eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Ekuazio diferentzial arruntak. Ebatzitako ariketak.

ISBN: 978-84-9860-785-7

Unai Aldasoro Marcellan
Oihana Aristondo Etxeberria
Isabel Benito Butrón

EUSKARA ETA ELEANIZTASUNEKO ERREKTOREORDETZAREN SARE ARGITALPENA

Liburu honek UPV/EHUko Euskara eta Eleaniztasuneko Errektoreordetzaren dirulaguntza jaso du

EKUAZIO DIFERENTZIAL ARRUNTAK

Ebatzitako ariketak

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

Matematika Aplikatua Saila

Unai Aldasoro
Oihana Aristondo
Isabel Benito

AURKIBIDEA

1.- Sarrera 1

2.- Oinarrizko kontzeptuak 3

3.- Aldagai bananduetako ekuazioak 5

4.- Ekuazio homogeneoak 9

5.- Homogeneoetara bihurgarriak 15

6.- Ekuazio diferentzial zehatzak.....19

7.- Ekuazio diferentzial zehatzetara bihurgarriak. Integrazio-faktorea. 25

8.- Lehenengo mailako ekuazio diferentzial linealak. 35

9.- Linealetara murrizgarriak: Bernoulli.....41

10.- 'n' ordenako ekuazio diferentzial linealak 49

10.1 'n' ordenako ekuazio diferentzial homogeneoak 49

10.2 Koefiziente konstantedun ekuazio diferentzial homogeneoak.....50

10.3 Koefiziente konstantedun ekuazio diferentzial ez-homogeneoak edo osoak 54

10.4 Soluzioen gainezarpen-printzipioa.....58

10.5 Konstanteen aldakuntza-metodoa 62

11.- Euler-en ekuazio diferentzialak 65

11.1 Euler-en ekuazio diferentzial homogeneoak 65

11.2 Euler-en ekuazio diferentzial osoak 67

11.3 Soluzioen gainezarpen-printzipioa.....68

12.- Proposaturiko ariketak 73

13.- Bibliografia.....79

1.- SARRERA

Txosten honek mota guztietako ekuazio diferentzial arrunten ebazpenen adibideak aurkezten ditu. Helburu nagusia, beraz, ariketak ebazteko orduan ikasleari kontsultarako erreminta erabilgarri bat eskaintzea da. Azalpen teoriko eta formal sakonetarako, berriz, bibliografian adierazitako materiala gomendatzen dugu.

Ikasmaterial honetan, kasuan kasuko ekuazio diferentzial arrunten ezaugarriak laburbildu dira, eta ebazpenerako prozesua deskribatzen da, adibide bakoitzaren zailtasunei erreparatuz. Gainera, ariketa zerrenda luze bat proposatu da amaierako atalean, ikasleak ezagutzak praktikan jartzeko asmoz.

Ebazpen batzuek “adi”, “oharra” eta “ondorioa” aipamenak jasotzen dituzte, hurrenez hurren, ohiko akats, salbuespen edo alderdi gehigarri eta ondorio teorikoak azpimarratzeko.

Azkenik, kontuan izan material honek kalkulu matematikoaren inguruko aurretiko ezagutzak eskatzen dituela, adibidez: oinarrizko funtzio matematikoen propietateak (esponentzialak, logaritmikoak…), funtzio trigonometrikoen propietate eta erlazioak, eta integral mugatuen integrazio-prozedurak (berehalakoak, zatikako metodoa, aldagai-aldaketa bidezkoak, funtzio arrazionalen integrazioa…).

2.- OINARRIZKO KONTZEPTUAK

Definizioa: Ekuazio bat **ekuazio diferentzial** bat dela esango dugu, baldin eta ekuazio horretan agertzen diren aldagaiak x aldagai askea, $y=y(x)$ x-ren menpeko funtzioa ezezaguna eta haren deribatuak y', y'', ..., $y^{(n)}$ badira. Hau da:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

$y=y(x)$ funtzioa, ezezaguna aldagai bakar baten menpekoa bada, **ekuazio diferentzial arrunta** dela esango dugu.

Oharra: Ekuazio batean deribatuak edo diferentzialak azaltzen direnean, ekuazio diferentziala dela esango dugu.

Adibideak:

1) $x^2 y'' + (x-2) y' + (5x+1) y = x - 2$

2) $t x''' + x'' = 4t$

3) $4x dy - 4y dx = x + 1$

Definizioa: Ekuazio diferentzial baten **ordena** ekuazioan azaltzen den deribazio-ordenarik handiena da.

Adibideak: Aurreko adibideko ordenak

1) 2. ordenako ekuazioa.

2) 3. ordenako ekuazioa.

3) 1. ordenako ekuazioa.

Soluzio orokorra

$f\left(x,y,y',y'',...,y^{n)}\right)=0$ n ordenako ekuazio diferentziala izanik, ekuazioaren soluzioek itxura hau izango dute:

Forma esplizituan: $y=y\left(x,K_1,K_2,...,K_n\right)$

Forma inplizituan: $F\left(x,y,K_1,K_2,...,K_n\right)=0$

$K_1, K_2,...,K_n$ konstanteak izango dira. Konstanteei balioak emanez **soluzio partikularrak** lortuko ditugu.

Adibideak:

1) Har dezagun $x^2\left(lnx-1\right)y''-xy'+y=0$ ekuazio diferentziala. Frogatu $y_1=Ax+B\ln x$ eta $y_2=3x+2\ln x$ funtzioek ekuazio diferentziala betetzen dutela.

- $y_1=Ax+B\ln x \Rightarrow y'_1=A+B/x \Rightarrow y''_1=-B/x^2$

Ordezkatuz: $x^2\left(lnx-1\right)\left(\frac{-B}{x^2}\right)-x\left(A+\frac{B}{x}\right)+\left(Ax+B\,lnx\right)=0$

y_1-ek eta y_2-k betetzen dute ekuazio diferentziala. y_1 soluzio bat da, eta, A eta B bi konstante dituenez, SOLUZIO OROKORRA izango da. y_2, aldiz, SOLUZIO PARTIKULAR bat izango da.

Lehenengo ordenako ekuazio diferentzialaren integral orokorra

Lehenengo ordenako ekuazio diferentzialak era honetan idatz daitezke:

Forma orokorra: $f\left(x,y,y'\right)=0$

Forma diferentziala: $X\left(x,y\right)dx+Y\left(x,y\right)dy=0$

Forma normala: $y'=g\left(x,y\right)$

SOLUZIO OROKORRAK forma hau izango du:

$y=y\left(x,K_1\right)$ edo $F\left(x,y,K_1\right)=0$

3.- ALDAGAI BANANDUETAKO EKUAZIOAK

Definizioa: Izan bedi $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ motako ekuazio diferentzial bat. Ekuazio diferentzial hori **aldagai bananduetako ekuazio** bat dela esango dugu, aldagaiak honela banatu badaitezke:

$$f_1(x)\cdot g_2(y)dx+f_2(x)\cdot g_1(y)dy=0$$

Ebazpena:

Orain, ekuazioa $\dfrac{1}{f_2(x)\cdot g_2(y)}$ funtzioaz biderkatuz ekuazio hau lortzen dugu:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy=0$$

non integralak eginez jatorrizko funtzioa lortu baitezakegu:

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx=-\int\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy$$

ARIKETA EBATZIAK:

1.- $y'\,tgx = y$

Lehenik, aldagai bananduetako ekuazio diferentziala den egiaztatuko dugu, horretarako jatorrizko adierazpena transformatuz:

$$y'tgx=y\Rightarrow\frac{dy}{dx}tgx=y\Rightarrow dy\,tgx-ydx=0$$

Beraz, frogatu dugu aldagai bananduetako ekuazio diferentzial bat dela, non hurrenez hurren:

$$f_1(x)=1 \qquad g_2(y)=y \qquad f_2(x)=tgx \qquad g_1(y)=1$$

Ebazpeneko argibideei jarraituz, ekuazio diferentziala $\dfrac{1}{f_2(x)\cdot g_2(y)}=\dfrac{1}{tgx\cdot y}$ funtzioaz biderkatuko dugu:

$$dy\, tgx \frac{1}{tgx \cdot y} - y dx \frac{1}{tgx \cdot y} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} - \frac{dx}{tgx} = 0$$

Dagoeneko aldagai bakoitza bere diferentzialarekin multzokatua dugu, gurutzaturiko dependentziarik gabe alegia.

Ekuazioa integratuz: $\int \frac{1}{y} dy - \int \frac{1}{tgx} dx = K \Rightarrow \ln|y| - \ln|\sin x| = K \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{\sin x}\right| = K$

$$\Rightarrow \frac{y}{\sin x} = e^K \Rightarrow \quad y = e^K \sin x$$

<u>Adi:</u> 0 zenbakiaren integrala edozein zenbaki erreal izan daiteke, kasu honetan K letraz adierazia: $K \in \mathbb{R}$. Era berean, e^K ere zenbaki erreal bat izango da; notazioa arintzeko: $A = e^K \Rightarrow A \in \mathbb{R}$

$$y = e^K \sin x \Rightarrow \quad y = A \sin x$$

<u>Ondorioa:</u> Jatorrizko ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra $y = A \sin x$ formako funtzio bat da; hau da, ekuazio diferentzialaren soluzio partikular guztiek forma hori dute, eta A konstantearen balioaren arabera soluzio partikular bat edo beste lortuko dugu.

<u>Oharra:</u> Azterturiko ekuazio diferentzialaren maila (y aldagaiaren maila altueneko termino diferentzialak adierazia) eta soluzio orokorrean lorturiko konstante erreal kopurua bat datoz.

2.- $\boldsymbol{\left(1+e^x\right) y\, y' = e^x}$

Aurreko adibidean egindako pausoei jarraituz aldagai bananduetako ekuazio diferentziala dela frogatuko dugu:

$$\left(1+e^x\right) y \frac{dy}{dx} = e^x \Rightarrow \left(1+e^x\right) y\, dy = e^x dx \Rightarrow y\, dy = \frac{e^x}{1+e^x} dx \Rightarrow y\, dy - \frac{e^x}{1+e^x} dx = 0$$

Ekuazioa integratuz: $\int y\, dy - \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = K \Rightarrow \left(\begin{array}{l} aldagai\text{ - }aldaketa \\ \begin{cases} u = e^x \\ du = e^x dx \end{cases} \end{array} \right) \Rightarrow \frac{y^2}{2} - \int \frac{du}{1+u} = K$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} - \ln|1+u| = K$$

Adi: Integrazioa egiteko, u aldagaia definitu dugu, baina soluzio orokorra jatorrizko y, x aldagaien menpe adierazi behar dugu.

Aldagai-aldaketa deseginez: $\frac{y^2}{2} - \ln\left|1+e^x\right| = K \Rightarrow y^2 = 2\ln\left|1+e^x\right| + A$

Ondorioa: Ekuazio diferentzialen ariketak ebatzi ahal izateko integral mugatuak kalkulatzeko metodoak ongi erabiltzen jakin beharra dago. Kasu honetan, aldagai-aldaketa bidez ebatzi dugu.

3.- $\left(xy^2 + x\right)dx + \left(x^2 y - y\right)dy = 0$

Aldagai bananduetako ekuazio diferentziala dela frogatuko dugu:

$$x\left(y^2+1\right)dx + y\left(x^2-1\right)dy = 0 \Rightarrow \frac{x}{x^2-1}dx + \frac{y}{y^2+1}dy = 0$$

Integratuz: $\int \frac{x}{x^2-1}dx + \int \frac{y}{y^2+1}dy = K \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2+1}dy = K$

$$\Rightarrow \ln\left|x^2-1\right| + \ln\left|y^2+1\right| = K \Rightarrow \left(x^2-1\right)\left(y^2+1\right) = A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{A}{x^2-1} - 1 \Rightarrow y^2 = -\frac{x^2+B}{x^2-1}$$

Oharra: Aldagai banandu motako ekuazio diferentziala izateak ez du esan nahi aldi berean beste mota bateko ekuazio diferentzial baten ezaugarririk izaterik ez duenik. Esaterako, ariketa hau ekuazio diferentzial zehatz gisa ebatz daiteke (ikus 5. atala).

4.- EKUAZIO HOMOGENEOAK

Definizioa: $f(x,y)$ funtzio bat *n mailako funtzio homogeneoa* dela esango dugu, baldin:

$$\forall t \qquad f(t\cdot x, t\cdot y) = t^n f(x,y)$$

Definizioa: $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ lehenengo mailako ekuazio diferentzial bat **ekuazio diferentzial homogeneoa** izango da, $f(x,y)$ funtzioa "zero" mailako funtzio homogeneoa bada.

Oharra: Ekuazioak forma hau badu:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

homogeneoa dela esango dugu, baldin eta $M(x,y)$ eta $N(x,y)$ funtzioak maila bereko funtzio homogeneoak badira.

Ebazpena:

$y = x\cdot u$ aldagai-aldaketa eginez aldagai bananduetako ekuazio bat lortuko dugu. Kontuan izan:

$$y = u\,x \quad \Rightarrow \quad y' = u'x + u$$

ARIKETA EBATZIAK:

1.- *4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0*

Lehenik, ekuazio diferentzial homogeneoa den egiaztatuko dugu, horretarako $M(x,y)$ eta $N(x,y)$ funtzioak identifikatuz :

$$(4x-3y)dx+(2y-3x)dy=0 \Rightarrow M(x,y)=4x-3y, N(x,y)=2y-3x$$

Ondoren, $M(x,y)$ eta $N(x,y)$ maila bereko ekuazio homogeneoak diren egiaztatuko dugu:

$$M(t\cdot x, t\cdot y)=4tx-3ty=t(4x-3y)$$

$$N(t\cdot x, t\cdot y)=2ty-3tx=t(2y-3x)$$

Beraz, $M(x,y)$ eta $N(x,y)$ lehen mailako funtzio homogeneoak dira; maila berekoak izanik, jatorrizko ekuazio diferentziala homogeneoa dela esan dezakegu. Ekuazioa ebazteko era normalean adieraziko dugu, eta, ondoren, argibideetan adierazitako aldagai-aldaketa egingo dugu:

$$y'=\frac{3y-4x}{2y-3x} \quad \left(\begin{array}{l} aldagai\ aldaketa \\ \begin{cases} y=u\,x \\ y'=u'x+u \end{cases} \end{array}\right) \Rightarrow u'x+u=\frac{3u\,x-4x}{2u\,x-3x}=\frac{3u-4}{2u-3} \Rightarrow$$

$$u'x=\frac{3u-4}{2u-3}-u=\frac{-2u^2+6u-4}{2u-3}=\frac{-2(u^2-3u+2)}{2u-3}=\frac{-2(u-1)(u-2)}{2u-3}$$

$$\frac{2u-3}{(u-1)(u-2)}du=-2\frac{dx}{x}$$

Esan bezala, aldagai bananduetako ekuazio diferentzial bat lortu dugu. Funtzio arrazionalen integrazio-metodoa aplikatuz:

$$\frac{2u-3}{(u-1)(u-2)}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u-2} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \end{cases}$$

Integratuz: $\int\left(\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u-2}\right)du=\int -2\frac{dx}{x}$

$$\ln(u-1)+\ln(u-2)=-2\ln x+\ln C \Rightarrow \ln\left[(u-1)(u-2)\right]=\ln\frac{C}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (u-1)(u-2)=\frac{C}{x^2}.$$

Aldagai-aldaketa deseginez: $\left(\frac{y}{x}-1\right)\left(\frac{y}{x}-2\right)=\frac{C}{x^2}\Rightarrow(y-x)(y-2x)=\frac{C}{x}$

2.- $2x^3\ y' = y\ (y^2 + 3x^2\ )$

Aurreko ariketan bezala, $M(x,y)$ eta $N(x,y)$ maila bereko ekuazio homogeneoak diren egiaztatuko dugu:

$$M(t\cdot x,t\cdot y)=-ty(t^2y^2+3t^2x^2)=t^3\left[-y\left(y^2+3x^2\right)\right]$$

$$N(t\cdot x,t\cdot y)=2t^3x^3=t^3\left(2x^3\right)$$

Bi kasuetan hirugarren mailako funtzio homogeneoak ditugunez, ekuazio diferentzial homogeneoen ebazpena aplika dezakegu.

$$y'=\frac{y\,(y^2+3x^2)}{2x^3}\quad\left(\begin{array}{l}aldagai\text{-}aldaketa\\ \begin{cases}y=u\,x\\ y'=u'x+u\end{cases}\end{array}\right)\Rightarrow u'x+u=\frac{u\,x\,(u^2x^2+3x^2)}{2x^3}=\frac{u^3+3u}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'x=\frac{u^3+3u-2u}{2}=\frac{u^3+u}{2}\Rightarrow 2\frac{du}{u^3+u}=\frac{dx}{x}$$

Aldagai bananduetako ekuazio diferentzial bat lortu dugu.

$$\frac{2}{u(u^2+1)}=\frac{A}{u}+\frac{Bu+C}{u^2+1}\Rightarrow\begin{cases}A(u^2+1)+(Bu+C)u=2\\ A=2,B=-2,C=0\end{cases}$$

Integratuz: $\int\left(\frac{2}{u}+\frac{-2u}{u^2+1}\right)du=\int\frac{dx}{x}$

$$\ln x+\ln K=2\ln u-\ln(u^2+1)\Rightarrow\ln(xK)=\ln\frac{u^2}{u^2+1}\Rightarrow xK=\frac{u^2}{u^2+1}.$$

Aldagai-aldaketa deseginez: $xK=\dfrac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y^2}{x^2}+1}\Rightarrow xK=\dfrac{y^2}{y^2+x^2}$.

3.- $\left(xy - 2y^2\right)dx - \left(x^2 - 3xy\right)dy = 0$

Ekuazio diferentzial homogeneoa dela frogatu ondoren, aldagai-aldaketa egingo dugu:

$$M\left(t\cdot x, t\cdot y\right) = t^2xy - 2t^2y^2 = t^2\left(xy - 2y^2\right)$$

$$N\left(t\cdot x, t\cdot y\right) = -t^2x^2 + 3t^2xy = t^2\left(-x^2 + 3xy\right)$$

$$y' = \frac{x\,y - 2y^2}{x^2 - 3x\,y} \quad \left(\begin{array}{l} aldagai\text{ - }aldaketa \\ \begin{cases} y = u\,x \\ y' = u'x + u \end{cases} \end{array}\right) \Rightarrow u'x + u = \frac{u\,x^2 - 2u^2\,x^2}{x^2 - 3x^2\,u} = \frac{u - 2u^2}{1 - 3u^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'x = \frac{u - 2u^2}{1 - 3u^2} - u = \frac{u^2}{1 - 3u^2} \Rightarrow \frac{1 - 3u^2}{u^2}du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int\left(\frac{1}{u^2} - \frac{3}{u}\right)du = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{u} - 3\ln u = \ln x + \ln C \Rightarrow -\frac{1}{u} = \ln\left(u^3 x\,K\right).$$

Aldagai-aldaketa deseginez: $-\dfrac{x}{y} = \ln\left(\dfrac{y^3}{x^3}x\,K\right) \Rightarrow e^{-\frac{x}{y}} = \dfrac{K\,y^3}{x^2}$.

4.- $\left(3x^2 + 2xy - y^2\right)dx + \left(x^2 - 2xy - 3y^2\right)dy = 0$

Ekuazio diferentzial homogeneoa dela frogatu ondoren, aldagai-aldaketa egingo dugu:

$$M\left(t\cdot x, t\cdot y\right) = 3t^2x^2 + 2t^2xy - t^2y^2 = t^2\left(3x^2 + 2xy - y^2\right)$$

$$N\left(t\cdot x, t\cdot y\right) = t^2x^2 - 2t^2xy - 3t^2y^2 = t^2\left(x^2 - 2xy - 3y^2\right)$$

Era normalean adieraziz:

$$y' = \frac{y^2 - 3x^2 - 2xy}{x^2 - 2xy - 3y^2} \quad \left(\begin{array}{l} aldagai\text{ - }aldaketa \\ \begin{cases} y = u\,x \\ y' = u'x + u \end{cases} \end{array}\right) \Rightarrow y = ux \Rightarrow u'x + u = \frac{u^2 - 3 - 2u}{1 - 2u - 3u^2}$$

$$u'x = \frac{u^2 - 3 - 2u - u + 2u^2 + 3u^3}{1 - 2u - 3u^2} = \frac{3u^3 + 3u^2 - 3u - 3}{1 - 2u - 3u^2} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1 - 2u - 3u^2}{3u^3 + 3u^2 - 3u - 3}du$$

Kontuan hartuz $\left(\dfrac{1-2u-3u^2}{(u+1)^2(u-1)}=\dfrac{A}{u+1}+\dfrac{B}{(u+1)^2}+\dfrac{C}{u-1}\begin{cases}A=-2\\B=0\\C=-1\end{cases}\right)$ betetzen dela eta

hau integratuz: $\dfrac{1}{3}\left[-2\ln(u+1)-\ln(u-1)\right]=\ln x+\ln K \Rightarrow \dfrac{1}{(u+1)^2(u-1)}=(x.k)^3 \Rightarrow$

eta aldagai-aldaketa deseginez: $\dfrac{x^3}{(y+x)^2(y-x)}=k^3x^3 \Rightarrow (y+x)^2(y-x)=\dfrac{1}{k^3}=Kte$

5.- $\boldsymbol{y'=\dfrac{2xy}{3x^2-y^2}}$

Ekuazio diferentzial homogeneoa dela frogatu ondoren, aldagai-aldaketa egingo dugu:

$M\left(t\cdot x,t\cdot y\right)=-2t^2xy=t^2\left(2xy\right)$

$N\left(t\cdot x,t\cdot y\right)=3t^2x^2-t^2y^2=t^2\left(3x^2-y^2\right)$

$$u'x+u=\frac{2u}{3-u^2}\quad\left(\begin{array}{l}aldagai\text{-}aldaketa\\ \begin{cases}y=u\,x\\ y'=u'x+u\end{cases}\end{array}\right)\Rightarrow u'x=\frac{2u}{3-u^2}-u=3\frac{2u-3u+u^3}{3-u^2}=\frac{u^3-u}{3-u^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3-u^2}{u(u^2-1)}du=\frac{dx}{x}$$

Kontuan hartuz $\dfrac{3-u^2}{u(u^2-1)}=\dfrac{A}{u}+\dfrac{B}{u-1}+\dfrac{C}{u+1}\Rightarrow\{A=-3;\,B=1;\,C=1$ betetzen dela eta

hau integratuz: $-3\ln u+\ln(u-1)+\ln(u+1)=\ln x+\ln K \Rightarrow \dfrac{u^2-1}{u^3}=Kx.$

eta aldagai-aldaketa deseginez: $\dfrac{x(y^2-x^2)}{y^3}=Kx \Rightarrow y^2-x^2=K\,y^3$

6.- $y' = \dfrac{4x^2 + xy - 3y^2}{5x^2 - 2xy - y^2}$

Ekuazio diferentzial homogeneoa dela frogatu ondoren, aldagai-aldaketa egingo dugu:

$$M\left(t\cdot x, t\cdot y\right) = -4t^2x^2 - t^2xy + 3t^2y^2 = t^2\left(-4x^2 - xy + 3y^2\right)$$

$$N\left(t\cdot x, t\cdot y\right) = 5t^2x^2 - 2t^2xy - t^2y^2 = t^2\left(5x^2 - 2xy - y^2\right)$$

$$u'x + u = \frac{4+u-3u^2}{5-2u-u^2} \quad \left(\begin{array}{l} aldagai\text{ - }aldaketa \\ \begin{cases} y = u\,x \\ y' = u'x + u \end{cases} \end{array}\right) \Rightarrow u'x = \frac{4+u-3u^2}{5-2u-u^2} - u = \frac{u^3-u^2-4u+4}{5-2u-u^2}$$

$$\frac{5-2u-u^2}{u^3-u^2-4u+4}du = \frac{dx}{x}$$

Kontuan hartuz: $\dfrac{5-2u-u^2}{(u-1)(u-2)(u+2)} = \dfrac{A}{u-1} + \dfrac{B}{u-2} + \dfrac{C}{u+2} \Rightarrow \left\{ A = -\dfrac{2}{3};\quad B = -\dfrac{3}{4};\quad C = \dfrac{5}{12} \right.$

hau integratuz: $\ln Kx = -\dfrac{2}{3}\ln(u-1) - \dfrac{3}{4}\ln(u-2) + \dfrac{5}{12}\ln(u+2) = \dfrac{1}{12}\ln\dfrac{(u+2)^5}{(u-1)^8(u-2)^9} \Rightarrow$

eta aldagai-aldaketa deseginez: $x^{12}Kte = \dfrac{(y+2x)^5x^{12}}{(y-x)^8(y-2x)^9} \Rightarrow (y-x)^8(y-2x)^9K = (y+2x)^5.$

<u>Ohar orokorra:</u> Ebatzi beharreko aldagai bananduetako ekuazio diferentziala maiz funtzio arrazionalen integrazio erakoa izaten da. Hala, logaritmo nepertarrak azalduko dira integrazioaren emaitzan, eta propietateak erabiliz argumentuen arteko erlazioan laburbilduko dugu.

5.- HOMOGENEOETARA BIHURGARRIAK

Definizioa: $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{mx+ny+l}\right)$ motako ekuazio diferentzialak **homogeneoetara bihurgarriak** izango dira.

Ebazpena:

- Baldin c=l=0, ekuazio diferentzial homogeneoa da.
- Gainerako kasuetan, sistema hau aztertuko dugu:

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ mx+ny+l=0 \end{cases}$$

Sistema horrek planoko bi zuzen irudikatzen ditu, eta hiru emaitza posible ditu:

a) Sistema bateragarri determinatua, non zuzenak (x_0, y_0) puntu batean mozten baitira.

Eta aldagai-aldaketa hau eginez:

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dX \\ dy = dY \end{cases} \Rightarrow y' = Y' \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ax+by+c = aX+bY \\ mx+ny+l = mX+nY \end{cases}$$

Ekuazioa ekuazio diferentzial homogeneo bihurtuko da:

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX+bY}{mX+nY}\right)$$

b) Sistema bateragarri indeterminatua (zuzen berdinak): $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{l}$

Zatiketa eginda, aldagai bananduetako ekuazio diferentzial bat izango da.

c) Sistema bateraezina da (zuzen paraleloak): $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} \neq \frac{c}{l}$.

$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = h$ betetzen denez $\Rightarrow \begin{cases} a = m.h \\ b = n.h \end{cases} \Rightarrow y' = f\left(\frac{h(mx+ny)+c}{mx+ny+l}\right)$

Beraz, ebazteko, $mx+ny=z$ aldagai-aldaketa egingo dugu.

ARIKETA EBATZIAK:

1.- *(3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0*

Lehenik, ekuazio diferentzial homogeneoa den aztertuko dugu:

$M(t\cdot x, t\cdot y) = 3ty - 7tx + 7 = 7 + t(3y - 7x)$

$N(t\cdot x, t\cdot y) = -3tx + 7ty + 3 = 3 + t(-3x + 7y)$

Beraz, $M(x,y)$ eta $N(x,y)$ ez dira funtzio homogeneoak. Hala ere, duten egituragatik jatorrizko ekuazio diferentziala homogeneotara bihurgarria dela ikus dezakegu:

$y' = \dfrac{-7x + 3y + 7}{3x - 7y - 3}$ non $\begin{cases} a = -7, b = 3, c = 7 \\ m = 3, n = -7, l = -3 \end{cases}$ diren.

$\Rightarrow \begin{cases} -7x + 3y + 7 = 0 \\ 3x - 7y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} \neq 0$, beraz, soluzio bakarra.

$x_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}} = 1$ eta $y_0 = 0$ izanik, aldagai-aldaketa egingo dugu $\Rightarrow \begin{cases} x = X + x_0 = X + 1 \\ y = Y + y_0 = Y \end{cases}$

$Y' = \dfrac{-7(X+1) + 3Y + 7}{3(X+1) - 7Y - 3} = \dfrac{-7X + 3Y}{3X - 7Y}$ homogeneoa da. Aurretik ikusitako prozedura aplikatuz:

$Y' = \dfrac{-7X + 3Y}{3X - 7Y} \left(\begin{array}{l} aldagai\text{ - }aldaketa \\ \begin{cases} Y = uX \\ Y' = u'X + u \end{cases} \end{array} \right) \Rightarrow u'X + u = \dfrac{-7 + 3u}{3 - 7u}$

$u'X = \dfrac{7u^2 - 7}{3 - 7u} \Rightarrow \dfrac{3 - 7u}{u^2 - 1} du = 7\dfrac{dX}{X}$

Kontuan hartuz: $\dfrac{3 - 7u}{u^2 - 1} = \dfrac{A}{u - 1} + \dfrac{B}{u + 1} \Rightarrow \begin{cases} B = -5 \\ A = -2 \end{cases}$

hau integratuz: $\ln K - 2\ln(u-1) - 5\ln(u+1) = 7\ln X \Rightarrow \dfrac{K}{(u-1)^2(u+1)^5} = X^7$

Ekuazio diferentzial homogeneoa ebazteko aldagai-aldaketa deseginez:

$$\frac{K}{\left(\frac{Y}{X}-1\right)^2\left(\frac{Y}{X}+1\right)^5}=X^7 \Rightarrow \frac{K}{X^2\left(\frac{Y}{X}-1\right)^2 X^5\left(\frac{Y}{X}+1\right)^5}=1 \Rightarrow (Y-X)^2(Y+X)^5=K$$

Ekuazio diferentziala homogeneo bihurtzeko egindako aldagai-aldaketa deseginez:

$(Y-X)^2(Y+X)^5=(y-x+1)^2(y+x-1)^5=K.$

<u>Ondorioa:</u> Homogeneotara bihurgarria den ekuazio diferentzial bat ebatzi dugu, non dagokion sistema bateragarri determinatua den.

<u>Oharra:</u> Jatorrizko ekuazio diferentzialaren aldagaien menpeko emaitza lortzeko eginiko bi aldagai-aldaketak desegin behar dira: ekuazio diferentzial homogeneoa ebaztekoa eta homogeneotara bihurtzeko erabilitakoa.

2.- *(x - 2y + 5)dx + (-3x + 6y - 15)dy = 0*

Lehenik, ekuazio diferentzial homogeneoa den aztertuko dugu:

$M(t\cdot x, t\cdot y)=tx-2ty+5=5+t(x-2y)$

$N(t\cdot x, t\cdot y)=-3tx+6ty-15=-15+t(-3x+6y)$

Beraz, $M(x,y)$ eta $N(x,y)$ ez dira funtzio homogeneoak. Hala ere, duten egituragatik jatorrizko ekuazio diferentziala homogeneotara bihurgarria dela ikus dezakegu:

$$y'=-\frac{x-2y+5}{-3x+6y-15} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+5=0 \\ -3x+6y-15=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}=0$$

Ondorioz, sistema bateragarri indeterminatu edo bateraezina da. Kasua zehazteko:

$\frac{b}{n}\overset{?}{=}\frac{c}{l} \Rightarrow \frac{-2}{-6}=\frac{5}{15}$, beraz, sistema bateragarri indeterminatua da, zatiketa eginez ebatziko duguna:

$$y'=-\frac{x-2y+5}{-3x+6y-15}=\frac{1}{3} \Rightarrow 3y'=1 \Rightarrow 3dy=dx \Rightarrow 3y=x+K\ .$$

3.- *(x - 2y - 1)dx + (3x - 6y + 2)dy = 0*

Lehenik, ekuazio diferentzial homogeneoa den aztertuko dugu:

$$M\left(t\cdot x,t\cdot y\right)=tx-2ty-1=-1+t\left(x-2y\right)$$

$$N\left(t\cdot x,t\cdot y\right)=3tx-6ty+2=2+t\left(3x-6y\right)$$

Beraz, $M\left(x,y\right)$ eta $N\left(x,y\right)$ ez dira funtzio homogeneoak. Hala ere, duten egituragatik jatorrizko ekuazio diferentziala homogeneotara bihurgarria dela ikus dezakegu:

$$y'=-\frac{x-2y-1}{3x-6y+2}\Rightarrow\begin{cases}x-2y-1=0\\3x-6y+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{vmatrix}-1 & -2\\3 & -6\end{vmatrix}=0$$

Ondorioz, sistema bateragarri indeterminatu edo bateraezina da. Kasua zehazteko:

$\frac{b}{n}\overset{?}{=}\frac{c}{l}\Rightarrow\frac{-2}{-6}\neq\frac{-1}{2}$, beraz, sistema bateraezina da. Dagokion aldagai-aldaketa aplikatuz:

$$y'=-\frac{x-2y-1}{3\left(x-2y\right)+2}\Rightarrow\begin{pmatrix}aldagai-aldaketa\\\begin{cases}x-2y=z\\1-2y'=z'\end{cases}\end{pmatrix}\Rightarrow\frac{1-z'}{2}=\frac{-z+1}{3z+2}$$

$$-z'=\frac{2(-z+1)}{3z+2}-1=\frac{-5z}{3z+2}\Rightarrow z'=\frac{dz}{dx}=\frac{5z}{3z+2}\Rightarrow\frac{3z+2}{5z}dz=dx$$

Aldagai bananduetako ekuazio diferentziala integratuz:

$$\frac{3}{5}z+\frac{2}{5}\ln z+\ln K=x\Rightarrow 2\ln z+\ln C=5x-3z\Rightarrow\ln\left(C\cdot z^2\right)=5x-3z\Rightarrow C\cdot z^2=e^{5x-3z}$$

Aldagai aldaketa deseginez:

$$C\cdot\left(x-2y\right)^2=e^{5x-3\left(x-2y\right)}\Rightarrow C\cdot\left(x-2y\right)^2=e^{2x+6y}\Rightarrow A(x-2y)=e^{x+3y}$$

<u>Oharra</u>: Homogeneotara bihurgarri diren ekuazio diferentzialak ebazteko ekuazio-sistema linealen sailkapena ongi ezagutu beharra dago, eta sistema bateragarri determinatu, bateragarri indeterminatu eta bateraezinak bereizten jakin.

6.- EKUAZIO DIFERENTZIAL ZEHATZAK

Definizioa: Izan bitez $M(x,y)$ eta $N(x,y)$ bi funtzio erreal jarraitu D eremuan. $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ ekuazio diferentzial bat **zehatza** izango da D eremu batean, $U(x,y)$ funtzio erreal bat existitzen bada D eremuan non:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=M(x,y) \text{ eta } \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$$

$U(x,y)$ funtzioa ekuazio diferentzialaren jatorrizko funtzio bat da, eta integral orokorra hau izango da:

$$U(x,y)=kte$$

Teorema: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ ekuazio diferentziala D eremuan zehatza izateko baldintza beharrezkoa eta nahikoa, $M(x,y)$, $N(x,y)$ eta haien deribatuak D eremuan jarraituak izanik, honako hau da:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Ebazpena:

1. era:

$M(x,y)$ x-rekiko integratuz: $U(x,y)=\int M(x,y)\,dx+f(y)$

$U(x,y)$ funtzioa ezagutzeko $f(y)$ ebaztea falta zaigu. Horretarako, lortutako $U(x,y)$ y-rekiko deribatuko dugu:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx+f(y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right)+f'(y)$$

Bestalde, badakigunez $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$ betetzen dela, ekuazio honetatik $f(y)$ ebatziko dugu eta, hala, $U(x,y)$ funtzioa lortuko:

$$f'(y)=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right)$$

Ebazpena:

2. era:

$M(x,y)$ x-rekiko integratuz: $U(x,y)=\int M(x,y)\,dx+f(y)$

$N(x,y)$ y-rekiko integratuz: $U(x,y)=\int N(x,y)\,dy+g(x)$

Bi $U(x,y)$ funtzio berdinduz, $f(y)$ eta $g(x)$ ebatziko ditugu, eta, hala, $U(x,y)$ funtzioa lortuko.

ARIKETA EBATZIAK:

1.- $e^x(y^3+xy^3+1)dx+3y^2(xe^x-6)dy=0$

Hasteko, ekuazio diferentzial zehatza den egiaztatuko dugu, $M(x,y)$ eta $N(x,y)$ funtzioak, hurrenez hurren, y eta x aldagaiekiko deribatuz:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial M}{\partial y}=e^x(3y^2+3y^2x)=e^x3y^2(1+x)\\[2ex]\dfrac{\partial N}{\partial x}=3y^2(e^x+xe^x)=e^x3y^2(1+x)\end{array}\right\}\Rightarrow ZEHATZA$$

Ekuazio diferentzial zehatza dela ikusi ondoren, 1. ebazpen-metodoari jarraituko diogu. Lehenik, beraz, $M(x,y)$ x-rekiko integratuz:

$$U(x,y)=\int M(x,y)\,dx+f(y)=\int e^x(y^3+xy^3+1)dx+f(y)=$$
$$=\ e^x(y^3+xy^3+1)-\int e^xy^3dx+f(y)\ =\ e^x(y^3+xy^3+1)-e^xy^3+f(y)\ =\ e^x(xy^3+1)+f(y)$$

Esan bezala oraindik $f(y)$ ebaztea falta zaigu, horretarako $U(x,y)$ y-rekiko deribatuz:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=3xy^2e^x+f'(y)=N(x,y)=3y^2(xe^x-6)\ \text{ bete behar da}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(y)=-18y^2\Rightarrow f(y)=-6y^3+kte$$

Orduan, $U(x,y)$-ren adierazpen osoa berreskuratuz:

$$U(x,y)=e^x(xy^3+1)-6y^3+kte$$

Beraz, soluzio orokorra hau da:

$$e^x(xy^3+1)-6y^3=K$$

2.- *(2xy + y²)dx + (x² + 2xy - y)dy = 0*

Hasteko, ekuazio diferentzial zehatza den egiaztatuko dugu:

$$\left.\frac{\partial M}{\partial \mathrm{y}} = 2x + 2y = \frac{\partial N}{\partial \mathrm{x}}\right\} \quad \Rightarrow ZEHATZA$$

Ekuazio diferentzial zehatza dela ikusi ondoren, 1. ebazpen-metodoa erabil dezakegu:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = \left(2xy + y^2\right) \quad \Rightarrow U(x,y) = \int \left(2xy + y^2\right) dx + f(y) = x^2 y + y^2 x + f(y)$$

Orain, $f(y)$ ezagutzeko $U(x,y)$ y-rekiko deribatuz:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = x^2 + 2xy + f'(y) = N(x,y) = x^2 + 2xy - y \text{ bete behar da} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(y) = -y \Rightarrow f(y) = -\frac{y^2}{2} + kte$$

Orduan, laburbilduz: $U(x,y) = x^2 + 2xy - \frac{y^2}{2} + kte$

Beraz, soluzio orokorra hau da:

$$x^2 + 2xy - \frac{y^2}{2} = K$$

3.- *(x + ycosx) dx + sinx dy = 0*

Hasteko, ekuazio diferentzial zehatza den egiaztatuko dugu:

$$\left.\frac{\partial M}{\partial \mathrm{y}} = \cos x = \frac{\partial N}{\partial \mathrm{x}}\right\} \quad \Rightarrow ZEHATZA$$

Ekuazio diferentzial zehatza dela ikusi ondoren, 2. ebazpen-metodoa erabil dezakegu. Lehenik, beraz, $M(x,y)$ x-rekiko integratuz:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = \left(x + y\cos x\right) \quad \Rightarrow U(x,y) = \int \left(x + y\cos x\right) dx + f(y) = \frac{x^2}{2} + y\sin x + f(y)$$

Orain, $N(x,y)$ y-rekiko integratuz:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y) = \sin x \qquad \Rightarrow U(x,y) = \int \sin x dy + g(x) = y\sin x + g(x)$$

Azkenik, $U(x,y)$ funtzioaren bi adierazpenak berdinduz, $f(y)$ eta $g(x)$ ebatziko ditugu:

$$U(x,y)=\frac{x^2}{2}+y\sin x+f(y)=y\sin x+g(x)\Rightarrow\frac{x^2}{2}+f(y)=g(x)$$

Beraz, $g(x)=\frac{x^2}{2}$ eta $f(y)=K$ (konstantea soilik, berdintzan ez baitago y aldagaiarekiko menpekotasunik)

Ondorioz, soluzio orokorra hau izango da:

$$\frac{x^2}{2}+y\sin x=K$$

4.- $(2xe^y+e^x)dx+(x^2+1)e^y dy=0$

Lehenik, ekuazio diferentzial zehatza den egiaztatuko dugu:

$$\left.\frac{\partial M}{\partial y}=2xe^y=\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\Rightarrow ZEHATZA$$

Ekuazio diferentzial zehatza dela ikusita, 1. ebazpen-metodoa aplikatuko dugu.

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=M(x,y)=\left(2xe^y+e^x\right)\quad\Rightarrow U(x,y)=\int\left(2xe^y+e^x\right)dx+f(y)=x^2e^y+e^x+f(y)$$

Orain, $U(x,y)$ y-rekiko deribatuz:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=x^2e^y+f'(y)=N(x,y)=(x^2+1)e^y \text{ bete behar da} \Rightarrow f'(y)=e^y\Rightarrow f(y)=e^y+kte$$

Orduan: $U(x,y)=x^2e^y+e^x+e^y+kte$

Beraz, soluzio orokorra hau da:

$$\left(x^2+1\right)e^y+e^x=K$$

$$\boxed{\mathbf{5.-}\ \left(e^x + \ln y + \frac{y}{x}\right)dx + \left(\frac{x}{y} + \ln x + \operatorname{sen} y\right)dy = 0}$$

Lehenik, ekuazio diferentzial zehatza den egiaztatuko dugu:

$$\left.\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{\partial N}{\partial x}\right\} \Rightarrow ZEHATZA$$

Ekuazio diferentzial zehatza dela ikusita, 1. ebazpen-metodoa aplikatuko dugu.

Hasteko, $M(x,y)$ x-rekiko integratuz:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = \left(e^x + \ln y + \frac{y}{x}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U(x,y) = \int\left(e^x + \ln y + \frac{y}{x}\right)dx + f(y) = \left(e^x + x\ln y + y\ln x\right) + f(y)$$

Orain, $U(x,y)$ y-rekiko deribatuz:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \frac{x}{y} + \ln x + f'(y) = N(x,y) = \frac{x}{y} + \ln x + \sin y \text{ bete behar da} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(y) = \sin y \Rightarrow f(y) = -\cos y + kte$$

Orduan: $U(x,y) = e^x + x\ln y + y\ln x - \cos y + kte$

Beraz, soluzio orokorra hau da:

$$e^x + x\ln y + y\ln x - \cos y = K$$

$$\boxed{\mathbf{6.-}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0}$$

Lehenik, ekuazio diferentzial zehatza den egiaztatuko dugu:

$$\left.\frac{\partial M}{\partial \mathrm{y}}=-xy\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{y^2}=\frac{\partial N}{\partial \mathrm{x}}\right\} \Rightarrow ZEHATZA$$

Ekuazio diferentzial zehatza dela ikusita, 1. ebazpen-metodoa aplikatuko dugu.

Hasteko, $M\left(x,y\right)$ x-rekiko integratuz:

$$\frac{\partial U\left(x,y\right)}{\partial x}=M(x,y)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow U(x,y)=\int\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx=\left(\sqrt{x^2+y^2}+\ln x+\frac{x}{y}\right)+f(y)$$

Orain, $U(x,y)$ y-rekiko deribatuz:

$$\frac{\partial U\left(x,y\right)}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{y^2}+f'(y)=N(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2} \quad \text{bete behar da} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(y)=\frac{1}{y}\Rightarrow f(y)=\ln y+kte$$

Orduan: $U(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x}{y}+\ln x+\ln y+kte$

Beraz, soluzio orokorra hau da:

$$\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x}{y}+\ln x+\ln y=K$$

<u>Ondorio orokorra:</u> Ekuazio diferentzial zehatzen ebazpena baliokideak diren bi eratara bideratu daitezke. Kasu guztietarako pauso berdinak egin behar direnez, zailtasun nagusia ebatzi beharreko integralen konplexutasunean datza.

7.- EKUAZIO DIFERENTZIAL ZEHATZETARA BIHURGARRIAK. INTEGRAZIO-FAKTOREA

Definizioa: Izan bedi $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ ekuazio diferentziala, $\mu(x,y)$ deribatu partzialak D eremuan jarraituak dituen funtzio bat **integrazio-faktore** bat dela esango dugu, baldin eta ekuazioaz biderkaturik ekuazio diferentzial zehatz bat lortzen bada. Hau da:

$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$ ekuazio diferentzial ZEHATZA

Beraz, hau bete behar da:

$$\frac{\partial\left[\mu(x,y)M(x,y)\right]}{\partial y}=\frac{\partial\left[\mu(x,y)N(x,y)\right]}{\partial x} \qquad (*)$$

INTEGRAZIO-FAKTORE MOTAK:

1.- *x*-ren menpeko integrazio-faktorea $\mu(x)$

$$\mu=\mu(x)\Rightarrow\begin{cases}\mu_y=0\\ \mu_x=\dfrac{d\mu}{dx}=\mu'\end{cases}$$

Beraz, (*)-n ordezkatuz: $\mu M_y=\mu N_x+\mu' N\Rightarrow\mu\left(M_y-N_x\right)=\mu' N\Rightarrow\dfrac{\mu'}{\mu}=\dfrac{M_y-N_x}{N}$.

Beraz, integrazio-faktorea lortzeko, $\dfrac{M_y-N_x}{N}$ x-ren menpeko funtzio bat izan behar da.

Adibidea: $\boxed{(1 - x^2 y)dx + x^2 (y - x)dy = 0}$

Lehenik, ekuazio diferentzial zehatza den egiaztatuko dugu. Deribatu partzialen notazio irizpide gisa $\frac{\partial M}{\partial y} = M_y$ eta $\frac{\partial N}{\partial x} = N_x$ eran laburbilduko dira:

$M_y = -x^2$ eta $N_x = 2xy - 3x^2$; beraz, ez da ZEHATZA.

$\mu(x)$ integrazio-faktorea egiaztatuz:

$$\Rightarrow \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2x^2 - 2xy}{x^2(y-x)} = \frac{2x(x-y)}{x^2(y-x)} = -\frac{2}{x} = \frac{\mu'}{\mu}$$

Ondorioz, $\mu(x)$ integrazio-faktorea onartzen du, non $\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{2}{x}$ den. Beraz, adierazpena integratuz $\mu(x)$-ren balioa hau izango da: $\ln \mu = -2 \ln x \Rightarrow \mu(x) = \frac{1}{x^2}$.

Hori jakinda, integrazio-faktorea biderkatuz, jatorrizko ekuazio diferentzialaren baliokidea den ekuazio diferentzial zehatz bat lortuko dugu.

$$\frac{1}{x^2}(1 - x^2 y)dx + \frac{1}{x^2} x^2 (y - x)dy = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y - x)dy = 0.$$

$M_y = -1$ eta $N_x = -1$; beraz, ZEHATZA da.

Puntu honetatik aurrera, 6. atalean proposaturiko bi ebazpen eretako bat aplika dezakegu.

Esaterako, 1. era erabiliz $M(x, y)$ x-rekiko integratuz:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = \left(\frac{1}{x^2} - y\right) \Rightarrow U(x,y) = \int \left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + f(y) = -\frac{1}{x} - yx + f(y)$$

Orain, $U(x, y)$ y-rekiko deribatuz:

$\frac{\partial U}{\partial y} = -x + f'(y) = N(x,y) = y - x$ bete behar da $\Rightarrow$ $f'(y) = y \Rightarrow f(y) = \frac{y^2}{2} + kte$

Orduan: $U(x,y) = -\frac{1}{x} - yx + \frac{y^2}{2} + kte$ izango da.

Beraz, soluzio orokorra hau da: $-\frac{1}{x} - yx + \frac{y^2}{2} = K$

2.- *y*-ren menpeko integrazio-faktorea $\mu(y)$

$$\mu = \mu(y) \Rightarrow \begin{cases} \mu_y = \dfrac{d\mu}{dy} = \mu' \\ \mu_x = 0 \end{cases}$$

Beraz, (*)-n ordezkatuz: $\mu M_y + \mu' M = \mu N_x \Rightarrow \mu\left(N_x - M_y\right) = \mu' M \Rightarrow \dfrac{\mu'}{\mu} = \dfrac{N_x - M_y}{M}$

Beraz, integrazio-faktorea lortzeko $\dfrac{N_x - M_y}{M}$ *y*-ren menpeko funtzio bat izan behar da.

Adibidea: $\boxed{x^2 y^2 dx + (x^3 y + y + 3)dy = 0}$

Lehenik, ekuazio diferentzial zehatza den egiaztatuko dugu:

$M_y = 2yx^2$ eta $N_x = 3x^2 y$; beraz, ez da ZEHATZA. Orain, $\mu(y)$ integrazio-faktorea egiaztatuz:

$$\Rightarrow \frac{N_x - M_y}{M} = \frac{3x^2 y - 2yx^2}{x^2 y^2} = \frac{x^2 y}{x^2 y^2} = \frac{1}{y}$$

Beraz, ekuazio diferentzialak $\mu(y)$ erako integrazio-faktorea onartzen du, zeinaren balioa $\dfrac{\mu'}{\mu} = \dfrac{1}{y}$ adierazpena integratuz lortuko dugun: $\ln \mu = \ln y \Rightarrow \mu(y) = y$.

Ondorioz, ekuazio diferentzial baliokide berria $x^2 y^3 dx + \left(x^3 y^2 + y^2 + 3y\right)dy = 0$ izango da.

$M_y = 3x^2 y^2$ eta $N_x = 3x^2 y^2$; beraz, ZEHATZA da.

Esaterako, 1. era erabiliz $M(x, y)$ *x*-rekiko integratuz:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y) = \left(x^2 y^3\right) \Rightarrow U(x, y) = \int \left(x^2 y^3\right) dx = \frac{x^3 y^3}{3} + f(y)$$

Orain, $U(x, y)$ *y*-rekiko deribatuz:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^3 y^2 + f'(y) = N(x, y) = x^3 y^2 + y^2 + 3y \text{ bete behar da} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(y) = y^2 + 3y \Rightarrow f(y) = \frac{y^3}{3} + 3\frac{y^2}{2} + kte$$

Orduan: $U(x, y) = \dfrac{x^3 y^3}{3} + \dfrac{y^3}{3} + 3\dfrac{y^2}{2} + kte$; eta soluzio orokorra: $\dfrac{x^3 y^3}{3} + \dfrac{y^3}{3} + 3\dfrac{y^2}{2} = K$

3.- *(x+y)*-ren menpeko integrazio-faktorea $\boldsymbol{\mu(x+y)}$

$$\mu=\mu(x+y)=(t=x+y)=\mu(t)\Rightarrow\begin{cases}\mu_x=\dfrac{d\mu}{dt}\dfrac{\partial t}{\partial x}=\dfrac{d\mu}{dt}.1=\mu'\\ \mu_y=\dfrac{d\mu}{dt}\dfrac{\partial t}{\partial y}=\dfrac{d\mu}{dt}.1=\mu'\end{cases}$$

Beraz, (*)-n ordezkatuz:

$$\mu' M+\mu M_y=\mu' N+\mu N_x\Rightarrow\mu'(M-N)=\mu(N_x-M_y)\Rightarrow\frac{\mu'}{\mu}=\frac{(N_x-M_y)}{(M-N)}$$

Integrazio-faktorea lortzeko, $\dfrac{(N_x-M_y)}{(M-N)}$ *(x+y)*-ren menpeko funtzio bat izan behar da.

Adibidea: $\boxed{\boldsymbol{xdx+\dfrac{x^2}{2(x+y)}dy=0}}$

Lehenik, ekuazio diferentzial zehatza den egiaztatuko dugu:

$M_y=0$ eta $N_x=\dfrac{x^2+2xy}{2(x+y)^2}$; beraz, ez da ZEHATZA. Orain, $\mu(x+y)$ integrazio-faktorea egiaztatuz:

$$\Rightarrow\frac{(N_x-M_y)}{(M-N)}=\frac{\dfrac{x^2+2xy}{2(x+y)^2}-0}{x-\dfrac{x^2}{2(x+y)}}=\frac{x^2+2xy}{2x(x+y)^2-x^2(x+y)}=\frac{1}{(x+y)}$$

Beraz, ekuazio diferentzialak $\mu(x+y)=\mu(t)$ erako integrazio-faktorea onartzen du, zeinaren balioa $\dfrac{\mu'(t)}{\mu(t)}=\dfrac{1}{(x+y)}=\dfrac{1}{t}$ den eta $\ln\mu=\ln t\Rightarrow\mu(t)=t=(x+y)$

Ondorioz, ekuazio diferentzial baliokide berria $x(x+y)dx+\dfrac{x^2}{2}dy=0$ izango da.

$M_y=x$ eta $N_x=x$; beraz, ZEHATZA da.

Esaterako, 1. era erabiliz $N(x,y)$ y-rekiko integratuz:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y) = \frac{x^2}{2} \Rightarrow U(x,y) = \int \frac{x^2}{2} dy = \frac{y\,x^2}{2} + f(x)$$

Orain, $U(x,y)$ x-rekiko deribatuz:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = xy + f'(x) = M(x,y) = x\left(x+y\right) \text{ bete behar da} \Rightarrow \Rightarrow f'(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} + kte$$

Orduan: $U(x,y) = \frac{y\,x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + kte$, eta soluzio orokorra: $3y\,x^2 + 2x^3 = K$

<u>4.- *(x-y)*-ren menpeko integrazio-faktorea</u> $\boldsymbol{\mu\left(x-y\right)}$

$$\mu = \mu(x-y) = \left(t = x-y\right) = \mu(t) \Rightarrow \begin{cases} \mu_x = \dfrac{d\mu}{dt}\dfrac{\partial t}{\partial x} = \dfrac{d\mu}{dt}.1 = \mu' \\ \mu_y = \dfrac{d\mu}{dt}\dfrac{\partial t}{\partial y} = \dfrac{d\mu}{dt}.\left(-1\right) = -\mu' \end{cases}$$

Beraz, (*)-n ordezkatuz:

$$-\mu' M + \mu M_y = \mu' N + \mu N_x \Rightarrow \mu'\left(M+N\right) = \mu\left(M_y - N_x\right) \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{\left(M_y - N_x\right)}{\left(M+N\right)}$$

Integrazio-faktorea lortzeko, $\dfrac{\left(M_y - N_x\right)}{\left(M+N\right)}$ *(x-y)*-ren menpeko funtzio bat izan behar da.

<u>Adibidea:</u> $\boxed{\boldsymbol{\left(\left(x-y\right)ln\left(x-y\right)+x\right)dx = x\,dy}}$

Lehenik, ekuazio diferentzial zehatza den egiaztatuko dugu:

$M_y = \ln\left(x-y\right)+1$ eta $N_x = 1$; beraz, ez da ZEHATZA. Orain, $\mu\left(x-y\right)$ integrazio-faktorea egiaztatuz:

$$\Rightarrow \frac{M_y - N_x}{M+N} = \frac{\ln\left(x-y\right)+1-1}{-\left(x-y\right)\ln\left(x-y\right)} = \frac{1}{-\left(x-y\right)}$$

Beraz, ekuazio diferentzialak $\mu(x-y)=\mu(t)$ erako integrazio-faktorea onartzen du, zeinaren balioa $\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}=\frac{1}{-(x-y)}=-\frac{1}{t}$ den eta $\ln\mu=-\ln t\Rightarrow\mu(t)=t^{-1}=\frac{1}{t}=\frac{1}{(x-y)}$

Ondorioz, ekuazio diferentzial baliokide berria $\left(-\ln(x-y)-\frac{x}{(x-y)}\right)dx+\frac{x}{(x-y)}dy=0$ izango da.

$M_y=\frac{1}{(x-y)}-\frac{x}{(x-y)^2}=\frac{-y}{(x-y)^2}$ eta $N_x=\frac{-y}{(x-y)^2}$; beraz, ZEHATZA da.

Esaterako, 1. era erabiliz $N(x,y)$ y-rekiko integratuz:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=N(x,y)=\frac{x}{(x-y)}\Rightarrow U(x,y)=\int\frac{x}{(x-y)}dy=-x\ln(x-y)+f(x)$$

Orain, $U(x,y)$ x-rekiko deribatuz:

$\frac{\partial U}{\partial x}=-\ln(x-y)-\frac{x}{x-y}+f'(x)=M(x,y)=-\ln(x-y)-\frac{x}{(x-y)}$ bete behar da $\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow f(x)=kte$

Orduan: $U(x,y)=-x\ln(x-y)+kte$, eta soluzio orokorra: $x\ln(x-y)=K$

<u>5.- *(x y)*-ren menpeko integrazio-faktorea</u> $\mu(x\,y)$

$$\mu=\mu(x\,y)=(t=x\,y)=\mu(t)\Rightarrow\begin{cases}\mu_x=\frac{d\mu}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{d\mu}{dt}y=\mu'y\\ \mu_y=\frac{d\mu}{dt}\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{d\mu}{dt}x=\mu'x\end{cases}$$

Beraz, (*)-n ordezkatuz:

$$\mu'xM+\mu M_y=\mu'yN+\mu N_x\Rightarrow\mu'(xM-yN)=\mu(N_x-M_y)\Rightarrow\frac{\mu'}{\mu}=\frac{(N_x-M_y)}{(xM-yN)}$$

Integrazio-faktorea lortzeko, $\frac{(N_x-M_y)}{(xM-yN)}$ *(xy)*-ren menpeko funtzio bat izan behar da.

Adibidea: $\boxed{(y + xy^2)dx + (x - x^2 y)dy = 0}$

Lehenik, ekuazio diferentzial zehatza den egiaztatuko dugu:

$M_y = 1 + 2xy$ eta $N_x = 1 - 2xy$; beraz, ez da ZEHATZA.

$\mu(xy)$ integrazio-faktorea egiaztatuz:

$$\Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{(N_x - M_y)}{xM - yN} = \frac{-4xy}{(xy + x^2y^2) - (xy - x^2y^2)} = \frac{-2}{x.y} = \frac{-2}{t} \Rightarrow$$

Beraz, ekuazio diferentzialak $\mu(xy) = \mu(t)$ erako integrazio-faktorea onartzen du, zeinaren balioa $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{-2}{t}$ adierazpena integratuz lortuko dugun:

$$\ln \mu = \int \frac{-2}{t} dt = -2 \ln t = \ln t^{-2} \Rightarrow \mu = \frac{1}{(xy)^2}.$$

Ondorioz, ekuazio diferentzial baliokide berria $\frac{(1+xy)}{yx^2} dx + \frac{(1-xy)}{y^2 x} dy = 0$ izango da.

$M_y = \frac{-1}{x^2y^2}$ eta $N_x = \frac{-1}{x^2y^2}$; beraz, ZEHATZA izanik, esaterako 1. era erabiliz:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = \frac{(1+xy)}{yx^2} \Rightarrow U(x,y) = \int \left(\frac{1}{yx^2} + \frac{1}{x} \right) dx + f(y) = -\frac{1}{yx} + \ln x + f(y)$$

Orain lorturiko $U(x,y)$ -ren adierazpena *y*-rekiko deribatuz:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{xy^2} + f'(y) = N(x,y) = \frac{(x - x^2y)}{(xy)^2} = \frac{1}{xy^2} - \frac{1}{y} \text{ bete behar da} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(y) = -\frac{1}{y} \Rightarrow f(y) = -\ln y + kte$$

Orduan: $U(x,y) = -\frac{1}{yx} + \ln x - \ln y + kte$

Beraz, soluzio orokorra hau da: $-\frac{1}{yx} + \ln x - \ln y = K$

6.- (x^2+y^2)-ren menpeko integrazio-faktorea $\mu\left(x^2+y^2\right)$

$$\mu=\mu\left(x^2+y^2\right)=\left(t=x^2+y^2\right)=\mu(t)\Rightarrow\begin{cases}\mu_x=\dfrac{d\mu}{dt}\dfrac{\partial t}{\partial x}=\dfrac{d\mu}{dt}.2x=2\mu'.x\\ \mu_y=\dfrac{d\mu}{dt}\dfrac{\partial t}{\partial y}=\dfrac{d\mu}{dt}.2y=2\mu'.y\end{cases}$$

Beraz, (*)-n ordezkatuz:

$$2\mu' yM+\mu M_y=2\mu' xN+\mu N_x\Rightarrow 2\mu'\left(yM-xN\right)=\mu\left(N_x-M_y\right)\Rightarrow 2\frac{\mu'}{\mu}=\frac{\left(N_x-M_y\right)}{\left(yM-xN\right)}$$

Integrazio-faktorea lortzeko, $\dfrac{\left(N_x-M_y\right)}{\left(yM-xN\right)}$ (x^2+y^2)-ren menpeko funtzio bat izan behar da.

Adibidea: $\boxed{(x^3+xy^2-y)dx+(y^3+x^2y+x)dy=0}$

Lehenik, ekuazio diferentzial zehatza den egiaztatuko dugu:

$M_y=2xy-1$ eta $N_x=2xy+1$; ez da ZEHATZA.

$\mu\left(x^2+y^2\right)$ integrazio-faktorea egiaztatuz:

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{(N_x-M_y)}{(2yM-2xN)}=\frac{2}{2(yM-xN)}=\frac{1}{(x^3y+xy^3-y^2)-(xy^3-x^3y+x^2)}=$$
$$=\frac{1}{-(x^2+y^2)}=-\frac{1}{t}\Rightarrow\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{1}{t}dt\Rightarrow\ln\mu=-\ln t\Rightarrow\mu=\frac{1}{t}=\frac{1}{x^2+y^2}$$

Beraz, ekuazio diferentzialak $\mu\left(x^2+y^2\right)$ erako integrazio-faktorea onartzen du, adierazpen baliokidea ondorengoa izanik:

$$\frac{x^3+xy^2-y}{x^2+y^2}dx+\frac{y^3+x^2y+x}{x^2+y^2}dy=0\Rightarrow\left(x-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\left(y+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy=0$$

$M_y=\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2-y^2\right)^2}$ eta $N_x=\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2-y^2\right)^2}$; beraz, ZEHATZA izanik, esaterako 1. era erabiliz:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=M(x,y)=\frac{x^3+xy^2-y}{x^2+y^2}\Rightarrow U(x,y)=\int\left(x-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx=\frac{x^2}{2}-Arctag\left(\frac{x}{y}\right)+f(y)$$

Orain, $U(x,y)$ y-rekiko deribatuz:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}+f'(y)=N(x,y)=\frac{y^3+x^2y+x}{x^2+y^2}=y+\frac{x}{x^2+y^2}\Rightarrow f'(y)=y\Rightarrow f(y)=\frac{y^2}{2}+kte$$

Orduan: $U(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{2}-arctg\left(\dfrac{x}{y}\right)+kte$

Beraz, soluzio orokorra hau da: $x^2+y^2-2arctg\left(\dfrac{x}{y}\right)=K$

8.- LEHENENGO MAILAKO EKUAZIO DIFERENTZIAL LINEALAK

Definizioa: Ekuazio diferentzial bat funtzioa (y ezezaguna) eta deribatuarekiko lineala bada, **lehenengo mailako ekuazio diferentzial lineala** dela esango dugu.

$$y' + f(x)y = g(x)$$

non *f(x)* eta *g(x)* funtzioak D eremuan jarraituak diren. *g(x)=0* bada ekuazio lineala *homogeneoa* dela esango dugu. Hau aldagai bananduetakoa izango da:

$$\frac{dy}{y} = -f(x)dx$$

Ebazpena:

Soluzioak $y(x) = u(x)\cdot v(x)\ (y = u\cdot v)$ forma izango du. Deribatuz $y' = u'\cdot v + u\cdot v'$, eta ekuazioa ordezkatuz:

$$u'\cdot v + u\cdot v' + f(x)u\cdot v = g(x) \Rightarrow u\left(v' + f(x)v\right) + u'\cdot v = g(x)$$

Orain, bi ekuazio diferentzialok ebatziko ditugu:

$$\begin{cases} (1) \quad v' + f(x)v = 0 \Rightarrow \quad v \text{ ebatzi} \\ (2) \quad u'\cdot v = g(x) \quad \Rightarrow \quad v \text{ ordezkatuz } u \text{ ebatzi} \end{cases}$$

ARIKETA EBATZIAK:

1.- $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$

Adierazpenean zuzenean ikus dezakegu ekuazio diferentzial lineala dela, non $f(x) = 2xy$ eta $g(x) = 2xe^{x^2}$ diren. Beraz, jatorrizko ekuazioa $u(x)$ eta $v(x)$-ren menpe adieraziko ditugu:

$$u'v + uv' - 2xuv = 2xe^{x^2} \Rightarrow u(v' - 2xv) + u'v = 2xe^{x^2}$$

Lehenik, $v(x)$ funtzioa kalkulatuko dugu ekuazio hau ebatziz:

$$(1)\quad v'-2xv=0 \Rightarrow \frac{dv}{v}=2xdx \Rightarrow \ln v = x^2 \Rightarrow v=e^{x^2}$$

Orain, bigarren berdintzan, $v(x)$-ren adierazpena ordezkatuko dugu $u(x)$ lortzeko:

$$(2)\quad u'v=2xe^{x^2} \Rightarrow u'e^{x^2}=2xe^{x^2} \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x \Rightarrow u=x^2+K$$

Beraz, soluzio orokorra: $y=u\cdot v=e^{x^2}\left(x^2+K\right)$

2.- $(x-1)^3\, y'+4(x-1)^2\, y=x+1$

Adierazpena egokituz ikus dezakegu ekuazio diferentzial lineala dela, non $f(x)=\dfrac{4}{x-1}$ eta $g(x)=\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$ diren. Beraz, jatorrizko ekuazioa $u(x)$ eta $v(x)$-ren menpe adieraziko dugu:

$$(x-1)^3\left(u'v+uv'\right)+4(x-1)^2 uv=x+1 \Rightarrow u\left(v'(x-1)^3+4(x-1)^2 v\right)+(x-1)^3 u'v=x+1$$

Ondoren, bi ekuazio diferentzial ebatziko ditugu, $u(x)$ eta $v(x)$ lortzeko:

$$(1)\quad v'(x-1)^3+4(x-1)^2 v=0 \Rightarrow v'(x-1)=-4v \Rightarrow \frac{dv}{v}=\frac{-4dx}{(x-1)} \Rightarrow \ln v=-4\ln(x-1) \Rightarrow v=\frac{1}{(x-1)^4}$$

$$(2)\quad (x-1)^3 u'v=x+1 \Rightarrow \frac{u'}{(x-1)}=x+1 \Rightarrow \frac{du}{dx}=x^2-1 \Rightarrow u=\frac{x^3}{2}-x+K$$

Beraz, dagoeneko soluzio orokorra adieraz dezakegu: $y=\dfrac{1}{(x-1)^4}\left(\dfrac{x^3}{2}-x+K\right)=\dfrac{x^3-2x+K}{2(x-1)^4}$

3.- $\cosh x\, dy + (y \sinh x + e^x)\, dx = 0$

Ekuazio diferentzial lineala den aztertzeko lehenik forma normalean adieraziko dugu:

$\cosh x \cdot y' + y \sinh x + e^x = 0 \Rightarrow y' + y \tanh x = -\dfrac{e^x}{\cosh x}$; beraz, lineala da. Jatorrizko ekuazioa $u(x)$ eta $v(x)$-ren menpe adieraziz:

$$\cosh x\left(u'v + uv'\right) + \left(uv\right)\sinh x + e^x = 0 \Rightarrow u\left(v'\cosh x + v\sinh x\right) + \cosh x\, u'v = -e^x$$

Ondoren, bi ekuazio diferentzial ebatziko ditugu, $u(x)$ eta $v(x)$ lortzeko:

$$(1)\quad v'\cosh x + v\sinh x = 0 \Rightarrow v' = -\frac{\sinh x}{\cosh x}v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{\sinh x}{\cosh x}dx \Rightarrow \ln v = -\ln\left(\cosh x\right) \Rightarrow v = \frac{1}{\cosh x}$$

$$(2)\quad \cosh x\, u'\frac{1}{\cosh x} = -e^x \Rightarrow u' = -e^x \Rightarrow u = -e^x + K$$

Soluzio orokorra: $y = \dfrac{1}{\cosh x}\left(-e^x + K\right) = \dfrac{-e^x + K}{\cosh x}$

4.- $y' - \dfrac{a}{x}y = \dfrac{x+1}{x} \qquad a \in R$

Adierazpenean zuzenean ikus daiteke ekuazio diferentzial lineala dela. Beraz, $u(x)$ eta $v(x)$-ren menpe adieraziko dugu:

$$\left(u'v + uv'\right) - \frac{a}{x}\left(uv\right) = \frac{x+1}{x} \Rightarrow u\left(v' - \frac{a}{x}v\right) + u'v = \frac{x+1}{x}$$

Ondoren, bi ekuazio diferentzial ebatziko ditugu $u(x)$ eta $v(x)$ lortzeko; kasu honetan, a konstantearen menpe egongo dira.

$$(1)\quad v' - \frac{a}{x}v = 0 \Rightarrow v' = \frac{a}{x}v \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{a}{x}dx \Rightarrow \ln v = a\ln x \Rightarrow v = x^a$$

$$(2)\quad u'x^a = \frac{x+1}{x} \Rightarrow u' = \frac{x+1}{x^{a+1}} = \frac{1}{x^a} + \frac{1}{x^{a+1}} \Rightarrow u = \frac{1}{\left(1-a\right)x^{a-1}} - \frac{1}{ax^a} + K$$

Beraz, soluzio orokorra: $y = x^a\left(\frac{1}{(1-a)x^{a-1}} - \frac{1}{ax^a} + K\right) = \frac{x}{(1-a)} - \frac{1}{a} + K\,x^a$

<u>Adi:</u> Ekuazio diferentzialetako bigarrena ebaztean kontuan izan behar da emaitzan K konstante orokor bat agertuko zaigula soluzio orokor gisa.

5.- $y\frac{dx}{dy} + x(yctgy + 1) = ctgy$

Kasu honetan, y izango da aldagai askea, eta x, berriz, menpeko aldagaia. Ondorioz, era honetako ekuazio lineal bat aztertuko dugu: $x' + f(y)x = g(y)$, non soluzioak ondorengo forma izango duen: $x(y) = u(y)\cdot v(y)\ (x = u\cdot v)$.

Beraz, lehenik jatorrizko adierazpena $u(y)$ eta $v(y)$-ren menpe adieraziko dugu:

$$x' + x\left(\frac{y\,ctgy+1}{y}\right) = \frac{ctgy}{y}\begin{cases} x = uv \\ u'v + uv' + uv\left(\frac{y\,ctgy+1}{y}\right) = \frac{ctgy}{y} \Rightarrow u\left[v' + v\left(\frac{y\,ctgy+1}{y}\right)\right] + u'v = \frac{ctgy}{y}\end{cases}$$

Ondoren, bi ekuazio diferentzialak ebatziz, $u(y)$ eta $v(y)$ lortuko ditugu:

$$(1)\quad v' + v\left(\frac{y\,ctgy+1}{y}\right) = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\left(ctgy + \frac{1}{y}\right)dy \Rightarrow \ln v = -\ln(\sin y) - \ln y \Rightarrow v = \frac{1}{y\sin y}$$

$$(2)\quad u'\frac{1}{y\sin y} = \frac{ctgy}{y} \Rightarrow u' = \cos y \Rightarrow u = \sin y + K$$

Azkenik, soluzio orokorra: $x = u\cdot v = \frac{1}{y\sin y}(\sin y + K) = \frac{1}{y} + \frac{K}{y\sin y}$

6.- $\dfrac{dy}{dx} + 3y = x^2 - 3x + 1$

Adierazpena egokituz ikus dezakegu ekuazio diferentzial lineala dela, non $f(x) = 3$ eta $g(x) = x^2 - 3x + 1$ diren. Beraz, jatorrizko ekuazioa $u(x)$ eta $v(x)$-ren menpe adieraziko dugu:

$$u'v + uv' + 3uv = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow v(u' + 3u) + uv' = x^2 - 3x + 1$$

Ondoren, bi ekuazio diferentzialak ebatziz, $u(x)$ eta $v(x)$ lortuko ditugu:

$$(1) \quad u' + 3u = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = -3dx \Rightarrow \ln u = -3x \Rightarrow u = \frac{1}{e^{3x}}$$

Bigarren ekuazio diferentziala ebazteko zatikako metodoa aplikatuko dugu integralean:

$$(2) \quad \frac{1}{e^{3x}} v' = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow v' = e^{3x}\left(x^2 - 3x + 1\right) \Rightarrow v = \int e^{3x}\left(x^2 - 3x + 1\right) dx =$$

$$= \begin{pmatrix} u = x^2 - 3x + 1 \to du = (2x - 3)\,dx \\ dv = e^{3x} \qquad \to v = e^{3x}/3 \end{pmatrix} = \frac{e^{3x}}{3}\left(x^2 - 3x + 1\right) - \int \frac{e^{3x}}{3}(2x - 3)\,dx =$$

$$= \begin{pmatrix} u = 2x - 3 \to du = 2dx \\ dv = e^{3x}/3 \to v = e^{3x}/9 \end{pmatrix} = \frac{e^{3x}}{3}\left(x^2 - 3x + 1\right) - \frac{e^{3x}}{9}(2x - 3) + \int \frac{e^{3x}}{9} 2dx =$$

$$= \frac{e^{3x}}{3}\left(x^2 - 3x + 1\right) - \frac{e^{3x}}{9}(2x - 3) + \frac{2e^{3x}}{27} + K$$

Amaitzeko soluzio orokorra osa dezakegu:

$$y = e^{-3x}\left[\frac{e^{3x}}{3}\left(x^2 - 3x + 1\right) - \frac{e^{3x}}{9}(2x - 3) + \frac{2e^{3x}}{27} + K\right] = \frac{\left(9x^2 - 33x + 20\right)}{27} + Ke^{-3x}$$

7.- $(1 - x^2)\ y' + y - (1 - x^2)\ \sqrt{x+1} = 0$

Adierazpena egokituz ikus dezakegu ekuazio diferentzial lineala dela, non $f(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)}$ eta $g(x) = \sqrt{x+1}$ diren. Beraz, jatorrizko ekuazioa $u(x)$ eta $v(x)$-ren menpe adieraziz:

$$(u'v + uv')(1-x^2) + uv - \sqrt{x+1}(1-x^2) = 0 \Rightarrow v\left((1-x^2)u' + u\right) + (1-x^2)uv' = \sqrt{x+1}(1-x^2)$$

Ondoren, bi ekuazio diferentzialak ebatziz $u(x)$ eta $v(x)$ lortuko ditugu:

$$(1)\quad (1-x^2)u' + u = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dx}{x^2-1} \Rightarrow \ln u = \int \frac{dx}{x^2-1} = \int\left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}\right)dx$$

$$= \left(\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow \left\{A = \frac{1}{2},\ B = \frac{-1}{2}\right.\right) \Rightarrow \ln u = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \Rightarrow u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$(2)\quad \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}v' = \sqrt{x+1} \Rightarrow v' = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow v = \int \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}dx = \begin{pmatrix} x-1 = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{pmatrix} = \int \frac{t^2+2}{t}2t\,dt =$$

$$= 2\int\left(t^2+2\right)dt = \frac{2t^3}{3} + 4t + K = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 4\sqrt{x-1} + K$$

Soluzio orokorra, beraz:

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 4\sqrt{x-1} + K\right) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}\left(\frac{2}{3}(x-1)^2 + 4(x-1) + K\sqrt{x-1}\right)$$

9.- LINEALETARA MURRIZGARRIAK: BERNOULLI

Definizioa: **Bernoulli** motako ekuazioak forma honetako ekuazio diferentzialak dira:

$$y'+f(x)y=y^n g(x) \qquad n\neq 0,1 \begin{cases} n=0 \text{ lineala} \\ n=1 \text{ aldagai bananduak} \end{cases}$$

non *f(x)* eta *g(x)* funtzioak D eremuan jarraituak baitira.

Ebazpena:

Ekuazioa y^n -z zatitzen da, eta $z=\dfrac{1}{y^{n-1}}$ aldagai-aldaketa eginez ekuazio diferentzial lineal bat lortzen da.

ARIKETA EBATZIAK:

1.- $y' - y = xy^5$

Adierazpenetik Bernoulli erako ekuazio diferentziala dela ondoriozta dezakegu, non $n=5$ den. Ondoren y^5-z zatitzen da, eta $z=\dfrac{1}{y^4}$ aldagai-aldaketa eginez ekuazio diferentzial lineal bat lortzen da.

$$\frac{y'}{y^5}-\frac{1}{y^4}=x \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y^4}=z \\ -\dfrac{4}{y^5}y'=z' \end{cases} \Rightarrow -\frac{z'}{4}-z=x \Rightarrow z'+4z=4x$$

Ekuazioa $u(x)$ eta $v(x)$-ren menpe adierazi, eta bi ekuazio diferentzial ebatziko ditugu:

$$\begin{pmatrix} y=u\cdot v \\ y'=u'\cdot v+u\cdot v' \end{pmatrix} \Rightarrow (uv'+u'v)+4uv=-4x \Rightarrow v(u'+4u)+uv'=-x$$

$$(1)\quad u'+4u=0 \Rightarrow \frac{du}{u}=-4dx \Rightarrow \ln u=-4x \Rightarrow u=e^{-4x}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y=u\cdot v \\ y'=u'\cdot v+u\cdot v' \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(2)\quad uv'=-x \Rightarrow e^{-4x}v'=-x \Rightarrow \frac{dv}{dx}=-xe^{4x} \Rightarrow v=-\int x\,e^{4x}dx=\begin{pmatrix} u=x \to du=dx \\ dv=e^{4x}dx \to v=e^{4x}/4 \end{pmatrix}=$$

$$=-\left(\frac{xe^{4x}}{4}-\int\frac{e^{4x}}{4}dx\right)=-\frac{xe^{4x}}{4}+\frac{e^{4x}}{16}+K$$

Soluzio orokorra: $z=\dfrac{1}{y^4}=e^{-4x}\left(-\dfrac{xe^{4x}}{4}+\dfrac{e^{4x}}{16}+K\right)=\dfrac{-4x+1+Ke^{-4x}}{16} \Rightarrow y^4=\dfrac{16}{-4x+1+Ke^{-4x}}$

2.- $y' + 4y = y^2 (senx + cosx)$

Adierazpenetik Bernoulli erako ekuazio diferentziala dela ondoriozta dezakegu, non $n = 2$ den. Lineal bihurtzeko, y^2 -z zatitu eta $z = \frac{1}{y}$ aldagai-aldaketa egingo dugu:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{4}{y} = \sin x + \cos x \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} = z \\ -\frac{1}{y^2} y' = z' \end{cases} \Rightarrow -z' + 4z = \sin x + \cos x \text{ beraz lineala da}$$

Ekuazio diferentzial lineala 8. atalean ikusitako metodologiaren bidez ebatz dezakegu.

$$-(uv' + u'v) + 4uv = \sin x + \cos x \Rightarrow u(-v' + 4v) - u'v = \sin x + \cos x$$

$$(1) \quad -v' + 4v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = 4dx \Rightarrow \ln v = 4x \Rightarrow v = e^{4x}$$

$$(2) \quad -u'v = \sin x + \cos x \Rightarrow -u'e^{4x} = \sin x + \cos x \Rightarrow -\frac{du}{dx} = e^{-4x}(\sin x + \cos x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -u = \int e^{-4x}(\sin x + \cos x)\,dx = I$$

Lorturiko integrala zatikako metodoaren bidez ebatziz:

$$\left(\begin{array}{l} I = \int e^{-4x}(\sin x + \cos x)\,dx = \begin{pmatrix} u = e^{-4x} \to du = -4e^{-4x}dx \\ dv = (\sin x + \cos x)\,dx \to v = -\cos x + \sin x \end{pmatrix} = \\ = e^{-4x}(-\cos x + \sin x) - \int -4e^{-4x}(-\cos x + \sin x)\,dx = \\ = \begin{pmatrix} u = e^{-4x} \to du = -4e^{-4x}dx \\ dv = (-\cos x + \sin x)\,dx \to v = -\sin x - \cos x \end{pmatrix} = e^{-4x}(-\cos x + \sin x) + \\ +4\left(e^{-4x}(-\sin x - \cos x) - \int -4e^{-4x}(-\sin x - \cos x)\,dx\right) = e^{-4x}(-\cos x + \sin x) + \\ -4e^{-4x}(\sin x + \cos x) - 16\int e^{-4x}(\sin x + \cos x)\,dx = e^{-4x}(-5\cos x - 3\sin x) - 16I \\ I = \frac{e^{-4x}(-5\cos x - 3\sin x)}{17} + K \end{array} \right)$$

Ekuazio diferentzial linealaren emaitza $z(x)=u(x)\cdot v(x)$ aldagaiaren baitan adieraziko dugu:

$$z=e^{4x}\left(\frac{e^{-4x}(5\cos x+3\sin x)}{17}+K\right)=\frac{(5\cos x+3\sin x)+Ke^{4x}}{17}$$

Jatorrizko aldagaien menpeko emaitza aldagai-aldaketa deseginez lor daiteke:

$$y=\frac{1}{z}=\frac{17}{(5\cos x+3\sin x)+Ke^{4x}}$$

3.- $\boldsymbol{y'=\dfrac{y(y^2+3x^2)}{2x^3}}$

Lehenik, ekuazio diferentziala era normalean adieraziz, $2x^3y'-3x^2y=y^3$, Bernoulli erako ekuazio diferentziala dela ondoriozta dezakegu, non $n=3$ den. Lineal bihurtzeko, y^3-z zatitu eta $z=\dfrac{1}{y^2}$ aldagai-aldaketa egingo dugu:

$$2x^3\frac{y'}{y^3}-3x^2\frac{1}{y^2}=1\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{y^2}=z\\ -\dfrac{2}{y^3}y'=z'\end{cases}\Rightarrow -x^3z'-3x^2z=1 \text{ ekuazio diferentzial lineala}$$

8. atalean ikusitako metodologiaren bidez ebazteko lorturiko ekuazioa $u(x)$ eta $v(x)$-ren menpe adierazi, eta bi ekuazio diferentzial askatuko ditugu:

$$-x^3(uv'+u'v)-3x^2uv=1\Rightarrow v\left(-x^3u'-3x^2u\right)-x^3uv'=1$$

$$(1)\quad -x^3u'-3x^2u=0\Rightarrow -xu'-3u=0\Rightarrow\frac{du}{u}=-\frac{3}{x}dx\Rightarrow \ln u=-3\ln x\Rightarrow u=\frac{1}{x^3}$$

$$(2)\quad -x^3uv'=1\Rightarrow -v'=1\Rightarrow dv=-dx\Rightarrow v=-x+K$$

Soluzio orokorra ekuazio diferentzial linealeko emaitzan aldagai-aldaketa deseginez:

$$z=\frac{1}{y^2}=\frac{1}{x^3}(-x+K)=\frac{-x+K}{x^3}\Rightarrow y^2=\frac{x^3}{-x+K}$$

4.- $(x^2 + y^2 + 1)dy + xy\,dx = 0$

Lehenik, ekuazio diferentziala y aldagaiarekiko Bernoulli erakoa den aztertuko dugu:

$$(x^2+y^2+1)\,y' + xy = 0 \Rightarrow y' + \frac{x}{x^2+y^2+1}\,y = 0$$

Ikus dezakegunez, lorturiko adierazpenak ez du $y' + f(x)\,y = y^n g(x)$ forma; izan ere, $f(x,y)$ da. Hala ere, x aldagaiarekiko Bernoulli erakoa den azter dezakegu:

$$(x^2+y^2+1) + xy\frac{dx}{dy} = 0 \Rightarrow (x^2+y^2+1) + xy\,x' = 0$$

$$\Rightarrow y\,xx' + x^2 = -\left(y^2+1\right) \Rightarrow x' + \frac{1}{y}x = -\frac{\left(y^2+1\right)}{y}x^{-1}$$

Beraz, jatorrizko ekuazio diferentziala Bernoulli erakoa da x aldagaiarekiko, non $n=-1$ den. Lineal bihurtzeko, x^{-1}-z zatitu (kasu honetan, x-z biderkatzearen baliokidea) eta $z = \frac{1}{x^{-2}} = x^2$ aldagai-aldaketa egingo dugu:

$$y\,xx' + x^2 = -\left(y^2+1\right) \Rightarrow \begin{cases} x^2 = z \\ 2xx' = z' \end{cases} \Rightarrow y\frac{z'}{2} + z = -\left(y^2+1\right)$$ dagoeneko lineala da

8. atalean ikusitako metodologiaren bidez ebazteko, lorturiko ekuazioa $u(y)$ eta $v(y)$-ren menpe adierazi, eta bi ekuazio diferentzial askatuko ditugu:

$$y\left(uv' + u'v\right) + 2uv = -2\left(y^2+1\right) \Rightarrow u\left(yv' + 2v\right) + y\,u'v = -2\left(y^2+1\right)$$

$$(1) \quad yv' + 2v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -2\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln v = -2\ln y \Rightarrow v = \frac{1}{y^2}$$

$$(2) \quad y\,u'v = -2\left(y^2+1\right) \Rightarrow y\,u'\frac{1}{y^2} = -2\left(y^2+1\right) \Rightarrow du = -2y\left(y^2+1\right)dy \Rightarrow u = -\frac{y^4}{2} - y^2 + K$$

Soluzio orokorra ekuazio diferentzial linealeko emaitzan aldagai-aldaketa deseginez:

$$z = x^2 = \frac{1}{y^2}\left(-\frac{y^4}{2} - y^2 + K\right) \Rightarrow \quad 2x^2y^2 + y^4 + 2y^2 = K$$

5.- $x^2 y' + 2x^3 y = y^2\left(1+2x^2\right)$

Lehenik, ekuazio diferentziala era normalean adieraziz, $y' + 2xy = y^2\dfrac{\left(1+2x^2\right)}{x^2}$, Bernoulli erako ekuazio diferentziala dela ondoriozta dezakegu, non $n=2$ den. Lineal bihurtzeko, y^2-z zatitu, eta $z=\dfrac{1}{y}$ aldagai-aldaketa egingo dugu:

$$x^2\frac{y'}{y^2}+2x^3\frac{1}{y}=\left(1+2x^2\right)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{y}=z\\ -\dfrac{1}{y^2}y'=z'\end{cases}\Rightarrow -x^2z'+2x^3z=\left(1+2x^2\right)\ \text{lineala}$$

8. atalean ikusitako metodologiaren bidez ebazteko, lorturiko ekuazioa $u(x)$ eta $v(x)$-ren menpe adierazi, eta bi ekuazio diferentzial askatuko ditugu:

$$-x^2\left(uv'+u'v\right)+2x^3uv=\left(1+2x^2\right)\Rightarrow v\left(-x^2u'+2x^3u\right)-x^2uv'=\left(1+2x^2\right)$$

$$(1)\quad -x^2u'+2x^3u=0\Rightarrow -u'+2xu=0\Rightarrow\frac{du}{u}=2xdx\Rightarrow\ln u=x^2\Rightarrow u=e^{x^2}$$

Bigarren ekuazio diferentziala ebazteko zatikako integrazioa erabili beharko dugu:

$$(2)\quad -x^2uv'=\left(1+2x^2\right)\Rightarrow -x^2e^{x^2}v'=\left(1+2x^2\right)\Rightarrow -dv=\frac{\left(1+2x^2\right)}{x^2e^{x^2}}=e^{-x^2}\left(\frac{1}{x^2}+2\right)\Rightarrow$$

$$-v=\int\frac{1}{x^2}e^{-x^2}dx+\int 2e^{-x^2}dx=\begin{pmatrix}u=e^{-x^2}\to du=-2xe^{-x^2}dx\\ dv=\dfrac{dx}{x^2}\to v=-\dfrac{1}{x}\end{pmatrix}=\left(-\frac{e^{-x^2}}{x}-\int 2e^{-x^2}dx\right)+\int 2e^{-x^2}dx=$$

$$=-\frac{e^{-x^2}}{x}+K\Rightarrow v=\frac{e^{-x^2}}{x}+K$$

Soluzio orokorra ekuazio diferentzial linealeko emaitzan aldagai-aldaketa deseginez:

$$z=\frac{1}{y}=e^{x^2}\left(\frac{e^{-x^2}}{x}+K\right)=\frac{1+Kxe^{x^2}}{x}\Rightarrow y=\frac{x}{1+Kxe^{x^2}}$$

6.- $\boldsymbol{\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{2}{y}x=y^3x^3}$

Jatorrizko ekuazio diferentziala $x'+\dfrac{2}{y}x=x^3y^3$ Bernoulli erakoa da x aldagaiarekiko, non $n=3$ den. Lineal bihurtzeko, x^3-z zatitu eta $z=\dfrac{1}{x^2}$ aldagai-aldaketa egingo dugu:

$$\frac{x'}{x^3}+\frac{2}{y}\frac{1}{x^2}=y^3 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}=z \\ -\dfrac{2}{x^3}x'=z' \end{cases} \Rightarrow -\frac{z'}{2}+\frac{2}{y}z=y^3 \text{ lineala}$$

8. atalean ikusitako metodologiaren bidez ebazteko, lorturiko ekuazioa $u(y)$ eta $v(y)$-ren menpe adierazi, eta bi ekuazio diferentzial askatuko ditugu:

$$-(uv'+u'v)+\frac{4}{y}uv=2y^3 \Rightarrow v\left(-u'+\frac{4}{y}u\right)-uv'=2y^3$$

$$(1)\quad -u'+\frac{4}{y}u=0 \Rightarrow \frac{du}{u}=4\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln u=4\ln y \Rightarrow u=y^4$$

$$(2)\quad -uv'=2y^3 \Rightarrow -y^4v'=2y^3 \Rightarrow -yv'=2 \Rightarrow dv=-\frac{2}{y}dy \Rightarrow v=-2\ln y+K$$

Soluzio orokorra ekuazio diferentzial linealeko emaitzan aldagai-aldaketa deseginez:

$$z=\frac{1}{x^2}=y^4(-2\ln y+K) \Rightarrow y^4x^2(-2\ln y+K)=1$$

10.-
‘n’ ordenako ekuazio diferentzial linealak

10.- 'N' ORDENAKO EKUAZIO DIFERENTZIAL LINEALAK

Definizioa: **'n' ordenako ekuazio diferentzial linealak** mota honetako ekuazio diferentzialak dira:

$$a_n(x)y^{n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

non $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x)$, *(a, b)* tarte jakin bateko funtzio erreal jarraituak diren. ('n' mailakoa izan dadin, $a_n(x) \neq 0$ bete behar da)

$f(x) \neq 0$ bada, ekuazioa **osoa** izendatzen da, eta, $f(x) = 0$ bada, **homogeneoa**.

10.1 'N' ORDENAKO EKUAZIO DIFERENTZIAL HOMOGENEOAK

$$a_n(x)y^{n)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

forma dute, eta $y_1(x)$ ekuazioaren soluzio bat dela esaten dugu, baldin:

$$a_n(x)y_1^{n)}(x) + \ldots + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x) = 0$$

Soluzioen oinarrizko sistema

Soluzioen oinarrizko sistema, ekuazioaren *n* soluzio linealki askek osatuko dute.

Teorema I

Ekuazioak soluzioen oinarrizko sistema bat onartzen du.

Teorema II

$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ soluzioen oinarrizko sistema bat bada, ekuazioaren edozein soluzio *n* soluzio hauen konbinazio lineala izango da:

$$y = K_1y_1 + K_2y_2 + \ldots + K_ny_n \text{ non } K_1, K_2, K_n \in \mathbb{R}$$

10.2 KOEFIZIENTE KONSTANTEDUN EKUAZIO DIFERENTZIAL HOMOGENEOAK

Definizioa: **Koefiziente konstantedun ekuazio diferentzial homogeneoak** mota honetako ekuazio diferentzialak dira:

$$a_n y^{n)} + a_{n-1} y^{n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

non $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ zenbaki errealak diren.

Ebazpena:

Badakigu soluzioen oinarrizko sistema bat onartzen duela. $y = e^{rx}$ motako soluzioekin saiatuz:

$$r^n a_n e^{rx} + r^{n-1} a_{n-1} e^{rx} + \ldots + r\, a_1 e^{rx} + a_0 e^{rx} = 0 = \left(r^n a_n + r^{n-1} a_{n-1} + \ldots + r\, a_1 + a_0\right) e^{rx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^n a_n + r^{n-1} a_{n-1} + \ldots + r\, a_1 + a_0 = 0, \quad e^{rx} \neq 0 \text{ denez.}$$

Beraz, **polinomio karakteristikoa edo ekuazio karakteristikoa** definituko dugu:

$$P_n\left(r\right) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0$$

$P_n\left(r\right) = 0$ polinomio karakteristikoaren erroak kalkulatuko ditugu, eta emaitza lortutako erroen araberakoa izango da.

Erro erreal desberdinak:

$r_1, \ldots, r_n$ erro erreal desberdinak badira, $e^{r_1 x}, \ldots, e^{r_n x}$ ekuazio diferentzialaren soluzioak izango dira, eta SOLUZIO OROKORRA hauen konbinazio lineala izango da:

$$y = K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x} + \ldots + K_n e^{r_n x}$$

Adibidea:

$y''' - y' = 0$ ekuazioaren polinomio karakteristikoa $r^3 - r = 0$ da. Erroak $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $r_3 = -1$ dira. Beraz, soluzio orokorra $y = K_1 + K_2 e^x + K_3 e^{-x}$ da.

Erro erreal anizkoitzak:

Erroak: r_1 erroa m_1 aldiz, r_2 erroa m_2 aldiz, … eta r_p erroa m_p aldiz.

Soluzioak hauek izango dira:

$$e^{r_1 x},\ xe^{r_1 x},\ldots,x^{m_1-1}e^{r_1 x}$$

$$e^{r_2 x},\ xe^{r_2 x},\ldots,x^{m_2-1}e^{r_2 x}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e^{r_p x},\ xe^{r_p x},\ldots,x^{m_p-1}e^{r_p x}$$

SOLUZIO OROKORRA hauen konbinazio lineala izango da.

$$y=\left(K_1e^{r_1 x}+\ldots+K_{m_1}x^{m_1-1}e^{r_1 x}\right)+\ldots+\left(L_1e^{r_p x}+\ldots+L_{m_p}x^{m_p-1}e^{r_p x}\right)$$

Adibidea:

$y^{v}-3y'''+2y''=0$ ekuazioaren polinomio karakteristikoa $r^5-3r^3+2r^2=0$ da. Erroak $r_{1,2}=0$ bikoitza, $r_{3,4}=1$ bikoitza eta $r_3=-2$ dira. Beraz, soluzio orokorra $y=K_1+K_2\,x+\left(K_3+K_4x\right)e^{x}+K_5e^{-2x}$ da.

Erro irudikari desberdinak:

$r_{1,2}=a\pm bi$ erro irudikari bikote bat eta $r_{n-1,n}=c\pm di$ beste bikote irudikari bat.

Soluzioak hauek izango dira:

$$e^{ax}\cos bx,\quad e^{ax}\sin bx$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e^{cx}\cos dx,\quad e^{cx}\sin dx$$

SOLUZIO OROKORRA hauen konbinazio lineala izango da:

$$y=e^{ax}\left(A\cos bx+B\sin bx\right)+\ldots+e^{cx}\left(C\cos dx+D\sin dx\right)$$

Adibidea:

$y''-4y'+5y=0$ ekuazioaren polinomio karakteristikoa $r^2-4r+5=0$ da. Erroak $r_1=2+i$ eta $r_2=2-i$ dira. Beraz, soluzio orokorra $y=e^{2x}\left(K_1\sin x+K_2\cos x\right)$ da.

Erro irudikariak anizkoitzak:

$r_{1,2} = a \pm bi$ anizkoiztasuna k eta $r_{3,4} = c \pm di$ anizkoiztasuna l.

Soluzioak hauek izango dira:

$$e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\sin bx,\ ...,\ x^{k-1}e^{ax}\cos bx,\ x^{k-1}e^{ax}\sin bx,$$

……

$$e^{cx}\cos dx,\ e^{cx}\sin dx,\ xe^{cx}\cos dx,\ xe^{cx}\sin dx,\ ...,\ x^{l-1}e^{cx}\cos dx,\ x^{l-1}e^{cx}\sin dx,$$

SOLUZIO OROKORRA hauen konbinazio lineala izango da:

$$y = e^{ax}\left(A_1\cos bx + B_1\sin bx\right) + ... + x^{k-1}e^{ax}\left(A_k\cos bx + B_k\sin bx\right) +$$
$$... + e^{cx}\left(C_1\cos dx + D_1\sin dx\right) + ... + x^{l-1}e^{cx}\left(C_l\cos dx + D_l\sin dx\right)$$

Adibidea:

$y^{iv} - 8y''' + 26y'' - 40y' + 25y = 0$ ekuazioaren polinomio karakteristikoa $r^4 - 8r^3 + 26r^2 - 40r + 25 = 0$ da. Erroak $r = 2 \pm i$ bikoitzak. Beraz, soluzio orokorra $y = e^{2x}\left(\left(K_1 + K_2x\right)\sin x + \left(K_3 + K_4x\right)\cos x\right)$ da.

ARIKETA EBATZIAK:

a) Ekuazio diferentzialen ekuazio karakteristikoa jakinda, idatzi ekuazio diferentziala:

1. $r^2 + 3r + 2 = 0 \Rightarrow y'' + 3y + 2y = 0$
2. $2r^2 - 3r - 5 = 0 \Rightarrow 2y'' - 3y - 5y = 0$
3. $r^5 + 5r^3 - 3r + 8 = 0 \Rightarrow y^{5)} + 5y^{3)} - 3y' + 8y = 0$
4. $r\left(r+1\right)\left(r-3\right) = 0 \Rightarrow r^3 - 2r^2 - 3r = 0 \Rightarrow y''' - 2y'' - 3y' = 0$
5. $r\left(r^2-1\right)\left(r+5\right) = 0 \Rightarrow r^4 + 5r^3 - r^2 - 5r = 0 \Rightarrow y^{4)} + 5y^{3)} - y'' - 5y' = 0$
6. $\left(r^2+2\right)^3 = 0 \Rightarrow r^6 + 6r^4 + 12r^2 + 8 = 0 \Rightarrow y^{6)} + 6y^{4)} + 12y'' + 8y = 0$

b) Ekuazio karakteristikoaren erroak jakinda, sortu ekuazio diferentzial linealak, eta idatzi haren soluzio orokorrak:

1. $r_1 = -1, r_2 = 1, r_3 = 3$

$(r+1)(r-1)(r-3) = 0 \Rightarrow r^3 - 3r^2 - r + 3 = 0 \Rightarrow y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$

Soluzio orokorra: $y = K_1 e^{-x} + K_2 e^{x} + K_3 e^{3x}$

2. $r_1 = 0, r_2 = 3+4i, r_3 = 3-4i$

$r\left(r-(2+4i)\right)\left(r-(2-4i)\right) = 0 \Rightarrow r^3 - 4r^2 + 20r = 0 \Rightarrow y''' - 4y'' + 20y' = 0$

Soluzio orokorra: $y = K_1 + e^{3x}\left(K_2 \cos 4x + K_3 \sin 4x\right)$

3. $r_1 = 0\,(laukoitza), r_2 = 1+2i, r_3 = 1-2i$

$r^4\left(r-(1+2i)\right)\left(r-(1-2i)\right) = 0 \Rightarrow r^6 - 2r^5 + 5r^4 = 0 \Rightarrow y^{6)} - 2y^{5)} + 5y^{4)} = 0$

Soluzio orokorra: $y = K_1 + K_2 x + K_3 x^2 + K_4 x^3 + e^{x}\left(K_5 \cos 2x + K_6 \sin 2x\right)$

c) Ebatzi ekuazioak:

1.- *3y'' - 2y' - 8y = 0*

Ekuazio karakteristikoa: $3r^2 - 2r - 8 = 0 \Rightarrow r = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4.3.(-8)}}{6} = \dfrac{2 \pm 10}{6} = \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = -4/3 \end{cases}$

Soluzio orokorra: $y = K_1 e^{2x} + K_2 e^{-\frac{4}{3}x}$

2.- *y''' - 3y'' + 3y' - y = 0*

Ekuazio karakteristikoa: $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^3 = 0 \Rightarrow r = 1$ hirukoitza

Soluzio orokorra: $y = K_1 e^{x} + K_2 x e^{x} + K_3 x^2 e^{x}$

3.- *y^{IV} - y = 0*

Ekuazio karakteristikoa: $r^4 - 1 = 0 \Rightarrow (r-1)(r+1)(r^2+1) = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -1, r_3 = i, r_4 = -i$

Soluzio orokorra: $y = K_1 e^{x} + K_2 e^{-x} + K_3 \cos x + K_4 \sin x$

10.3 KOEFIZIENTE KONSTANTEDUN EKUAZIO DIFERENTZIAL EZ-HOMOGENEOAK EDO OSOAK

Definizioa: **Koefiziente konstantedun ekuazio diferentzial osoak** mota honetako ekuazio diferentzialak dira:

$$a_n y^{n)} + a_{n-1} y^{n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

non $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ zenbaki errealak diren eta $f(x)$ (a,b) tarteko funtzio jarraitua.

Ebazpena:

Ekuazio diferentzial hauen soluzioa lortzeko, ekuazio diferentzial homogeneoaren soluzioa gehi ekuazio osoaren soluzio partikular bat egin beharra dago. Hau da, $y_O = y_H + y_P$, non y_H ekuazio diferentzial homogeneoaren soluzioa baita eta y_P ekuazio osoaren soluzio

Soluzio partikularraren kalkulua y_P:

Soluzio partikular hau $f(x)$-ren eta homogeneoaren ekuazio karakteristikoaren erroen araberakoa izango da.

1. kasua:

$f(x) = P_n(x) e^{kx}$ bada, non $P_n(x)$ n mailako polinomioa den, orduan:

a) k ez da ekuazioa karakteristikoaren soluzioa:

$$y_p = Q_n(x) e^{kx}$$

b) k ekuazioa karakteristikoaren soluzioa da, eta anizkoiztasuna *m:*

$$y_p = x^m Q_n(x) e^{kx}$$

non $Q_n(x)$ n mailako polinomio bat den. Polinomio horren koefizienteak ekuazioa betetzera derrigortuz aurkitu beharko dira.

Adibidea:

$$\boxed{y''' - 5y'' = (7x - 4)e^{2x}}$$

- *Homogeneoa* $(y''' - 5y'' = 0)$:

Polinomio karakteristikoa: $r^3 - 5r^2 = 0 = r^2(r-5)$. Erroak: $r_{1,2} = 0$ bikoitza eta $r_3 = 5$. Beraz, homogeneoaren soluzioa: $y_H = (K_1 + K_2 x) + K_3 e^{5x}$

- *Partikularra:*

$y_P = (a + bx)e^{2x}$. a eta b ekuazioan ordezkatuz lortuko ditugu. $y_P = (a+bx)e^{2x}$, $y_P' = (b + 2a + 2bx)e^{2x}$, $y_P'' = 4(b + a + bx)e^{2x}$ eta $y_P''' = (12b + 8a + 8bx)e^{2x}$.

$y_P''' - 5y_P'' = (7x - 4)e^{2x}$ ekuazioan ordezkatuz:

$$(12b + 8a + 8bx)e^{2x} - 20(b + a + bx)e^{2x} = (7x - 4)e^{2x} \Rightarrow \begin{cases} 8b - 20b = 7;\ b = -\dfrac{7}{12} \\ -8b - 12a = -4;\ a = \dfrac{13}{18} \end{cases}$$

Beraz, soluzio orokorra hau da:

$$y_O = y_H + y_P = (K_1 + K_2 x) + K_3 e^{5x} + \left(-\frac{7}{12} + \frac{13}{18}x\right)e^{2x}$$

2. kasua:

$f(x)=e^{ax}\left(P_n(x)\sin bx+Q_m(x)\cos bx\right)$ bada, non $P_n(x)$ eta $Q_m(x)$, hurrenez hurren, *n* eta *m* mailako polinomioak diren, orduan:

a) $a\pm bi$ ez da ekuazioa karakteristikoaren soluzioa:

$$y_p=e^{ax}\left(S_N(x)\sin bx+T_N(x)\cos bx\right)$$

b) $a\pm bi$ ekuazioa karakteristikoaren soluzioa da, eta anizkoiztasuna *p:*

$$y_p=x^p e^{ax}\left(S_N(x)\sin bx+T_N(x)\cos bx\right)$$

non $S_N(x)$ eta $T_N(x)$ polinomioak $N=\max\{n,m\}$ mailako polinomioak diren. Polinomio horien koefizienteak ekuazioa betetzera derrigortuz aurkitu beharko dira.

Adibidea:

y'' - y' = 5sinx

- *Homogeneoa* $(y''-y'=0)$*:*

Polinomio karakteristikoa: $r^2-r=0$. Erroak: $r_1=0$ eta $r_2=1$. Beraz, $y_H=K_1+K_2e^x$

- *Partikularra:*

$y_P=a\sin x+b\cos x$. *a* eta *b* ekuazioan ordezkatuz lortuko ditugu.

$y_P=a\sin x+b\cos x,\ y_P'=a\cos x-b\sin x$ eta $y_P''=-a\sin x-b\cos x$.

$y_P''-y_P'=5\sin x$ ekuazioan ordezkatuz:

$$(-a\sin x-b\cos x)-(a\cos x-b\sin x)=5\sin x\Rightarrow\begin{cases}-a+b=5\\-b-a=0\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{5}{2};\ b=\frac{5}{2}$$

Beraz, soluzio orokorra hau da:

$$y_O=y_H+y_P=K_1+K_2e^x+\frac{5}{2}(\cos x-\sin x)$$

ARIKETA EBATZIAK:

1.- $y''' - 5y'' = (7x - 4)$

- *Homogeneoa* $(y''' - 5y'' = 0)$:

Polinomio karakteristikoa: $r^3 - r^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 0$ eta $r_3 = 5$. Beraz, $y_H = (K_1 + K_2 x) + K_3 e^{5x}$

- *Partikularra:*

$y_P = x^2 (a + bx)$. r=0 homogeneoaren erroa delako. a eta b ekuazioan ordezkatuz lortuko ditugu. $y_P = ax^2 + bx^3$, $y'_P = 2ax + 3bx^2$, $y''_P = 2a + 6bx$ eta $y'''_P = 6b$.

$y'''_P - 5y''_P = (7x - 4)$ ekuazioan ordezkatuz:

$$6b - 5(2a + 6bx) = (7x - 4) \Rightarrow \begin{cases} 6b - 10b = -4 \\ -30b = 7 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{13}{50}; b = -\frac{7}{30}$$

Beraz, soluzio orokorra hau da:

$$y_O = y_H + y_P = (K_1 + K_2 x) + K_3 e^{5x} + x^2 \left(\frac{13}{50} - \frac{7}{30} x \right)$$

2.- $y'' + 4y = 7\cos 2x$

- *Homogeneoa* $\left(y''+4y'=0\right)$:

Polinomio karakteristikoa: $r^2+4r=0$. Erroak: $r_{1,2}=\pm 2i$. Beraz, $y_H = K_1 \sin 2x + K_2 \cos 2x$

- *Partikularra:*

$y_P = x\left(a\sin 2x + b\cos 2x\right)$, $y_P' = \left(a\sin 2x + b\cos 2x\right) + 2x\left(a\cos 2x - b\sin 2x\right)$ eta

$y_P'' = 4\left(a\cos 2x - b\sin 2x\right) + 4x\left(-a\sin 2x - b\cos 2x\right)$.

$y_P'' + 4y_P' = 7\cos 2x$ ekuazioan ordezkatuz:

$$\left(4\left(a\cos 2x - b\sin 2x\right) + 4x\left(-a\sin 2x - b\cos 2x\right)\right) + 4x\left(a\sin 2x + b\cos 2x\right) = 7\cos 2x \Rightarrow$$

$$\left(-4b\right)\sin 2x + \left(4a\right)\cos 2x = 7\cos 2x \Rightarrow a = \frac{7}{4};\ b = 0$$

Beraz, soluzio orokorra hau da:

$$y_O = y_H + y_P = K_1 \sin 2x + K_2 \cos 2x + \frac{7}{4} x \sin 2x$$

10.4 SOLUZIOEN GAINEZARPEN-PRINTZIPIOA

Demagun $f(x)$ funtzioa ez dela 10.3 ataleko kasuetako bat. Baina $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x)$ gisa zatitu daiteke, non $f_i(x)$ guztiak 10.3 ataleko kasuren bat diren. Beraz, $f_i(x)$ bakoitzerako soluzio partikular bat izango dugu, y_{pi}. Hau da, $a_n y^{n)} + a_{n-1} y^{n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f_i(x)$ bakoitzaren soluzio partikularra y_{pi} da. Orduan, frogatu daiteke $a_n y^{n)} + a_{n-1} y^{n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$ ekuazioaren soluzio partikularra $y_P = y_{p1} + y_{p2} + \ldots + y_{pk}$ dela.

ARIKETA EBATZIAK:

1.- $y'' - 5y' + 6y = \left(x^2+1\right)e^x + xe^{2x}$

- *Homogeneoa* $\left(y''-5y'+6y=0\right)$:

Polinomio karakteristikoa: $r^2-5r+6=0 \Rightarrow r_1=2$ eta $r_2=3$. Beraz, $y_H = K_1e^{2x}+K_2e^{3x}$

- *Partikularra* $\left(f(x)=f_1(x)+f_2(x) \quad \text{non} \quad f_1(x)=\left(x^2+1\right)e^x, \quad f_2(x)=xe^{2x}\right)$:

$\mathbf{1}\} \Rightarrow y_{P_1}=\left(a+bx+cx^2\right)e^x$, $\qquad y'_{P_1}=\left(\left(a+b\right)+\left(b+2c\right)x+cx^2\right)e^x$ eta

$y''_{P_1}=\left(\left(a+2b+2c\right)+\left(b+4c\right)x+cx^2\right)e^x$.

$y''_{P_1}-5y'_{P_1}+6y_{P_1}=\left(x^2+1\right)e^x$ ekuazioan ordezkatuz:

$$\left[\left(a+2b+2c+\left(b+4c\right)x+cx^2\right)-5\left(a+b+\left(b+2c\right)x+cx^2\right)+6\left(a+bx+cx^2\right)\right]e^x=\left(x^2+1\right)e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(2a-3b+2c\right)+\left(2b-6c\right)x+\left(2c\right)x^2=\left(x^2+1\right) \Rightarrow \begin{cases} 2a-3b+2c=1 \\ 2b-6c=0 \\ 2c=1 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{9}{4}; b=\frac{3}{2}; c=\frac{1}{2}$$

Beraz, $y_{P_1}=\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x^2\right)e^x$

$\mathbf{2}\} \Rightarrow y_{P_2}=x\left(a+bx\right)e^{2x}$, $\qquad y'_{P_2}=\left(a+2\left(a+b\right)x+2bx^2\right)e^{2x}$ eta

$y''_{P_2}=\left(4a+2b+\left(4a+8b\right)x+4bx^2\right)e^{2x}$.

$y''_{P_2}-5y'_{P_2}+6y_{P_2}=xe^{2x}$ ekuazioan ordezkatuz:

$$\left[\left(4a+2b+\left(4a+8b\right)x+4bx^2\right)-5\left(a+2\left(a+b\right)x+2bx^2\right)+6x\left(a+bx\right)\right]e^{2x}=xe^{2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(2b-a\right)+\left(-2b\right)x=x \Rightarrow \begin{cases} 2b-a=0 \\ -2b=1 \end{cases} \Rightarrow a=-1; b=-\frac{1}{2}$$

Beraz, $y_{P_2}=\left(-x-\frac{1}{2}x^2\right)e^{2x}$

Beraz, soluzio orokorra hau da:

$$y_O=y_H+y_P=y_H+y_{P_1}+y_{P_2}=K_1e^{2x}+K_2e^{3x}+\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x^2\right)e^x-\left(x+\frac{1}{2}x^2\right)e^{2x}$$

2.- $y'' + 2y = 7e^{-2x} + x\,sin2x$

- *Homogeneoa* $\left(y''+2y=0\right)$:

Polinomio karakteristikoa: $r^2+2r=0=r\left(r+2\right)\Rightarrow r_1=0$ eta $r_2=-2\Rightarrow y_H=K_1+K_2e^{-2x}$

- *Partikularra* $\left(f\left(x\right)=f_1\left(x\right)+f_2\left(x\right)\right.$ non $f_1\left(x\right)=7e^{-2x},\quad f_2\left(x\right)=x\,\sin 2x\left.\right)$:

$\boldsymbol{1}\}\Rightarrow y_{P_1}=a\,x\,e^{-2x}$, $y'_{P_1}=a\,e^{-2x}-2\,a\,x\,e^{-2x}$ eta $y''_{P_1}=-4a\,e^{-2x}+4a\,x\,e^{-2x}$.

$y''_{P_1}+2y'_{P_1}=7e^{-2x}$ ekuazioan ordezkatuz:

$$\left(-4a\,e^{-2x}+4a\,x\,e^{-2x}\right)+2\left(a\,e^{-2x}-2\,a\,x\,e^{-2x}\right)=7\,e^{-2x}\Rightarrow -2a=7\Rightarrow\Rightarrow a=-\frac{7}{2}$$

Beraz, $y_{P_1}=-\frac{7}{2}x\,e^{-2x}$

$\boldsymbol{2}\}\Rightarrow y_{P_2}=\left(a+bx\right)\,\sin 2x+\left(c+dx\right)\cos 2x$, $y'_{P_2}=\left(b-2c-2dx\right)\sin 2x+\left(d+2a+2bx\right)\,\cos 2x$

eta $y''_{P_2}=\left(-4d-4a-4bx\right)\sin 2x+\left(4b-4c-4dx\right)\cos 2x$.

$y''_{P_2}+2y'_{P_2}=x\sin 2x$ ekuazioan ordezkatuz:

$$\left(\left(-4d-4a-4bx\right)\sin 2x+\left(4b-4c-4dx\right)\cos 2x\right)+$$
$$+2\left(\left(b-2c-2dx\right)\sin 2x+\left(d+2a+2bx\right)\,\cos 2x\right)=x\sin 2x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(-4d-4a-4c+2b-4bx-4dx\right)\sin 2x+\left(4b-4c+2d+4a-4dx+4bx\right)\cos 2x=x\sin 2x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases}-4d-4a-4c+2b=0\\-4b-4d=1\\4b-4c+2d+4a=0\\-4d+4b=0\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{16};\,b=-\frac{1}{8};\,c=-\frac{1}{16};\,d=-\frac{1}{8};$$

Beraz, $y_{P_2}=\frac{1}{16}\left(1-2x\right)\,\sin 2x-\frac{1}{16}\left(1+2x\right)\cos 2x$

Beraz, soluzio orokorra hau da:

$$y_O=y_H+y_P=y_H+y_{P_1}+y_{P_2}=K_1+K_2e^{-2x}+\left(-\frac{7}{2}x\,e^{-2x}\right)+\left(\frac{1}{16}\left(1-2x\right)\,\sin 2x-\frac{1}{16}\left(1+2x\right)\cos 2x\right)$$

3.- $y'' + 4y' + 5y = 5\sin 2x \cos 3x + e^{-2x}\cos x$

- *Homogeneoa* $\left(y''+4y'+5y=0\right)$:

Polinomio karakteristikoa: $r^2+4r+5=0 \Rightarrow r_{1,2}=-2\pm i \quad \Rightarrow y_H = e^{-2x}\left(K_1\sin x + K_2\cos x\right)$

- *Partikularra*

Kontuan hartu $5\sin 2x\cos 3x = \frac{5}{2}\left(\sin 5x - \sin x\right)$ betetzen dela. Beraz:

$$\left(\begin{array}{l} f(x)=\frac{5}{2}\left(\sin 5x-\sin x\right)+e^{-2x}\cos x = f_1(x)+f_2(x)+f_3(x) \\ \text{non } \ f_1(x)=\frac{5}{2}\sin 5x, \quad f_2(x)=-\frac{5}{2}\sin x, \quad f_3(x)=e^{-2x}\cos x \end{array}\right)$$

$\mathbf{1}\} \Rightarrow y_{P_1} = a\sin 5x + b\cos 5x$, $y'_{P_1} = 5a\cos 5x - 5b\sin 5x$ eta $y''_{P_1} = -25a\sin 5x - 25b\cos 5x$.

$y''_{P_1} + 4y'_{P_1} + 5y_{P_1} = \frac{5}{2}\sin 5x$ ekuazioan ordezkatuz:

$$\left(-25a\sin 5x - 25b\cos 5x\right) + 4\left(5a\cos 5x - 5b\sin 5x\right) + 5\left(a\sin 5x + b\cos 5x\right) = \frac{5}{2}\sin 5x$$

$$20\left(-a-b\right)\sin 5x + 20\left(-b+a\right)\cos 5x = \frac{5}{2}\sin 5x \Rightarrow \begin{cases} 20\left(-a-b\right)=\frac{5}{2} \\ 20\left(-b+a\right)=0 \end{cases} \Rightarrow a=-\frac{1}{16};\, b=-\frac{1}{16}$$

Beraz, $y_{P_1} = -\frac{1}{16}\left(\sin 5x + \cos 5x\right)$

$\mathbf{2}\} \Rightarrow y_{P_2} = a\sin x + b\cos x$, $y'_{P_2} = a\cos x - b\sin x$ eta $y''_{P_2} = -a\sin x - b\cos x$.

$y''_{P_2} + 4y'_{P_2} + 5y_{P_2} = -\frac{5}{2}\sin x$ ekuazioan ordezkatuz:

$$\left(-a\sin x - b\cos x\right) + 4\left(a\cos x - b\sin x\right) + 5\left(a\sin x + b\cos x\right) = -\frac{5}{2}\sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(4a-4b\right)\sin x + \left(4a+4b\right)\cos x = -\frac{5}{2}\sin x \Rightarrow \begin{cases} 4a-4b=-\frac{5}{2} \\ 4a+4b=0 \end{cases} \Rightarrow a=-\frac{5}{16};\, b=\frac{5}{16}$$

Beraz, $y_{P_2} = \frac{5}{16}\left(-\sin x + \cos x\right)$

$3\} \Rightarrow y_{P_3} = e^{-2x} x\left(a\sin x + b\cos x\right)$, $\quad y'_{P_3} = e^{-2x}\left(\left[a+\left(-2a-b\right)x\right]\sin x + \left[b+\left(a-2b\right)x\right]\cos x\right)$

eta $y''_{P_3} = e^{-2x}\left(\left[\left(-4a-2b\right)+\left(3a+4b\right)x\right]\sin x + \left[\left(2a-4b\right)+\left(3b-4a\right)x\right]\cos x\right)$.

$y''_{P_3} + 4y'_{P_3} + 5y_{P_3} = e^{-2x}\cos x$ ekuazioan ordezkatuz:

$$e^{-2x}\left(\left[\left(-4a-2b\right)+\left(3a+4b\right)x\right]\sin x + \left[\left(2a-4b\right)+\left(3b-4a\right)x\right]\cos x\right)+$$
$$+4e^{-2x}\left(\left[a+\left(-2a-b\right)x\right]\sin x + \left[b+\left(a-2b\right)x\right]\cos x\right)+$$
$$+5e^{-2x}x\left(a\sin x + b\cos x\right) = e^{-2x}\cos x \Rightarrow 2\left(-b\sin x + a\cos x\right) = \cos x \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ 2a=1 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{2};\, b=0$$

Beraz, $y_{P_3} = \frac{1}{2}e^{-2x}x\sin x$

Beraz, soluzio orokorra hau da:

$$y_O = y_H + y_P = y_H + y_{P_1} + y_{P_2} + y_{P_3} =$$
$$= e^{-2x}\left(K_1\sin x + K_2\cos x\right) + \left(-\frac{1}{16}\left(\sin 5x + \cos 5x\right)\right) + \left(\frac{5}{16}\left(-\sin x + \cos x\right)\right) + \left(\frac{1}{2}e^{-2x}x\sin x\right)$$

10.5 KONSTANTEEN ALDAKUNTZA-METODOA

Demagun $y_1, y_2, ..., y_n$, $a_n y^{n)} + a_{n-1}y^{n-1)} + ... + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ ekuazio homogeneoaren soluzioen oinarrizko sistema bat dela. Orduan, ekuazio osoaren (ez-homogeneoa) soluzioak forma hau izango du:

$$y = K_1\left(x\right)y_1 + K_2\left(x\right)y_2 + ... + K_n\left(x\right)y_n$$

non $K_1\left(x\right)$, $K_2\left(x\right), ..., K_n\left(x\right)$ funtzioak ekuazio hau ebatziz lortzen diren:

$$\left.\begin{array}{l} K'_1\left(x\right)y_1 + K'_2\left(x\right)y_2 + ... + K'_n\left(x\right)y_n = 0 \\ K'_1\left(x\right)y'_1 + K'_2\left(x\right)y'_2 + ... + K'_n\left(x\right)y'_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ K'_1\left(x\right)y_1^{n-2)} + K'_2\left(x\right)y_2^{n-2)} + ... + K'_n\left(x\right)y_n^{n-2)} = 0 \\ K'_1\left(x\right)y_1^{n-1)} + K'_2\left(x\right)y_2^{n-1)} + ... + K'_n\left(x\right)y_n^{n-1)} = f\left(x\right) \end{array}\right\}$$

ARIKETA EBATZIAK:

1.- $y'' + y = tag\, x$

- *Homogeneoa* $\left(y''+y=0\right)$:

Polinomio karakteristikoa: $r^2+1=0 \Rightarrow r_{1,2}=\pm i$. Beraz, $y_H = K_1 \sin x + K_2 \cos x$

- *Partikularra* (konstanteen aldakuntza-metodoa erabiliz): $y_P = K_1(x)\sin x + K_2(x)\cos x$.

$$\left.\begin{array}{l} K_1'(x)\sin x + K_2'(x)\cos x = 0 \\ K_1'(x)\cos x - K_2'(x)\sin x = tg\, x \end{array}\right\} \Rightarrow K_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ tg\, x & -\sin x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}} = \frac{-tg\, x \cos x}{-\sin^2 x - \cos^2 x} = \sin x$$

$$\Rightarrow K_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & tg\, x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}} = \frac{tg\, x \sin x}{-\sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{-\sin^2 x}{\cos x}$$

Integratuz:

$$K_1(x) = \int \sin x\, dx = -\cos x + k$$

$$K_2(x) = \int \frac{-\sin^2 x}{\cos x}\, dx = \int \frac{-\sin^2 x}{\cos^2 x} \cos x\, dx = \int \frac{-\sin^2 x}{1-\sin^2 x} \cos x\, dx = \begin{pmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{pmatrix} = \int \frac{-t^2}{1-t^2}\, dt =$$

$$= \int \frac{-1+1-t^2}{1-t^2}\, dt = \int \left(1 - \frac{1}{1-t^2}\right) dt = t - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t}\, dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}\, dt = t + \frac{1}{2}\ln(1-t) - \frac{1}{2}\ln(1+t) + k =$$

$$= t + \ln\sqrt{\frac{(1-t)}{(1+t)}} + k = \sin x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) + k$$

Oharra: Soluzio partikularra konstanteak zerora berdinduz lortzen da. Konstanteak mantentzen baditugu, soluzio osoa lortuko dugu.

Beraz, SOLUZIO OSOA hau da:

$$y_O = (-\cos x + A)\sin x + \left(\sin x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) + B\right)\cos x$$

2.- $y'' - y = tghx$

- Homogeneoa:

Polinomio karakteristikoa: $r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = 1, -1$. Beraz, $y_H = K_1 e^{-x} + K_2 e^{x}$

- Konstanteen aldakuntza-metodoa erabiliz soluzio OSOA kalkulatuko dugu zuzenean.

$y_P = K_1(x) e^{-x} + K_2(x) e^{x}$.

$$\left.\begin{array}{l} K_1'(x) e^{-x} + K_2'(x) e^{x} = 0 \\ -K_1'(x) e^{-x} + K_2'(x) e^{x} = tghx \end{array}\right\} \Rightarrow K_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{x} \\ tghx & e^{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-x} & e^{x} \\ -e^{-x} & e^{x} \end{vmatrix}} = \frac{-tghx\, e^{x}}{e^{-x}e^{x} + e^{-x}e^{x}} = -\frac{tghx\, e^{x}}{2}$$

$$K_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & tghx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-x} & e^{x} \\ -e^{-x} & e^{x} \end{vmatrix}} = \frac{tghx\, e^{-x}}{e^{-x}e^{x} + e^{-x}e^{x}} = \frac{tghx\, e^{-x}}{2}$$

Integratuz:

$$K_1(x) = \int -\frac{tghx\, e^{x}}{2}\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{\left(e^{x} - e^{-x}\right) e^{x}}{\left(e^{x} + e^{-x}\right)}\, dx = \begin{pmatrix} t = e^{x} \\ dt = e^{x} dx \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\int \frac{\left(t - t^{-1}\right)}{\left(t + t^{-1}\right)}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{\left(t^2 - 1\right)}{\left(t^2 + 1\right)}\, dt = -\frac{1}{2}\int \frac{\left(t^2 + 1\right) - 2}{t^2 + 1}\, dt = -\frac{1}{2}\int dt - \frac{1}{2}\int \frac{-2}{t^2 + 1}\, dt = -\frac{t}{2} + \operatorname{arctg} t + k =$$

$$= -\frac{e^{x}}{2} + \operatorname{arctg} e^{x} + k$$

$$K_2(x) = \int \frac{tghx\, e^{-x}}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{\left(e^{x} - e^{-x}\right) e^{-x}}{\left(e^{x} + e^{-x}\right)}\, dx = \begin{pmatrix} t = e^{x} \\ dt = e^{x} dx \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{\left(t - t^{-1}\right) t^{-1}}{\left(t + t^{-1}\right)}\, \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\left(t^2 - 1\right)}{\left(t^2 + 1\right)}\, \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{At + B}{t^2 + 1}\, dt + \int \frac{C}{t}\, dt + \int \frac{D}{t^2}\, dt\right) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 = (At + B) t^2 + Ct\left(t^2 + 1\right) + D\left(t^2 + 1\right) \\ A = C = 0;\ B = 2;\ D = -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{2}{t^2 + 1}\, dt - \int \frac{dt}{t^2}\right) = \operatorname{arctg} \mathrm{t} + \frac{1}{2t} + k = \operatorname{arctg} e^{x} + \frac{e^{-x}}{2} + k$$

Beraz, SOLUZIO OSOA hau da:

$$y_O = \left(-\frac{e^{x}}{2} + \operatorname{arctg} e^{x} + A\right) e^{-x} + \left(\operatorname{arctg} e^{x} + \frac{e^{-x}}{2} + B\right) e^{x}$$

11.- EULER-EN EKUAZIO DIFERENTZIALAK

11.1 EULER-EN EKUAZIO DIFERENTZIAL HOMOGENEOAK

Definizioa: **Euler-en ekuazio diferentzial homogeneoak** mota honetako ekuazio diferentzialak dira:

$$a_n x^n y^{n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{n-1)} + \ldots + a_2 x^2 y'' + a_1 x\, y' + a_0 y = 0$$

non $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ zenbaki errealak diren.

Oharra:

Bigarren ordenako ekuazioek forma hau izango dute:

$$a_2 x^2 y'' + a_1 x\, y' + a_0 y = 0$$

Ebazpena:

Soluzioek $y = x^r$ forma izango dute. Beraz, $y = x^r$, $y' = r x^{r-1}$ eta $y'' = r(r-1)x^{r-2}$ direnez:

$$a_2 x^2 \left(r(r-1) x^{r-2} \right) + a_1 x \left(r\, x^{r-1} \right) + a_0 \left(x^r \right) = 0$$

Eta ekuazio hau ebatzi behar dugu:

$$a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0 = 0 \Rightarrow a_2 r^2 + (a_1 - a_2) r + a_0 = 0$$

Erro erreal desberdinak:

r_1, r_2 erro desberdinak badira, x^{r_1}, x^{r_2} soluzioak izango dira, eta SOLUZIO OROKORRA horien konbinazio lineal guztiak:

$$y = K_1 x^{r_1} + K_2 x^{r_2}$$

Erro erreal anizkoitzak:

r erroa bikoitza. Bi soluzioak hauek dira: $x^r, (\ln x) x^r$.

SOLUZIO OROKORRA horien konbinazio lineala izango da:

$$y = K_1 x^r + K_2 (\ln x) x^r$$

Erro irudikariak desberdinak:

$r_{1,2} = a \pm bi$ erro irudikari bikote bat. Orduan, SOLUZIO OROKORRA:

$$y = K_1 x^a \cos(b \ln x) + K_2 x^a \sin(b \ln x)$$

ARIKETA EBATZIAK:

1.- $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$

$y = x^r$, $y' = rx^{r-1}$ eta $y'' = r(r-1)x^{r-2}$ ordezkatuz:

$$r(r-1) - 2r + 2 = 0 \Rightarrow r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 2 \end{cases}$$

Soluzio orokorra: $y = K_1 x + K_2 x^2$

2.- $x^2 y'' - xy' + y = 0$

$y = x^r$, $y' = rx^{r-1}$ eta $y'' = r(r-1)x^{r-2}$ ordezkatuz:

$r(r-1) - r + 1 = 0 \Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow \{ r_1 = 1$ bikoitza

Soluzio orokorra: $y = K_1 x + K_2 x(\ln x)$

3.- $x^2 y'' + xy' + y = 0$

$y = x^r$, $y' = rx^{r-1}$ eta $y'' = r(r-1)x^{r-2}$ ordezkatuz: $r(r-1) + r + 1 = 0 \Rightarrow r^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = i \\ r_2 = -i \end{cases}$

Soluzio orokorra: $y = K_1 \cos(\ln x) + K_2 \sin(\ln x)$

11.2 EULER-EN EKUAZIO DIFERENTZIAL OSOAK

Definizioa: **Euler-en ekuazio diferentzial osoak** mota honetako ekuazio diferentzialak dira:

$$a_n x^n y^{n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{n-1)} + \ldots + a_2 x^2 y'' + a_1 x\, y' + a_0 y = f(x)$$

non $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ zenbaki errealak eta $f(x)$ funtzio jarraitu bat diren.

Ebazpena:

Ekuazio diferentzial hauen soluzioa lortzeko, ekuazio diferentzial homogeneoaren soluzioa gehi ekuazio osoaren soluzio partikular bat egin beharra dago. Hau da, $y_O = y_H + y_P$, non y_H ekuazio diferentzial homogeneoaren soluzioa den eta y_P ekuazio osoaren soluzio

Soluzio partikularraren kalkulua y_P:

Soluzio partikular hau $f(x)$-ren eta homogeneoaren ekuazio karakteristikoaren erroen araberakoa izango da.

1. kasua:

$f(x) = P_n(\ln x) x^k$ bada, non $P_n(x)$ n mailako polinomioa den, orduan:

c) x^k ez da ekuazioa homogeneoaren soluzioa:

$$y_p = Q_n(\ln x) x^k$$

d) x^k ekuazioa homogeneoaren soluzioa da, eta anizkoiztasuna *m:*

$$y_p = (\ln x)^m Q_n(\ln x) x^k$$

non $Q_n(\ln x)$ n mailako polinomio bat den. Polinomio horren koefizienteak ekuazioa betetzera derrigortuz aurkitu beharko dira.

2. kasua:

$f(x)=x^a\left(P_n(\ln x)\sin(b\ln x)+Q_m(\ln x)\cos(b\ln x)\right)$ bada, non $P_n(\ln x)$ eta $Q_m(\ln x)$ n eta m mailako polinomioak diren, orduan:

c) $a\pm bi$ ez da ekuazio karakteristikoaren soluzioa:

$$y_p=x^a\left(S_N(\ln x)\sin(b\ln x)+T_N(\ln x)\cos(b\ln x)\right)$$

d) $a\pm bi$ ekuazio karakteristikoaren soluzioa da, eta anizkoiztasuna *p:*

$$y_p=(\ln x)^p\,x^a\left(S_N(\ln x)\sin(b\ln x)+T_N(x)\cos(b\ln x)\right)$$

non $S_N(\ln x)$ eta $T_N(\ln x)$ polinomioak $N=\max\{n,m\}$ mailako polinomioak diren. Polinomio horien koefizienteak ekuazioa betetzera derrigortuz aurkitu beharko dira.

11.3 SOLUZIOEN GAINEZARPEN-PRINTZIPIOA

Demagun $f(x)$ funtzioa ez dela 11.2 ataleko kasuetako bat. Baina $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+...+f_k(x)$ gisa zatitu daiteke, non $f_i(x)$ guztiak 11.2 ataleko kasuren bat diren. Beraz, $f_i(x)$ bakoitzerako soluzio partikular bat izango dugu, y_{pi}. Hau da, $x^n a_n y^{n)}+...+x\,a_1 y'+a_0 y=f_i(x)$ bakoitzaren soluzio partikularra y_{pi} da. Orduan, frogatu daiteke $x^n a_n y^{n)}+...+xa_1 y'+a_0 y=f(x)$ ekuazioaren soluzio partikularra $y_P=y_{p1}+y_{p2}+...+y_{pk}$ dela.

ARIKETA EBATZIAK:

1.- $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2$

- *Homogeneoa* $\left(x^2 y''-2xy'+2y=0\right)$:

$$\begin{cases} y = x^r \\ y' = rx^{r-1} \\ y'' = r\left(r-1\right)x^{r-2} \end{cases}$$. Ekuazioan ordezkatuz: $r\left(r-1\right)-2r+2=0 \Rightarrow r^2-3r+2=0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 2 \end{cases}$

Homogeneoaren soluzioa: $y_H = K_1 x + K_2 x^2$

- *Partikularra:*

$y_P = a\,x^2 \ln x$. r=2 homogeneoaren erroa delako. a ekuazioan ordezkatuz lortuko dugu.

$y_P = a\,x^2 \ln x$, $y_P^{'} = \left(2\ln x+1\right)a\,x$ eta $y_P^{''} = \left(3+2\ln x\right)a$

$x^2 y''-2xy'+2y = x^2$ ekuazioan ordezkatuz:

$x^2\left(\left(3+2\ln x\right)a\right)-2x\left(\left(2\ln x+1\right)a\,x\right)+2\left(a\,x^2\ln x\right)=x^2 \Rightarrow a=1$

Beraz, soluzio orokorra hau da:

$$y_O = y_H + y_P = K_1 x + K_2 x^2 + x^2 \ln x$$

2.- $x^2y'' + 4xy' + 2y = x(2 - 3lnx)$

- *Homogeneoa* $\left(x^2y''+4xy'+2y=0\right)$:

$$\begin{cases} y = x^r \\ y' = rx^{r-1} \\ y'' = r(r-1)x^{r-2} \end{cases}$$. Ekuazioan ordezkatuz: $r(r-1)+4r+2=0 \Rightarrow r^2+3r+2=0 \Rightarrow \begin{cases} r_1=-1 \\ r_2=-2 \end{cases}$

Homogeneoaren soluzioa: $y_H = K_1x^{-1}+K_2x^{-2} = \dfrac{K_1}{x}+\dfrac{K_2}{x^2}$

- *Partikularra:*

$y_P = x(a+b\ln x)$. a ekuazioan ordezkatuz lortuko dugu. $y_P = x(a+b\ln x)$, $y_P' = a+b+b\ln x$

eta $y_P'' = \dfrac{b}{x}$

$x^2y''+4xy'+2y = x(2-3\ln x)$ ekuazioan ordezkatuz:

$$x^2\frac{b}{x}+4x(a+b+b\ln x)+2x(a+b\ln x) = x(2-3\ln x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6a+5b+6b\ln x = 2-3\ln x \Rightarrow \begin{cases} 6a+5b=2 \\ 6b=-3 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{3}{4};\ b=-\frac{1}{2}$$

Beraz, soluzio orokorra hau da:

$$y_O = y_H + y_P = \frac{K_1}{x}+\frac{K_2}{x^2}+x\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\ln x\right)$$

3.- $x^2y''+4xy'+2y=2\ln^2 x+12x$

- *Homogeneoa* $\left(x^2y''+4xy'+2y=0\right)$:

$\begin{cases} y=x^r \\ y'=rx^{r-1} \\ y''=r(r-1)x^{r-2} \end{cases}$. Ekuazioan ordezkatuz: $r(r-1)+4r+2=0 \Rightarrow r^2+3r+2=0 \Rightarrow \begin{cases} r_1=-1 \\ r_2=-2 \end{cases}$

Homogeneoaren soluzioa: $y_H=K_1x^{-1}+K_2x^{-2}=\dfrac{K_1}{x}+\dfrac{K_2}{x^2}$

- *Partikularra* $\left(f(x)=f_1(x)+f_2(x) \quad \text{non} \quad f_1(x)=2\ln^2 x, \quad f_2(x)=12x\right)$:

$\mathbf{1}\} \Rightarrow y_{P_1}=\left(a+b\ln x+c\ln^2 x\right)$, $y'_{P_1}=\left(\dfrac{b}{x}+2c\dfrac{\ln x}{x}\right)$ eta $y''_{P_1}=\left(-\dfrac{b}{x^2}+2c\left(\dfrac{1-\ln x}{x^2}\right)\right)$.

$x^2y''_{P_1}+4x\,y'_{P_1}+2y_{P_1}=2\ln^2 x$ ekuazioan ordezkatuz:

$$x^2\left(-\frac{b}{x^2}+2c\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)\right)+4x\left(\frac{b}{x}+2c\frac{\ln x}{x}\right)+2\left(a+b\ln x+c\ln^2 x\right)=2\ln^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2c+3b+2a)+(6c+2b)\ln x+2c\ln^2 x=2\ln^2 x \Rightarrow \begin{cases} 2c+3b+2a=0 \\ 6c+2b=0 \\ 2c=2 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{7}{2};\, b=-3;\, c=1$$

Beraz, $y_{P_1}=\left(\dfrac{7}{2}-3\ln x+\ln^2 x\right)$

$\mathbf{2}\} \Rightarrow y_{P_2}=ax$, $y'_{P_2}=a$ eta $y''_{P_2}=0$.

$x^2y''_{P_2}+4x\,y'_{P_2}+2y_{P_2}=12x$ ekuazioan ordezkatuz:

$4x(a)+2ax=12x \Rightarrow 6ax=12x \Rightarrow a=2$

Beraz, $y_{P_2}=2x$

Beraz, soluzio orokorra hau da:

$$y_O=y_H+y_P=y_H+y_{P_1}+y_{P_2}=\frac{K_1}{x}+\frac{K_2}{x^2}+\left(\frac{7}{2}-3\ln x+\ln^2 x\right)+(2x)$$

4.- $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 - 2x + 2$

- *Homogeneoa* $\left(x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0\right)$:

$\begin{cases} y = x^r \\ y' = rx^{r-1} \\ y'' = r(r-1)x^{r-2} \end{cases}$. Ekuazioan ordezkatuz: $r(r-1) - 2r + 2 = 0 \Rightarrow r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 2 \end{cases}$

Homogeneoaren soluzioa: $y_H = K_1 x + K_2 x^2$

- *Partikularra* $\left(f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \quad \text{non} \quad f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = -2x, \quad f_2(x) = 2\right)$:

$\mathbf{1}\} \Rightarrow y_{P_1} = a(\ln x)x^2$, $y'_{P_1} = ax + 2a(\ln x)x$ eta $y''_{P_1} = 3a + 2a(\ln x)$.

$x^2 y''_{P_1} - 2x\, y'_{P_1} + 2y_{P_1} = x^2$ ekuazioan ordezkatuz:

$x^2(3a + 2a\ln x) - 2x(ax + 2ax\ln x) + 2ax^2 \ln x = x^2 \Rightarrow a = 1$. Beraz, $y_{P_1} = x^2 \ln x$

$\mathbf{2}\} \Rightarrow y_{P_2} = a(\ln x)x$, $y'_{P_2} = a + a\ln x$ eta $y''_{P_2} = \dfrac{a}{x}$.

$x^2 y''_{P_2} - 2x\, y'_{P_2} + 2y_{P_2} = -2x$ ekuazioan ordezkatuz:

$x^2\left(\dfrac{a}{x}\right) - 2x(a + a\ln x) + 2(ax\ln x) = -2x \Rightarrow -a = -2 \Rightarrow a = 1$. Beraz, $y_{P_2} = x\ln x$

$\mathbf{3}\} \Rightarrow y_{P_3} = a$, $y'_{P_3} = 0$ eta $y''_{P_3} = 0$.

$x^2 y''_{P_3} - 2x\, y'_{P_3} + 2y_{P_3} = 2$ ekuazioan ordezkatuz:

$2a = 2 \Rightarrow a = 1$. Beraz, $y_{P_3} = 1$

Beraz, soluzio orokorra hau da:

$$y_O = y_H + y_P = y_H + y_{P_1} + y_{P_2} + y_{P_3} = K_1 x + K_2 x^2 + \left(x^2 \ln x\right) + \left(x\ln x\right) + (1)$$

12.- PROPOSATURIKO ARIKETAK

Ebatzi *aldagai bananduetako* ekuazio hauek:

1.- $\left(1+y^2\right)dx+\left(1+x^2\right)dy=0$

2.- $\left(1+y^2\right)dx=-xy\,dx$

3.- $\left(y^2+xy^2\right)dy=\left(yx^2-x^2\right)dx$

4.- $x\sqrt{1+y^2}+y\,y'\sqrt{1+x^2}=0$

5.- $e^{-y}\left(1+y'\right)=1$

6.- $\left(1-y\right)e^{y}y'+\dfrac{y^2}{x\ln x}=0$

Ebatzi ekuazio *homogeneo* edo *homogeneoetara bihurgarri* hauek:

7.- $ydx-(x+y)dy=0$

8.- $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$

9.- $y^3dy+3y^2x\,dx+2x^3dx=0$

10.- $x\,y'=\sqrt{x^2-y^2}+y$

11.- $4x^2-xy+y^2+y'(x^2-xy+4y^2)=0$

12.- $y'=\dfrac{y^3+2x^2y}{2\left(x^3+xy^2\right)}$

13.- $\left(x-y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+x\cos\dfrac{y}{x}dy=0$

14.- $ydx+\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy=0$

15.- $y'=2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$

16.- $\left(xe^{\frac{y}{x}}+y\right)dx-xdy=0$

17.- $(2x-y+2)dx+(4x-2y-1)dy=0$

18.- $y'=\dfrac{x+y-1}{3x-y+5}$

19.- $(x+y+1)dx-(x+y-1)dy=0$

20.- $y'=\dfrac{2x+3y-1}{5-4x-6y}$

21.- $3x+y-2+y'(x-1)=0$

22.- $(5y+7x)dy+(8y+10x)dx=0$

Ebatzi ekuazio *zehatz* edo *zehatzetara bihurgarri* hauek:

23.- $\left(x^3+xy^2\right)dx+\left(x^2y+y^3\right)dy=0$

24.- $\left(2x^3+4y\right)dx+\left(4x+y+2\right)dy=0$

25.- $\left(x^2+y^2+x\right)dx+2xy\,dy=0$

26.- $\left(\dfrac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0$

27.- $\left(\sin y+y\sin x+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\dfrac{1}{y}\right)dy=0$

28.- $\left(3x^2tgy-\dfrac{2y^3}{x^3}\right)dx+\left(x^3\sec^2 y+4y^3+\dfrac{3y^2}{x^2}\right)dy=0$

29.- $\left(3x^2 - 2x - y\right)dx+\left(2y - x+3y^2\right)dy=0$

30.- $\left(\dfrac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x\right)dy=0$

31.- $\left(x+y^2\right)dx-2xy\,dy=0$

32.- $2xy\,dx+\left(y+y^2-x^2\right)dy=0$

33.- $\dfrac{y}{x}dx+\left(y^3-\ln x\right)dy=0$.

34.- $\left(2xy^2-3y^3\right)dx+\left(7-3xy^2\right)dy=0$

35.- $\left(3+y^3\sin x\right)dx+3y^2\cos x\,dy=0$

36.- $\left(x^3y^2-e^{\frac{1}{x}}\right)dx+x^4y\,dy=0$

37.- $\left(xy^2+x^2y^2+3\right)dx+x^2y\,dy=0$

38.- $\left(x+\sin x+\sin y\right)dx+\cos y\,dy=0$

39.- $\left(x\cos y-y\sin y\right)dy+\left(x\sin y+y\cos y\right)dx=0$.

40.- $\left(2xy^4e^y+2xy^3+y\right)dx+\left(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x\right)dy=0$

41.- $y^2x^2\,dx+\left(x^3y+y+3\right)dy=0$

42.- $\left(3+y^3\sin x\right)dx+3y^2\cos x\;dy=0$

43.- $y'=-\dfrac{(1+x\,tgx)\,y^2}{2\left(xy+\cos x\right)}$

44.- $x\,dx+y\,dy+x(x\,dy-y\,dx)=0,\quad \mu=\mu\left(x^2+y^2\right)$

45.- $\left(3y^2 - x\right)dx + \left(2y^3 - 6xy\right)dy = 0, \quad \mu = \mu\left(x + y^2\right)$

46.- $\left(xy - 2y^2\right)dx - \left(x^2 - 3xy\right)dy = 0, \quad \mu = \mu\left(x\,y^2\right).$

47.- $y\,dx + x\left(x^2 y - 1\right)dy = 0, \quad \mu = \mu\left(\dfrac{y}{x^3}\right)$

48.- $y\left(x^2 + y^2 + 1\right)dx + x\left(1 - x^2 - y^2\right)dy = 0, \quad \mu = \mu\left(x\,y\right)$

49.- $\left(2y - 3xy^2\right)dx - xdy = 0, \quad \mu = \mu\left(\dfrac{x}{y^2}\right)$

Ebatzi ekuazio *lineal* edo *linealetara murrizgarri* hauek *(Bernoulli):*

50.- $\left(x \ln x\right) y' - y = x^3\left(3 \ln x - 1\right)$

51.- $2x\,y' - y = 3x^2$

52.- $\left(1 + y^2\right)dx = \left(\sqrt{1 + y^2}\,siny - xy\right)dy$

53.- $y' = \dfrac{1}{xsiny + 2sin2y}$

54.- $x\left(x^3 + 1\right)y' + \left(2x^3 - 1\right)y = \dfrac{x^3 - 2}{x}$

55.- $3xy' - 2y = \dfrac{x^3}{y^2}$

56.- $y' = \dfrac{3x^2}{x^3 + y + 1}$

57.- $\left(2\,sinx\right)y' + y\cos x = y^3\left(x\cos x - sinx\right)$

58.- $3xdy = y\left(1 + xsinx - 3y^3 sinx\right)dx$

59.- $y' + \dfrac{y}{x} + xy^2 = 0$

60.- $8xy' - y = -\dfrac{1}{y^3\sqrt{x+1}}$

61.- $y^2\left(x + x^2\right) + 3 + x^2 y\,y' = 0$

62.- $y' + \dfrac{y}{x+1} = -\dfrac{1}{2}(x+1)^3 y^3$

63.- $\dfrac{dy}{dx} + y = y^2(\cos x - sinx)$

64.- $xdy - \left[y + xy^3\left(1 + \ln x\right)\right]dx = 0$

Ebatzi *'n' ordenako ekuazio diferentzial lineal homogeneook:*

65.- $y''-4y'+3y=0$

66.- $4y''-8y'+5y=0$

67.- $3y''-2y'-8y=0$

68.- $y'''-3y''+3y'-y=0$

69.- $y'''-27y=0$

70.- $3y''-2y'-8y=0$

71.- $y^{IV}+4y'''+10y''+12y'+5y=0$

72.- $y^{IV}-16y=0$

73.- $2y'''-3y''+y'=0$

74.- $y^{IV}+18y''+81y=0$

75.- $y'''-3y''+3y'-y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2,\ y''(0)=3$

76.- $y^{V}+4y^{IV}+5y'''-6y'-4y=0$

Ebatzi *'n' ordenako ekuazio diferentzial lineal oso* hauek:

77.- $y''-8y'+16y=(1-x)e^{4x}$

78.- $4y''-3y'=xe^{\frac{3}{4}x}$

79.- $y''+25y=\cos 5x$

80.- $y''+y=\cos x-\sin x$

81.- $y''-4y'+8y=e^{2x}(\cos 2x-\sin 2x)$

82.- $y'''+y=2x$

83.- $y'''+6y''+11y'+6y=2x+3x^2$

84.- $y^{IV}-y'''=6$

85.- $y^{IV}+2y'''+y''=e^{4x}$

86.- $y^{IV}+2y'''+y''=xe^{-x}$

87.- $y^{IV}+4y''+4y=\sin 2x$

88.- $y^{IV}+4y''+4y=x^2\cos 2x$

89.- $y^{IV}+4y'''+6y''+4y'+y=2x\sin x$

90.- $y''+8y'=8xe^{2x}$

91.- $y^{IV}-4y'''+6y''-4y'+y=3x^2e^x$

92.- $5y''-6y'+5y=5e^x chx$

93.- $y''+y'=\cos^2 x+e^x+5x-4$

94.- $y^{V}+4y'''=2e^x+3\sin 2x+5x-4$

95.- $y''+2y'+2y=e^{-x}\cos x+xe^{-x}$

96.- $y''+4y=5e^x+4\sin 2x+2\cos^2 x-1$

97.- $y''+y=3\sin 2x\sin x$

98.- $y''+y=\cos^2 2x+\sin^2\frac{x}{2}$

99.- $y''+2y'+y=\cos 2x+5\sin x-\sin 2x+6x$

100.- $y''+y=5\sin 2x\cos 3x$

101.- $y''+4y'+5y=7e^{-2x}+x\sin 2x$

102.- $y''-6y'+9y=\sin x+6xe^{3x}+2$

103.- $y''+4y'+5y=e^{-2x}\cos x+\sin 2x$

104.- $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$

105.- $y''-2y'+y=\dfrac{e^{x}}{x}$

Ebatzi *Euler-en ekuazio* diferentzial hauek:

106.- $x^2y''+xy'+y=x\left(6-\ln x\right)$

107.- $x^2y''-xy'-3y=-\dfrac{16\ln x}{x}$

108.- $x^2y'''+2xy''-4y'+4\dfrac{y}{x}=2x$

109.- $\left(2x+3\right)^3y'''-(16x+24)y'+32y=0$

110.- $\left(x+1\right)^3y'''+\left(x+1\right)^2y''+3\left(x+1\right)y'-8y=\dfrac{x}{\left(1+x\right)^2}$

13.- BIBLIOGRAFIA

[1] Teoria y problemas de Ecuaciones Diferenciales; Frank Ayres, Jr. Libros McGraw-Hill, 1969.

[2] Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Integral; E. Martínez Sagarzazu. UPV/EHU, 1996.

[3] Ecuaciones Diferenciales; Frank-Ayres. Ed. Schaum Mc Graw-Hill, 1969.

[4] Ecuaciones Diferenciales; P. Puig Adam. Ed. Biblioteca Matemática, 1970.

[5] Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias; A. Kiseliov, M. Krasnov, G. Makarenko. Editorial MIR, 1968.

[6] Problemas Resueltos de Ecuaciones Diferenciales; M. López Rodriguez. Editorial Paraninfo, 2007.