarrez ez dago adostasunik espazio kontzeptua **deskribatzean**; izan ere, perspektiba askotatik hel dakioke auzi horri. Ikuspegi nagusien artean filosofikoa, fisikoa eta psikologikoa ditugu.

Perspektiba filosofikotik bi adiera aintzat hartu dira historian zehar: **espazio absolutua** versus **espazio erlatiboa**. Espazio absolutua diogunean, zera esan nahi dugu: objektuak eta haien arteko erlazioak ez daudela espazioaren existentziaren beraren menpe; hau da, espazioa hasierako zerbait finko eta emantzat hartzen dugu, eta haren legeak unibertsalak eta toki orotarakoak baliagarriak dira. Ikusmolde horrek Platonen dotrina filosofikoan du iturburua, eta bat dator Newton-ek mekanika klasikoaren oinarriak ezartzeko erabili zuen ideiarekin: mekanikaren legeak unibertsalak dira, eta ez dute salbuespenik onartzen.

Espazio erlatiboaz mintzatzerakoan, berriz, zera eman nahi da aditzera: objektuen arteko posizioek edo erlazioek berek kasuan-kasuan determinatu edo zedarritu egiten dutela espazioaren nozioa. Ikuspegi horren arabera, espazioari buruz ezin hitz egin daiteke osotasun bateratu eta finko bat osatuko balu bezala. Ondorioz, hura gobernatzen duten legeak ez dira beti berdinak izango, ezta toki orotan berdin aplikatu beharrekoak ere. *Espazio*az hitz egin beharrean, badirudi zuzenagoa litzatekeela *espazio*ez hitz egitea. Pentsa dezagun, adibidez, zulo beltzei buruz: haietan ez dira betetzen fisikaren ohiko legeak, besteak beste espazioak "jan" egiten duelako denbora. Kaosaren Teoria deritzonaren haritik ere hainbat adibide atera daitezke, hala nola tximeleta-efektua edo ur-tanta baten ibilbidea aurreikustea[1]. Espazioaren ikuspegi horrek Kant-en eta Leibiniz-en filosofietan ditu erroak, eta Einstein-en mekanika erlatibista esplikatzen laguntzen du.

Ikuspegi fisikotik, berriz, **espazio fisiko**az mintza gaitezke: inguratzen gaituen ingurune fisikoaz, edo geure munduaz, hain zuzen. Bertan sartzen dira dimentsioak, formak, tamainak, objektuak eta haien arteko erlazioak.

Azkenik, eta perspektiba psikologikotik, **espazio psikologia**z berba egitea ere badago: hots, geure gogoan bakarrik existentzia duen espazio subjektiboa da hori. Sakondu dezagun apur bat puntu horretan. Pentsamendu espazialari gagozkiola, ondoko bereizketa egin daiteke kontzeptu geometriko bat identifikatu edo eraikitzeko orduan: **kontzeptuaren gogo-irudia** eta **kontzeptua** bera. Horren arabera, kontzeptuaren gogo-irudia gizabanakoen buruan dagoen zera hori da; kontzeptua, berriz, matematikak halakotzat ulertzen duena da: hau da, bere definizio matematiko formala. Kontzeptuaren gogo-irudiak biltzen du nola islatzen den kontzeptu matematikoa gizabanakoaren buruan, hala nola kontzeptuarekin erlazionaturik burura etor daitekeen oro: esaterako, kontzeptua entzutean edo haren marrazkia ikustean gogoratzen den oro. Haur baten kasuan, adibidez, *kaxa* deritzon kontzeptuaren gogo-irudia hau guztia dateke: haurrak berak bere eskuez eta hainbat material mota erabiliz eraiki dituen kaxa guztiak; hark ikusi edo marraztu dituen marrazki guztiak; hark kaxekin egin dituen manipulazio, esperimentazio eta

[1]Tximeleta-efektuaren arabera, Asia aldeko tximeleta batek bere hegoak mugitzean sekulako ekaitz tropikala sorraraz dezake Erdialdeko Amerikan: hain zailak dira iragartzen zenbait fenomeno meteorologiko gobernatzen dituzten legeak.

jarduera guztiak, eta abar. Argi denez, kontzeptu matematikoa (kasu honetan kaxaren definizio formala bere ertzei, erpinei, aurpegiei eta abarri zehazki kontu eginez) kontzeptuaren gogo-irudiaren osagai bat izan daiteke, baina ez du zertan horrela izan. Beste era batera esateko, kontzeptu matematikoak eta haren gogo-irudiak ez dute zertan bat etorri, are gutxiago haur txikien kasuan.

Espazio psikologikoaren jatorriaz denaz bezainbatean, hiru azalpen nagusi daude: **enpirista**, **jaiotzetikoa** eta **konstruktibista**.

a) **Azalpen enpirista**: espazio psikologikoa espazio fisikoarekin izandako esperientziatik eratortzen da. Hau da, gauzetatik jasotzen ditugu jakingarri guztiak, eta gure ezaupide bakarrak zentzumenak dira. Ezaguna da Aristoteles-en esaldia: "Adimenean dagoen guztia lehenago zentzumenetan egon da". Beste hitz batzuekin esateko, gogora edo adimenera iristen den pertzepzioa errealitatearen kopia perfektua da. Kontzeptuak gauzek dituzten propietateen isla zuzena eta leiala dira; propietate horiek gauzetan bertan daude, eta gure eginkizun bakarra bertatik ateratzea da. Hasieran gure adimena "hutsik" dago. Esperientziaren bidez aberasten da gure adimena, errealitatetik jasotzen dituen jakingarriak abstrakzioaren bidez bere egiten dituen heinean.

b) **Jaiotzetiko azalpena**: gizabanakoaren berezko ondoretasun genetikoak espazio psikologikoa osatzen du. Ikuspegi horren arabera, espazio psikologikoa osotasun itxia eta bukatua da jaiotzen garen unetik beretik. Egitura hori gurekin jaio eta gure baitan dago. Hori horrela, ez dago espazio fisikoa ezagutzerik gure eskema edo egituretatik kanpo: egitura psikologiko horiek gure ezagutzeko era baldintzatu egiten dute.

c) **Azalpen konstruktibista**: espazio psikologikoa gizabanakoak eraikitzen du, aktiboki eraiki ere. Faktore genetikoek eta esperientziak elkarri eragitetik sortzen da eraikuntza hori. Ikuspegi horri *epistemologia genetiko*[2] deritzo, eta Piaget da haren teorialari nagusia. Ikertzaile frantziar horren esanetan, pentsamendu geometrikoak subjektuak objektuen gain egiten dituen ekintzen koordinazioan du iturburua. Beste era batera esateko, kontzeptu geometrikoen eraikuntza nola gauzatzen den jakiteko, subjektu-objektu bikotea besarkatzen duen ekintzan bilatu beharra dago giltza. Piaget-en iritziz, objektua ezagutzen da bere gain gauzatzen ditugun ekintzek ematen diguten informazioari esker, eta ez bakarrik —azalpen enpiristak sinetsarazi nahi duenez— objektuak berez dituen propietateak inposatzen zaizkigulako. Horregatik esaten du Piaget-ek ezagutza-prozesuak objektuaren asimilazioa

[2]Logika eta epistemologia giza ezagutzaren printzipioak aztergai dituzten bi diziplina filosofiko nagusiak dira. Lehenengoa, logika, pentsamenduaren zuzentasun formalaz arduratzen da bereziki: hau da, bere koherentziaz eta barne-funtzionamenduko legeez. Pentsamendu zuzenaren teoria da logika. Epistemologia, berriz, pentsamenduaren egiatasunaz arduratzen da: esate baterako, halako arrazoibidea aztergaia den objektuarekin bat datorren ala ez. Epistemologia, beraz, egiazko pentsamenduaren teoria da. Akats logiko bat, adibidez, hau litzateke: "gotzain guztiak apezak dira; beraz, nire herriko apaiza gotzaina da". Kasu horretan, klase logikoen arteko barnekotasun-legea hautsi egin da: gotzainak apaizak dira, baina alderantzizkoak ez du zertan egia izan. Bestalde, gizakiaren nahiz animalia-espezieen eboluzioa teologiaren eta Testamentu Zaharreko kontakizunen argitan azaltzea errore epistemologikoa litzateke: jakintza-eremu hori biologiari dagokio, eta ez erlijioari. Epistemologiaren auzi nagusiak hauek lirateke: ezagutza, oro har, posible ote den; ezagutzaren jatorria edo funtsa; eta ezagutzaren muina edo transzendentzia.

eskatzen duela, ezaguna dugun ekintza-sistema batera asimilatu beharra, hain zuzen ere.

BIBLIOGRAFIA

Alsina, Claudia; eta beste batzuk. *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. Síntesis Educación. Madril, 1987.

Arrieta, Modesto. *Matematikaren Didaktika. Lehen Hezkuntza II: Geometria eta Neurria*. Euskal Herriko Unibertsitatea. Bilbo, 2001.

Castro, Enrique; eta beste batzuk. *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria.* Síntesis Educación. Madril, 2001.

Goñi Zabala, J.M.; eta beste batzuk. *Matematikaren Didaktika I. Oinarri teorikoak: Logika*. Gipuzkoako Ikastolen Elkartea. Bilbo, 1983.

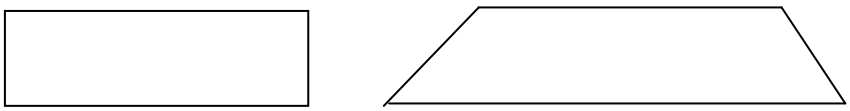
Sanz Lerma, Inés. *Matemáticas y su didáctica II. Geometría y Medida*. Euskal Herriko Unibertsitatea. Bilbo, 2001.

II. ATALA: PIAGET ETA TEORIA PSIKOGENETIKOA

Hizkuntzaren jabe izan baino askoz lehenago ere, haurrak etengabeko interakzioa du inguruarekin, batez ere esperientzia espazialen bitartez: ikusmenaren eta ukimenaren bidez, hain zuzen. Hizkuntza-gaitasunak geroago garatzen dira ingurune fisikoaren testuinguruan, eta ez alderantziz.

Piaget-en eta beste psikologo askoren ustetan, esan dugunez, objektu "konkretu"en manipulaziotik eratortzen da oro har giza ezagutza, eta oro bat ezagutza geometrikoa. Gizabanakoak ekintza fisikoak bere egin edo etxekotu ondoren, kontzeptu edo erlazio bilakatzen dira ekintzok, eta haiei ikurrak atxikitzen dizkie, hala nola hitzak edo ikur matematikoak. Lehendabizi, bere gorputzetik abiatuz hasten da haurra inguruko espazioa eta objektuak ezagutzen: "honako arkatza nire esku-ahurraren berdina da", "halako alkandora nirea da, eta ez aitarena, hura jantzi eta ongi egokitzen zaidalako". Apurka-apurka beste prozedura eta estrategia batzuk garatuko ditu haurrak espazioaren berri jakiteko: gorputz-atalak mugitzea (oinak edo urratsak erabiliz mahaiaren edo ikasgelaren zabal-estua ezagutzeko), unitate-patroiak lekualdatzea (adibidez, paperezko zerrendak gela neurtzeko), *irudikapena* eta abstrakzioa, besteak beste.
Piaget-en teoria psikogenetikoak galdera honi erantzun nahi dio: "Nola garatzen dira haurrarengan kontzeptu espazialak?". Hasteko eta behin Piaget-ek bi funtsezko kontzeptu bereizten ditu: *pertzepzioa* (objektuen ezagutza haiekin zuzenean jardunez) eta *irudikapena* (objektuak gogoratzea edo nolabait adieraztea, haiek aurrean ez daudelarik). Adibidez, ezaguna dugun gela ilun batean haztamuka ibiltzen garenean, edo lagun bati plano bat marrazten diogunean gure etxera nola irits daitekeen azalduz, *irudikapen* espazial batez baliatzen ari gara. Haurraren pertzepzio-gaitasunak bigarren urtera arte garatzen dira *(aldi sentso-motorra)*, eta bigarren urtetik aurrera hasten da haurra irudi espazialak bere baitan eraikitzen edo irudikatzen. Are gehiago, haur arrunt batengan zazpigarren urtetik aurrera soilik fintzen edo hobetzen dira esanguratsuki gaitasun horiek (*eragiketa konkretuen periodoa*).

Pertzepzioaren eta irudikapenaren arteko jauzia edo denbora-tartea nabarmentzeko adibide hau jarri ohi da: frogatu denez, 50-60 eguneko haur txikiek laukizuzenak eta trapezioak bereizten ikas dezakete; hala ere, irudi berak kutxa itsu batean (edo pantaila baten atzetik) aurkezten bazaizkio haurrari, eta horrek objektuak ukitu besterik ezin badu egin, 5-6 urte bete arte ez da gauza trapezioak eta laukizuzenak bereizteko.



Irudiak: laukizuzena eta trapezioa.

1.- ETAPA GENETIKOAK

Piaget-ek garapen espaziala garapen intelektualarekin lotzen du. Hau da, haren iritziz ikaskuntza geometrikoa haurraren eboluzio biologikoaren menpe dago neurri zabal batean. Guztiaz ere, ume bakoitzaren ezaugarri kognitiboek ez ezik beste faktore batzuek ere eragin zuzena daukate espazio psikologikoaren eraikuntzan, adibidez ingurune fisikoak, ingurune sozialak eta eskolak.

Hauek dira Piaget-ek proposatzen dituen etapa genetikoak:

- **Lehen etapa** edo **espazio sentso-motorra**: periodo honetan haurraren baliabide nagusiak erlazio espazialak hautemateko zentzumenak dira, eta bereziki ikusmena eta ukimena. Haurra ez da gauza objektu edo erlazio geometrikoen gogo-irudiak bere buruan eraikitzeko, ezta horiek irudikatu edo adierazteko ere. Espazioari buruzko ikuskera zeharo egozentrikoa da etapa honetan. Haurrak bi urte bete arte irauten du gutxi gorabehera etapa honek.
- **Bigarren etapa** edo **espazio intuitiboa**: haurra, oraindik, eragiketak egiteko gauza ez bada ere, oinarrizko irudikapenak egin ditzake maila intuitibo samar batean. Seigarren edo zazpigarren urtera iristen da aldi hau.
- **Hirugarren etapa** edo **espazio kontretua**: haurrak eragiketen berri badaki, eta egiten dituen irudikapenek ere izaera eraginkorra izaten dute[3]. Hau da, material konkretuak erabiliz eraiki eta desegiten du, egin eta berregiten du, eragiketak itzulgarriak direla jabe delako.
- **Laugarren etapa** edo **espazio abstraktua**: irudikapen formalen eta abstraktuen periodoa da hau, eta erlazio geometriko euklidearretan eroso mugitzen da ikaslea.

Horretaz gain, propietate geometrikoen artean bereizketa edo progresio bat egiten du Piaget-ek, oinarrizkoenetatik hasi eta konplexuenetaraino. Gainera, haren iritziz, propietate mota bakoitza etapa bati dagokio. Hona hemen haren sailkapena:

a) **Propietate topologikoak**: formari edo tamainari muzin egiten dioten propietate globalak dira. Propietate hauek deformazioekin aldaezinak dira. Bost izan daitezke:

   1) Gertutasuna: adibidez, gizaki baten begiak elkarrengandik gertu marraztea, aho azpian kokaturik egon badaitezke ere.
   2) Banaketa: adibidez, burua eta gorputz-enborra loturik jartzea.
   3) Ordenazioa: adibidez, sudurra begien eta ahoaren artean marraztea, edo besoak enborraren alde banatan ipintzea.
   4) Itxitura: adibidez, begiak buruaren barruan marraztea.
   5) Jarraitasuna: adibidez, besoek enborrari jarraitzea eta ez buruari.

[3]Eragiketa bat baliabide semiotikoen bidez adieraz daitekeen eraldaketa itzulgarri bat da: hots, buelta eman dakiokeen eta nolabait irudikatzea dagoen aldakuntza mota bat da. Ontzi batetik bestera ura pasatzea, puzzle bat osatzea, bi zenbaki batzea, eskailerak igotzea eta abar eragiketak dira: egin ondoren desegin daitezke denak. Zerbait erretzea, berriz, ez da eragiketa bat, erretakoa ez baitago berriro eskuratzerik. 6-7 urte bete arte umea ez da jabe eraldaketa batzuk eraiki eta berreraiki daitezkeela, eta horiek gogoratzeko edo adierazteko ere ez da gauza. Horrek berebiziko eragina du haren arrazoibidean; besteak beste, zenbakiaren iraunkortasunean sinistea galarazten dio.

Irudia: lau urte eta lau hilabeteko haur batek egindako gizaki baten marrazkia.

b) **Propietate proiektiboak**: perspektibaren ideiari dagozkio. Objektu bat hainbat posizio edo angelutatik ikusita bere forma iragartzeko gaitasunarekin zerikusirik dute. Adibidez, haur txikiek aurpegi bat soslaian marrazterakoan bi begi jartzen dizkiote; edo beharbada ez dira konturatzen arkatz bat mutur batetik begiratuz gero zirkulu bat ikusiko dutela, edo laukizuzen bat zuzenki bat bezala ikusten dela bere alde batetik behatzean.

Irudia: aurpegi bat "soslaia"n

c) **Propietate metrikoak** edo **euklidearrak**: tamainarekin, distantziarekin eta norabidearekin zerikusirik duten propietateak dira. Propietate horiei esker angeluak, luzerak, azalerak eta abar neur daitezke. Trapezio bat eta laukizuzen bat, adibidez, angelu eta alde ezberdinak dituztelako bereiz daitezke, nahiz ikuspegi proiektibo batetik bi irudiok baliokideak diren (izan ere, laukizuzen batek trapezio baten tankera hartzen du, angelu jakin batzuetatik ikusten bada).

	GARAPEN INTELEKTUALA	IRUDIKAPENIK	ESPAZIO MOTA	PROPIETATE GEOMETRIKOAK
IV	Eragiketa formalen etapa	Bai	Espazio formal eta eraginkorra	
III	Eragiketa konkretuen etapa	Bai	Espazio konkretu eta eraginkorra	
II	Etapa aurreraginkorra	Bai	Espazio aurreraginkorra	
I	Etapa sentso-motorra	Ez	Espazio sentso-motorra	

Metrikoak
Proiektiboak
Topologikoak

Taula: ezaguera espaziala eta garapen intelektuala lotzen dituen eskema, Piaget-en arabera.

Teoria psikogenetikoan proposatzen diren espazio-maila guztietan ikasleak eraikuntzak egiten dituela jotzen da. Espazioa ez da aldez aurretik emandako zerbait, eragiketen bitartez gogoan edo buruan eraikitzen den zerbait baizik. Ildo horri jarraituz, pertzepzio espaziala ez da bakarrik errealitatearen kopia huts bat —argazki-makina batek egingo lukeen antzera—, baizik eta zentzumenen bidez jasotako jakingarriak edo informazioak antolatzearen eta kodetzearen emaitza. Eta enegarren aldiz errepikatu behar dugu objektu fisikoen gogo-irudiek objektu horien gainean subjektuak eragiten dituen ekintzen koordinazioan dutela sorburua.

2.- PIAGET-I EGINDAKO KRITIKAK

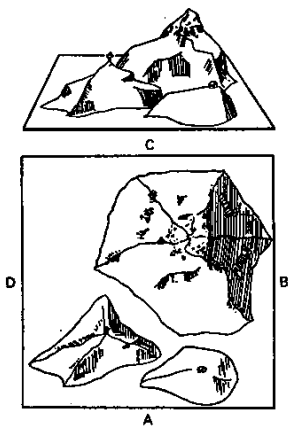
Ezin konta ahala dira Piaget-ek pentsamendu espazialaren garapenari buruz egindako ekarpenak, bai datu fidagarri andana eman duelako —kontu handiz diseinaturiko jardueretan oinarrituak, betiere—, bai oso kontuan hartzeko hipotesiak plazaratu dituelako. Guztiaz ere, haren teoriaren alderdi batzuek zenbait kritika jaso dituzte. Hona hemen hiru alderdi zehatz:

I) PERTZEPZIOAREN ETA IRUDIKAPENAREN ARTEKO BEREIZKUNTZA DELA ETA

Azken aldiotako joera psikologikoen arabera, badirudi pertzepzioaren eta irudikapenaren arteko aldea (gogora dezagun Piaget-ek berebiziko garrantzia ematen ziola bereizkuntza horri) gero eta lausotuagoa edo txikiagoa dela. Gaur egun uste denez, pertzepzioa prozesu askoz zabalagoa eta konplexuagoa da, irudikapena horren parte bat baino ez baita. Hau da, pertzepzioak eta irudikapenak prozesu bera osatzen dutela jotzen da, eta osagai bakoitzak maila bat adierazten du. Horren arabera, irudikapena *graduan* edo *intentsitatean* bakarrik bereiziko litzateke pertzepziotik. Adibidez, bi urteko haur batek karratuak eta triangeluak egoki izendatzen ikas dezake, baina hori egin ahal izateko bi irudi horien nolabaiteko gogo-irudi bat eduki behar du, bere pertzepzioa gogo-irudi horiekin alderatzeko. Konparatze-jarduera hori barik ez dago egoki izendatzerik.

II) KRITIKA METODOLOGIKOA

Ikusi denez, Piaget-en esperimentuek batzuetan emaitza oso bestelakoak erakusten dituzte, itxuraz hutsaren hurrengoak diren zenbait aldakuntza metodologiko egiten badira. Aipa dezagun, esate baterako, 1956. urtean Piaget-ek egindako esperimentu hau:



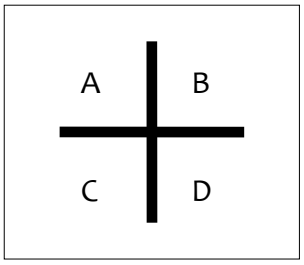
Irudia: Mendikate baten maketa eta bista baten etsenplua (Piaget eta Inhelder, 1956).

Haur bat mahai baten aurrean esertzen da, eta mahai gainean elkarren oso desberdinak diren hiru mendiz osaturiko modelo bat dago: mendi baten tontorra elurrak estali du, bestearen gainean etxetxo bat ikus daiteke, eta hirugarren mendi-puntan gurutze bat dago. Aurkako aldean panpina bat dago, eta haurrak hamar marrazki posibleren artean bat hautatu behar du, hain zuzen ere panpinak aurkako aldetik ikusiko lukeen mendien bista. Zortzi edo bederatzi urte arteko haurrak, oro har, ez dira erantzun zuzena emateko gauza, eta sei-zazpi urteko haurrek beren ikuspegi propioa hautatzeko joera izaten dute.

Piaget-ek ikerketa horretatik atera zuen ondorioa zera izan zen: umea egozentrikoa dela, eta ezin duela ezer ikusi berearen ezberdina den beste ikuspuntu batetik. Hala ere, urte batzuk geroago antzeko esperimentu bat egin zuen beste ikertzaile batek, baina orduan emaitza oso bestelakoak erdietsi zituen:

Mahai baten gainean elkar ebakitzen zuten bi horma elkarzut edo perpendikular kokatu ziren, eta polizia-panpina bat irudian bezala jarri zen, alde batean.

A sektorean ume txiki bat irudikatzen zuen beste panpina bat jarri zen. Haurrari galdetu zitzaion ea poliziak umetxoa ikus zezakeen. Esperimentua B, C eta D sektoreekin errepikatu zen. Polizia ere beste kokapen batzuetara mugitu zen. Hori guztia urratsez urrats egin zen, haurrak esperimentua ulertzen zuela ziur egoteko. Orduan ikerketa hasi zen. Oraingoan bi polizia-panpina erabili ziren, bata aurreko tokian, eta bestea A eta B sektoreak banatzen zituen hormaren muturrean, haurraren aurrealdean. Haurrari panpina bi poliziengandik ezkutatzeko eskatu zitzaion. Jarduera behin eta berriz errepikatu zen, poliziak posizio ezberdinetan kokatuz baina betiere sektore bakarra utziz panpina ezkutatzeko.



Irudia: Horma elkarzutak, polizia eta

Esperimentu hori hiru urte eta erdi eta bost urte bitarteko hogeita hamar haurri proposatu zitzaien. Erantzunen arteko % 90 zuzenak izan ziren. Hormak jartzeko beste disposizio zailagoak ere erabili ziren, bost eta sei sektore osatuz, eta hirugarren polizia bat gehitu zen. Hala eta guztiz ere, hiru urteko haurren % 60k erantzun zuzena eman zuen, eta bost urteko umeen erantzun gehienak ere zuzenak izan ziren (% 90).

Bi ikerketen bestelako emaitzak azaltzeko arrazoi hauek eman daitezke: batetik

Piaget-en mendien jarduera abstraktuegian haurrari ez zitzaion eskatzen panpina eskuinetik ezkerrera lekuz aldatzeko, edo hura manipulatzeko, bakarrik bista posibleen sorta batetik ikuspegiaren arabera ikusiko litzatekeena atzamarrez seinalatzeko; bestetik, bigarren egoeran ikertzaileak haurraren interesa piztu zuen, panpinen jokoa gertuagoa edo "benetakoagoa" sentitzen duelako, eta gainera manipulazioak egiteko aukera eman zion, haurra egoeraren eragilea sentiaraziz.

III) PROPIETATE TOPOLOGIKOAK DIRELA ETA

Ideia espazialen bilakaera azaltzeko Piaget matematiken barneko egitura logikoaz baliatu zen sekuentzia topologiko-proiektibo-euklidearra susmatzean. Hala ere, ikertzaile batzuek nabarmendu dutenez, Piaget-ek ez du ematen halako propietateei buruzko definizio matematiko zorrotzik eta onargarririk. Halaber, ez du proba egiten ea zer gerta litekeen, beraren teoria azken ondorioetaraino eramango balitz.

Zenbait ikertzailek uste dutenez, ez dago hain argi ideia topologikoak, oro har, haurrarengan garatzen diren lehenengoak direla. Badirudi zenbait kontzeptu topologikoren garapena oso goiztiarra dela; beste batzuk, ordea, —baliokidetasun topologikoa, adibidez— askoz geroago garatzen bide dira, haurrak bestelako ideia euklidear eta proiektibo batzuk bere egin ondoren. Eman dezagun puntu hori argitzeko adibide bat. Topologikoki —hots, itxitasunari, jarraitasunari, ordenazioari, banaketari eta gertutasunari kontu eginez soilik— beheko irudiko hiru marrazkiak baliokideak dira. Zehatzago esanda: bi irudi **topologikoki baliokideak** direla esaten da, eraldaketez baliatuz batetik bestera pasa bagaitezke. Eraldaketa horietan debekaturik dauden eragiketa bakarrak hiru hauek dira: zuloak egitea, piezak itsastea eta ebakitzea.

Kakalardoa, gabonetako zuhaitza eta astotxoa irudi topologikoki baliokideak dira; izan ere, hirurek forma eta tamaina ezberdinak badituzte ere, ebakiguneak nahiz lerro eta eremuen arteko erlazioak finko mantentzen dira. Hala eta guztiz ere, ez dirudi haur txiki arrunt batek hiru irudiok berdintzat joko dituenik.

Baliokidetasun topologikoari buruzko inkesta baten arabera, 15 urteko ikasleen artetik soilik % 30 baino gutxiago ziren gai emaniko irudi baten irudi topologikoa aurkitzeko. Ikasle horiek, ordea, arazorik gabe erantzun zioten erlazio euklidearrei buruzko galdera korapilatsuen andana bati.

Irudiak: kakalardoa, gabonetako zuhaitza eta astotxoa.

Egitura matematikoetan sinpleenek aztertzen lehenak izan behar lukete, Piaget-en iritziz; ondorioz, nozio topologikoak ikaskuntzaren lehen mailetan sartzea proposatu zuten hainbatek. Badirudi oker-ulertu bat dagoela hemen: sinpleena errazenarekin nahasten da. Izan ere, sinpleena, zentzu matematikoan, propietate gutxien dituena da, eta hori abstraktuena izan ohi da. Eta abstraktuena, noski, ez da beti errazena izaten...

BIBLIOGRAFIA

Alsina, Claudia, eta beste batzuk. *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. Síntesis Educación. Madril, 1987.

Arrieta, Modesto. *Matematikaren Didaktika. Lehen Hezkuntza II: Geometria eta Neurria*. Euskal Herriko Unibertsitatea. Bilbo, 2001.

Castro, Enrique, eta beste batzuk. *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria.* Síntesis Educación. Madril, 2001.

Dickson, Linda; eta beste batzuk. *El aprendizaje de las Matemáticas.* Labor. Madril, 1991.

Goñi Zabala, J.M.; eta beste batzuk. *Matematikaren Didaktika I. Oinarri teorikoak: Logika*. Gipuzkoako Ikastolen Elkartea. Bilbo, 1983.

Holloway, G.E.T. *Concepción del espacio en el niño según Piaget*. Paidos. Buenos Aires, 1969.

Labinowicz, Ed. *Introducción a Piaget*. Fondo Educativo Interamericano. Mexiko, 1982.

Sanz Lerma, Inés. *Matemáticas y su didáctica II. Geometría y Medida*. Euskal Herriko Unibertsitatea. Bilbo, 2001.

III. ATALA: VAN HIELE EREDUA

Askotarikoak ditugu teoria psikogenetikoak haurraren garapen espaziala nola gauzatzen den ulertzeko emandako giltzak. Era berean, ezin gutxiets daitezke Piaget-en ekarpenak arlo honetan, kontzeptu geometrikoen sorrerari buruzko hainbat ikerketarako marko edo erreferente ezinbestekoak izan baitira (besteak beste, eta egileak berak aitortzen duenez, jarraian aurkeztuko dugun eredurako).

Esan daiteke, laburbildu beharrez, Piaget-en ikerketen eremua ezagutzaren psikologia eta ideia matematikoen garapena dela, nagusiki; proposamen metodologikoetan, ordea, hankamotz samar geratzen da. Konstruktibismoak, eta orobat teoria psikogenetikoak, helburu hau du: ikasleek nola ikasten duten azaltzea[4]. Maisu-maistrek nola azaldu behar duten, ordea, beste kontu bat da; horri buruz ezer gutxi dio. Van Hiele-ren proposamena hutsune hau betetzera dator neurri zabal batean[5].

Oro har hitz eginez, eredu bat (matematikoa, fisikoa, kimikoa, psikologikoa eta abar) fenomeno erreal jakin baten irudikapen sinplifikatua da. Denok erabili ditugu inoiz, esaterako, eredu kristalografikoak: mineralen kristal-sareak eta egiturak irudikatzen dituzten prismak; ezagun ere ezagun ditugu atomoen egitura irudikatzeko koloretako bolak; matematikan abakoak, bloke multibaseak eta *Cuisenaire* erregeletak, besteak beste, zenbakiak eta zenbakien arteko eragiketak adierazteko ereduak ditugu, eta abar. Van Hiele eredua geometriaren ikaskuntza deskribatu eta lagundu nahi duen hezkuntza-eredu globala da.

1.- ZER DA VAN HIELE EREDUA?

Maila guztietako matematika-irakasleekin apur bat hitz egitea nahikoa izaten da halako ezin bat sumatzeko: ikasleen zati —gutxi-asko— zabal batek aurrerapen oso eskasa izaten du ikasturtean zehar. Honako kexu hauek, adibidez, ohikoak ditugu: "Batzuetan ez dago ikasleei kontzeptu berririk ulertarazterik; bestetan, berriz, batek irudipena du ikasleek *badakitela* irakasleak azaldu berri dien halako kontzeptua edo propietatea, baina arbelean egindako etsenpluen kasu berdinak ebazteko gauza dira bakarrik, eta irakaslearen laguntzaz betiere."

Egiak egiari zor, eta baliteke maisu guztiek honelako aieneak ez izatea. Maisu batzuk dira soilik goiko hausnarketak egiten dituztenak: ikasleek egiten dutenari buruz arrazoitzeaz kezkatzen direnak, matematikaren zergatia eta zertarakoa ulertarazi nahi dutenak, eta beren ikasleak problema ezagunak edo tipikoak ez ezik

[4] Konstruktibismoa: garapen kognitiboari eta ikaskuntzari buruzko teoria multzoa. Konstruktibismoaren iturria Piaget-en Epistemologia Genetikoan dago. Gaur egun hainbat korronte daude: psikologikoa edo norbanakoa (ikaskuntza eta garapen curricularraren oinarria matematikaren egituran kokatzen duena), elkarreragilea edo soziala (ikasle, irakasle eta ingurunearen arteko interakzioari garrantzi handiagoa ematen diona), eta abar.

[5] Van Hiele diogun arren, senar-emazte batzuei buruz ari gara: Pierre Marie Van Hiele eta Dina Van Hiele-Geldof bikote nederlandarrari buruz, hain zuzen. Bi matematika-irakasle horiek 1957. urtean plazaratu zuten beren doktoretza-tesietan geometria-arloko ikaskuntza errazteko eta azkartzeko beren eredua. Handik gutxira Dina hil zen, baina senarrak ikerketekin aurrera egin eta hasierako ekarpenak osatu eta aberastu zituen.

bestelakoak ebazteko ere gauza izan daitezen ahalegintzen direnak. Haatik, kexu horiek ez ditugu hain sarri adituko bestelako irakasleen artean: beren ikasleek definizioak, formulak, enuntziatuak eta teoremak buruz ikasteko beste helbururik ez duten irakasleen artean, alegia.

Esperientzia horretatik pasatu eta eskarmentua bildu duen P.M. Van Hiele-k berak hau idatzi zuen:

> *Matematika gai batzuk behin eta berriz azaltzen banituen ere, ikasleek ez zuten ulertzen. Saiatu ere gogotik saiatzen ziren, baina alferrik. Hori batez ere geometria azaltzen hastean sumatzen nuen: emaitzarik sinpleenak ere zailegiak ziren haientzat. [...] Bat-batean ulertzen zutela zirudien. Koherentziaz mintza zitezkeen honelako eta halako gaiaren inguruan, eta esaten zidaten: "Bada ez zen oso zaila. Zergatik azaldu zenigun hain era konplikatuan?". Ondoko urteetan azaltzeko era aldatzen saiatzen nintzen, baina zailtasunek bere hartan jarraitzen zuten. Hizkuntza ezberdinetan mintzo ginelako irudipena izaten nuen. Ideia hau luze izan nuen buruan jira-bira, eta azkenik soluzioa aurkitu nuen: arrazoibide-mailak.*

Goiko paragrafoak geometria irakasteko Van Hiele-k asmatu zuen hezkuntza-ereduaren muina biltzen du. Zehatzago esateko, lau printzipiotan laburbil daitezke haren ideiak:

i) Matematika-ikasleengan hainbat perfekzio-maila aurki daitezke haien arrazoibideaz denaz bezainbatean.
ii) Ikasleak bere arrazoibide-mailari dagozkion gauzak bakarrik ulertuko dizkio irakasleari.
iii) Erlazio matematiko bat ezin adieraz badaiteke ikasleen oraingo arrazoibide-mailaren arabera, itxaron egin beharko da ikasleek goragoko arrazoibide-maila bat eskuratu arte.
iv) Ezinezkoa da pertsona bati batera edo bestera arrazoitzen irakastea. Matematika era egokian irakatsiz, ordea, lehenbailehen beste modu batera arrazoitzen lagundu dakioke.

Van Hiele ereduak bi alderdi ditu, beraz:

a) **Alderdi deskribatzailea** edo analitikoa: sekuentzia bat osatzen duten hainbat arrazoibide mota identifikatzen ditu, *arrazoibide-mailak* deritzenak. Gizabanakoaren arrazoitzeko gaitasunak etapa guzti horiek ibili behar ditu jakintza-arlo bat ikasten hasten denetik garapen intelektual goren batera iritsi arte. Pertsona guztiek igarotzen dituzte maila horiek —behinik behin, geometria arloko— zerbait berria ikasten hastean: haur txikiek, lehen eta bigarren hezkuntzako ikasleek, unibertsitateko ikasleek eta, oro har, pertsona heldu orok.

b) **Alderdi pedagogikoa**: argibideak eta proposamen didaktikoak eskaintzen dizkio maisuari, ikasleak hurrengo arrazoibide-mailara lehenbailehen iritsi daitezen. Proposamen horietaz baliaturik, hezitzaileak unitate didaktiko mardulak osa ditzake, hain zehatzak eta zorrotzak dira-eta argibideak. Argibide horiei *ikaskuntza-fase* deritze.

Ohar bat, atal hau bukatu aurretik: Van Hiele eredua gidatzen duen asmoa ikaskuntzari eta arrazoibide matematikoari dagokie bere osotasunean. Hala ere,

orain arte egin diren ikerketa garrantzizko guztiek geometriaren eremuan jarri dute arreta. Gehiago esango genuke: oso zaila dirudi —oraingoz, behintzat— Van Hiele eredua geometria ez den beste esparru matematiko batean aplikatzeak. Horrela egitekotan, aldaketa oso sakonak sartu behar lirateke arrazoibide-mailen karakterizazioetan; ildo horretan egin diren saio guztiek, gainera, emaitza eskasak izan dituzte.

2.- VAN HIELE-REN ARRAZOIBIDE-MAILAK

Jarraian Van Hiele-k proposatu zituen bost arrazoibide-mailak aztertuko ditugu, bakoitzaren ezaugarri nagusiak emanez eta, beharrezkoa denean, adibide konkretuez baliatuz.

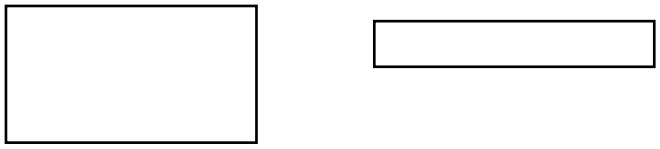
1. MAILA: EZAGUTZA OROKORRA (*VISUALISATION*)

- Etapa honetan kontzeptu geometrikoak era global batean ikusten dira, osagairik edo atributu adierazgarririk ez balute bezala. Irudi geometrikoak, adibidez, unitatetzat jotzen dira, eta horiek deskribatzerakoan atributu ez-adierazgarriak erabiltzen dira.
- Irudi geometrikoak beren forma edo itxura fisikoaren arabera ezagutzen dira, ez beren parteak edo propietateak aztertuz. Ondorioz, irudien arteko sailkapenak antzekotasun edo desberdintasun fisiko globalez baliatuz egiten dira. Espresio hauek ohikoak dira deskribapenak egiteko: "badakit-zeren antzekoa da", "ez-dakit-zeren itxura du", eta abar.
- Maila honetako ikasleak ezin du orokortu irudi batean ikusten dituen ezaugarriak klase bereko beste irudi batera.
- Ikaslea hiztegi geometrikoa ikasteko gauza da, forma bereziak identifika ditzake eta, irudi bat emanik, kopiatu dezake hura.

Arrazoibide oinarrizkoena da hau; Haur Hezkuntzan eta Lehen Hezkuntzako lehenengo urteetan agertzen da bereziki.

Haurrek lauki ezberdinak ezagutu ditzakete: erronboak, karratuak, laukizuzenak eta abar. Beren izenak ere eman ditzakete. Hala ere, bata bestearengandik zertan bereizten diren galdetzen bazaie, *une horretan* aurrean dauzkaten irudien forma edo, beharbada, kolorea aipatuko dute: "laukizuzena luzeagoa da", "erronboa angelutsua da", eta abar. Ezin espero daiteke, etapa honetan, haurrek paralelismoa edo angelu zuzena zer diren uler dezaten.

Ez da harritzekoa, beraz, maila honetan dagoen haur batek karratua eta laukizuzena klase ezberdinekotzat jotzea, edo bi laukizuzen hauek:



Gorago esan dugunez, arrazoibide-maila hau Haur Hezkuntzan eta Lehen Hezkuntzako aurreko urteetan da ohikoa, baina egia esateko ez da bakarrik aldi horietan ageri: ikasle batek kontzeptu geometrikoen multzo berri bat ikasten

duen bakoitzean, lehen maila horretatik pasatu behar du ezinbestean, igarotze hori batzuetan oso laburra bada ere.

2. MAILA: ANALISIA

- Ikasleak konturatu egiten dira irudi geometrikoak osagaiz edo elementuz osaturik daudela, baita propietate matematikoak ere badituztela. Irudia osatzen duten parteak deskribatu eta haren propietateak eman ditzakete, betiere modu informal batean. Irudiak karakterizatzeko gauza dira.
- Esperimentazioaz eta behaketaz baliaturik, ikasleak bestelako propietateak ondoriozta ditzake, klase bereko beste irudietara orokortuz.
- Ikasleek ezin dute propietate batzuk besteekin erlazionatu, eta, beraz, ezin dute irudien arteko sailkapen logikorik egin (ez behintzat haien elementuak edo propietateak erabiliz, baina formaz, koloreaz eta abarrez baliatuz bai).

Jauzi kualitatiboa gertatu da etapa honetan aurrekoarekin alderatuta: ikasleek beste ikuspegi batez begiratzen diete irudiei; izan ere, elementuz osaturik egon daitezkeela jabe baitira orain. Lehen mailako ikasle batentzat laukizuzen bat ate bat da, edo liburu-azal bat; bigarren mailako batentzat, ordea, laukizuzen bat aldeak binaka paraleloak eta angelu zuzenak dituen laukia da.

Arrazoibide-maila honetako beste aurrerapauso bat hau da: ikasleak, lehen aldiz, esku artean darabilen irudia klase baten ordezkaria dela (edo izan daitekeela) atzeman dezake. Adibidez, zenbait erronbo manipulatu ondoren diagonalak elkarzutak direla ohartzen bada, beste edozein erronboren diagonalak ere elkarzutak izango direla jakingo du, beste frogarik gabe.

Mugak ere badira etapa honetan: ikasleak ez dira klaseak ezartzeko gai. Karratuak eta laukizuzenak, esate baterako, familia ezberdinekotzat hartuko dira; izan ere, ikasleen ikuspegi mugatutik, propietate bereizgarri batzuek beste propietate komun batzuek baino garrantzia handiagoa izango dute.

3. MAILA: SAILKAPENA

- Arrazoibide (matematiko) formala gorpuzten hasten da etapa honetan. Ikasleak badaki propietate batzuk beste batzuetatik ondorioztatzen direla, eta elkarren arteko inplikazioak edo erlazioak ere aurki ditzake. Orobat, irudi geometrikoen familiak logikoki sailka ditzake, ezagun dituen propietate edo erlazio geometrikoei kontu eginda. Dena dela, haren arrazoibidea manipulazioaren menpekoa da oraindik.
- Ikasleek definizio matematiko formalak eman ditzakete; definizioak zertarako diren eta nolako ezaugarriak dituzten ulertzen dute.
- Arrazoibide logiko-formal baten ondoz ondoko urratsak ulertu arren, ikasleek ez dute frogaren ez egitura ez beharra sentitzen. Irakasleak froga baten urrats kateatuak azaltzen baditu, ulertzeko gai dira, baina ezin dute beren kabuz eraiki.

Etapa honetako ikasleak badaki, laukizuzen baten kasuan, aurkako angeluen berdintasunak aldeen paralelismoa dakarrela; edo aldeen berdintasunak diagonalen perpendikulartasuna dakarrela, eta abar.

Ikasleek dedukzio txikiak edo inplikazio errazak egin baditzakete ere, teorema oso baten frogan galdu egiten dira. Horrekin batera, honako pentsaera hau erakusten dute: emaitza edo propietate bat "kopuru handi samar batean" egia dela baldin badakigu, zertarako frogatu?

4. MAILA: DEDUKZIO FORMALA

- Arrazoibide-maila honetara iritsita, ikasleek arrazoibide logiko-formalak uler eta eraiki ditzakete beren kabuz. Ondoz ondoko frogek zentzua dute jadanik, eta beharrezkotzat jotzen dituzte enuntziatu bat egia dela konprobatzeko.
- Ikasleek emaitza batera bide bati baino gehiagori jarraituz hel daitekeela onartzen dute. Definizio baliokideak ere egon daitezkeela ulertzen dute.

5. MAILA: ZORROZTASUNA

- Ikasleak hainbat axiomatan oinarrituriko sistemak konpara ditzake.
- Ikasleak hainbat geometria azter ditzake eredu konkretuen beharrik gabe.

3.- VAN HIELE EREDUAREN EZAUGARRI OROKORRAK

Van Hiele-k idatzi zuenez, bere irakasle-esperientzian oinarritu zen bere teoria eraikitzeko. Hala ere, hasieran behintzat, ez zuen hura deuseztatu edo konfirmatzeko lan enpirikorik egin; ikerketak, landa-lanak eta testak geroago etorriko ziren, ikertzaile askoren eskutik etorri ere: 1963. urtetik aurrera, sakonki, Sobietar Batasunean, eta hamarkada bat geroago, Estatu Batuetan.

Geroztiko ikerketek Van Hiele-ren hipotesi nagusiak berretsi zituzten. Zenbait puntutan, ordea, ez dira bat etorri hasierako formulazioa eta landa-lan enpirikoen emaitzak. Hurrengo lerroetan, arrazoibide-mailei buruzko ezaugarri nabarmenak emateaz batera, hasierako ereduari egin zaizkion zuzenketak azpimarratuko ditugu.

I) ARRAZOIBIDE-MAILEK SEGIDA BAT ETA HIERARKIA BAT OSATZEN DUTE

Lau mailetako bakoitzak konplexutasun-gradu bat adierazten du. Gainera, maila bakoitza aurrekoaren gainean oinarritzen da: pertsona batek ezin du bigarren mailaren arabera pentsatu, lehen mailako arrazoibide-gaitasunaren jabe ez bada; hirugarren mailaren arabera pentsatzea ere ezinezkoa da, bigarren mailako arrazoibide-gaitasunik ezean, eta abar.

	Ageriko elementuak	**Ezkutuko elementuak**
1. maila	Irudiak	Irudien parteak eta propietateak
2. maila	Irudien parteak eta propietateak	Propietateen arteko inplikazioak
3. maila	Propietateen arteko inplikazioak	Teoremen dedukzio formala
4. maila	Teoremen dedukzio formala	

Irudia: Van Hiele-ren arrazoibide-mailen ondoz ondoko egitura (irudi lauak).

Horretaz gain, lehen, bigarren eta hirugarren mailetako bakoitzean ondoz ondoko mailan agerikoak diren arrazoibide moduak agertzen dira, era lausotu edo inkontziente batean bada ere. Ikaslea ez da gaitasun horien jabe, eskuratzen hasia izan arren, eta, beraz, hurrengo mailara iritsi arte ez ditu esplizituki eta jakinaren gainean erabiliko.

Oinarrizko ideia zera da: ezin da arrazoibide-maila bat eskuratu, lehendabizi aurrekoa lortu ez bada.

II) ERLAZIO ESTUA DAGO HIZKUNTZAREN ETA MAILEN ARTEAN

Lau mailetako bakoitzari dagozkion arrazoibide-gaitasunak problemak ebazteko eran ez ezik adierazpidean eta ikasleak darabilen terminologian ere islatzen dira. *Frogatu* hitzari maila bakoitzean ematen zaion esangura har dezagun, adibidez:

- Lehen mailan ez du esanahi matematikorik batere.
- Bigarren mailako ikasle batentzat enuntziatu bat *frogatzea* kasu batean edo kopuru txiki batean *konprobatzea* da. Prozedura nolabaiteko neurri batzuk hartzea da, erremintaren bat erabiliz.
- Hirugarren mailan, berriz, *frogatzea*k gutxi-asko matematikariek ulertzen dutena esan nahi du; argudioak, berriz, informalak eta intuitiboak dira, objektu konkretuen behaketan oinarrituak. Frogak, ondorioz, okerrak izan daitezke behin baino gehiagotan.
- Laugarren mailan frogak zuzenak eta formalak izaten dira, matematikako eta logikako legeen eskakizunen araberakoak.

Arrazoibide-maila bakoitzari, beraz, terminologia eta hizkera berezia dagokio.

III) ARRAZOIBIDE-MAILAK LOKALAK DIRA

1950eko eta 60ko hamarkadetako beren lanetan irakur daitekeenez, arrazoibide-mailak globalak zirelakoan zeuden Van Hiele senar-emazteak. Hipotesi horren arabera, ikaslea geometria-arlo zein testuinguru guztietan maila berean egongo litzateke. Uste hori, aldiz, bertan behera utzi da, geroago egindako ikerketek erakutsi dutenez. Izan ere, haur bat maila ezberdinetan egon daiteke kontzeptu geometrikoaren arabera; eta hori ez ezik: jokatu ere, maila diferentetan joka dezake jarduera beraren barruan ere. Hau da, ikasle bat maila jakin batean egon daiteke irudi lauetan, eta maila horri dagozkion prozedurak eta arrazoibideak erabil ditzake jarduerak eta problemak ebazteko. Hala ere, baliteke beste gai batean (isometrietan, adibidez) beste maila bateko elementuak erabiliz arrazoitzea. Horregatik esaten dugu Van Hiele-ren arrazoibide-mailak *lokalak* direla: gai bakoitzari maila bat egokitu ohi zaio.

Aurkikuntza horrek galdera hau ekarri du berekin: zer komeni da *oinarri mugatu*ko edo *oinarri zabal*eko curriculuma sartzea? Hauek dira bi aukerak:

a) Ikasleak hainbat kontzeptu geometrikotan trebatu behar ditugu batera,

horietako bakoitzean Van Hiele-ren hirugarren mailara paraleloki irits daitezen (*oinarri zabal*eko ohiko curriculuma)?

b) Ala eraginkorragoa litzateke ikasleak kontzeptu geometriko gutxirekin (adibidez, laukiekin) trebatzea, horietan hirugarren maila eskuratu dezaten, eta gero beste kontzeptuak aurkeztea (*oinarri mugatu*ko curriculuma)?

Auzi honek, erraz ikusten denez, aparteko garrantzia du, eta irekita dago oraindik.

IV) ARRAZOIBIDE-MAILAK JARRAITUAK DIRA

Puntu hau ere eztabaidagarria izan da. Hasiera batean, mailek egitura diskretua osatzen zutela irizten zion P.M. Van Hiele-k: hau da, maila batetik besterako jauzia bat-batekoa edo bortitza zela uste zuen. Gaur egun, ordea, ez dago hain garbi pauso hori bat-batean edo "egun batetik bestera" gertatzen denik. Aitzitik, ikerketa eta test gehienek erakutsi dutenez, poliki-poliki eta modu jarraituan jazotzen da trantsizioa.

Are gehiago esan daiteke: behatu denez, ez da ezohikoa ikasle batek ondoz ondoko bi mailatako kategorien arabera nahasian arrazoitzea, denboraldi gutxi-asko zabal batean behintzat (adibidez, problemaren zailtasunaren arabera). Gutiérrez, Jaime eta Fortuny-ren iritziz, berriz, "horrek ez du esan nahi mailen izaera hierarkizatua ukatu behar denik; dena dela, giza arrazoibidea gobernatzen duten prozesu konplexuetara hobeto egokitu behar dugu Van Hiele-ren teoria. Izan ere, gizakiak ez du era sinple eta linealean jokatzen, arrazoibide bakar baten esleipenak pentsaraz lezakeenaren kontra".

V) EZ DAUDE ARGI LAUGARREN ETA BOSGARREN MAILEN KARAKTERIZAZIOAK

Van Hiele bera ere ez zen saiatu bosgarren arrazoibide-maila sakonki deskribatzen, aurrekoak baino askoz zailagoak direlako bereizten. Are gehiago kontuan izanik lehen lau mailak ere, maizegi, neurriz kanpo balioetsi direla, eta hasierako itxarokizunak gehienetan ezin direla gauzatu. Badirudi, beraz, bosgarren mailaren karakterizazioak interes teorikoa besterik ez duela.

Egindako ikerketek eta landa-lanek, berriz, beste jakingarri bat ere eman dute: Irakasle Eskolako edo goi-mailako matematika-ikastaro bat jaso duten ikasle gehienak hirugarren mailan edo apalago batean daude; oso gutxi dira laugarren mailako kategorien arabera arrazoitzeko gauza.

Van Hiele-ren teoriaren aldaketa proposatu da, bost mailak hirutara murrizteko, alegia: lehenengoa, bigarrena eta, gutxi gorabehera, gainerako hirurak hartuko lituzkeen hirugarren bat.

4.- IKASKUNTZA-FASEAK

Van Hiele-ren arrazoibide-eredua osatzeko, argibide zehatzak ere badaude irakasleak ikasleari geometria-edukien bereganatze bidean laguntzeko. Argibide

hauek, ikaskuntza-faseak deritzenek, sekuentzia bat osatzen dute. Fase hauen helburua da ikaslea maila batetik hurrengora igarotzen laguntzea, maila bakoitzean jarduera eta problema mailakatuak planteatuz. Maila bakoitzeko bost fase komun daude:

1. FASEA: INFORMAZIOA

- Kontaktu-fasea da hau. Irakasleak ikasgaiaren berri ematen die ikasleei, eta haiekin hitz egiten du terminologia zein ikur berriak erabiliz eta argituz: nolako problemak landuko diren, zer material erabiliko den eta abar.
- Irakasleak jakingarriak lortzen ditu: a) ikasleek gaiari buruz duten aurre-ezagutzari buruz; b) ikasleen arrazoibide-mailari buruz.
- Ikasleen arreta aztergaira zuzentzen da.

2. FASEA: ORIENTAZIO GIDATUA (*BOUND ORIENTATION*)

- Ikasleak ikasgaia aztertzen hasten dira, irakasleak arretaz eta sailkaturik aurkezten dizkien jardueren bitartez.
- Ikasleak gaiaren egitura bereziekin trebatzen hasten dira.
- Nahiz eta ikasleak idazkera sinbolikoa irakurtzeko gauza izan, irakasleak lagundu egiten die. Fase honetan, garrantzia berezia emango zaio testuinguruko kontzeptuak eta erlazioak ahoz adierazteari.

3. FASEA: ESPLIZITATZEA

- Jardueretako egiturak xehe-xehe egiten dira, klase-mailan solasa eta eztabaida piztuz. Interesgarria da ikuspegi ezberdinak plazaratzea: taldearen aurrean nork bere iritzia justifikatu eta argitu beharrean, bere ideiak —edo ikaskidearenak— ordenatuko eta adieraziko ditu arreta handiagoz.
- Ikasleek aurkitu dituzten erregulartasunen berri adierazten dute ahoz, eta bakoitzak nola ebatzi dituen jarduerak azalduko du, betiere irakaslearen gidaritzapean. Arreta berezia emango zaio terminologia egokia erabiltzeari.
- Ikasleak beren baitan hasten dira eraikitzen aztergaiaren erlazio-sarea edo egitura.

4. FASEA: ORIENTAZIO LIBREA

- Ikasleek ikasgaiaren berri dute, erlazioak sumatu dituzte hainbat egoeretan, eta badakite ikur sinbolikoak adierazgarriak direla. Ikasgaiaren nondik-norakoak argikiro emanik daude.
- Ikasleak aurre egin beharko die urratsez urrats ebatzi beharreko jarduerei, baita modu batera baino gehiagotara egin daitezkeen jarduera motei ere. Eskarmentua eskuratzen dute jarduera edo problema bakoitzean, nork bere soluziobidea aurkitu beharrean.
- Ikurrek apurka-apurka beren izaera bisuala galtzen dute, eta ikasgaiaren elementuak (kontzeptuak, propietateak, definizioak eta abar) elkarren artean lotzeko balio dute orain. Elementuen arteko erlaziook esplizituki etxekotzen ditu ikasleak.

5. FASEA: BAT-EGITEA (*INTEGRATION*)

- Aurreko faseetan ezagutza eta trebezia berriak lortu badituzte ere, ikasleek edukiei eta metodoei buruzko ikuspegi globala eskuratu behar dute oraindik. Hau da, ezagutza berriak lehenago ikasi dituzten beste alorrekin erlazionatu behar dituzte.
- Irakasleak arreta berezia jarriko du fase honetan ideia berririk, edo kontraesanezkorik, ez aurkezteko: ikasleak ezagutzen dituen gauzak metatuko, konparatuko eta konbinatuko ditu bakarrik maisu-maistrak.

Fase hau gainditurik, arrazoibide-maila berria eskuratu du ikasleak.

* * * *

Jarraian, Van Hiele-ren ikaskuntza-fasei buruzko zenbait ezaugarri orokor azpimarratuko dira:

A) FASE BAKOITZARI PROBLEMA MOTA BAT DAGOKIO

1. fasea. Ariketen helburuak ez du zertan izan ebatziak izatea: batzuetan errazegiak izango dira; bestetan, berriz, horiek ebazteko tresnak eta ezagutzak faltako zaizkio ikasleari. Adibidez, simetrien biderkadura irakasten hasteko (hirugarren arrazoibide-maila), ispilu pareak emango zaizkio ikasleari, hark bertatik bertara ikus dezan zer gertatzen den isla bat baino gehiago daudenean.

2. fasea. Ariketek elementu nagusiak zedarritzeko balio dute: kontzeptuak, propietateak, definizioak eta abar. Ariketetan, beraz, elementu horietako batzuek agertu beharko dute. Adibidez: simetria landu nahi bada, paperezko irudiak tolestuko ditugu, simetria-ardatza zer den jakiteko; edo angelu zuzena lantzeko, paper bat birritan tolesteko eskatuko dugu.

3. fasea. Fase honetako prozedura nagusia ahozko adierazpena da, taldeka eta nork bere iritzia justifikatuz zein ikaskidearena ulertuz.

4. fasea. Problemak eta jarduerak ikasitako jakingaien aplikazio hutsaz baino harago doaz: irekiak izango dira, eta egoera berriak aurkeztuko dituzte, arbelean azaldu ez direnak. Ikasleek beren ezagutzak konbina ditzaten lagundu behar dute. Adibidez, simetrien aurreko adibidearen bidetik: orri bat behin edo gehiagotan tolestu, artaziez moztu eta orria berriro zabaltzean, zer ikusiko den iragartzea.

5. fasea. Ariketen helburua hau izango da: bat-egitea erraztea edo ikasleek bat-egite hori lortu duten ala ez jakitea. Isometrien konposaketa lantzen denean, adibidez, M.C. Escher-en mosaikoak aztertzea jarduera entretenigarria izan daiteke.

B) FASEEN NEURRI BATEKO MALGUTASUNA

Arrazoibide-mailekin gertatzen denaren kontra (mailen sekuentzia aldaezina da, eta ez dago hurrengo maila batera igarotzerik ikasleak aurreko mailetan trebezia nahikoa lortu ezean), badirudi fase-ereduaren aplikazioa malguagoa dela.

Bigarren, hirugarren eta laugarren faseak ikaskuntza osatu baterako ezinbestekoak ditugu eta, beraz, ez dira nahasi ezta saihestu behar. Hala ere, hirugarren fasea ez dugu ulertu behar bigarren eta laugarren faseen artean dagoen eta soilik elkarrizketari dagokion denbora-tarte gisa. Irakaslearen jarrera jarraitu bat da hirugarren fase hori; hau da, irakasleak etengabe bultzatu behar ditu ikasleak mintza daitezen, eta beren aurkikuntzak, lan moduak, zalantzak, hutsak, iritziak eta abar plazaratu ditzaten. Fase horretan, beraz, sartuko dira lehen, bigarren, laugarren eta bosgarren faseetan egiten diren jardueren emaitzak ere.

Batzuetan lehen fasea utz liteke, ikasleek gai berriaren berri baldin badakite. Hori gerta daiteke, adibidez, ikasmaila berean maila batetik beste maila baterako jauzia dagoenean: orduan, laugarren edo bosgarren faseetako lana ondoko mailaren bigarren fasean egiten jarrai daiteke desorekarik sortu gabe.

Bestetan, bosgarren fasea ere kendu ahalko da: adibidez, arrazoibide-maila apaletan, edo ikasgaia oso berria denean eta zerikusi gutxi duenean ikasleek ezagutzen dituzten beste gaiekin. Halakoetan, laugarren faseko jarduerek ikuspegi globala eskaintzeko balioko dute.

BIBLIOGRAFIA

Afonso Martín, M.C.; eta beste batzuk. *Dos ejemplos de unidades de aprendizaje desarrollados bajo la perspectiva de los Van Hiele: Medida de ángulos y giros*. In Afonso Martín, M.C; eta beste batzuk. *Formación del profesorado e investigación en educación matemática II.* Universidad de La Laguna. La Laguna, 2000.

Arrieta, Modesto. *Matematikaren didaktika. Lehen Hezkuntza II: Geometria eta neurria*. Euskal Herriko Unibertsitatea. Bilbo, 2001.

Burger, W.F.; Shaughnessy, J.M. *Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry*. In *Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 17, Number 1*. 1986.

Jaime Pastor, Adela; eta beste batzuk. *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: el modelo de Van Hiele*. In Llinares Ciscar, S.; eta beste batzuk. *Teoría y práctica en Educación Primaria*. Alfar. Sevilla, 1990.

Jaime Pastor, Adela; eta beste batzuk. *El grupo de las isometrías en el plano (Cap. 4: El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele)*. Síntesis. Madril, 1996.

Sanz Lerma, Inés. *Matemáticas y su didáctica II. Geometría y Medida*. Euskal Herriko Unibertsitatea. Bilbo, 2001.

Van Hiele, P.M. *Structure and Insight*. Academic Press. New York, 1986.

IV. ATALA: KONTZEPTU GEOMETRIKOEI BURUZKO ERROREAK

Geometria gaitasun bisualak garatzeko eremu ezin hobea dugu; azken batean kontzeptu geometrikoak marrazkien edo bestelako ereduen bitartez irudika daitezke, zehaztasunez irudikatu ere: objektu geometriko bat "ikus daitekeen" edo errealitatean bertan existentzia duen zera da, zenbakiak edo eragiketak ez bezala. Kontzeptu geometrikoen *ikusgaitasun* hori, ordea, hainbat oker-ulerturen jatorri ere izan daiteke, horiek adierazteko nolako irudiez baliatzen garen edo nolako ezaugarriei egiten diegun kontu.

Haurrek espazioari buruz eraikitzen dituzten kontzeptu okerrak, gehienetan, irakaskuntza desegoki batean dute iturburua: arreta irizpide okerretan jarri ohi dute ikasleek, eta ondorioz kontzeptu faltsu edo mugatuak garatzen dituzte.

Hezitzaileek haurren zailtasunen jabe izan behar dute, ikaskuntza eraginkorra eta errorerik gabea izango bada. Izan ere, kontzeptuzko erroreak denboran zehar fosiliza daitezke, eta gero oso gaitzak dira erauzten.

Atal honetan errore horien izaeraz eta sorreraz jardungo dugu, ikuspegi psikologikotik zein matematikotik, eta, era berean, horiek gainditzeko estrategia nagusiak ere proposatuko ditugu.

1.- OINARRI TEORIKOA

Gogoratuko denez, *kontzeptua* —definizio matematikotik segitzen den "kontzeptua"— eta *kontzeptuaren gogo-irudia* —gizabanakoaren buruan islatzen den "kontzeptua"— bereizi ditugu lehen atalean. Ondoko lerrootan kontzeptuen eta horien matematika-egituren azterketari ekingo diogu, analisi horrek bi galdera hauei buruzko argia egingo baitigu: Nola eraikitzen dituzte ikasleek beren kontzeptuen gogo-irudiak? Zer faktorek dute eragina eraikuntza horretan?

Oinarrizko kontzeptu gehienak zenbait atributuren batuketaren emaitzatzat jo daitezke. Triangelu isoszele bat, adibidez, atributu *esanguratsu* hauek batuz defini daiteke: kongruenteak diren (i) bi alde dituen (ii) triangelua (iii). Triangelua bera, noski, beste atributu batzuen batuketaren ondorioa ere bada (hiru aldeko poligonoa), baina triangelu isoszelea irakasten den mailan ikasleak badu triangeluaren berri eta, beraz, ez da beharrezkoa hura ere deskonposatzea.

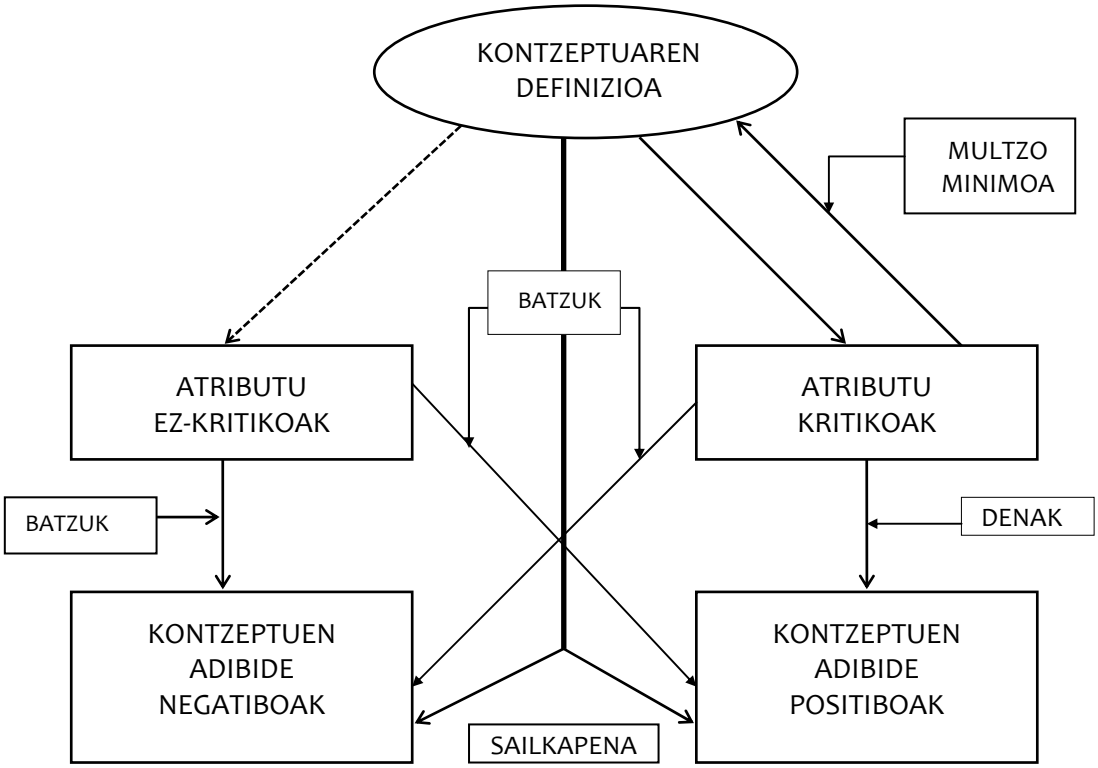
Kontzeptu batek bi motatako atributuak izan ditzake:

a) Atributu esanguratsuak (edo kritikoak): adibide orok delako kontzeptuaren adibide izateko eduki behar dituen atributuak.
b) Atributu ez-esanguratsuak (edo ez-kritikoak): bakarrik kontzeptuaren zenbait adibidek dituzten atributuak.

Kontzeptu baten ahozko definizioak **atributu kritikoen azpimultzo minimo bat** du bere baitan: atributu kopuru nahiko bat. Biraketa batek, kasu, hiru atributu kritiko ditu: (i) biraketa-zentroa, (ii) biraketaren zabaltasuna eta (iii) biraketaren noranzkoa. Hiru elementu horiek ezinbestekoak dira planoko isometria bat biraketa izan dadin. Biraketa-erradioa txikiagoa edo handiagoa izan liteke, irudiaren kokapena halakoa edo holakoa izan, biratu beharreko irudia poligono itxia, kurba irekia edo koloretako irudi ez-konbexua izan liteke... Ezaugarri horiek ez dira

esanguratsuak, kontzeptuarekin ez dute zerikusirik, eta biraketaren etsenplu batetik bestera alda edo desager daitezke.

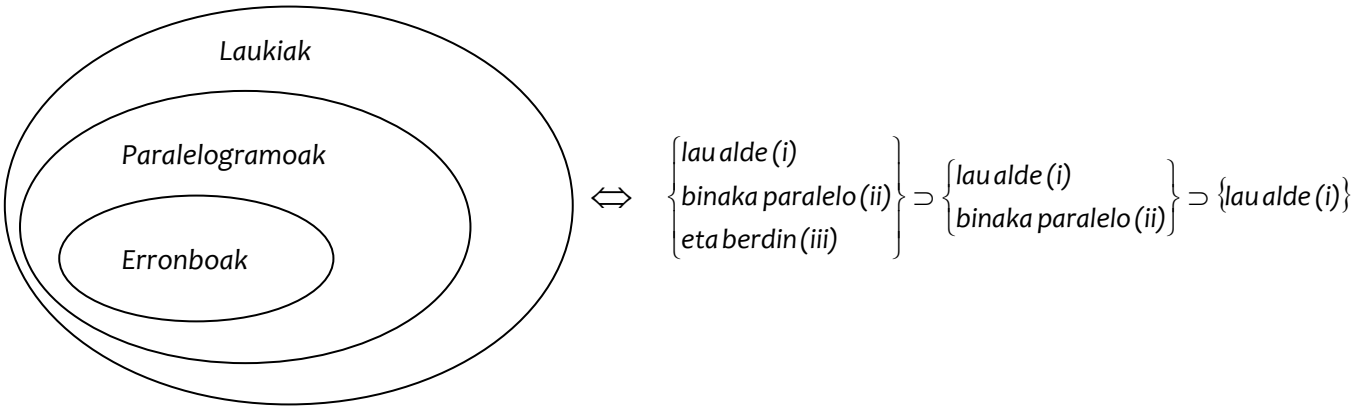
Kontzeptu baten ahozko definizioak irizpide gisa balio dezake adibideak sailkatzeko. Hots, adibide bat positiboa edo negatiboa izan daiteke, zenbat atributu esanguratsu dituen: adibide positibo batek atributu kritiko guztiak ditu; adibide negatibo batek, berriz, atributu kritiko batzuk ditu, baina ez denak. Adibide negatiboek berebiziko garrantzia dute, ikaskuntza geometrikoa eraginkorra eta kontzeptuzko errorerik gabea izango bada. 1. irudian kontzeptu matematiko baten eraikuntzan parte hartzen duten elementuen arteko harreman-sarea ikus daiteke.



1. irudia: Kontzeptuaren elementuen arteko erlazioa

Kontzeptuek eta beren atributu kritikoek, bestalde, egiturazko ezaugarri interesgarri bat ere badute, "aurkako noranzkoko barnekotasun-erlazioa" deitu litekeena. Esate baterako: erronboen multzoa paralelogramoen multzoan dago, eta paralelogramoak orobat laukien multzoan daude. Hala ere, batzuen eta besteen atributu kritikoen multzoei begiratzen badiegu, horien artean barnekotasun-erlazio bat dagoela ikusten da, baina kontrako noranzkoan. Begiratu 2. irudiari.

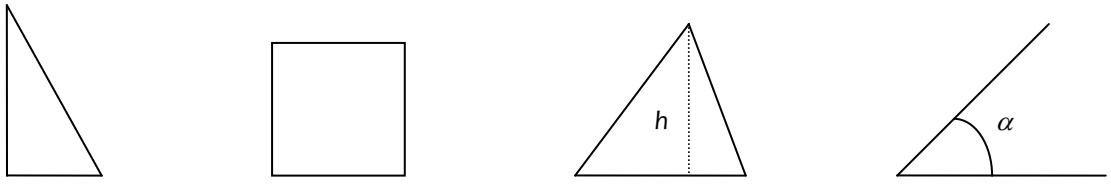
KONTZEPTUAK **KONTZEPTUEN ATRIBUTU KRITIKOAK**



2. irudia: Kontrako noranzkoko barnekotasun-erlazioa

Goian seinalatu ditugun egiturazko ezaugarriez gain, kontzeptu geometrikoen adibideak eta horien atributuak ikus daitezkeen entitateak dira. Ezaugarri horrek halako izaera konkretua ematen die geometria nozioei, aldi berean abantailazko eta desabantailazko dena: irakasleak edo testu-liburuek zer irudikapen mota aukeratzen duten, horrek baldintzatuko du ikasleak halako nozio geometriko bat bere egiteko modua.

Kontzeptu geometriko bat erraz deskriba daiteke haren atributu kritikoak eta dagozkion adibide positiboak zein negatiboak erabiliz. Elementu horiek, ordea, ez dira nahikoak gizabanakoaren buruan kontzeptu baten gogo-irudia nola osatzen den deskribatzeko. Horren harian egin diren ikerketek erakutsi dutenez, kontzeptu bakoitzak halako *adibide prototipiko* bat (edo batzuk) pizten du subjektu gehienen buruan. Adibide prototipikoak, nolabait esateko, "atributu-zerrendarik luzeena" duten adibideak dira: hots, kontzeptuaren atributu kritiko guztiak eta ezaugarri bisualik bizienak dituzten atributu ez-kritikoak. Esate baterako: triangelu zuzen baten posizio bertikala, aldeak eta angeluak berdinak dituen karratua lauki baten adibide gisa, triangelu bateko barne-altuera, edo "eskuinera begira" dagoen eta alde bat horizontala duen angelua (ikusi 3. irudia). Adibide prototipikoak lehendabizi bereganatzen dira, eta ikasle gehienek horien gainean eraikitzen dituzte beren kontzeptuen gogo-irudiak.



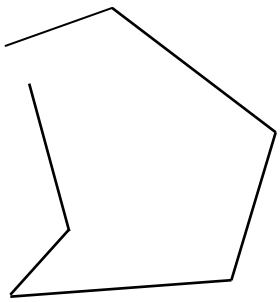
3. irudia: Adibide prototipikoak (triangelu zuzena, "laukia", triangelu baten altuera eta angelua)

Adibide prototipikoa uste prototipikoa deritzonaren iturburua da. Hainbat ikerketak erakutsi dutenez, gizabanakoak joera nabarmena izaten du adibide prototipikoa beste etsenpluei buruzko bere ustea ematerakoan eredu gisa erabiltzeko. Ume

batek, kasu, laukizuzen baten definizio formala zuzen jakin dezake (angelu zuzenak dituen paralelogramoa); hala ere, oso litekeena da laukizuzen bati buruz bere buruan duen irudiaz baliatzea, eta ez definizio analitikoaz, jarduerak egiterakoan edo laukizuzenei buruzko galderei erantzuterakoan: karratua, beharbada, ez da beraren ustean laukizuzena izango, "laukizuzen baten alde perpendikularrek luzera ezberdina eduki behar dutelako", eta abar. Beste hitz batzuekin esateko, ikasle gehienek buruz dakizkiten definizioak ez dituzte aplikatzen adibide ez-estandarretan edo ohiko problemak eta jarduerak ebazterakoan.

Adibide zein uste prototipikoak prozesu bisualen ondorio zuzenak dira. Prototipoaren atributu ez-kritikoak gehienetan bisualki oso biziak direnez, lehendabizi atxikitzen dira, eta gero elementu kutsatzaile gisa funtzionatzen dute. Uste prototipikoa Van Hiele-ren lehen eta, baita ere, bigarren mailako jokaera ohikoa da. Demagun, adibidez, honako arrazoibide hau dugula: "Irudi guztiak, karratua izan ezik, ez-laukiak dira; izan ere, alde berdinak izan ditzakete, baina ez angelu berdinak". Arrazoibide hori analitikoa da neurri batean (laukien eta karratuen ezaugarriez baliatzen da), beraz Van Hiele-ren bigarren mailakoaren araberakoa; hala ere, okerra da inondik ere.

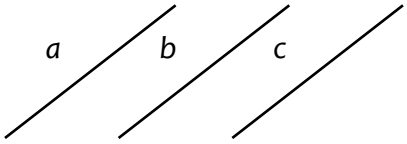
Uste prototipikoaren kontrakoa, bestalde, uste analitiko zuzena da: hots, kontzeptuaren atributu kritikoen gainean oinarrituta dagoena. Esate baterako: "4. irudia ez da lauki bat itxia ez delako; beraz, ez da poligono bat, eta lauki guztiak poligonoak dira".



4. irudia: Ez da itxia; beraz, ez da poligono bat

2.- OHIKO ERROREAK ETA HORIEK GAINDITZEKO ESTRATEGIAK

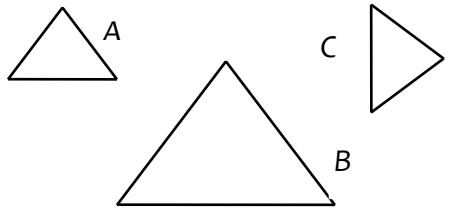
Beheko irudia emanda, adibidez, hau dugu arrazoibide zuzena: "*a b*-ren paraleloa da, eta *b c*-ren paraleloa da. Beraz, *a c*-ren paraleloa izango da." Haur bati, aldiz, hau entzun diogu: "Hori ez da posible, *b* erdian dagoelako".



5. irudia

Irudi geometriko baten kokapena aldatzen denean, beraren izaera (forma, neurria eta abar) ere aldatu egin dela uste izaten du umeak.

Begiratu beheko irudiari: *A*, *B* eta *C* triangeluak emanik, haur batek *B*-ri iritzi zion *A*-ren berdinena. Irakasleak *C* seinalatu eta galdetu zion: "Eta hau, triangelua al da?". Haurrak, berriz, erantzun: "Ez, erori egin delako". Haur horrek *kontzeptuzko errore* bat etxekotua duela esaten da.

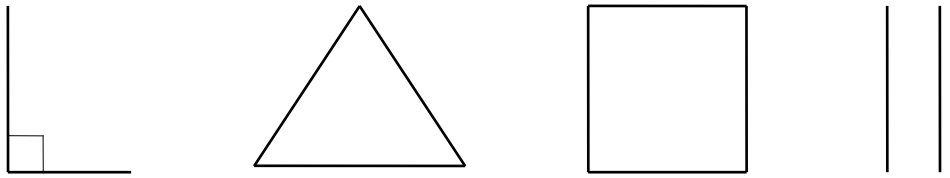


6. irudia

Dakigunez, haurrek bi eratan topo egiten dute geometria-kontzeptuekin: era egituratu batean, eskolan eskaintzen zaizkion esperientzien bitartez, edo era desegituratu batean, ingurutik, gurasoengandik edo jolasetatik jasotako jakingarrien bitartez. Batera edo bestera izan, irakaskuntza-praktiken ezaugarri nagusiak honako hauek dira:

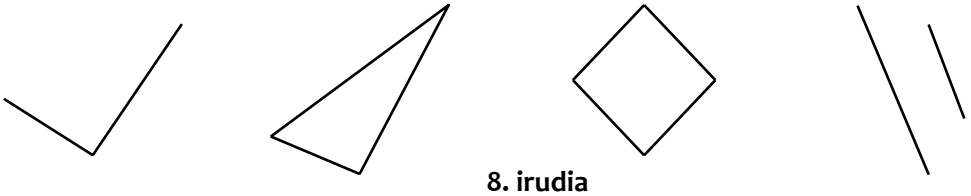
a) Osotasunik eza: kontzeptuen adibide batzuk bakarrik aurkezten dira.
b) Kontzeptu bat ematerakoan, atributu kritikoak eta ez-kritikoak kontuan hartu behar direla ez jabetzea, nola maisu-maistren aldetik hala testuliburuen aldetik ere.
c) Ikasleek kontzeptuak eraikitzeko nolako zailtasunak dituzten jabe ez izatea.
d) Ikaslea hartzaile pasibotzat jotzea: hau da, kontzeptuaren definizioa (liburukoa edo irakaslearena) emanda, eta besterik gabe, haurra hura orokortzeko gauza dela pentsatzea.

Irudi geometrikoak aurkezteko ohiko modua, testuliburuetan zein arbelean, honako hau da:



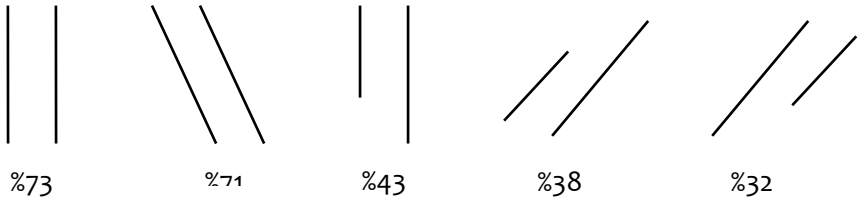
7. irudia

Haurrei oso zail gertatzen zaie marrazki hauek irudikatzen dituzten kontzeptuak orokortzea, batez ere *estandarrak* ez diren irudiekin topo egiten duten kasu bakanetan:



8. irudia

Hamar urteko haurren artean egindako ikerketa baten arabera, 9. irudiko portzentajeek identifikatu zituzten zuzenen arteko paralelotasunak.

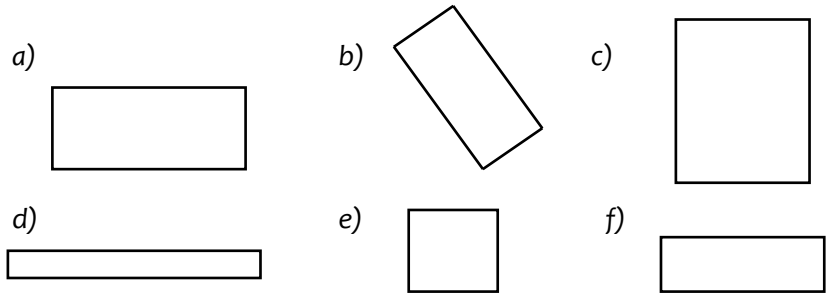


9. irudia: Ikasle askoren iritziz, bi zuzenki paraleloak izango badira, bien luzerek berdinak izan behar dute

Oro har, "zuzenak" diren edo "zutik" dauden irudiekiko joera izaten dute umeek. Ikerketek erakutsi dutenez, baita irudi "makurrak" adibide gisa erabili ohi dituzten maisu-maistren ikasleek ere irudi "zuzenak" errazagoak aurkitzen dituzte besteak baino. Joera hau are nabarmenagoa da angelu zuzenak agertzen direnean.

Nola egin haurrengan kontzeptuen gogo-irudi bisualki mugatuak saihesteko? Galdera horri eman zaizkion erantzunek bi muturren arteko ibilbide oso bat lotzen dute. Batzuek, mutur batean, haurren ikusi-esperientzian jarri nahi dute arreta; horien arabera, ikasliburuetan zein ikasgelan aurkezten den ikusi-esperientzia (adibide positiboak zein negatiboak, eta abar) nahiko aberatsa bada, muga bisualak zeharo desagertuko dira. Beste muturreko egileek, aldiz, gure pertzepzioaren mugak berak azpimarratzen dituzte; hau da, gizabanako bakoitzak berezkoa bide du halako nahi-eta-ezin edo muga bisual bat, eta muga horrek gehiago dezake adibide anitzez osaturiko esperientzia aberats orok baino. Badirudi hemen ere, beste askotan bezala, bi muturren arteko erdiko puntuan dagoela arrazoia. Nolanahi den, gu beti ahaleginduko gara esperientzia-ingurunerik zein jarduera-eskaintzarik zabal eta aberatsena eskaintzen.

Karratu eta laukizuzenen artean ere zailtasun berezia ageri ohi da, besteak beste klase-barnekotasunak nahasteko bide ematen dielako haurrei[6]. Begiratu 10. irudiko laukizuzenei.

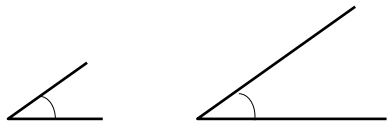


10. irudia: Denak dira laukizuzenak

[6] Klase-barnekotasunaren jabe izateak klase baten eta azpiklase baten alderdi kuantitatiboak zein kualitatiboak ondo koordinatzea esan nahi du. Esate baterako, animaliak baino txakur gehiago daudela dioen haurra ez da zuzen koordinatzen ari klase baten (animaliena) eta azpiklase baten (txakurrena) alderdi kuantitatiboak eta kualitatiboak. Gure kasuan, laukizuzenen klaseak karratuen azpiklasea du bere baitan.

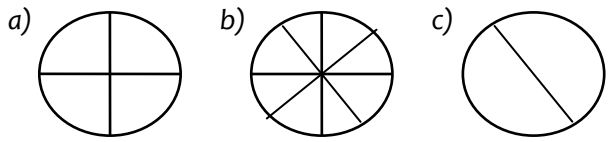
Lehen Hezkuntzako ikasle baten ohiko errorea da *c)* irudia laukizuzentzat ez hartzea, laukizuzenak "etzanik" daudelako, edo "lauak, luzeak eta ez oso zabalak direlako". *d)* irudia ere ez da laukizuzentzat jotzen, "meheegia" delako, edo laukizuzen bat "karratu baten bikoitza" delako gutxi gorabehera. *b)* ere ez da laukizuzena, "oker" dagoelako. Orobat, oso ume gutxik identifikatuko dute *e)* irudia laukizuzen gisa: karratuak laukizuzenen klasearen azpiklase bat direla ez dute egoki etxekotu.

Angeluaren nozioa ere kontzeptu lausoa da hainbat ikaslerentzat, eta oker-ulertu askotxoren iturburua. Ikasle askok nekez sinetsiko dute 360°-koak baino handiagoak diren angeluak egon badaudela, birak ez baitira "bisualak". Errore komuna da angelua eta bi zuzenen arteko distantzia nahastea; ondorioz, 11. irudiko bi angeluak ezberdinak direla jotzen dute hainbatek.



11. irudia

Ikasle askok ez dituzte kontzeptu geometrikoak bereganatzen erakusten zaizkien irudiez harago; irudi hauek, gainera, testu-liburuetako zein arbeleko adibide tipikoak izaten dira jeneralean. Gehienez, antzeko irudi simetriko, orekatu eta ordenatuetara hedatuko dute kontzeptua. Adibidez, zirkunferentzia baten diametroak 12. irudiko *a)* etsenplukoak (diametro estandarrak eta elkarzutak) dira bakarrik Lehen Hezkuntzako ikasle askoren iritziz; batzuek, beharbada, *b)*-koak ere diametrotzat joko dituzte, "irudi polita" osatzen baitute; gutxik, ordea, identifikatuko dute *c)*-ko zuzenkia diametro gisa.



12. irudia: zirkunferentzia baten diametroak

Nolanahi ere, irudi geometrikoen forma eta kolorea aldatuz —esan nahi baita, irakaslearen azalpen antolatzailerik eta argigarririk gabe— ez da kontzeptuen bereganatze zuzena askorik errazten, besterik egin ezean. Maisu-maistraren azalpenek berebiziko garrantzia dute, irudi geometrikoen aldakuntzez batera, ikasleek atributu esanguratsuak abstraditzuko eta benetako erlazio geometrikoak etxekotuko badituzte. Baldintza horietan bai esan daiteke kontzeptu geometrikoen menderakuntza irudi bisual askoren metaketan oinarritzen dela.

Behar-beharrezkoa da adibide positibo zein negatibo ugari eskaintzea, kontzeptu geometriko bat aurkezten dugun bakoitzean. Ildo hauei jarraitzea gomendatzen da:

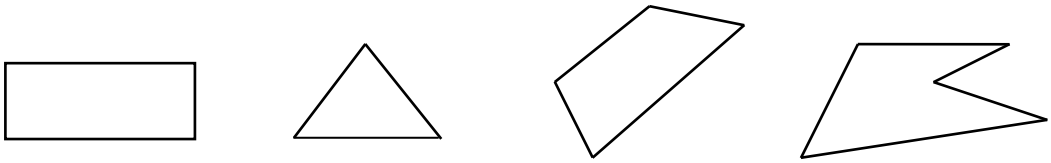
1. Delako kontzeptuaren atributu esanguratsuak identifikatzea, hala nola maizenik ageri diren ezaugarri ez-esanguratsuak. Poligono baten kasuan, adibidez, hiru atributu esanguratsu daude:

   a) Irudi itxia da: hots, ez du "sarrerarik".
   b) Irudi itxia eta bakuna da: hots, ez da bere buruarekin ebakitzen.
   c) Zuzenkiz ("zuzen puskaz") osaturik dago.

   Aurreko baldintza guztiak gertatzea ezinbestekoa da. Hauek ezaugarri ez-esanguratsuak dira:

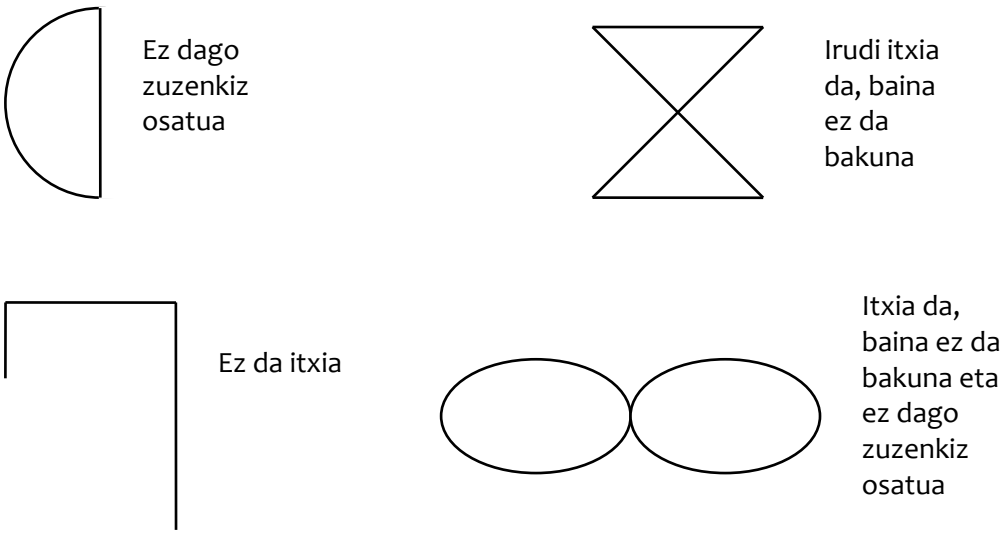
   a) Irudiaren erregulartasuna edo irregulartasuna.
   b) Zuzenkien kopurua (gutxienez hiru zuzenki dauden bitartean, irudia itxia izateko).

2. Adibideak halako eran hautatuko ditugu, ezen ohikoenak diren atributu ez-esanguratsuak era askotakoak izango baitira. Begiratu 13. irudiari:



13. irudia

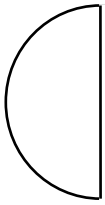
3. Hainbat atributu esanguratsu ez dauzkaten adibide negatibo ugari aukeratzea. Begiratu 14. irudiari:



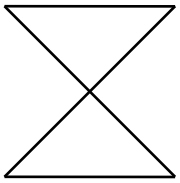
14. irudia

4. Ikaslearen arreta ezaugarri kritiko eta ez-kritikoetara bideratu behar dugu galderak eta azalpenak emanez. Adibidez: "Irudi bat poligonoa izateko, beharrezkoa al da zuzenki guztiak luzera berekoak izatea?". Edo bestela: "nola liteke bi irudi hauek poligonoak izatea, batek lau alde baditu eta besteak sei?".

Edo: "Zergatik 15. irudia ez da poligono bat?". "16. irudia, ordea, zuzenkiz osaturik dago. Zergatik ez da poligono bat?"



15. irudia



16. irudia

BIBLIOGRAFIA

Dickson, Linda; eta beste batzuk. *El aprendizaje de las Matemáticas.* Labor. Madril, 1991.

Guillén Soler, Gregoria. *Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erroneas.* In *Enseñanza de las ciencias, 18*. Universitat Autònoma de Barcelona eta Universitat de València. 2000. urtea.

Hershkowitz, Rina. *Psychological aspects of learning Geometry*. In Nesher, P; Kilpatrick, J. *Mathematics and cognition: A research synthesis by the IGPME*. Cambridge UP. Cambridge, 1990.