eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Ekuazio Diferentzialak

Naiara Arrizabalaga
Maria Jose De Velasco
Maria Jose Zarate

ISBN: 978-84-9860-972-1

EUSKARAREN ARLOKO ERREKTOREORDETZAREN SARE ARGITALPENA

Liburu honek UPV/EHUko Euskararen Arloko Errektoreordetzaren dirulaguntza jaso du

Naiara Arrizabalaga Uriarte email: naiara.arrizabalaga@ehu.es

Maria Jose De Velasco Camara email: mariajose.develasco@ehu.es

Maria Jose Zarate Azcuna email: mariajose.zarate@ehu.es

Matematika Saila

Zientzia eta Teknologia Fakultatea

Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

ISBN: 978-84-9860-972-1

Euskararen Arloko Errektoreordetzaren sare argitalpena

Gure lagun eta kide Adela Moyuari (In Memoriam) eskainia,
elkarrekin hainbat lan egin ditugulako gai hauen inguruan.
Maitasun osoz eta eskerrak emanez.

Sarrera

Ekuazio diferentzialen teoria Matematikaren funtsezko arlo bat da, eta Fisikarako eta Ingeniaritzarako ezinbesteko tresna. Ekuazio diferentzialak bide dira Fisikan agertzen diren hainbat fenomeno ulertzeko eta horiekin erlazionatutako problemak ebazteko. Ekuazio diferentzialen artean bi mota ditugu: ekuazio diferentzial arruntak eta deribatu partzialetako ekuazioak. Ikasmaterial honetan biak garatuko ditugu.

Ekuazio diferentzialei buruzko liburu ugari egon arren, urria da euskaraz idatzitako bibliografia. Testu hau azken urteotan osatu dugu, egileak Matematikako 3. mailako Ekuazio Diferentzialak irakasgaia irakasten aritu diren bitartean Zientzia eta Teknologia Fakultatean. Baina beste fakultate eta eskola teknikoetan ere erabilgarria izan daiteke. Apunte hauetan, teorema batzuk ez dira frogatuko, klasean landuko baitira horiek. Beraz, teorema nagusien frogapenak ikasi nahi izanez gero, bibliografia kontsultatzea gomendatzen dugu.

Ikasmaterial honek hamar unitate ditu bi zati nagusitan banatuta. Lehenengo zazpiak ekuazio diferentzial arruntei buruzkoak dira eta azken hirurak deribatu partzialei buruzkoak. Esan beharra dago azkenak deribatu partzialetako ekuazioen teoriaren sarrera bat baino ez direla; azterketa sakon baterako, bibliografian begiratuko da. Landutako gaien artean aurki ditzakegu, besteak beste lehen ordenako ekuazioak, ekuazio diferentzial linealak, sistema diferentzialak, sistema autonomoak edota uhinen, beroaren, eta Laplace-ren ekuazioak.

Azkenik, eskerrak eman nahi dizkiogu Euskara eta Eleaniztasun Errektoreordetzari, ikasmaterialgintza proiektu honen hizkuntza egokitzen emandako laguntzagatik, eta baita bertan erabilitako glosategia sortzen laguntzeagatik ere ≪Terminologia sareak ehunduz≫ tailerrean.

2013ko azaroa

Gaien Aurkibidea

1 Ekuazio diferentzialak: lehendabiziko definizioak **11**

1.1 ARIKETAK 16

2 Lehen ordenako ekuazio diferentzialak: metodo elementalak **19**

2.1 Kurba-familia baten ibilbide ortogonalak 21

2.2 Lehen ordenako ekuazio diferentzialen kurba integralen kalkulua 23

2.3 Lehen ordenako ekuazio diferentzialak ebazteko metodo analitikoak 26

2.3.1 Aldagai bananduetako ekuazio diferentziala 26

2.3.2 Ekuazio diferentzial homogeneoa 27

2.3.3 Ekuazio diferentzial zehatza 28

2.3.4 Ekuazio diferentzial linealak 31

2.3.5 Bernouilli-ren ekuazioa eta Riccati-ren ekuazioa 32

2.3.6 Ekuazio diferentzial inplizituak 34

2.4 Bigarren ordenako ekuazio diferentzial berezi batzuk 36

2.5 ARIKETAK 38

3 Ekuazio diferentzial linealak **41**

3.1 Sarrera. Lehendabiziko propietateak 41

3.2 Ekuazio diferentzial lineal homogeneoak 43

3.2.1 Ordenaren beherapena ekuazio lineal homogeneoetan 45

3.3 Ekuazio diferentzial lineal ez-homogeneoak 47

3.3.1 Ordenaren beherapena ekuazio lineal ez-homogeneoetan 48

3.3.2 Koefizienteen aldakuntza-metodoa x_p lortzeko, edo Lagrange-ren metodoa . . . 48
3.4 Koefiziente konstanteetako ekuazio diferentzial linealak . . . 51
3.5 Adibide garrantzitsua: Eulerren ekuazio diferentzialak . . . 54
3.6 Bigarren ordenako ekuazio diferentzial linealen soluzioen propietate kualitatiboak . . . 57
3.7 ARIKETAK . . . 61

4 Berretura-serie bidezko soluzioak 65
4.1 Sarrera. Berretura-serieak, funtzio analitikoak . . . 65
4.2 Lehen ordenako ekuazio diferentzialak. Maiorantearen metodoa . . . 67
4.3 Bigarren ordenako ekuazio lineal homogeneoak: puntu erregularra . . . 69
4.4 Bigarren ordenako ekuazio lineal homogeneoa. Puntu singular erregularrak . 73
4.5 ARIKETAK . . . 81

5 Sistema diferentzial linealak 83
5.1 Sarrera . . . 83
5.2 Sistema lineal homogeneoak . . . 85
5.3 Sistema lineal ez-homogeneoak . . . 87
5.4 Koefiziente konstanteetako sistema diferentzial homogeneoak . . . 88
5.5 Funtzio esponentzial matriziala . . . 93
5.6 ARIKETAK . . . 95

6 Hastapen-balioetako problema: existentzia-teoria 97
6.1 Sarrera . . . 97
6.2 Cauchy-ren problemaren soluzio globalei buruzko teoremak . . . 99
6.3 Cauchyren problemaren soluzio lokalei buruzko teoremak . . . 101
6.4 Soluzioen luzapena . . . 103
6.5 Soluzioen mendekotasuna hastapen-baldintzekiko . . . 105
6.6 ARIKETAK . . . 107

7 Sistema autonomoak **111**

7.1 Sarrera 111

7.2 Sistema autonomoak. Fase-planoa 112

7.3 Sistema autonomo linealak: fase-planoaren azterketa 119

7.4 Sistema autonomo ez-linealak: sistema lineal elkartua 127

7.5 Liapunov-en metodo zuzena 131

7.6 ARIKETAK 134

8 Aldagaien banantze-metodoa. Sturm-Liouville-ren problemak **137**

8.1 Aldagaien banantze-metodoa eta bi aldagaiko deribatu partzialetako ekuazioak 137

8.2 Sturm-Liouvilleren mugalde-problemak 147

8.2.1 Sturm-Liouvilleren problema homogeneo erregularra 148

8.2.2 Sturm-Liouvilleren problema ez-homogeneo erregularra 154

8.3 Green-en funtzioa 159

8.4 ARIKETAK 164

9 Deribatu partzialetako ekuazioak **167**

9.1 Fisika matematikoaren ekuazioak: ohiko adibideak eta beste adibide batzuk. 167

9.1.1 Ekuazio linealak. Adibideak 168

9.2 Aldagai-aldaketa 169

9.3 Lehen ordenako eta koefiziente konstanteetako deribatu partzialetako ekuazio linealak 172

9.4 Lehen ordenako eta koefiziente aldakorretako deribatu partzialetako ekuazio linealak 175

9.5 Bigarren ordenako deribatu partzialetako ekuazio linealak 178

9.6 Hastapen-baldintzak, mugalde-baldintzak eta ondo planteaturiko problema . 183

9.7 ARIKETAK 184

10 Ekuazio bereziak: uhinen, beroaren eta potentzialaren ekuazioak **187**

10.1 Dimentsio bakarreko uhinen ekuazioa 187

10.1.1 Uhin-ekuazioaren Cauchyren problema 188

10.1.2 Ekuazio ez-homogeneoa 189

10.1.3 Uhinak zuzenerdian 190
10.1.4 Uhinak hari finitu batean 192
10.2 Dimentsio bakarreko beroaren ekuazioa 197
10.3 Laplaceren ekuazioa koordenatu polarretan 200
10.4 ARIKETAK 202

Bibliografia **204**

1. Kapitulua

Ekuazio diferentzialak: lehendabiziko definizioak

Definizioak. Ekuazio diferentzial deritzo funtzio ezezagun baten deribatuak edo diferentzialak dituen edozein ekuaziori. Funtzio ezezaguna aldagai batekoa denean, ekuazio diferentzial arrunta esaten zaio, eta aldagai anitzekoa denean, deribatu partzialetako ekuazio diferentziala.

Adibideak. (i) Newton-en legea:

$$F = m\frac{d^2u(t)}{dt^2}, \quad (F = F(t, u(t), \frac{du(t)}{dt})) \quad \text{izanik.}$$

Hots, m masako puntu material batean $F(t, u(t), \frac{du(t)}{dt})$ indarraren mendeko higidura linealaren ekuazioa diferentziala da, non t denbora, $u(t)$ puntuaren posizioa t momentuan eta $\frac{du(t)}{dt}$ abiadura baitira.

Higidura lineala ez denean, esate baterako, $u(t) = (x(t), y(t), z(t))$ denean hiru ekuazio diferentzial (arruntak) izango ditugu.

F grabitate-indarra bada, ($F = -mg$), ekuazio diferentziala honela idatziko da:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = -g;$$

ekuazio diferentzial horren funtzio ezezaguna ($u(t)$) lortzeko ekuazioa bi aldiz integratuko dugu (t-rekiko) eta emaitza hau lortuko dugu:

$$u(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2$$

C_1 eta C_2 hautazko konstanteak izanik. Lortutako ekuazio diferentzialaren soluzioek bi parametroko funtzio multzo bat osatzen dute. Eta honako hau dugu $t = 0$ unean $u(0) = u_0$ eta $u'(0) = u'_0$ hasierako baldintzak betetzen dituen soluzio bakarra:

$$u(t) = -\frac{gt^2}{2} + u'_0 t + u_0$$

(ii) Deribatu partzialetako ekuazio diferentzialen adibide ospetsuak:

Laplace-ren ekuazioa edo potentzialarena:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \\ u = u(x, y, z) \end{cases}$$

Beroaren ekuazioa:

$$\begin{cases} a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} \\ u = u(x, y, z, t) \end{cases}$$

Uhin-ekuazioa:

$$\begin{cases} a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u = u(x, y, z, t) \end{cases}$$

(iii) Ekuazio diferentzialen adibideak zientzia guztietan ager daitezke. Arlo guztietan ditugu fenomeno ezagunak zeinen adierazpen matematikoak ekuazio diferentzialak baitira. Esate baterako, Biologian populazioen hazkundea, Kimikan desintegrazio erradiaktiboa, nahasketak, Ekonomian interes konposatu jarraitua...

Kurtso honen hasieran ekuazio diferentzial arruntak aztertuko ditugu, eta, jarraian, lehendabiziko definizio batzuk ikusiko ditugu:

Definizioak. Ekuazio diferentzialaren ordena deritzo ekuazio horretan ordena nagusia duen deribatuaren ordenari.

Ekuazio diferentzial baten maila esaten zaio ekuazio diferentzialeko ordena nagusiko deribatuaren berretzaileari.

n-garren ordenako ekuazio diferentzial lineala esaten zaio honela adieraz daitekeen ekuazioari:

$$a_n(t)x^{n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = b(t),$$

hemen $a_0(t), \ldots a_n(t), b(t)$ funtzioak t aldagaiko funtzio ezagunak dira, $a_n(t)$ funtzioa ez da funtzio nulua.

Definizioak. n-garren ordenako ekuazio diferentziala honela adierazita dagoenean

$$F(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{n)}(t)) = 0$$

(F hori $n+2$ aldagaietako funtzio erreala izanik), ekuazio diferentziala era inplizituan adierazita dagoela esaten da.

$x(t)$ funtzio ezezagunaren ordena nagusiko deribatua, $x^{n)}(t)$, ekuazioaren atal bat denean, hau da, ekuazio diferentzialaren adierazpena

$$x^{n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{n-1)}(t)) \tag{1}$$

denean (f funtzioa $n+1$ aldagaietako funtzio erreala izanik), ekuazio diferentziala era esplizituan adierazita dagoela esaten da.

Bistakoa denez, ekuazio diferentzial inplizitu guztiak ezin dira modu esplizituan idatzi.

Definizioak. $x(t)$ funtzio erreal bat (1) ekuazio diferentzial esplizituaren soluzioa dela esango dugu I tarte erreal bateko t puntu guztietarako

$$(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{n-1)}(t)) \in \mathrm{dom}(f), \quad \text{eta}$$

$$x^{n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{n-1)}(t))$$

baldintzak betetzen dituenean.

Adibideak. Hainbat ekuazio diferentzial mota aztertuko ditugu:

(i) Izan bedi k konstante erreal finkatua eta

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

ekuazio diferentziala. Hemen $x(t) = Ce^{kt}, \quad (\forall t \in \mathbf{R})$ funtzioak, C edozein konstante erreal izanik, ekuazio diferentzialaren soluzioak dira.

(ii) Izan bedi

$$x'' + x = 0$$

bigarren ordenako ekuazio diferentziala. $x(t) = \cos t$ eta $x(t) = \sin t$ azken ekuazio diferentzialaren soluzioak dira , eta $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ (C_1, C_2 hautazko konstante errealak izanik) ere soluzioak dira ($\forall t \in \mathbf{R}$).

(iii) Sarritan, ekuazio diferentzialaren soluzioak forma inplizituan definituak agertzen dira, hots, ezin ditugu aldagai independentearekiko esplizituki adierazi. Adibidez, $xt = \ln x + C$ ekuazioaren bidez inplizituki definitutako $x = x(t)$ funtzioak ezin dira esplizituki kalkulatu, baina funtzio horiek

$$x' = \frac{x^2}{1 - xt}$$

ekuazio diferentzialaren soluzioak dira.

Definizioak. Demagun n-garren ordenako

$$F(t, x, x', \ldots, x^{n)}) = 0$$

ekuazio diferentziala dugula. n konstante (esentzial) dituen soluzioari ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra, jatorrizkoa edo integral sorta deritzo.

Adibidez, $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ (C_1, C_2 bi hautazko konstante errealak izanik) adierazpena bigarren ordenako $x'' + x = 0$ ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra da; hemen soluzio orokorra modu esplizituan agertzen da.

Soluzio orokorra $x = x(t, C_1, \ldots, C_n)$ adierazita dagoenean era esplizituan dagoela esaten da; aldiz, $h(t, x, C_1, \ldots, C_n) = 0$ ekuazioaren bidez adierazten denean era inplizituan dagoela.

Soluzio orokorrean hautazko konstanteen balioak finkatuz lortzen den soluzioari ekuazio diferentzialaren soluzio partikularra esan ohi zaio.

Ekuazio diferentzialaren soluzioa den funtzio bat; soluzio orokorrekoa ez bada, soluzio singularra deritzo.

Ekuazio diferentzialaren soluzio baten adierazpide geometrikoari (Otx planoan) ekuazio diferentzial horren kurba integrala esan ohi zaio.

Sarritan, ekuazio diferentzial baten ordena n bada, soluzio orokorrak n parametro izango ditu. Eta alderantziz, funtzio multzo batek n parametro baditu, (baldintzak egokiak direnean) n-garren ordenako ekuazio diferentzial baten soluzio orokorra izango da.

Definizioak. Lehen ordenako n ekuazio diferentzialeko eta n ezezaguneko sistemaren adierazpen esplizituak honako forma hau du:

$$x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_n)$$

$$x_2' = f_2(t, x_1, \ldots, x_n)$$

$$\ldots$$

$$x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n)$$

Hemen $f_i : D \subset \mathbf{R^{n+1}} \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2.., n$ funtzioak izanik

$\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ eta $\overline{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ eginez, goiko sistema diferentziala notazio bektorialez adieraziko dugu:

$$\overline{x}' = \overline{f}(t, \overline{x}),$$

$\overline{f} : D \subset \mathbf{R^{n+1}} \to \mathbf{R^n}$ izanik. Eta $\overline{x} : I \to \mathbf{R^n}$, $(I \subset \mathbf{R})$ funtzioa sistema diferentzialaren soluzioa dela esango dugu I tarte erreal bateko t puntuetarako, $(t, \overline{x}(t)) \in D$ eta $\overline{x}' = \overline{f}(t, \overline{x})$ baldintzak betetzen dituenean.

1.1 ARIKETAK

1.- Zein da honako ekuazio diferentzial hauen ordena? Zein dira linealak?

(a) $t^2\dfrac{d^2x}{dt^2} + t\dfrac{dx}{dt} + 2x = \sin t$

(b) $(1+x^2)\dfrac{d^2x}{dt^2} + t\dfrac{dx}{dt} + x = e^t$

(c) $\dfrac{d^4x}{dt^4} + \dfrac{d^3x}{dt^3} + \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + x = 1$

(d) $\dfrac{dx}{dt} + tx^2 = 0$

(e) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \sin(t+x) = \sin t$

2.- Aztertu eskuineko funtzioak honako ekuazio diferentzial hauetarako soluzioak diren:

(1) $x' - 2tx = 1$; $\quad x = e^{t^2}\int_0^t e^{-s^2}ds + e^{t^2}$

(2) $t^2x'' + 5tx' + 4x = 0$, $\quad (t > 0)$; $\quad x = t^{-2}$, $\quad x = t^{-2}\ln t$.

(3) $x'^2 - tx' + x = 0$; $\quad x = ct - c^2$, $\quad x = 3(t-3)$, $\quad x = \frac{t^2}{4}$

(4) $x'' = 1 + x'^2$; $\quad x + \ln(\cos(t+B)) = A$, $x = 1 + \ln(\sec t)$

3.- Kalkula itzazu r-ren balioak $x = e^{rt}$ tipoko funtzioak honako ekuazio diferentzial hauen soluzioak izan daitezen: (1) $\quad x' + 2x = 0$; $\quad$ (2) $\quad x'' + x' - 6x = 0$; $\quad$ (3) $\quad x''' - 3x'' + 2x' = 0$

4.- Froga ezazu $x^2 + t - 3 = 0$ ekuazioa $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{2x}$ ekuazio diferentzialaren soluzioa dela (soluzio inplizitua).

5.- Froga ezazu $tx^3 - tx^3\sin t = 1$ ekuazioa

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(t\cos t + \sin t - 1)x}{3(t - t\sin t)}$$

ekuazio diferentzialaren soluzio (inplizitua) dela.

6.- Kalkula itzazu r-ren balioak $x = t^r$ $(t > 0)$ erako funtzioak honako ekuazio diferentzial lineal hauen soluzioak izan daitezen:

(a) $t^2x'' + 4tx' + 2x = 0$; $\quad$ (b) $\quad t^2x'' - 4tx' + 4x = 0$.

7.- Integrazio-metodoak erabiliz, kalkula itzazu honako ekuazio diferentzial hauen soluzio orokorrak:

$tx' = 1$

$x' = \arcsin t$

$(1+t^3)x' = t$

$txx' = x - 1$

$t^5x' + x^5 = 0$

$tx' = (1-2t^2)\tan x$

$x' = 2tx$

$x' \sin x = t^2$

$x' + x\tan t = 0$

$x' - x\tan t = 0$

$(1+t^2)dx + (1+x^2)dt = 0$

$x' - 6tx = 3t$

$x' + x\cos t = (\sin t)(\cos t)$

$\frac{1}{t}x' - \frac{2}{t^2}x = t(\cos t)$

$(3x^2+t)dx + (x)dt = 0$

$(2x+t)dx + (2t+x)dt = 0$

$r'(\theta) - 2\sin\theta = 0,$ (r eta θ koordenatu polarrak izanik)

$r'(\theta) + r(\theta) - \tan\theta = 0$

8.- Herri bateko populazioaren batez besteko hazkunde-tasa urteko $\frac{2}{100}$ da. Kalkulatu zenbat urte barru bikoiztuko den gaurko populazioa.

2. Kapitulua

Lehen ordenako ekuazio diferentzialak: metodo elementalak

Lehen ordenako ekuazio diferentzialak honako adierazpen matematiko hauetako edozeinen bidez adieraz daitezke:

$$F(t, x, x') = 0 \quad \text{(orokorra/inplizitua)}$$

$$M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0 \quad \text{(diferentziala)}$$

$$x' = f(t, x) \quad \text{(esplizitua)}.$$

Lehen adibideak. (i) Ekuazio diferentzial errazena

$$x' = f(t)$$

(f funtzio ezaguna izanik) adierazten da; eta ekuazio diferentzial hori ebaztea da f-ren jatorrizko funtzioak aurkitzea. Hau da,

$$x' = f(t) \quad \text{edo} \quad dx = f(t)dt \quad \longrightarrow \quad x(t) = \int f(t)\, dt = \int_a^t f(s)\, ds + C$$

(ii) Beste ekuazio diferentzial erraz bat da aldagai bananduak dituena:

$$x' = f(t)g(x)$$

f funtzioa t aldagaikoa soilik eta g funtzioa x aldagaikoa soilik izanik. Hau da,

$$dx = f(t)g(x)dt \quad \longrightarrow \quad \frac{dx}{g(x)} = f(t)dt, \quad g(x) \neq 0, \text{denean;}$$

berdintzaren atal biak integratuz,

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)dt$$

dugu. Ekuazio diferentzialaren soluzioak, gehienetan, forma inplizituan adierazita izango ditugu.

(iii) Badaude soluzio errealik gabeko ekuazio diferentzialak ere; adibidez:

$$(x'(t))^2 + 1 = 0.$$

Edo soluzio bakarrekoak:

$$(x'(t))^2 + (x(t))^2 = 0$$

ekuazioaren soluzio bakarra $x(t) \equiv 0$ funtzio nulua da.

Oharra. Oro har, existitzen da lehen ordenako ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra, $h(t, x, C) = 0$, ekuazio baten bidez inplizituki definitzen dena, C parametroa hautazko zenbaki erreala izanik (ez dugu beti lortuko ekuazio diferentzialaren soluzioen adierazpen esplizitua).

Eta alderantziz, har dezagun orain parametro bateko ekuazio hau: $g(t, x, C) = 0$; ekuazio horrek, oro har, inplizituki $x(t)$ funtzioen multzo bat definitzen du. Funtzio multzo hori ekuazio diferentzial baten soluzio orokorra izan daiteke. Ekuazio diferentzial hori aurkitzeko, honako urrats hauek jarraituko ditugu:

$g(t, x, C) = 0$ ekuazioaren atalak t-rekiko inplizituki deribatu ondoren lortzen den ekuazioa eta $g(t, x, C) = 0$ ekuazioa erabiliz, C ezabatuko dugu; honela jasoko dugun ekuazio diferentziala $F(t, x, x') = 0$ izendatuko dugu; eta ekuazio diferentzial horren soluzio orokorra $g(t, x, C) = 0$ da (era inplizituan idatzita).

Adibidez, $t^2 + x^2 = C^2$ ekuazioaren bidez adierazitako funtzioak, $t + xx' = 0$ ekuazio diferentzialaren soluzioak direla ikus daiteke; eta $t^2 + x^2 = 2Ct$ ekuazioak definitzen dituen funtzioak $2xtx' = x^2 - t^2$ ekuazio diferentzialaren soluzioak direla.

Aurreko gaian ikusi denez, ekuazio diferentzialaren soluzio baten adierazpide geometrikoari Otx planoan, ekuazio diferentzial horren ≪kurba integrala≫ deritzo.

Adibidez,$(0, 0)$ puntutik igarotzen den $x' = e^t \cos t$ ekuazio diferentzialaren kurba integrala da $x(t) = \frac{1}{2}e^t(\sin t + \cos t) - \frac{1}{2}$ funtzioaren adierazpide geometrikoa.

Jarraian ikusiko dugu nola erabil daitezkeen ekuazio diferentzialak kurba-familien ibilbide ortogonalak kalkulatzeko.

2.1 Kurba-familia baten ibilbide ortogonalak

Kurba-familia baten ibilbide ortogonalak kalkulatzeko metodo bat ikusiko dugu. Horrela esaten zaio ebaki-puntu bakoitzeko kurba-familia guztien ortogonala den kurba bakoitzari.

Koordenatu kartesiarretan

Ibilbide ortogonalak (koordenatu kartesiarrez) kalkulatzeko, honako urrats hauek jarraituko ditugu:

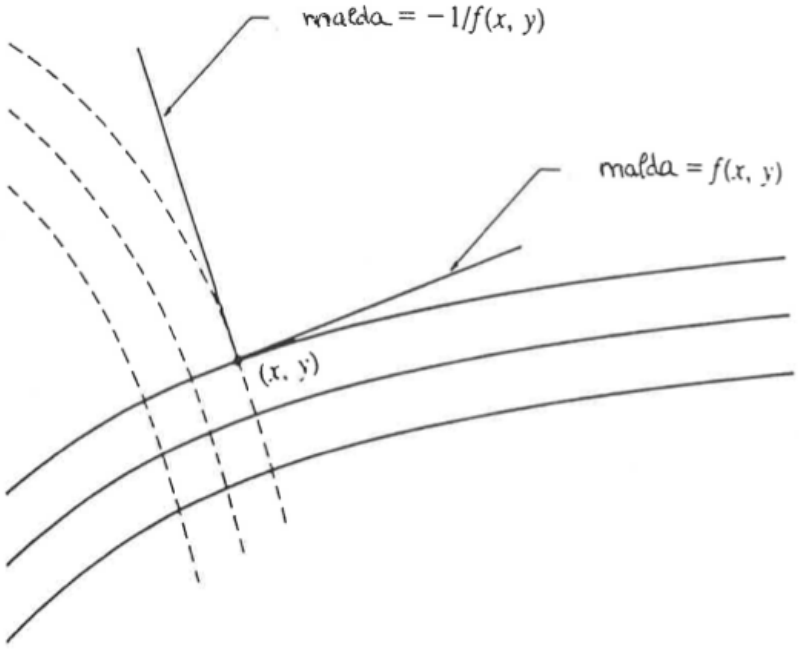
(i) Abiapuntua, emandako kurba-familiaren ekuazio inplizitua: $g(t, x, C) = 0$

(ii) Lortu kurba-familia horren ekuazio diferentziala: $F(t, x, x') = 0$.

(iii) Ibilbide ortogonalen ekuazio diferentziala: $F(t, x, -\frac{1}{x'}) = 0$ da.

(iv) Azken ekuazio diferentziala ebatziz, ibilbide ortogonalen ekuazio inplizitua: $h(t, x, C) = 0$ lortuko dugu.

Aurreko puntuak jarraituz, froga ezazu $t^2 + x^2 = C^2$ ekuazioko kurba-familiaren ibilbide ortogonalak $x = C_1 t$ ekuazioko kurbak direla, C_1 hori hautazko konstante erreala izanik.



Koordenatu polarretan. Koordenatu polarretan adierazitako funtzio baten deribatuaren esangura geometrikoa: Izan bitez (θ, r) planoko koordenatu polarrak eta izan bedi $r(\theta)$ funtzio bat; funtzio honen adierazpide geometrikoa kurba bat da. Finka dezagun kurbako puntu bat: $P(\theta, r)$, eta $\Psi(\theta, r)$ izendatuko dugu P puntuan erradio-bektoreak eta kurbako zuzen ukitzaileak osatzen duten angelua.

$\Delta\theta \longrightarrow 0$ denean,

$$\tan\Psi = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \Psi\right) \approx \frac{r\sin\Delta\theta}{\Delta r} = \frac{r}{\Delta r/\Delta\theta}\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta} \longrightarrow \frac{r(\theta)}{r'(\theta)}.$$

Bestalde, $r = r(\theta)$ eta $r = r_1(\theta)$ ekuazioetako bi kurba P puntuan ortogonalak direnean, puntu horretako Ψ eta Ψ_1 angeluek $\Psi = \Psi_1 + \frac{\pi}{2}$ berdintza egiaztatzen dutenez, honako berdintza hau egiaztatzen dute:

$$(\tan\Psi_1).(\tan\Psi) = -1;$$

beraz, $\frac{r}{{r'}_1}.\frac{r}{r'} = -1$; eta ondorioz, deribatuen arteko baldintza ${r'}_1 = -\frac{r^2}{r'}$ da puntu horretan.

Hori dela eta, koordenatu polarrez emandako kurba-familia baten ibilbide ortogonalak kalkulatzeko, honako urrats hauek jarraituko ditugu:

(i) Abiapuntua hasierako kurba-familiaren ekuazio inplizitua: $g(\theta, r, C) = 0$.

(ii) Lortu aurreko kurba-familiaren ekuazio diferentziala: $F(\theta, r, r') = 0$.

(iii) Ibilbide ortogonalen ekuazio diferentziala: $F(\theta, r, -\frac{r^2}{r'}) = 0$ ekuazioa da.

(iv) Aurreko ekuazio diferentziala ebatziz, ibilbide ortogonalen ekuazio inplizitua: $h(\theta, r, C) = 0$ kalkulatu.

Aurreko puntuak jarraituz, ikusten da hau dela $r = C(1 - \sin\theta)$ kurba-familiaren ekuazio diferentziala:

$$\frac{r}{r'} = \frac{\sin\theta - 1}{\cos\theta};$$

familia ortogonalaren ekuazio diferentziala

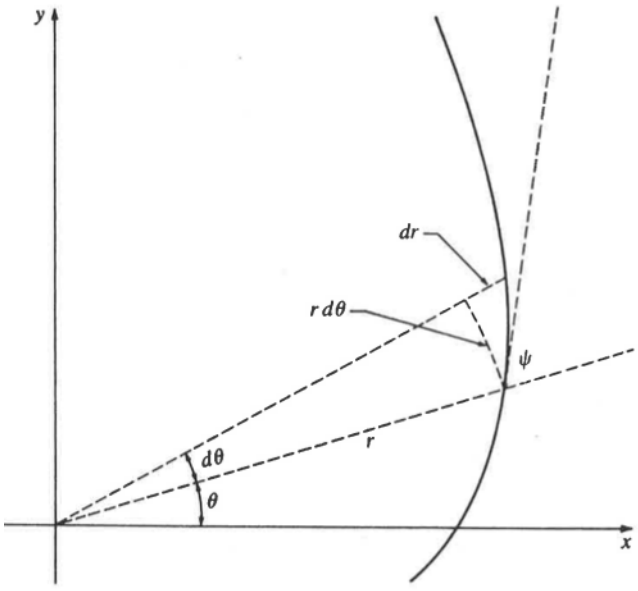
$$\frac{r'}{r} = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}$$

da, eta ebatziz, ibilbide ortogonalen ekuazioa: $r = C_1(1 + \sin\theta)$ lortzen dugu, C_1 hori parametroa izanik.

1. teorema. *Izan bedi* $x' = f(t,x)$ *ekuazio diferentzial esplizitua.* f *eta* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *funtzioak* $P_0(t_0,x_0)$ *puntuaren ingurune batean jarraituak badira, badago funtzio bakar bat,* $x(t)$*, ekuazio diferentziala egiaztatzen duena, eta* $t = t_0$ *denean* x_0 *balioa (hots,* $x(t_0) = x_0$*) hartzen duena.*

Teoremaren esanahi geometrikoa honakoa da: aurreko teoremaren hipotesiak egiaztatzen direnean, Otx planoan $P_0(t_0,x_0)$ puntutik ekuazio diferentzialaren kurba integral bakar bat igarotzen da.

Nola hurbil daiteke puntu batetik igarotzen den kurba bakar hori? Eulerrek lortu zuen hurbilketa geometriko sinple bat. Eulerren poligonala esaten zaio, eta poligonal horren kalkulua deribatuaren esanahi geometrikoan oinarritzen da.



2.2 Lehen ordenako ekuazio diferentzialen kurba integralen kalkulua (metodo kualitatiboa)

Izan bedi $x' = f(t,x)$ ekuazio diferentziala ($f : D \subset R^2 \longrightarrow R$), eta demagun D multzoko edozein puntutatik kurba integral bakarra pasatzen dela. Gure helburua, $x' = f(t,x)$ ekua-

zio diferentzialaren kurba integralak aurkitzea da, f funtzioaren propietateak aztertuz eta ekuazio diferentziala analitikoki ebatzi gabe.

Hasteko, ekuazio diferentzialaren kurba isoklinoen definizioa ikusiko dugu. Izan bedi α zenbaki erreal bat. $f(t,x)=\alpha$ ekuazioko kurbari $x'=f(t,x)$ ekuazio diferentzialaren kurba isoklino deritzo (α-ri dagokiona).

$f(t,x)=\alpha$ kurba isoklinoaren puntu guztietatik kurba integral bana igarotzen da, eta kurba integralen malda α da puntu horietan.

$f(t,x)=\alpha$ kurba isoklino bakoitzaren gainean α maldako zuzenki txiki batzuk marrazten badira, ekuazio diferentzialaren norabide-eremua lortuko dugu.

Kurba isoklinoak eta, ondorioz, ekuazio diferentzialaren norabide-eremua erabiliko dira $x'=f(t,x)$ ekuazio diferentzialaren kurba integralak lortzeko.

$x'=f(t,x)$ ekuazio diferentzialaren kurba integralen adierazpide geometrikoak lortzeko, baliagarriak izan daitezke honako puntu hauek:

(i) Ekuazio diferentzialaren kurba integral horizontalak (soluzio konstanteak) bilatu.

(ii) Kurba isoklino batzuk aurkitu. Norabide-eremuko zuzenki batzuk marraztu. Aztertu kurba isoklinoren bat kurba integrala ote den.

(iii) Kurba integralak zein eremutan diren gorakorrak (edo beherakorrak) kalkulatu.

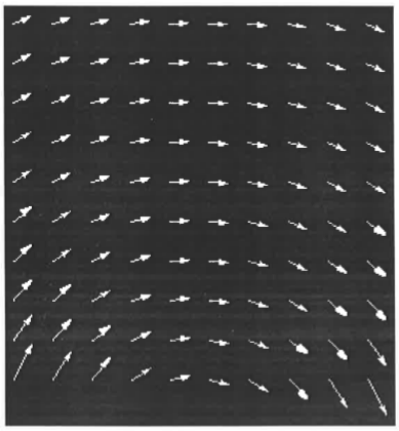
(iv) Kurba integralen inflexio-puntuak eta konkabotasun-eremuak aurkitu.

(v) Kurba integralen simetriak aztertu:

* $f(t,x)=-f(-t,x) \longrightarrow x=x(t)$ soluzioa Ox ardatzarekiko simetrikoa da.
* $f(t,x)=-f(t,-x) \longrightarrow x=x(t)$ soluzioa Ot ardatzarekiko simetrikoa da.
* $f(t,x)=f(-t,-x) \longrightarrow x=x(t)$ soluzioa jatorriarekiko simetrikoa da.

Adibideak. a) Izan bedi $x'=-\frac{t}{x}$. Isoklinoak $-\frac{t}{x}=k$ dira, hau da, $x=-\frac{t}{k}$, non k ez-nulua denean jatorritik pasatzen diren kurbak baitira. Baldin $k=0$ bada, $t=0$ zuzen bertikala da isoklinoa. $f(t,x)=-\frac{t}{x}$-k simetria guztiak dituenez, soluzioak simetrikoak izango dira bi ardatzekiko eta jatorriarekiko. Irudia begiratuz, jatorrian zentratutako zirkunferentziak

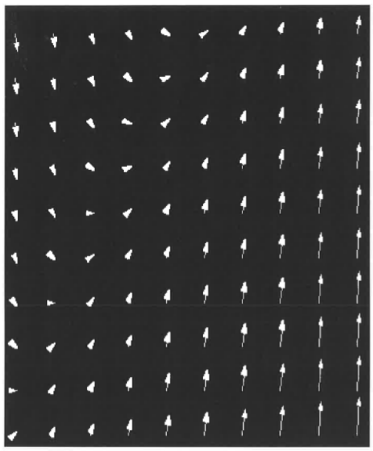
direla ikus dezakegu.



b) Izan bedi $x' = 2t - x$. Kasu honetan ez dago simetriarik. Isoklinoak $2t - x = k$ dira, hau da, $x = 2t - k$ zuzenak, $x = 2t$ zuzenaren paraleloak. $x = 2t - 2$ isoklinoa ere soluzioa da. Soluzio hauek gorakorrak dira $x > 2t$ planoerdian eta beherakorrak $x < 2t$ planoerdian. $x = 2t$ zuzenaren gainean deribatua zero denez, soluzioen minimo lokalak daude. Horrez gain, ekuazio diferentziala deribatuz,

$$x'' = 2 - x' = 2 - 2t + x,$$

$x = 2t - 2$ zuzena ganbiltasun desberdinak dituzten eremuek banatzen dute: $x > 2t - 2$ planoerdian ahurrak dira, eta $x < 2t - 2$ planoerdian ganbilak edo ahurrak.



2.3 Lehen ordenako ekuazio diferentzialak ebazteko metodo analitikoak

2.3.1 Aldagai bananduetako ekuazio diferentziala

Honako ekuazio diferentziala honi,

$$x'(t) = f(t)g(x),$$

aldagai bananduetako ekuazio diferentziala esaten zaio. ξ puntuan $g(\xi) = 0$ denean, $x(t) = \xi$ funtzio konstantea ekuazio diferentzialaren soluzioa da. $g(x) \neq 0$ denean, aldiz,

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)dt$$

integral mugagabeen arteko ekuazioak emandako ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra adieraziko du, forma inplizituan.

Eta $x(\tau) = \xi$ baldintza betetzen duen ekuazio diferentzialaren $x(t)$ soluzio partikularra honako forma hauetan adieraz daiteke, integral mugatuak erabiliz: $\displaystyle\int_{\xi}^{x} \frac{dr}{g(r)} = \int_{\tau}^{t} f(s)ds.$

Adibidea. Izan bedi $x' = \dfrac{t^2}{1+x^2}$, orduan

$$\int (1+x^2)\,dx = \int t^2\,dt \quad \text{eta, integratuz,} \quad x + \frac{x^3}{3} = \frac{t^3}{3} + C$$

ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra (inplizitua) lortzen da.

Banandu daitezkeen aldagaietako ekuazio diferentzialak. Banandu daitezkeen aldagaietako ekuazio diferentzial mota bi aztertuko ditugu:

(i) $x' = f(at + bx + c)$:

$$z = at + bx + c \to \frac{dz}{dt} = z' = a + bx' = \frac{dz}{a + bf(z)} = dt\ .$$

Adibidea. Izan bedi $x' = \dfrac{a^2}{(t+x)^2}$, orduan,

$$z = t + x \ \longrightarrow\ z' = 1 + x' = 1 + \frac{a^2}{z^2} \ \longrightarrow\ z' = \frac{z^2 + a^2}{z^2} \ \longrightarrow\ \frac{z^2\,dz}{z^2 + a^2} = dt \ \longrightarrow$$

$$z - a\arctan\frac{z}{a} = t + C \ \longrightarrow\ t + x - a\arctan\frac{t+x}{a} = t + C \ \longrightarrow\ x - a\arctan\frac{t+x}{a} = C.$$

(ii) $x' = f(\frac{x}{t})$:
$z = \frac{x}{t}$ aldaketa eginez, aldagai bananduetako ekuazio diferentziala lortuko dugu, $z = z(t)$ funtzio ezezagunerako.

2.3.2 Ekuazio diferentzial homogeneoa

$f(t,x)$ funtzioa zero mailako funtzio homogeneoa denean, $x' = f(t,x)$ ekuazio diferentzial esplizitua ekuazio diferentzial homogeneoa dela esaten da. Modu berean, $M(t,x)$ eta $N(t,x)$ funtzioak homogeneotasun-maila bereko funtzio homogeneoak direnean, $M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$ ekuazio diferentziala ekuazio diferentzial homogeneoa dela esaten da (definizio hau eta aurrekoa baliokideak dira).

Ekuazio diferentzial homogeneoetan

$$z = \frac{x}{t}$$

aldaketa eginez, $z = z(t)$ funtzio ezezagun berrirako aldagai bananduetako ekuazioa lortuko dugu. Ekuazio diferentzial horrek kalkulu aldakorrean eta brakistokronean ditu aplikazioak.
Adibidea. Izan bedi $x' = 1 - \dfrac{t}{x}$. Aldagai-aldaketa eginez,

$$z = \frac{x}{t} \implies x = tz \implies x' = z + tz' \implies 1 - \frac{1}{z} = z + tz' \implies z' = \frac{z - 1 - z^2}{zt} \implies$$
$$\frac{z\,dz}{z - 1 - z^2} = \frac{dt}{t} \implies \frac{1}{2}\ln|z^2 - z + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2z-1}{\sqrt{3}} = -\ln|t| + C$$

eta aldaketa deseginez, emandako ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra lortuko dugu.

Homogeneo bihur daitezkeen ekuazio diferentzialak

Izan bedi $x'(t) = f\left(\dfrac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right)$ lehen ordenako ekuazio diferentziala, (a_1, b_1) eta (a_2, b_2) bektoreak linealki independenteak izanik. Orduan,

$$\begin{cases} a_1 t + b_1 x + c_1 = 0 \\ a_2 t + b_2 x + c_2 = 0 \end{cases}$$

sistemaren soluzioa (t_0, x_0) bada, $t = s + t_0, x = y + x0$ aldaketa eginez, ekuazio diferentzial homogeneoa lortuko dugu $y = y(s)$ funtzio ezezagunerako,

$$\frac{dy}{ds} = f\left(\frac{a_1 s + b_1 y}{a_2 s + b_2 y}\right).$$

Adibidea. Izan bedi $x' = \dfrac{t-x+5}{t+x-1}$ ekuazio diferentzialа. Aurreko pausoak jarraituz,

$$\begin{cases} t-x+5=0 \\ t+x-1=0 \end{cases} \implies t=-2,\ x=3 \implies \begin{cases} t=s-2 \\ x=y+3 \end{cases} \implies \frac{dy}{ds} = \frac{s-y}{s+y}$$

$$z=\frac{y}{s} \implies y=sz \implies y'=z+sz'=\frac{1-z}{1+z} \implies z'=\frac{1-2z-z^2}{s(1+z)} \implies$$

$$\frac{(1+z)\,dz}{1-2z-z^2}=\frac{ds}{s} \implies \frac{1}{2}\ln|z^2+2z-1| = -\ln|s|+C \implies s^2(z^2+2z-1)=C_1$$

eta aldaketa biak deseginez, emandako ekuazioaren soluzio orokorra lortuko dugu (era inplizituan):

$$(x-3)^2+2(x-3)(t+2)-(t+2)^2=C.$$

2.3.3 Ekuazio diferentzial zehatza

$M(t,x)dt+N(t,x)dx=0$ ekuazio diferentziala zehatza dela esaten da (t,x) aldagaiko funtzio bat $U(t,x)$ existitzen bada, zeinaren diferentzial osoa $dU(t,x)=M(t,x)dt+N(t,x)dx$ baita. Kasu honetan, emandako ekuazio diferentziala

$$dU(t,x)=0$$

adieraz daiteke, eta hauxe da ekuazio diferentzial horren soluzio orokorra:

$$U(t,x)=C, \quad C \text{ hautazko konstantea izanik.}$$

Aldagai anitzeko kalkuluan frogatzen denez, $\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial M}{\partial x}$ bada, existituko da $U(t,x)$ funtzio bat $\frac{\partial U}{\partial t}=M$ eta $\frac{\partial U}{\partial x}=N$ baldintzak egiaztatzen dituena, eta kasu horretan $M(t,x)dt+N(t,x)dx=0$ ekuazio diferentziala zehatza da. Astronomian eta radioteleskopioen diseinuan ditu aplikazioak.

Adibidea. Izan bedi $x'=\dfrac{tx^2-\cos t\sin t}{x(1-t^2)}$. Diferentzialak erabiliz:

$$x(1-t^2)\,dx+(\cos t\sin t-tx^2)\,dt=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}=-2tx=\frac{\partial N}{\partial t}$$

denez, ekuazio diferentzial zehatza da eta funtzio potentzial bat, U, aurkitu behar dugu:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \cos t \sin t - tx^2 \implies U(t,x) = \frac{1}{2}\sin^2 t - x^2\frac{t^2}{2} + g(x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -xt^2 + g'(x) = x - xt^2 \implies g'(x) = x \implies g(x) = \frac{x^2}{2} + C \implies$$

$$U(t,x) = \frac{\sin^2 t}{2} - \frac{x^2t^2}{2} + \frac{x^2}{2}.$$

Beraz, honako hau da ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra:

$$\frac{1}{2}\sin^2 t - \frac{x^2t^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C.$$

Integrazio-faktoreak

Izan bedi $M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$ ekuazio diferentzial ez-zehatza. Existitzen bada $u(t,x)$ funtzio bat, non

$$u(t,x)M(t,x)dt + u(t,x)N(t,x)dx = 0$$

ekuazio diferentzial zehatza dena, $u(t,x)$ hori hasierako ekuazioaren integrazio-faktorea dela esaten da. Integrazio-faktore bat ezagutzen dugunean, $u(t,x)M(t,x)dt + u(t,x)N(t,x)dx = 0$ ezagutzen dugu, eta horren soluzio orokorra da hasierako ekuazio ez-zehatzaren soluzio orokorra.

Ekuazio diferentzial baten integrazio-faktorea lortzea, oro har, ez da problema erraza izango. $u(t,x)$ lortzeko definizioan ikusi dugun deribatu partzialen arteko berdintza da deribatu partzialetako ekuazio diferentziala, eta ez dugu ezagutzen hori nola ebatz daitekeen. Bestalde, ez dakigu integrazio-faktorerik existituko den ere.

Aurrekoa dela eta, bilatuko dira soilik era bereziko integrazio-faktoreak: $u = u(x)$, $u = u(t)$, $u = u(t+x)$, $u = u(\frac{t}{x})$, $u = u(tx), \ldots$

$*$ $u(t,x) = u(t)$ kasuan, ekuazioaren integrazio-faktorea izateko u horrek honako baldintza hau bete beharko du:

$$\frac{du}{dt}N + u\frac{\partial N}{\partial t} = u\frac{\partial M}{\partial x} \to \frac{1}{u}\frac{du}{dt} = \frac{1}{(-N)}\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}\right) = g(t).$$

$**$ $u(t,x) = u(x)$ kasuan,

$$u\frac{\partial N}{\partial t} = u\frac{\partial M}{\partial x} + M\frac{du}{dx} \to \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}\right) = h(x).$$

$***$ Aurkitu u-k egiaztatu behar dituen baldintzak, adibidez, $u = u(tx)$, $u = u(t+x)$ kasuetan.

Adibidea. Frogatu $u(t,x) = \dfrac{1}{tx^2}$ funtzioa $(x^2+xt)\,dt - t^2\,dx = 0$ ekuazio diferentzialaren integrazio-faktorea dela, eta ebatzi ekuazioa.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{-t^2}{tx^2}\right) = -\frac{1}{x^2} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2+xt}{tx^2}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

denez, u hori integrazio-faktorea da.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{t} + \frac{1}{x} \implies U(t,x) = \ln|t| + \frac{t}{x} + g(x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{t}{x^2} + g'(x) = -\frac{t}{x^2} \implies g'(x) = 0 \implies g(x) = C \implies U(t,x) = \ln|t| + \frac{t}{x}$$

eta honako hau da emandako ekuazioaren soluzio orokorra:

$$\ln|t| + \frac{t}{x} = C.$$

Adibidea. Izan bedi $x' = -\dfrac{2tx^4e^x + 2tx^3 + x}{t^2x^4e^x - t^2x^2 - 3t}$. $u = u(x)$ motako integrazio-faktore bat duen aztertu nahi dugu:

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)$$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{(2tx^4e^x - 2tx^2 - 3) - (8tx^3e^x + 2tx^4e^x + 6tx^2 + 1)}{2tx^4e^x + 2tx^3 + x} = -\frac{4}{x}.$$

Lortutako adierazpena x-ren mendekoa soilik denez, $u = u(x)$ motako integrazio-faktorea dago:

$$\ln|u| = -4\ln|x| \implies u(x) = \frac{1}{x^4}$$

Ekuazio zehatza:

$$\left(2te^x + \frac{2t}{x} + \frac{1}{x^3}\right)dt + \left(t^2e^x - \frac{t^2}{x^2} - \frac{3t}{x^4}\right)dx = 0.$$

Emandako ekuazioaren soluzio orokorra:

$$t^2e^x + \frac{t^2}{x} + \frac{t}{x^3} = C.$$

2.3.4 Ekuazio diferentzial linealak

Izan bedi

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t), \tag{1}$$

hemen $a, b : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ bi funtzio jarraitu izanik. b funtzioa I tartean funtzio nulua denean, ekuazio diferentzial lineal homogeneoa dela esaten da; funtzio nulua ez denean, ekuazio diferentzial lineal ez-homogeneoa (edo betea).

Ekuazio lineal homogeneoa,

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x, \tag{2}$$

aldagai bananduetakoa da, eta honako hau da bere soluzio orokorra:

$$x = Ce^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}, t_0 \in I \quad \text{izanik.}$$

Bestalde, lehen ordenako ekuazio diferentzial lineala (homogeneoa zein ez-homogeneoa) ebazteko badago metodo elemental bat; ariketetan ikusiko dugu.

Dena den, ekuazio diferentzial linealen kasuan, edozein ordenatakoak izanik, soluzioak egitura aljebraiko ezagun bateko elementuak izango dira, eta, horren ondorioz, soluzioen hainbat propietate ezagutuko ditugu ekuazio diferentzial lineala ebatzi aurretik. Jarraian, lehen ordenako ekuazio diferentzial linealen soluzioen propietateak aztertuko ditugu (hurrengo gaian aztertuko dira edozein ordenatako ekuazio diferentzial linealen soluzioen propietateak).

Propietateak.

a) x_1 eta x_2 funtzioak (2) ekuazio lineal homogeneoaren soluzioak badira, edozein α eta $\beta \in \mathbf{R}$ konstanteetarako $\alpha x_1 + \beta x_2$ funtzioa ere (2) ekuazioaren soluzioa da; beraz, (2) ekuazioaren soluzio multzoa espazio bektoriala da.

b) Aldiz, x_1 eta x_2 funtzioak (1) ekuazio ez-homogeneoaren soluzioak badira, $x_1 - x_2$ funtzioa (2) ekuazio homogeneoaren soluzioa izango da. Horren ondorioz, (1) ekuazio ez-homogeneoaren soluzio orokorra lortuko dugu (2)-ren soluzio orokorrari (1)-en soluzio partikular bat gehituz: $x_h + x_p$, x_h, (2)-ren soluzio orokorra eta x_p, (1)-en soluzio partikularra izanik. Ekuazio lineal ez-homogeneoaren soluzio multzoa espazio afina da.

Aurrean ikusi dugu zein den (2) ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren soluzio orokorra (dimentsio bateko espazio bektorial baten adierazlea). (1) ekuazio ez-homogeneoa ebazteko metodo bat aurkituko dugu, soluzioen aipatutako propietateak erabiliz; bi gauza kalkulatu beharko ditugu: (2) ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra eta (1) ekuazio diferentzial lineal ez-homogeneoaren soluzio partikular bat.

Ondorioa. Izan bedi $x_h = Ce^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$ funtzio multzoa (2), $x' = a(t)x$, ekuazio lineal homogeneoaren soluzio orokorra. Jarraian ikusiko dugu beti dagoela (1), $x' = a(t)x + b(t)$, ekuazio lineal ez-homogeneoaren soluzio partikular bat honako egitura hau duena:

$$x_p = C(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds},$$

hemengo $C(t)$ funtzioa kalkulatuko da, x_p-ren balio hori (1) ekuazio lineal ez-homogeneoan ordezkatuz. Horrela eginez, hauxe lortuko dugu:

$$C'(t) = b(t)e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \implies x_p = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \cdot \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-\int_{s_0}^{s} a(z)dz} ds.$$

Mota honetako ekuazioek balio dute arkeologian, Karbono-14 metodoaren bidez datak ezagutzeko eta medikuntzan pertsona bat zein ordutan hil den zehazteko.

Adibidea. $x' + \dfrac{x}{t} = 3t$ ekuazio diferentziala ebatziko dugu, azken metodoa erabiliz:
Ekuazio homogeneoa:

$$x' + \frac{x}{t} = 0 \longrightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dt}{t} \longrightarrow \ln|x| = -\ln|t| + C \longrightarrow x_h = C\frac{1}{t}.$$

Orain $x_p = C(t)\dfrac{1}{t}$,

$$C'\frac{1}{t} - C\frac{1}{t^2} + C\frac{1}{t}\frac{1}{t} = 3t \longrightarrow C' = 3t^2 \longrightarrow C(t) = t^3$$

beraz, $x_p(t) = t^2$ eta emandako ekuazioaren soluzio orokorra honako hau da:

$$x(t) = x_p + x_h = t^2 + C\frac{1}{t}\ , \quad \forall C \in \mathbf{R}.$$

2.3.5 Bernouilli-ren ekuazioa eta Riccati-ren ekuazioa

Bernouilli-ren ekuazioa

$$x' = a(t)x + b(t)x^r, \quad r \neq 0, 1, \qquad a, b : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \text{ jarraituak.}$$

$z = x^{1-r}$ aldaketa eginez, ekuazio lineal bat lortuko dugu $z = z(t)$ funtzio ezezagunerako:

$$x = z^{\frac{1}{1-r}} \to x' = \frac{1}{1-r} z^{\frac{r}{1-r}} z' = a(t) z^{\frac{1}{1-r}} + b(t) z^{\frac{r}{1-r}}$$

$$\frac{1}{1-r} z^{-1} z' = a(t) + b(t) z^{-1} \to z' = (1-r)a(t)z + b(t)(1-r)$$

Adibidea. $x' + 2tx + tx^4 = 0$. Hemen $r = 4$ da.

$$z = x^{-3} \;\to\; z' = -3x^{-4}x' = 3x^{-4}(2tx + tx^4) = 6tx^{-3} + 3t \;\to\; z' = 6tz + 3t.$$

Lehendabizi homogeneoa ebatziko dugu:

$$z' = 6tz \;\to\; \frac{dz}{z} = 6t\,dt \;\longrightarrow\; \ln|z| = 3t^2 + C \;\longrightarrow\; z_h(t) = Ce^{3t^2}.$$

Orain $z_p = C(t)e^{3t^2}$ hartuz,

$$C'e^{3t^2} + C6te^{3t^2} = 6tCe^{3t^2} + 3t \;\longrightarrow\; C' = 3te^{-3t^2} \;\longrightarrow\; C(t) = -\frac{e^{-3t^2}}{2}$$

$$z_p(t) = -\frac{e^{-3t^2}}{2} e^{3t^2} = -\frac{1}{2}.$$

Beraz,

$$z(t) = z_p + z_h = -\frac{1}{2} + Ce^{3t^2}$$

eta aldaketa deseginez,

$$x(t) = z^{-1/3} = \left(Ce^{3t^2} - \frac{1}{2}\right)^{-1/3}, \quad \forall C \in \mathbf{R}.$$

Riccati-ren ekuazioa

$$x' = a(t)x + b(t)x^2 + c(t), \quad a, b, c : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \text{ jarraituak.}$$

Ekuazio honen soluzio partikular bat, x_p, ezagutzen bada,

$$x = x_p + \frac{1}{z}$$

aldaketaren bidez, ekuazio lineal batlortuko dugu $z = z(t)$ funtzio ezezagunerako. Ekuazio hori biologian eta herrialdeen hazkuntzak ikertzeko erabiltzen da.

Adibidea. Ebatzi $x' = 2 - 2tx + x^2$ ekuazioa, $x_p = 2t$ funtzioa soluzio bat dela jakinez.

$$x = 2t + \frac{1}{z} \;\to\; x' = 2 - \frac{z'}{z^2} = 2 - 2t(2t + \frac{1}{z}) + (2t + \frac{1}{z})^2$$

$$\to\; -\frac{z'}{z^2} = \frac{2t}{z} + \frac{1}{z^2} \;\to\; z' = -2tz - 1 \to \ldots$$

2.3.6 Ekuazio diferentzial inplizituak

(i) Izan bedi $F(t,x,x')=0$ ekuazio diferentzial inplizitua. Demagun ekuaziotik x' delakoaren m adierazpen esplizitu ondorioztatzen direla:

$$x'=f_i(t,x), \qquad i=1,\dots,m.$$

Azken adierazpen horiek ekuazio diferentzial esplizituak dira x funtzio ezezagunerako; bere soluzio orokorrak, hurrenez hurren, $G_i(t,x,C)=0,\ i=1,\dots,m$ badira, hasierako ekuazio diferentzial inplizituaren soluzio orokorra

$$G_1(t,x,C)G_2(t,x,C)\cdot\ldots\cdot G_m(t,x,C)=0$$

adieraz daiteke.

Adibidea. $x(x')^2+(t-x)x'-t=0$ ekuazio diferentziala bigarren mailako polinomioa da x' aldagaiarekiko. Hemendik bi ekuazio diferentzial esplizitu ditugu $x(t)$ funtziorako: $x'=1$ eta $x'=-\frac{t}{x}$. Beraz, hauxe da emandako ekuazio diferentzial inplizituaren soluzio orokorra:

$$(x-t-C)(x^2+t^2-C)=0.$$

(ii) $x=f(t,x')$ egiturako ekuazio diferentzialak.

x' hori z izendatuz, $x=f(t,z)$ ekuazioa dugu; t-rekiko deribatuz,

$$z=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Lortutako ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra ($z(t)$ funtzio ezezagunerako) $h(t,z,C)=0$ (C parametroa) bada, ekuazio horrek eta $x=f(t,z)$ ekuazioak osatzen duten sistemaren $x(t)$ soluzioa izango da hasierako ekuazio diferentzialaren soluzioa.

Adibidea. Izan bedi $2(x')^2-2tx'-2x+t^2=0$. Hemendik, hauxe dugu:

$$x=(x')^2-tx'+\frac{t^2}{2}.$$

Orain x', z izendatuz, $x=z^2-tz+\frac{t^2}{2}$ ekuazioa dugu; t-rekiko deribatuko dugu:

$$z=2zz'-z-tz'+t \ \rightarrow\ z'(2z-t)=2z-t$$

eta bi aukera ditugu:

$$z = \frac{t}{2} \;\rightarrow\; x = \left(\frac{t}{2}\right)^2 - t\frac{t}{2} + \frac{t^2}{2} \;\rightarrow\; x = \frac{t^2}{4}$$

$$z' = 1 \;\rightarrow\; z = t + C \;\rightarrow\; x = (t+C)^2 - t(t+C) + \frac{t^2}{2}$$

$$\rightarrow\; x = \frac{t^2}{2} + Ct + C^2$$

(iii) $t = f(x, x')$ erako ekuazio diferentzialak.
x' hori z izendatuz, $t = f(x, z)$ ekuazioa lortuko dugu, eta ekuazio hori x-rekiko deribatuz:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{dx/dt} = \frac{1}{x'} \rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} \rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}$$

dugu. Azken ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra $h(x, z, C) = 0$ (C parametroa) bada, ekuazio honek eta $t = f(x, z)$ ekuazioak osatzen duten sistema erabiliko dugu hasierako ekuazio diferentzial inplizituaren soluzioa, $x(t)$, kalkulatzeko.

Adibidea. Izan bedi $x(x')^2 - 2tx' + x = 0$. Beraz, $t = \dfrac{x(x')^2 + x}{2x'}$. Orain x', z izendatuz, $t = \dfrac{xz^2 + x}{2z}$ dugu. Beraz,

$$z'\frac{x}{z}(z^2 - 1) = 1 - z^2$$

eta hemendik

$$z^2 = 1 \;\rightarrow\; \begin{cases} z = 1 \;\rightarrow\; t = x \\ z = -1 \;\rightarrow\; t = -x \end{cases}$$

$$z' = -\frac{z}{x} \;\rightarrow\; \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x} \;\rightarrow\; \ln|z| = -\ln|x| + C \;\rightarrow\; xz = C$$

$$\rightarrow\; z = \frac{C}{x} \;\rightarrow\; t = x(C/x)^2 + \frac{x}{2(C/x)} = x^2 + \frac{C^2}{2C} \;\rightarrow\; x^2 = C(2t - C).$$

2.4 Bigarren ordenako ekuazio diferentzial berezi batzuk

Hemen, bigarren ordenako $F(t, x, x', x'') = 0$ ekuazio diferentzialaren kasu berezi batzuk aztertuko ditugu; hauek, lehen ordenako ekuazio diferentzialen metodoen bidez ebatziko ditugu, hain zuzen ere, lehen ordenako bi ekuazio diferentzial ebatziz.

(i) Ekuazio diferentzialeko adierazpenean x-rik ez dagoenean: $F(t, x', x'') = 0$.

Kasu honetan, $x' = z$ eginez, $z = z(t)$ funtzio ezezagunerako $F(t, z, z') = 0$ lehen ordenako ekuazioa dugu. Hori ebatziz, $z(t)$ ezagutuko dugu, eta $x'(t) = z(t)$ ekuazio diferentziala ebatziz, hasierako bigarren ordenako soluzioa lortuko dugu.

Adibidea. $tx'' - x' = 3t^2$

$$x' = z \;\rightarrow\; tz' - z = 3t^2 \quad \text{lineala.}$$

$$z' - \frac{z}{t} = 0 \;\rightarrow\; \frac{dz}{z} = \frac{dt}{t} \;\rightarrow\; z_h(t) = Ct.$$

$$z_p(t) = C(t)t \;\rightarrow\; C' = 3 \;\rightarrow\; C = 3t \;\rightarrow\; z_p(t) = 3t^2.$$

Beraz,

$$z(t) = 3t^2 + Ct.$$

$$x' = 3t^2 + Ct \;\rightarrow\; x(t) = t^3 + C_1 t^2 + C_2.$$

(ii) Ekuazio diferentzialeko adierazpenean t-rik ez dagoenean: $F(x, x', x'') = 0$.

Kasu honetan ere $x' = z$ eginez eta x aldagai independentetzat hartuz,

$$x' = z \;\rightarrow\; x'' = \frac{dx'}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} = z\frac{dz}{dx}$$

dugunez,

$$F(x, z, z\frac{dz}{dx}) = 0$$

lehen ordenako ekuazio diferentziala lortuko dugu; ekuazio diferentzial hori ebatziko dugu $z(x)$ soluzioak ezagutzeko, eta, ondoren, $x'(t) = z(x)$ ekuazio diferentziala ebatzi beharko dugu hasierako ekuazioaren soluzioak kalkulatzeko.

Adibidea. $x'' + x = 0$. $x' = z$ eginez eta x aldagai independentetzat hartuz,

$$x' = z \;\rightarrow\; x'' = z\frac{dz}{dx} = zz' \;\rightarrow\; zz' + x = 0 \quad \text{aldagai bananduetakoa,}$$

beraz,

$$zz' = -x \;\rightarrow\; \frac{z^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \;, C > 0, \;\rightarrow\; x^2 + z^2 = C^2 \;\rightarrow\; z = \pm\sqrt{C^2 - x^2}.$$

Aldaketa deseginez:

$$x'(t) = \pm\sqrt{C^2 - x^2} \;\rightarrow\; \frac{dx}{\pm\sqrt{C^2 - x^2}} = dt \;\rightarrow\; \arcsin\frac{x}{C} = \pm t + C_1$$
$$\rightarrow\; x = C\sin(t + C_1).$$

2.5 ARIKETAK

1.- Froga ezazu $x = t^3$ eta $t^2 + 3x^2 = 4$ ekuazioen bidez definitutako γ_1 eta γ_2 kurbak ortogonalak direla ebaki-puntuetan.

2.- Bilatu honako kurba-familia hauen ibilbide ortogonalak:

(1) $tx = c$; (2) $x = \dfrac{ct}{1+t}$; (3) $r = c(1 - \sin\theta)$;

(4) $r = c\cos\theta$; (5) $r^2 = c\cos 2\theta$; (6) $t + x + 1 = ce^t$;

(7) $x^3 = ct^2$; (8) $3tx^2 = 2 + 3ct$.

3.- Izan bedi C planoko kurba bat, eta izendatuko dugu P kurba horretako edozein puntu. Izan bedi P_1, P puntuko kurbaren zuzen normalak eta abzisa-ardatzak duten ebaki-puntua. C kurbaren ezaugarria hauxe da: kurbako edozein P puntutarako, berdinak dira P_1-etik P-ra dagoen distantzia eta P-tik jatorrira dagoena. Kalkula ezazu kurbaren ekuazio diferentziala.

4.- Hauxe da planoko C kurba baten ezaugarria: kurbako edozein P puntutarako, erlazionaturik daude, batetik, P puntuko kurbaren zuzen ukitzaileak eta abzisa-ardatzak osatzen duten angelua, eta bestetik, jatorritik eta P-tik pasatzen den zuzenak eta abzisa-ardatzak osatzen duten angelua: lehena bigarrenaren bikoitza da. Aurkitu kurbaren ekuazio diferentziala.

5.- Har ezazu jatorritik pasatzen diren zuzenen multzoa. Aurki ezazu zuzen horiekin ω angelu konstante (ezagun) batez ebakitzen diren ibilbideen ekuazioa. (Erabili koordenatu polarrak).

6.- Izan bedi C planoko kurba bat, eta izendatuko dugu P kurba horretako edozein puntu. P puntuko kurbaren zuzen ukitzaileak eta koordenatu-ardatzek osatzen duten triangeluaren azalera konstantea da (demagun A izendatzen dugula konstante ezagun hori). Aurkitu kurben ekuazio diferentziala.

7.- Errektangelu bateko lau erpinetatik hiru honela kokaturik daude: Ot ardatzean, jatorrian eta Ox ardatzean. Laugarren erpina lehenengo kuadrantean dago eta $x = x(t)$ kurban zehar mugitzen da. Errektangeluaren azaleraren aldaketa-erritmoa t-rekiko azaleraren proportzio-

nala dela jakinda, kalkula ezazu kurbaren ekuazioa.

8.- Erabili metodo kualitatiboa honako ekuazio diferentzial hauen kurba integralak lortzeko:

(a) $x' = \dfrac{t}{x}$; (b) $x' = t + x$; (c) $x' = (x-1)t$;

(d) $x' = t - x$; (e) $x' = t^2 - x$.

9.-Ebatz itzazue honako ekuazio diferentzial hauek:

(a) $(2xy - \sec^2 x)dx + (x^2 + 2y)dy = 0$

(b) $(1 + e^x y + xe^x y)dx + (xe^x + 2)dy = 0$

(c) $(x + 3x^3 \sin y)dx + (x^4 \cos y)dy = 0, \quad (\mu(x) = \dfrac{1}{x})$

(d) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 3e^x$

(e) $\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x^2} = x\cos x, \quad y(\dfrac{\pi}{2}) = 3$

(f) $(2y - 6x)dx + (3x - 4x^2 y^{-1})dy = 0, \quad (\mu(x,y) = xy^2).$

(g) $(xy + y^2 + x^2)dx - x^2 dy = 0$

(h) $\dfrac{dy}{dx} = y - x - 1 + (x - y + 2)^{-1}$

(i) $\dfrac{dy}{dx} - 5y = -\dfrac{5}{2}xy^3$

(j) $(-3x + y + 6)dx + (x + y + 2)dy = 0$

(k) $yy'' = (y')^2$

(l) $tx^2 x' + x^3 = t\cos t$

(m) $tx' = \sqrt{t^2 + x^2}$

(n) $y' \sin y = (2\cos y - \sin^2 x)\cos x$

(o) $y'' + y'e^y = 0$

(p) $yy'' = (y')^2 - y'$

(q) $y = (1 + y')t + y'^2$

(r) $yy'' = y^2y' + y'^2, \quad y(0) = -\dfrac{1}{2}, \quad y'(0) = 1$

(s) $y'' = y'e^y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

(t) $(t \ln t)y' + y = 3t^3$

(u) $y^2dt = (t^3 - ty)dy$

10.- Froga ezazu $(t^2x^4e^x - t^2x^2 - 3t)dx + (2tx^4e^x + 2tx^3 + x)dt = 0$ ekuazio diferentzialak $u = u(x)$ tipoko integrazio-faktorea duela.

11.- a) Ebatzi $x' + x^2 + (2t + 1)x + 1 + t + t^2 = 0$ ekuazio diferentziala, bere soluzio bat $x = -t$ dela jakinda.

b) Ebatzi $2(\cos t)x' - x^2 = 2\cos^2 t - \sin^2 t$ ekuazio diferentziala, bere soluzio bat $x = \sin t$ dela jakinda.

3. Kapitulua

Ekuazio diferentzial linealak

3.1 Sarrera. Lehendabiziko propietateak

Ekuazio diferentzial linealak garrantzi handiko ekuazio diferentzialak dira, bai matematiketan bai beste zientzietan. Gai honetan ikusiko ditugun teorema gehienetan, n-garren ordenako ekuazio diferentzialeko $x^{n)}$ gaia bera bakarrik agertuko da; hau da, honako adierazpen honetako ekuazio diferentzial linealak aztertuko ditugu:

$$x^{n)} + a_1(t)x^{n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = b(t), \tag{1}$$

$a_i : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, n$ funtzio jarraituak eta $b : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ funtzio jarraitua izanik. (1) ekuazio diferentzial linealean $\forall t \in I,\ b(t) \equiv 0$ denean, lineal homogeneoa dela esaten da. Eta $b(t)$ funtzio nulua ez denean, lineal ez-homogeneoa edo lineal betea dela.

Definizioa. $\frac{d}{dt}$ edo D eta $\frac{d^n}{dt^n}$ edo D^n eragile diferentzialak erabiliz, (1) ekuazioaren honako adierazpen hau dugu:

$$P(t, D)x = b(t),$$

non

$$P(t, D) = D^n + a_1(t)D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(t)D + a_n(t)$$

eragileari polinomio diferentzial eragile baiteritzo eta $P(t, D) : C^n(I) \longrightarrow C(I)$ eragilea lineala baita.

2. teorema. *(Existentziaren eta bakartasunaren teorema). Izan bedi*

$$x^{n)} + a_1(t)x^{n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = b(t) \tag{1}$$

ekuazio diferentziala, $a_i : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$*,* $i = 1, \ldots, n$ *funtzio jarraituak eta* $b : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *funtzio jarraitua izanik, eta izan bitez* $t_0 \in I$ *eta* $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_{n-1} \in \mathbf{R}$*. Funtzio bakar bat,* $x(t)$*, (n aldiz deribagarria) existituko da, (1) ekuazioa egiaztatzen duena, eta,* $t = t_0$ *denean, honako n hastapen-baldintza hauek egiaztatzen dituena:*

$$x(t_0) = \xi_0 \ , \ x'(t_0) = \xi_1 \ , \ldots , \ x^{n-1)}(t_0) = \xi_{n-1}.$$

Oharra. Baldin $a_i(t)$ funtzioren bat jarraitua ez bada, aurreko problemaren soluzioa ez da zertan existitu behar eta, soluzioa egon arren, ez da beti bakarra izango. Adibidez,

$$\begin{cases} t^2\, x'' - 2t\, x' + 2x = 6 \\ x(0) = 3 \ , x'(0) = 1 \end{cases}$$

problemaren soluzioak $x(t) = C\, t^2 + t + 3$ formako funtzio polinomiko guztiak dira (C edozein konstante izanik).

Propietate orokorrak. Izan bitez

$$x^{n)} + a_1(t)x^{n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = b(t), \tag{1}$$

ekuazio diferentziala, $a_i : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $(i = 1, \ldots, n)$ funtzio jarraituak eta $b : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ funtzio jarraitua. Honako hau da (1) ekuazio diferentzialari esleituriko ekuazio lineal homogeneoa:

$$x^{n)} + a_1(t)x^{n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0. \tag{2}$$

(i) Baldin $x_1, x_2 \in C^n(I)$ funtzioak (2) ekuazio lineal homogeneoaren bi soluzio badira, $\forall \alpha, \beta$ konstanteetarako $\alpha x_1 + \beta x_2$ funtzioa ere (2) ekuazioaren soluzioa da. Beraz, (2) ekuazio homogeneoaren soluzio multzoa espazio bektoriala da.

(ii) (2) ekuazio lineal homogeneoa eta $x(t_0) = 0, x'(t_0) = 0, \ldots, x^{n-1)}(t_0) = 0$ $(t_0 \in I)$ hastapen-baldintzak egiaztatzen dituen funtzio bakarra funtzio nulua da ($a_i : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $(i = 1, \ldots, n)$ funtzio jarraituak direnean).

(iii) Baldin $x_1, x_2 \in C^n(I)$ funtzioak (1) ekuazio ez-homogeneoaren soluzioak badira, $x_1 - x_2$ funtzioa (2) ekuazio homogeneoaren soluzioa da. Beraz, (1) ekuazio ez-homogeneoaren soluzio orokorra $x(t)$, $x_p(t) + x_H(t)$ forman adieraz daiteke, non x_H delakoa ekuazio homogeneoaren soluzio orokorra eta x_p delakoa ekuazio ez-homogeneoaren soluzio partikular bat batira.

3.2 Ekuazio diferentzial lineal homogeneoak

Izan bedi

$$x^{n)} + a_1(t)x^{n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0, \tag{2}$$

edo

$$P(t, D)x = 0,$$

hemen $a_i : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, n$, funtzio jarraituak dira. Ikusi dugunez, (2) ekuazioaren soluzio multzoa, E, espazio bektoriala da. ($E \subset C^n(I) \subset C^{n-1}(I)$). E multzoko dimentsioa aurkitu nahi dugu. Dakigunez, $x_1, x_2, \ldots, x_k \in C^{n-1}(I)$ funtzioak linealki independenteak dira, baldin eta $C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_kx_k = 0$ ($C_1, C_2, ..., C_n$ konstante errealak, eta $0 \in E$ funtzio nulua) izateak $C_1 = C_2 = ... = C_n = 0$ inplikatzen badu.

Adibideak.

a) $\{1, t, t^2, \ldots, t^k\}$ familia $C^{\infty)}(\mathbf{R})$ espazioaren sistema aske bat da.

b) $r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbf{R}$ zenbakiak denak binaka ezberdinak badira, orduan $\{e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \ldots, e^{r_k t}\}$ multzoa $C^{\infty)}(\mathbf{R})$ espazioaren sistema askea da.

c) $\{\sin t, \cos t\}$ funtzio multzoa $C^{\infty)}(\mathbf{R})$ espazioko sistema askea da.

Ondoren, E espaziorako independentzia linealaren ezaugarri bat emango dugu. Horretarako, honako definizio honetatik hasiko gara:

Definizioa. $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset C^{k-1}(I)$ funtzioen wronskiarra, $W(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, honako determinante honen bidez definitzen da:

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ x_1' & x_2' & \ldots & x_k' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ {x_1}^{k-1)} & x_2^{k-1)} & \ldots & {x_k}^{k-1)} \end{vmatrix}.$$

Ikusten denez, wronskiarra t aldagaiaren funtzioa da.

1. lema. *$x_1, x_2, \ldots, x_k \in C^{k-1}(I)$ funtzioak linealki independenteak ez badira, beren wronskiarra, $W(x_1, x_2 ... x_k)$, funtzio nulua da (hau da, $(W(x_1, x_2, \ldots, x_k)(t) = 0 \ , \quad \forall t \in I)$).*

Proposizio baliokidea: $t_0 \in I$ puntu batean $W(x_1, x_2, \ldots, x_k)(t_0) \neq 0$ bada, orduan $x_1, x_2, \ldots, x_k \in C^{k-1}(I)$ funtzioak linealki independenteak dira.

3. teorema. *Izan bitez $x_1, x_2, \ldots, x_n$,*

$$x^{n)} + a_1(t)x^{n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0,$$

ekuazio diferentzial linealaren soluzioak, eta $a_i : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, n$ funtzio jarraituak; hots, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$. Orduan, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soluzioak linealki independenteak dira, baldin eta soilik baldin,

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n)(t) \neq 0 \ , \quad \forall t \in I.$$

4. teorema. *(Abel-Liouvillen formula). Izan bitez $x_1, x_2, \ldots, x_n$,*

$$x^{n)} + a_1(t)x^{n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0,$$

ekuazio diferentzial linealaren soluzioak, $a_i : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, n$ funtzio jarraituak eta $t_0 \in I$. Edozein $t \in I$ puntutarako honako formula hau egiaztatzen da:

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n)(t) = W(x_1, x_2, \ldots, x_n)(t_0) \ e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s) \ ds}.$$

Ondorioz, $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)(t) = 0, \forall t \in I$ edo $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)(t) \neq 0, \quad \forall t \in I$.

5. teorema. *(Dimentsioaren teorema). Izan bedi*

$$x^{n)} + a_1(t)x^{n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0$$

ekuazio diferentzial lineal homogeneoa eta $a_i : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, n$ funtzio jarraituak. Ekuazioaren soluzio multzoa, E, n dimentsioko espazio bektoriala da.

n soluzio independenteez osatutako edozein multzori E espazioaren oinarrizko sistema edo funtsezko sistema deritzo. Beraz, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oinarrizko sistema bat bada, ekuazioaren soluzio orokorra, x_H, honela adieraziko da:

$$x_H(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + \cdots + C_nx_n(t) \ , \quad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbf{R}.$$

3.2.1 Ordenaren beherapena ekuazio lineal homogeneoetan

Bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal homogeneoa ebatz dezakegu lehen ordenako bi ekuazio lineal homogeneo ebatziz. Ordena, n, 2 baino handiagoa denean errepikatu beharko da metodoa n aldiz.

Izan bedi

$$x^{n)} + a_1(t)x^{n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0, \tag{2}$$

ekuazio diferentzial lineal homogeneoa eta $a_i : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, n$ funtzio jarraituak.

Demagun (2) ekuazioaren soluzio bat ezagutzen dela: x_1. Orduan,

$$x = x_1\, z$$

aldaketa eginez, deribatuetarako berdintza hauek ditugu:

$$x' = x_1' z + x_1 z'$$

$$x'' = x_1'' z + 2x_1' z' + x_1 z''$$

$$\cdots\cdots$$

$$x^{k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x_1^{k-i)}\ z^{i)}.$$

Emaitza horiek (2) ekuazio diferentzialean ordezkatuz eta ordenatuz, honako ekuazio diferentzial hau lortuko dugu $z(t)$ funtzio ezezagunerako:

$$x_1 z^{n)} + (a_1(t)x_1 + nx_1')z^{n-1)} + \cdots + (x_1^{n)} + a_1(t)x_1^{n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x_1' + a_n(t)x_1)z = 0$$

eta x_1 funtzioa (2) ekuazio diferentzialaren soluzioa denez, z-ren koefizientea zero da azken ekuazioan. $z' = y$ idatziz,

$$x_1 y^{n-1)} + \cdots + (\quad)y = 0$$

$n - 1$ ordenako ekuazio diferentziala dugu.

Demagun azken ekuazio diferentzialaren soluzioak, $y(t)$, ezagutzen direla; horiek t-rekiko integratuz aurreko ekuazioaren soluzioak, $z(t)$, lortuko dira, eta hauek $x_1(t)$ faktorearekin biderkatuz, hasierako (2) ekuazio diferentzialaren soluzioak jasoko dira. (x_1 soluzio partikularra lortzeko, funtzio errazekin probatuko dugu: polinomioak, esponentzialak...).

Bi dimentsiotan, $n = 2$, metodo hau oso erabilgarria da, ebazten dakigun 1 ordenako ekuazio diferentzial batera murrizten garelako. Izan bedi

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0$$

eta x_p soluzio partikular bat. Soluzio multzoa bi dimentsiotako espazio multzoa denez, problema ebazteko beste soluzio independente bat behar dugu. Ordenaren beherapena erabiliko dugu orain.

Izan bedi $x = x_p\ z$. Deribatuz,

$$x' = x_p'z + x_pz' \quad , \quad x'' = x_p'' + 2x_p'z' + x_pz'',$$

ekuazioan ordezkatuz,

$$x_p'' + 2x_p'z' + x_pz'' + a_1(t)(x_p'z + x_pz') + a_2(t)x_pz = 0$$

eta berrantolatuz,

$$x_pz'' + (2x_p' + a_1(t)x_p)z' + (x_p'' + a_1(t)x_p' + a_2(t)x_p)z = 0,$$

hau da,

$$x_pz'' + (2x_p' + a_1(t)x_p)z' = 0.$$

Bigarren aldaketa egitean

$$z' = y \quad \Longrightarrow \quad x_py' + (2x_p' + a_1(t)x_p)y = 0$$

eta azken hau lehen ordenakoa eta lineala da, beraz,

$$\frac{dy}{y} = \left(-a_1(t) - \frac{2x_p'}{x_p}\right)dt \implies \ln|y| = \int_{t_0}^{t} -a_1(s)ds - 2\ln x_p + C,$$

hau da,

$$y = \frac{1}{x_p^2}e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\ ds} \implies z' = \frac{1}{x_p^2}e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\ ds}.$$

Ez dugu konstanterik jarriko soluzio bat bilatzen ari garelako. Ikus dezagun orain x_p-rekiko independentea dela. Horretarako, wronskiarra aztertuko dugu:

$$W(x_p, x_pz) = \begin{vmatrix} x_p & x_pz \\ x_p' & (x_p'z + x_pz') \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_p & x_pz \\ x_p' & x_p'z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_p & x_pz \\ 0 & x_pz' \end{vmatrix} = 0 + x_p^2z' =$$

$$= x_p^2 \frac{1}{x_p^2} e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)\ ds} = e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)\ ds} \neq 0.$$

Adibidea. Aurki ezazu $(1+t^2)x'' + tx' - x = 0$ ekuazioaren soluzio orokorra, $x_p(t) = t$ soluzio partikular bat dela jakinik.

Bila dezagun beste soluzioa $x = tz$, hau deribatuz:

$$x' = z + tz', \qquad x'' = 2z' + tz''.$$

Ekuazioan ordezkatuz,

$$(1+t^2)(2z' + tz'') + t(z + tz') - tz = 0$$

eta berrantolatuz

$$t(1+t^2)z'' + (2(1+t^2) + t^2)z' + tz - tz = 0,$$

hau da,

$$t(1+t^2)z'' + (2+3t^2)z' = 0.$$

Bigarren aldaketa egitean $z' = y$ honako hau lortuko dugu:

$$t(1+t^2)y' + (2+3t^2)y = 0 \implies -\frac{y'}{y} = \frac{2+3t^2}{t(1+t^2)} = \left(\frac{2}{t} + \frac{t}{1+t^2}\right)$$

$$\implies \ln|y| = -\ln|t| - \frac{\ln(1+t^2)}{2} \implies y = \frac{1}{t^2\sqrt{1+t^2}} = z' \implies z = -\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}$$

$$\implies x = tx_p = -\sqrt{1+t^2}.$$

Eta hau da soluzio orokorra:

$$x(t) = C_1 t + C_2\sqrt{1+t^2}.$$

3.3 Ekuazio diferentzial lineal ez-homogeneoak

Izan bedi

$$x^{n)} + a_1(t)x^{n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = b(t), \tag{1}$$

ekuazio diferentziala, non $a_i : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, n$ funtzio jarraituak eta $b : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ funtzio jarraitua baitira. Dakigunez, ekuazio horren soluzio orokorrak honako egitura hau du:

$$x = x_p + C_1 x_1 + ...C_n x_n$$

$x_H = C_1 x_1 + ...C_n x_n$ esleituriko ekuazio diferentzial homogeneoaren soluzio orokorra da eta x_p, (1) ekuazio ez-homogeneoaren soluzioa.

3.3.1 Ordenaren beherapena ekuazio lineal ez-homogeneoetan

Izan bedi $x^{n)} + a_1(t)x^{n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = b(t)$ (1) ekuazio diferentzial lineal ez-homogeneoa, eta izan bedi x_1, ekuazioari esleituriko ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren soluzio bat.

$$x = x_1 z$$

aldaketa eginez, $z(t)$ funtziorako ekuazio diferentzial bat lortuko dugu, eta hor $z' = y$ idatziz, $y(t)$ funtziorako $n-1$ ordenako ekuazio lineal ez-homogeneoa izango dugu. Azken horren soluzioa ezagutzen badugu, t-rekiko integratuz eta emaitza x_1 funtzioarekin biderkatuz, hasierako ekuazio diferentzialaren soluzioak lortuko ditugu.

3.3.2 Koefizienteen aldakuntza-metodoa x_p lortzeko, edo Lagrangeren metodoa

Demagun ezaguna dela (1) ekuazioari esleituriko ekuazio diferentzial homogeneoaren soluzio orokorra:

$$x_H = C_1 x_1 + ...C_n x_n$$

Orain, (1) ekuazioaren soluzio partikular bat lortzeko, honako adierazpen honetatik abiatuko gara:

$$x_p(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) + \cdots + C_n(t)x_n(t), \tag{3}$$

$C_1(t), C_2(t), \ldots, C_n(t)$ funtzio ezezagunak izanik.

$C_1(t), C_2(t), \ldots, C_n(t)$ kalkulatzeko, x_p horren lehen $n-1$ deribatuei $n-1$ baldintza murriztaile ezarriko dizkiegu, eta n-garren baldintza lortuko dugu (3) aldaketa (1) ekuazio

diferentzialean eginez

$$x_p' = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, x_i' + \sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\, x_i = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, x_i'(t) \quad , \sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\, x_i = 0 \quad \text{bada.}$$

$$x_p'' = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, x_i'' + \sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\, x_i', \quad = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, x_i'' \quad , \sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\, x_i' = 0 \quad \text{bada.}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_p^{n-1)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, x_i^{n-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\, x_i^{n-2)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, x_i^{n-1)}, \sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\, x_i^{n-2)} = 0 \quad \text{bada.}$$

Azkenez,

$$x_p^{n)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, x_i^{n)} + \sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\, x_i^{n-1)}.$$

(1) ekuazioan aurreko emaitzak aldatuz:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, x_i^{n)} + \sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\, x_i^{n-1)} + a_1(t) \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, x_i^{n-1)} +$$

$$+ \cdots + a_{n-1}(t) \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, x_i' + a_n(t) \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, x_i = b(t).$$

Berrordenatuz,

$$C_1(t) \left(x_1^{n)} + a_1(t) x_1^{n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t) x_1' + a_n(t) x_1 \right) + \cdots +$$

$$+ C_n(t) \left(x_n^{n)} + a_1(t) x_n^{n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t) x_n' + a_n(t) x_n \right) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\, x_i^{n-1)} = b(t),$$

eta parentesiak zero direnez, hau dugu azken baldintza:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\, x_i^{n-1)} = b(t).$$

Beraz, $C_1'(t), C_2'(t), \ldots, C_n'(t)$ deribatuek honako sistema hau egiaztatzen dute:

$$\begin{cases} C_1'(t)x_1(t) + C_2'(t)x_2(t) + \cdots + C_n'(t)x_n(t) = 0 \\ C_1'(t)x_1'(t) + C_2'(t)x_2'(t) + \cdots + C_n'(t)x_n'(t) = 0 \\ C_1'(t)x_1''(t) + C_2'(t)x_2''(t) + \cdots + C_n'(t)x_n''(t) = 0 \qquad \forall t \in I. \\ \cdots\cdots\cdots \\ C_1'(t)x_1^{n-1)}(t) + C_2'(t)x_2^{n-1)}(t) + \cdots + C_n'(t)x_n^{n-1)}(t) = b(t) \end{cases}$$

Sistema horren determinantea

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n)(t) \neq 0, \quad \forall t \in I$$

denez, $C_i'(t)$, $i = 1, \ldots, n$ kalkulatzeko sistema lineal bateragarri determinatua dugu . Emaitza horiek t-rekiko integratuz, $C_1(t), \ldots, C_n(t)$ lortuko ditugu eta, azkenez, (1) ekuazio diferentzialaren soluzio partikular bat.

Adibidea. Ebatzi $x'' + x = \sec t$ ekuazioa jakinik ekuazio homogeneoaren sistema fundamentala $\{\cos t, \sin t\}$ dela. Izan bedi

$$x_p(t) = C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t,$$

honek

$$\begin{cases} C_1' \cos t + C_2' \sin t = 0 \\ -C_1' \sin t + C_2' \cos t = \sec t \end{cases}$$

bete behar du. Lehenengo ekuazioa $\sin t$ funtzioarekin biderkatuz eta bigarrena $\cos t$-rekin,

$$\begin{cases} C_1' \cos t \sin t + C_2' \sin^2 t = 0 \\ -C_1' \sin t \cos t + C_2' \cos^2 t = 1, \end{cases}$$

dugu eta, batura egitean,

$$C_2'(t) = 1 \longrightarrow \begin{cases} C_2(t) = t \\ C_1'(t) = -\tan t \longrightarrow C_1(t) = \ln|\cos t|. \end{cases}$$

Orduan, ekuazioaren soluzio partikularra

$$x_p(t) = \cos t \ln|\cos t| + t \sin t$$

da, eta ekuazioaren soluzio orokorra

$$x(t) = x_p(t) + x_H(t) = \cos t \ln|\cos t| + t \sin t + C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

3.4 Koefiziente konstanteetako ekuazio diferentzial linealak

Ekuazio diferentzial lineal homogeneoa

Izan bedi

$$x^{n)} + a_1 x^{n-1)} + \ldots + a_{n-1}x' + a_n x = 0\ , \quad a_i \in \mathbf{R}\ , \quad \mathbf{i = 1, \ldots, n}. \tag{4}$$

Ekuazio horren polinomio diferentzial eragilea t-rekiko independentea da:

$$P(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}D + a_n$$

Ikusiko dugunez, e^{rt} funtzio esponentzialak (4) ekuazio homogeneoaren soluzioak izango dira r-ren balio batzuetarako. r-ren balio horiek kalkulatuko ditugu:

$x(t) = e^{rt}$ funtzioa (4) ekuazio diferentzialaren ezkerreko atalean ordezkatuz eta polinomio diferentzialaren notazioa erabiliz, $P(D)(e^{rt}) = P(r)e^{rt}$, dugu, $P(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1}r + a_n$ izanik; azken polinomio horri (4) ekuazio diferentzial homogeneoaren $\ll$polinomio ezaugarria$\gg$ esan ohi zaio. Ondorioz, e^{rt}, (4) ekuazioaren soluzioa da, baldin eta soilik baldin $P(r) = 0$ bada; hots,

$$P(D)(e^{rt}) = 0 \ \Leftrightarrow\ P(r) = 0.$$

$P(r)$ polinomioaren koefizienteak zenbaki errealak direnez, polinomio horrek n erro konplexu ditu (errealak izan daitezke), anizkoiztasunak kontuan izanik.

a) r_1,r_2 zenbakiak $P(r)$ polinomioaren bi erro erreal ezberdinak badira, $e^{r_1 t}$, $e^{r_2 t}$ funtzioak (4) ekuazioaren bi soluzio linealki independenteak dira.

b) r zenbakia $P(r)$ polinomioaren m anizkoiztasun-graduko erro erreala bada,

$$e^{rt},\ t\ e^{rt}, \ldots, t^{m-1}\ e^{rt}$$

funtzioak (4) ekuazio diferentzial homogeneoaren soluzio (erreal) linealki independenteak dira. (Frogatu).

c) $\alpha \pm i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{R}, \beta \neq \mathbf{0})$ zenbakiak $P(r)$ polinomioaren erro konplexu konjugatuak badira, $e^{(\alpha \pm i\beta)t}$ funtzioak ekuazio diferentzialaren soluzio konplexuak dira; eta soluzioen konbinazio linealak (bai $\mathbf{R}$-ren gainean, bai $\mathbb{C}$-ren gainean) soluzioak direla erabiliz,

$$e^{\alpha t}\cos\beta t\ , \quad e^{\alpha t}\sin\beta t,$$

funtzioak bi soluzio erreal linealki independenteak direla froga dezakegu. Eta $e^{rt} = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}e^{it\beta} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$ denez, aurreko bi soluzioak soluzio konplexuaren zati erreala eta zati irudikaria dira.

d) Demagun $\alpha \pm i\beta, \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R},\ \beta \neq \mathbf{0})$ zenbaki konplexuak $P(r)$ polinomioaren m graduko erro konplexuak direla. Idatziko dugu $r = \alpha \pm i\beta$. Hemen ere

$$e^{rt},\ t\ e^{rt}, \ldots, t^{m-1}\ e^{rt}$$

funtzioak (4) ekuazio diferentzialaren soluzio konplexuak dira. Bestalde, c) kasuan bezala, froga daiteke honako $2m$ funtzio hauek soluzio erreal linealki independenteak direla:

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\ te^{\alpha t}\cos\beta t, \ldots,\ t^{m-1}e^{\alpha t}\cos\beta t$$

$$e^{\alpha t}\sin\beta t,\ te^{\alpha t}\sin\beta t, \ldots,\ t^{m-1}e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Adibideak.

a) Ebatzi $x''-5x'+6x = 0$. Ekuazio hau lineala, koefiziente konstanteetakoa eta homogeneoa da. Bere polinomio karakteristikoa

$$P(r) = r^2 - 5r + 6 = 0 \ \rightarrow\ r = 2, 3$$

eta soluzioak hauek dira

$$x_1(t) = e^{2t} \quad , \quad x_2(t) = e^{3t}.$$

Eta soluzio orokorra

$$x_H(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}.$$

b) Ebatzi $x'' + x' + x = 0$. Bere polinomio karakteristikoa

$$P(r) = r^2 + r + 1 = 0 \ \longrightarrow\ r = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

da eta, ondorioz, honako hauek dira soluzioak:

$$x_1(t) = e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \quad , \quad x_2(t) = e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Soluzio orokorra:

$$x_H(t) = C_1e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

c) Ebatzi $x^{7)} + 3x^{6)} + 5x^{5)} + 7x^{4)} + 7x''' + 5x'' + 3x' + x = 0$. Bere polinomio karakteristikoa

$$P(r) = r^7 + 3r^6 + 5r^5 + 7r^4 + 7r^3 + 5r^2 + 3r + 1 = (r+1)^3(r^2+1)^2$$

$$\longrightarrow \begin{cases} r = -1 & \text{hirukoitza,} \\ r = \pm i & \text{bikoitza.} \end{cases}$$

Beraz, soluzioak hauek dira:

$$x_1(t) = e^{-t}, x_2(t) = te^{-t}, x_3(t) = t^2e^{-t}, x_4(t) = \cos t, x_5(t) = t\cos t, x_6(t) = \sin t, x_7(t) = t\sin t.$$

Eta soluzio orokorra:

$$x_H(t) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t} + C_3t^2e^{-t} + C_4\cos t + C_5t\cos t + C_6\sin t + C_7t\sin t.$$

Koefiziente konstanteetako ekuazio ez-homogeneoa. Koefiziente zehaztugabeen metodoa x_p lortzeko.

Izan bedi

$$x^{n)} + a_1x^{n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_nx = e^{\alpha t}(M(t)\cos\beta t + N(t)\sin\beta t) \tag{5}$$

tipoko ekuazio diferentzial lineal ez-homogeneoa, non koefizienteak konstanteak, $M(t)$ eta $N(t)$ polinomioak, eta α eta β zenbaki errealak baitira. $M(t)$ eta $N(t)$ polinomioen mailarik handiena d izendatuko dugu eta, $\alpha \pm i\beta$ zenbakia $P(r)$ polinomioaren erroa denean, bere anizkoiztasun-gradua k izendatuko dugu ($\alpha \pm i\beta$ erroa ez denean $k = 0$ hartuko da).

Aurreko baldintzak egiaztatzen direnean, (5) ekuazio diferentzial ez-homogeneoaren soluzio partikular batek honako forma hau duela froga daiteke:

$$x_p(t) = t^ke^{\alpha t}(R(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t), \tag{6}$$

$Q(t)$ eta $R(t)$ polinomioak gehienez d mailakoak izanik. Beren koefizienteak kalkulatzeko, nahikoa da (6) adierazpena (5) ekuazio diferentzialaren soluzio izatera behartzea.

Adibidea. Izan bedi $P(D)x = b(t)$ ekuazio lineal ez-homogeneoa, $P(r)$ polinomio ezaugarriaren erroak $r = 0$ bakuna, $r = 1$ bikoitza, $r = -2 \pm i$ bakuna eta $r = \pm i$ hirukoitza direnean eta

$$b(t) = 2 - t^3 - 3\sin t - 2t\cos t + e^{-2t}\sin t$$

denean, soluzio partikular bat aurkitzeko modua aztertuko dugu.

Ikusten denez, $b(t)$ batura bezala adierazten da, eta batugai horietako bakoitza koefiziente zehaztugabeen metodora egokitzen da. Izan bedi

$$b_1(t) = 2 - t^3 \Rightarrow \quad d = 3, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad k = 1 \Rightarrow \quad x_{p_1}(t) = t(A + Bt + Ct^2 + Dt^3)$$

$$b_2(t) = 3\sin t - 2t\cos t \Rightarrow \begin{cases} d = 1,\ \alpha = 0, \\ \beta = 1,\ k = 3 \end{cases} \Rightarrow x_{p_2}(t) = t^3\left((A + Bt)\cos t + (C + Dt)\sin t\right))$$

$$b_3(t) = e^{-2t}\sin t \Rightarrow d = 0,\ \alpha = -2,\ \beta = 1,\ k = 1 \Rightarrow x_{p_3}(t) = te^{-2t}\left(A\cos t + B\sin t\right)).$$

Koefiziente zehaztugabe horiek $x_{p_i}(t)$-k $P(D)x = b_i(t)$ ekuazioa betetzera behartuz kalkulatzen dira. Horrela, honako hau izango dugu:

$$x_p(t) = x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t) + x_{p_3}(t).$$

3.5 Adibide garrantzitsua: Eulerren ekuazio diferentzialak

Honako ekuazio diferentzial lineal honi Eulerren n-garren ekuazio diferentziala deritzo:

$$t^n x^{n)} + a_1 t^{n-1} x^{n-1)} + \ldots + a_{n-1} t x' + a_n x = b(t), \tag{7}$$

$b : I \longrightarrow \mathbf{R}$ funtzio jarraitua eta $a_1, ..., a_n$ konstante errealak izanik.

Eulerren ekuazio homogeneoetarako metodoa.

Izan bedi

$$t^n x^{n)} + a_1 t^{n-1} x^{n-1)} + \cdots + a_{n-1} t x' + a_n x = 0 \tag{8}$$

Ekuazio honen soluzioak aurkitzeko; t^r funtzio potentzialarekin probatuko dugu. Erraz justifikatzen da honako emaitza hau:

$$x(t) = t^r, (8) \text{ ekuazio homogeneoaren soluzioa da } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ r(r-1)\ldots(r-n+1) + a_1 r(r-1)\ldots(r-n+2) + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0. \tag{9}$$

Eta aukera hauek ditugu:
$*$ r zenbakia (9) ekuazio polinomikoaren erro erreal bakuna denean, t^r funtzioa (8) ekuazio diferentzial homogeneoaren soluzio da.
$*$ r zenbakia (9) ekuazio polinomikoaren erro erreal m-koitza denean, $t^r,\ t^r \ln t,\ t^r \ln^2 t,\ \ldots$ $t^r \ln^{m-1} t$ funtzioak (8) ekuazio diferentzialaren m soluzio erreal linealki independenteak dira. (Frogatu).
$*$ $r = \alpha \pm i\beta, \beta \neq 0$ (9) ekuazio polinomikoaren erro konplexuak bakunak direnean,

$$t^r = t^{\alpha \pm i\beta} = t^\alpha t^{\pm i\beta} = t^\alpha e^{\pm i\beta \ln t}$$

(8) ekuazio diferentzialaren soluzio konplexuak dira, eta linealtasuna erabiliz,

$$t^\alpha \cos(\beta \ln t)\ ,\ t^\alpha \sin(\beta \ln t)$$

funtzioak ekuazio diferentzialaren bi soluzio erreal linealki independente direla ondorioztatzen da (hau da, t^r-ren zati erreala eta zati irudikaria).
$*$ $r = \alpha \pm i\beta, \beta \neq 0$ zenbaki konplexuak (9) ekuazio polinomikoaren erro m-koitzak direnean,

$$t^\alpha \cos(\beta \ln t),\ t^\alpha \cos(\beta \ln t) \ln t,\ t^\alpha \cos(\beta \ln t) \ln^2 t, \ldots, t^\alpha \cos(\beta \ln t) \ln^{m-1} t$$

$$t^\alpha \sin(\beta \ln t),\ t^\alpha \sin(\beta \ln t) \ln t,\ t^\alpha \sin(\beta \ln t) \ln^2 t, \ldots, t^\alpha \sin(\beta \ln t) \ln^{m-1} t$$

funtzioak (8) ekuazio diferentzialaren $2m$ soluzio erreal linealki independente direla froga daiteke.

Adibidea. Ebatzi Eulerren honako ekuazio hau:

$$t^2 x'' - tx' + 2x = t \ln t.$$

$t = e^s$ eta $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{t}$ aldaketa eginez:

$$\begin{cases} x(t) = x(e^s) = y(s) \\ x'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{1}{t} = y'\frac{1}{t} \rightarrow\ tx' = y' \\ x''(t) = \frac{d}{dt}x' = \frac{d(y'/t)}{dt} = y''\frac{1}{t^2} - y'\frac{1}{t^2} \rightarrow\ t^2x'' = y'' - y'. \end{cases}$$

Ordezkatuz,

$$y'' - y' - y' + 2y = se^s \quad \Rightarrow \quad y'' - 2y' + 2y = se^s$$

lortzen dugu, eta ebatziz:

$$r^2 - 2r + 2 = 0, \qquad r = 1 \pm i \quad \Rightarrow \quad y_H(s) = C_1 e^s \cos s + C_2 e^s \sin s.$$

Orain, ekuazio osoa aztertuko dugu. $b(s) = se^s$ koefiziente zehaztugabeen motakoa denez eta $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ k = 0,\ d = 1$ betetzen duenez,

$$y_p(s) = e^s(As + B), \quad y_p'(s) = e^s(As + B + A), \quad y_p''(s) = e^s(As + B + 2A).$$

Hori honako honen soluzio izatera behartzen dugu

$$e^s(As + B + 2A) - 2e^s(As + B + A) + 2e^s(As + B) = se^s \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (As + B + 2A) - 2(As + B + A) + 2(As + B) = s,$$

ondorioz,

$$As + B = s \quad \Rightarrow \quad A = 1,\ B = 0.$$

Beraz, soluzio orokorra

$$y(s) = y_p(s) + y_H(s) = se^s + C_1 e^s \cos s + C_2 e^s \sin s$$

da, eta aldaketa deseginez

$$x(t) = t \ln t + C_1 t \cos(\ln t) + C_2 t \sin(\ln t).$$

Metodo orokorra. Eulerren

$$t^n x^{n)} + a_1 t^{n-1} x^{n-1)} + \cdots + a_{n-1} t x' + a_n x = b(t), \tag{7}$$

ekuazio diferentzialean (homogeneo edo ez-homogeneo),

$$t = e^s$$

edo $s = \ln t$ aldaketa egin ondoren, koefiziente konstanteetako ekuazio diferentzial lineal bat lortzen da $y(s) = x(e^s)$ funtzio ezezagunerako; s hori aldagai independente berria da. Hau da,

$$\begin{cases} x(t) \longrightarrow x(e^s) = y(s); \quad x(t) = y(s(t)). \\ x'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{1}{t} = y'(s)\frac{1}{t} \rightarrow \ tx'(t) = y'(s) \\ x''(t) = \frac{d}{dt}x' = \frac{d(y'(s)/t)}{dt} = y''(s)\frac{1}{t^2} - y'(s)\frac{1}{t^2} \rightarrow \ t^2x''(t) = \frac{d}{ds}(\frac{d}{ds} - 1)y(s) \\ \cdots\cdots \\ x^{n)}(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow \ t^n x^{n)}(t) = \frac{d}{ds}(\frac{d}{ds} - 1)..(\frac{d}{ds} - n + 1)y(s) \end{cases}$$

direnez, koefiziente konstanteetako ekuazio diferentzial lineala da ekuazio diferentzial berria:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds}-1\right)...\left(\frac{d}{ds}-n+1\right)y(s)+a_1\frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds}-1\right)...\left(\frac{d}{ds}-n+2\right)y(s)+...+a_n y(s)=b(e^s)$$

Azken ekuazio diferentzialaren $y(s)$ soluzioak lortu ondoren, $s=\ln(t)$ aldaketa eginez, (7) ekuazioaren soluzioak izango ditugu.

3.6 Bigarren ordenako ekuazio diferentzial linealen soluzioen propietate kualitatiboak

Atal honetan soluzioen propietateak aztertuko ditugu, ekuazio diferentziala ebatzi gabe. Izan bedi

$$x''+p(t)x'+q(t)x=0 \tag{10}$$

$p,q:[a,b]\longrightarrow \mathbf{R}$ funtzioak jarraituak izanik.

2. lema. (i) *(10) ekuazio diferentzialaren soluzio bat eta bere deribatua puntu berberean, $t_0\in(a,b)$ puntuan, anulatzen badira, soluzio hori soluzio nulua da.*

(ii) *(10) ekuazio diferentzialaren edozein soluzio ez-nuluk $[a,b]$ tartean dituen zeroen kopurua finitua da.*

(iii) *(10) ekuazio diferentzialaren bi soluzio puntu berberean anulatzen badira, soluzio horiek linealki dependenteak izango dira.*

6. teorema. *(Sturm-en banantze-teorema). Baldin x_1 eta x_2 funtzioak*

$$x''+p(t)x'+q(t)x=0 \tag{10}$$

($p,q:[a,b]\longrightarrow \mathbf{R}$ funtzio jarraituak) ekuazio diferentzialaren bi soluzio linealki independenteak badira, x_1 soluzioaren ondoz ondoko bi zeroren artean x_2 soluzioaren zero bakar bat dago.

Bigarren ordenako ekuazio diferentzial linealen adierazpenak.

Bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal homogeneoa hainbat formatan adieraz daiteke:

(i) Adierazpen estandar edo kanonikoa:

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, \quad p, q : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R} \quad \text{funtzio jarraituak.}$$

(ii) Adierazpen autoadjuntua:

$$(r(t)x')' + q_1(t)x = 0, \quad r, q_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R} \text{ jarraituak}, r(t) > 0 \forall t \in [a, b] \, , r \in C^1([a, b]).$$

(iii) Adierazpen normala:

$$x'' + q_2(t)x = 0, \quad q_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R} \text{ funtzio jarraitua.}$$

Orain, batetik bestera nola pasatu ikusiko dugu:
1.- i)-tik iii)-ra.

Kalkulatuko dugu $v(t)$ funtzio bat $x(t) = u(t)v(t)$ aldaketa egin ondoren lortzen den ekuazio diferentzialean u'-ren koefizientea 0 izan dadin.

$$x' = uv' + u'v \, , \qquad x'' = uv'' + 2u'v' + u''v$$

ditugu eta i)-n ordezkatuz

$$(uv'' + 2u'v' + u''v) + p(t)(uv' + u'v) + q(t)uv = 0$$

dugu. u'-ren koefizientea zero izatera behartuko dugu:

$$2v' + vp(t) = 0 \longrightarrow v(t) = e^{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}.$$

Beraz, $x(t) = u(t)e^{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}$ aldaketa i) ekuazioan egin ondoren, $u(t)$ funtzioak honako ekuazio hau egiaztatzen du:

$$u'' + q_2(t)u = 0 \, , \quad q_2(t) = q(t) - \frac{1}{4}p^2(t) - \frac{1}{2}p'(t).$$

2.- i)-tik ii)-ra.

$$(r(t)x')' + q_1(t)x = 0 \Leftrightarrow rx'' + r'x' + q_1(t)x = 0 \Leftrightarrow x'' + \frac{r'}{r}x' + \frac{q_1}{r}x = 0.$$

Honela, bada, $r(t)$ funtzio bat aurkitu nahi dugu,

$$p(t) = \frac{r'}{r} \text{ eta} \quad q(t) = \frac{q_1}{r}$$

egiaztatzen dituena, hots:

$$r(t) = e^{\int_{to}^{t} p(s)ds} > 0 \ , \qquad q_1(t) = q(t)e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds}.$$

3.- ii)-tik iii)-ra.

Beste aldagai independente bat hartuko dugu: $z = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{r(s)}$ eta $x(t) = y(z(t))$ denez,

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dz}\frac{1}{r(t)} = \frac{y'(z)}{r(t)} \longrightarrow r(t)x'(t) = y'(z);$$

beraz,

$$(r(t)x')' + q_1(t)x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dz}\right) + q_1(t)x = y''(z)\frac{1}{r(t)} + q_1(t)y = 0,$$

ondorioz, $y(t)$ funtzioak hauxe egiaztatzen du:

$$y'' + q_2(z)y = 0 \ , \quad q_2(z) = r(t(z))q_1(t(z)).$$

7. teorema. *(Sturm-en konparazio-teorema). Izan bitez x_1 eta x_2 funtzio ez-nuluak*

$$(r(t)x')' + q_1(t)x = 0 \quad t \in [a, b]$$

$$(r(t)x')' + q_2(t)x = 0 \quad t \in [a, b]$$

ekuazio diferentzialen soluzioak, hurrenez hurren; horrez gain, $r > 0$ eta $q_1 \leq q_2, \forall t \in [a, b]$ dira. Orduan, $[a, b]$ tarteko α eta β zenbakiak x_1 funtzioaren ondoz ondoko bi zero badira, halabeharrez, x_2 funtzioak $[\alpha, \beta]$ tartean zero bat izango du gutxienez.
Horrez gain, $t_0 \in [a, b]$ puntu baterako $q_1(t_0) < q_2(t_0)$ bada, x_2 funtzioak (α, β) tartean zero bat izango du gutxienez. (Beraz, oszilazioak gehitu egiten dira, ekuazio diferentzialeko x-ren koefizientea handiagoa denean).

1. korolarioa. (i) *Baldin* $x(t)$ *funtzioa* $(r(t)x')' + q(t)x = 0,\ (r > 0, q < 0,\ \forall t \in [a,b])$ *ekuazio diferentzialaren soluzio ez-nulua bada, halabeharrez,* $x(t)$ *funtzioak, gehienez, zero bat izango du* $[a,b]$ *tartean.*

(ii) *Baldin* $x(t)$ *funtzioa* $(r(t)x')' + q(t)x = 0,\ (r > 0, q < 0,\ \forall t \in [a,\infty))$ *ekuazio diferentzialaren soluzio ez-nulua bada, halabeharrez,* $x(t)$ *funtzioak, gehienez, zero bat izango du* $[a,\infty)$ *tartean.*

Ekuazio horien adibide fisiko batzuk dira RCL motako zirkuituak eta oszilatzaileak.

3.7 ARIKETAK

1.- (i) Izan bedi honako ekuazio lineal homogeneoa:

$$A(t)x'' + B(t)x' + C(t)x = 0, \qquad \forall t \in I.$$

Froga ezazu aurreko ekuazio diferentzialak e^{rt} funtzioa soluziotzat duela, baldin eta soilik baldin $r^2A(t) + rB(t) + C(t) = 0, \quad \forall t \in I$ bada.

(ii) Aurki ezazu $(t-t^2)x'' + (2t-1)x' + (t^2-3t+1)x = 0$ ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra.

(iii) Azken ekuazioaren soluzio ez-nulu bat, $x(t)$, existitzen da $x(0) = x'(0) = 0$ izanik. Hori eta bakartasunaren teorema kontrajarriak al dira?

2.- Kalkula ezazu $(1+t)x'' + (4t+5)x' + (4t+6)x = e^{-2t}$ ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra, ekuazio homogeneoa ebazteko e^{rt} tipoko funtzioa erabiliz.

3.- Kalkula ezazu $tx'' + 2x' + tx = 1$ ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra, ekuazio homogeneoaren soluzio bat $\frac{\sin t}{t}$ dela jakinik.

4.- Kalkula ezazu honako ekuazio diferentzial hauen soluzio orokorra:

(a) $y'' - 2\tan x y' + 3y = 2\sec x. \quad (y = \sin x)$ (*)

(b) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sec 2x.$

(c) $y'' + y = xe^{-x} + \dfrac{1}{\cos^3 x}.$

(d) $t^2x'' - 2tx' + 2x = t^3e^t.$

5.- Kalkulatu koefiziente konstanteetako eta ordena minimoko ekuazio lineal homogeneo bat, honako funtzio hauek haren soluzioak izan daitezen:

(a) $t^2, \quad e^t\cos 3t, \quad t^3\sin t.$

(b) $t^2e^t - 3e^{-t}\cos 2t + \cos t + t^3 + 1.$

6.- Koefiziente konstanteetako $P(D)x = 0$ ekuazio lineal homogeneoaren ekuazio karakteristikoak, hots, $P(r) = 0$ ekuazioak, honako soluzio hauek ditu: $r = 0$ bakuna, $r = 1$

bikoitza, $r = -2 \pm i$ bakunak eta $r = \pm i$ hirukoitza. Nolakoa izango da

$$P(D)x = 2 + t^3 + t\cos t + t^2 \sin 2t + (1+t)e^t + e^{2t}\sin t + e^{-2t}\sin t$$

ekuazio diferentzial lineal ez-homogeneoaren soluzio baten adierazpena? (Erabili koefiziente zehaztugabeen metodoa). (*)

7.- $P(r)$ polinomioaren erroak $r = 0$ bikoitza, $r = 2$ bakuna, $r = 1 \pm 3i$ hirukoitza, $r = \pm i$ bikoitza eta $r = 4 \pm i$ bakuna badira, nola bilatuko da

$$P(D)x = 2 + t^2 - 3\sin t + 2t\cos t + (2 - \sin t)e^{2t} - (t\cos 2t - \sin 3t)e^t$$

ekuazio diferentzial ez-homogeneoaren soluzio bat? (*)

8. - Ebatz itzazu:

(a) $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' - 2y' + y = e^t + e^{-t} + \sin t - \cos t.$

(b) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$

(c) $y'' + 4y' + 4y = 2e^t(\sin t + 7\cos t).,\quad (\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0).$

(d) $y'' - y = \dfrac{1}{e^t + 1}.$

9.- Ebatzi honako ekuazio diferentzial hauek:

(a) $(t+2)^2 y'' + 3(t+2)y' - 3y = 0.$

(b) $(2t+1)^2 y''' + 2(2t+1)y'' + y' = 0.$

(c) $t^2 y'' - ty' + 2y = t\ln t.$

10.- (1) Izan bedi $y' = p(t) + q(t)y + r(t)y^2$ Riccati-ren ekuazio diferentziala, p, q, r funtzioak Itartean jarraituak izanik. Froga ezazu emandako ekuazio diferentzialean

$$w = [exp(-\int_{t_0}^{t} q(s)ds)]y, \qquad t_o \in I$$

ordezkapena eginez $w' = a(t) + b(t)w^2$ ekuazioa lortzen dela. Eta azken ekuazio diferentzialean $-bw = \dfrac{z'}{z}$ aldaketa eginez, honako ekuazio diferentzial lineal hau (era autoadjuntuan) dugula:

$$(\frac{1}{b}z')' + az = 0.$$

(2) Alderantziz, $(ry')' + py = 0$ ekuazio diferentzialean $z = -r\dfrac{y'}{y}$ ordezkapena eginez, Riccatiren $z' - \dfrac{1}{r}z^2 - p = 0$ ekuazioa lortuko da.

(3) (1) erabiliz, ebatz itzazu honako ekuazio hauek: (a) $y' + y^2 - 1 = 0$; (b) $t^2y' - 2ty + t^2y^2 + 2 = 0$.

11.- (1) Izan bedi $y''+a_1(t)y'+a_2(t)y = 0$ ekuazio diferentziala. Kalkulatu u funtzioa, $y = uz$ ordezkapenaren bidez ondorioztatutako ekuazioan z' ager ez dadin.

(2) Aurreko atala erabiliz, ebatz itzazu honako ekuazioak:

(a) $y'' - 2ty' + (t^2 + 2)y = e^{\frac{1}{2}(t^2+2t)}$;

(b) $t^2y'' - t(2t + 3)y' + (t^2 + 3t + 3)y = (6 - t^2)e^t$.

12.- Izan bedi $t\,x'' + (2-3t)x' - 3x = 20t^3 - 15t^4$ ekuazio diferentziala. t^4 eta $\dfrac{t^5 - 7}{t}$ funtzioak emandako ekuazio diferentzialaren soluzio bi direla jakinik, kalkula ezazu ekuazioaren soluzio orokorra.

13.- Kalkulatu $t^2\,x'' - 2t\,x' + (t^2 + 2)x = t^3\,e^t$ ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra, bere ekuazio diferentzial homogeneo elkartuaren bi soluzio partikularren arteko zatidura $\tan t$ dela jakinik.

4. Kapitulua

Berretura-serie bidezko soluzioak

4.1 Sarrera. Berretura-serieak, funtzio analitikoak

Izan bedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \tag{1}$$

seriea, eta izan bedi r zenbakia seriearen konbergentzia-erradioa ($r=0, r=\infty$ edo $0<\mathrm{r}<\infty$); dakigunez, $\{x : |x-x_0|<r,\ (r>0)\}$ eremuari seriearen konbergentzia-tartea (irekia) deritzo. Kasu honetan, berretura-seriea absolutuki konbergentea da $|x-x_0|<r$ tartean eta uniformeki konbergentea $|x-x_|\leq r_0<r$, $(0<r_0<r)$ tarteetan; bestalde, dibergentea da $\{x : |x-x_0|>r\}$ eremuan.

Izan bedi $f(x)$ funtzioa (1) berretura-seriearen batura $|x-x_0|<r$ $(r>0)$ konbergentzia -tartean; hots:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\ , \quad (|x-x_0|<r).$$

f batura funtzio jarraitua da, nahi dugun beste aldiz deribagarria da $|x-x_0|<r$ tartean, eta gaiez gai edozein ordenataraino deriba daiteke. Honako adierazpen hauek ditugu $|x-x_0|<r$ tartean:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\ na_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\ n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$

...

Horren ondorioz, honako berdintza hauek ditugu:

$$\forall n \geq 0 \ , \quad a_n = \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}.$$

Bestalde, (1) berretura-seriea gaiez gai integra daiteke, eta r da lortutako seriearen konbergentzia-erradioa ere.

Orain **alderantzizko problema** aztertuko dugu:

Izan bedi $f(x)$ edozein ordenatako funtzio deribagarria $|x - x_0| < r$ $(r > 0)$ ingurunean. x_0-ren ingurunean, Taylor-en teoremaren bidez: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!}(x - x_0)^n$ serie formala lortzen dugu; serie hori $\forall x : |x - x_0| < r$ balioetarako puntuz puntu konbergentea bada eta bere batura $f(x)$ bada,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \ , \quad |x - x_0| < r$$

idazten da.

Definizioa. $f(x)$ funtzioa x_0 puntuan analitikoa dela esaten da, baldin eta $r > 0$ existitzen bada, non

$$\forall x : |x - x_0| < r, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

baita. Modu berean, bi aldagaiko $f(t, x)$ funtzioa $(0, 0)$ puntuan analitikoa dela esango dugu, baldin eta $r > 0$ existitzen bada, non

$$\forall (t, x) \in (-r, r) \times (-r, r) \ , \quad f(t, x) = \sum_{n,j=0}^{\infty} A_{n,j}\, t^n x^j,$$

baita.

Aldagai bateko funtzio analitikoetarako, honako propietate hauek ditugu:

(i) Baldin $f(x)$ eta $g(x)$ funtzioak x_0 puntuan analitikoak badira, halabeharrez, $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ eta $\frac{f(x)}{g(x)}$, $(g(x_0) \neq 0)$ analitikoak dira x_0 puntuan.

(ii) g funtzioa x_0 puntuan eta f funtzioa $g(x_0)$ puntuan analitikoak badira, funtzio konposatua, $f(g(x))$, analitikoa da x_0 puntuan.

(iii) Berretura-serie baten batura funtzio analitikoa da konbergentzia-tartearen puntu guztietan.

Adibidez, funtzio polinomioak, e^x , $\sin x$ eta $\cos x$ funtzioak analitikoak dira puntu guztietan.

4.2 Lehen ordenako ekuazio diferentzialak. Maiorantearen metodoa

Demagun

$$\begin{cases} x' = 1 + \dfrac{t}{1-x} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Cauchyren problemak zeroaren berretzaileen serie bidez garatu daitekeen soluzio bat duela, $x(t)$, hau da:

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots .$$

$x(0) = 0$ denez, $a_0 = 0$ izango da. Gainera:

$$x' = a_1 + 2a_2 t + 2a_3 t^2 + \dots .$$

Bestalde, $|x| < 1$ bada, honela garatu dezakegu:

$$1 + \frac{t}{1-x} = 1 + t(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = 1 + t\left[1 + (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots) + \right.$$

$$\left. + (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots)^2 + (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots)^3 + \dots\right].$$

Beraz, serie bietako koefizienteak berdinduz, $a_1 = 1,\ 2a_2 = 1,\ 3a_3 = a_1,\ 4a_4 = a_2 + a_1^2, \dots$ lortzen da.

Hori ikusita, badirudi seriearen koefiziente guztiak aurki ditzakegula, eta horrela $x(t)$ soluzioa ezagutu. Baina emandako pausoak justifikatu egin behar dira, eta, horretarako, maiorantearen metodoa erabiliko dugu.

Izan bedi honako Cauchyren hastapen-balioetako problema hau:

$$\begin{cases} y' = g(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

non $g(t,y)$ funtzioa (t_0,y_0) puntuan analitikoa baita. Honako aldaketa hau eginez

$$x(t) = y(t+t_0) - y_0$$

eta

$$f(t,x) = g(t+t_0, x+y_0)$$

izendatuz,

$$(3) \qquad \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

problema lortu dugu, non $f(t,x)$ funtzioa $(0,0)$ puntuan analitikoa baita. Ikusi dugunez, (2) Cauchyren problemaren hastapen-baldintza (t_0,y_0) puntukoa jatorrira eraman da translazio baten bidez, eta horrela, $g(t,y)$ funtzioa (t_0,y_0) puntuan analitikoa bada, (3) problema berriko $f(t,x)$ funtzioa ere analitikoa da $(0,0)$ puntuan. Hori dela eta, nahikoa da honako teorema hau $(0,0)$ puntuan definitutako Cauchyren problemarako enuntziatzea:

8. teorema. *Izan bedi honako Cauchyren problema hau:*

$$(3) \qquad \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

non $f(t,x)$ funtzioa $(0,0)$ puntuan analitikoa baita. Orduan, Cauchyren problema honen soluzio bakarra analitikoa da $t=0$ puntuan.

Soluzio hori $x = x(t)$ izendatuko dugu. Nola kalkula daitezke soluzio analitiko horren berretura-serieko garapenaren koefizienteak?

$x(t)$ funtzioa $t=0$ puntuan analitikoa denez, honelako adierazpen bat onartuko du:

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots . \quad |t| < \delta, \delta > 0$$

eta, dakigunez, seriearen koefizienteek honako baldintza hauek egiaztatzen dituzte:

$$a_0 = x(0) = 0 \quad , \quad a_n = \frac{x^{n)}(0)}{n!} \quad , \quad n \geq 1,$$

gainera, $x(t)$ funtzioa (3) problemaren soluzioa dela kontuan hartuz, $x^{n)}(0)$, $(n \geq 1)$ balioak f funtzioaren deribatu partzialen bidez kalkula daitezke:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \longrightarrow \; x'(0) = f(0,0)$$
$$x''(t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}x' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}f \longrightarrow \; x''(0) = \frac{\partial f}{\partial t}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\, f(0,0)$$
$$.....$$

Bestalde, $f(t,x)$ funtzioa $(0,0)$ puntuan analitikoa denez, bere berretura-serie bikoitzeko garapena ezagutzen bada, hau da,

$$f(t,x) = \sum_{n,j=0}^{\infty} A_{n,j}\, t^n x^j, \quad \frac{\partial^{r+s} f}{\partial t^r \partial x^s}(0,0) = A_{r,s}\, r!\, s!,$$

$x(t)$ funtzioaren garapeneko a_n koefizienteak $A_{n,j}$ koefizienteen bidez kalkula daitezke.

Oharra. Oro har, aurrekoa erabiliz, ezin dugu teoremako problemaren $x(t)$ soluzio zehatza kalkulatu, baina bai bere berretura-serieko hainbat gai eta, horrekin, $x(t)$ soluzioaren hurbilketa bat.

4.3 Bigarren ordenako ekuazio lineal homogeneoak: puntu erregularra

Izan bedi

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0, \tag{4}$$

ekuazio lineal homogeneoa. $a(t)$ eta $b(t)$ funtzioak t_0 puntuan analitikoak direnean, t_0 puntua (4) ekuazioaren puntu erregularra dela esaten da; gainerako kasuetan, (4) ekuazioaren puntu singularra dela.

Planteamendua: sarritan, t_0 puntu finkatu baten ingurunean definitutako (4) ekuazioaren soluzio guztiak aurkitu nahi ditugu; beste askotan, t_0 puntuan hastapen-baldintzak dituen honako problema hau ebatzi nahi dugu:

$$\begin{cases} x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \\ x(t_0) = C_0 \\ x'(t_0) = C_1, \end{cases} \tag{5}$$

C_0, C_1 emandako zenbakiak izanik. Ikusi dugunez, (4) ekuazio diferentziala koefiziente konstanteetakoa edo, adibidez, Eulerren ekuazioa denean, soluzio horiek kalkula daitezke aurreko gaian aztertutakoa erabiliz.

Atal honetan, t_0 puntua (4) ekuazio diferentzialaren puntu erregularra den kasurako, puntu horren ingurunean definitutako soluzioak aurkitzeko metodo berri bat ikusiko dugu, hurrengo teorema dela medio.

9. teorema. *Izan bedi*

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0, \tag{4}$$

ekuazio lineal homogeneoa eta izan bedi t_0 puntua (4) ekuazio lineal homogeneoaren puntu erregularra; hau da, $a(t)$ eta $b(t)$ funtzioak $(t - t_0)$-ren berretura-seriez adieraz daitezke eta izan bedi $r, (r > 0)$ bi serie horien konbergentzia-erradioetatik txikiena. Orduan, existitzen dira t_0 puntuan analitikoak diren (4) ekuazio diferentzialaren bi soluzio linealki independente, eta beraz, (4) ekuazio diferentzialaren soluzio guztiak analitikoak dira t_0 puntuan. Horrez gain, soluzio guztien berretura-serieko adierazpenak konbergenteak dira gutxienez r erradioko t_0 puntuaren ingurunean.

Enuntziatu baliokidea. Izan bedi

$$\begin{cases} x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \\ x(t_0) = C_0 \\ x'(t_0) = C_1, \end{cases} \tag{5}$$

C_0, C_1 emandako zenbaki finkoak direlarik. Izan bedi t_0 puntua (5) problemako ekuazio lineal homogeneoaren puntu erregularra. Orduan, (5) problemaren soluzio bakarra, $x(t)$, analitikoa da t_0 puntuan, eta, bere berretura-serieko garapenaren konbergentzia-erradioa, gutxienez, $a(t)$ eta $b(t)$ funtzioen konbergentzia-erradio txikiena da.

Definizioa. Izan bedi $t_0 = 0$ puntua

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0, \tag{4}$$

eta

$$y'' - A(t)y' - B(t)y = 0, \tag{6}$$

ekuazio diferentzialen puntu erregularra. Demagun

$$a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n \quad , \quad b(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \quad , \quad B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n t^n$$

direla;

$$|a_n| \leq A_n \quad , \quad |b_n| \leq B_n \quad , \forall n \geq 0$$

baldintzak egiaztatzen direnean, (6) ekuazio diferentziala (4) ekuazio diferentzialaren ekuazio maiorantea ($t_0 = 0$ puntuaren inguruan) dela esaten da.

Adibidea. Izan bitez $x'' + x = 0$ ekuazio diferentziala eta $t_0 = 0$. $a(t) = 0$ eta $b(t) = 1$ funtzio konstanteak $\mathbf{R}$ osoan analitikoak dira. $t_0 = 0$ puntua ekuazioaren puntu erregularra da. Teoremaren arabera, ekuazioaren edozein soluzio adierazgarria da honako forma honetan:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \quad (|t| < \infty)$$

$$x'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} t^n$$

$$x''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} t^n$$

eta ekuazioan ordezkatuz,

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \{c_n + (n+1)(n+2) c_{n+2}\} = 0$$

beraz, koefizienteak identifikatuz, $\{c_n\}$ segidako elementuek egiaztatzen duten formula errepikaria lortuko dugu:

$$c_n + (n+1)(n+2) c_{n+2} = 0 \quad , \quad \forall n \geq 0$$

hots, c_0, c_1 edozein

$$c_{n+2} = \frac{-c_n}{(n+2)(n+1)} \quad , \quad \forall n \geq 0.$$

$$c_{2n} = \frac{-c_{2n-2}}{2n(2n-1)} = \frac{c_{2n-4}}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)} = \cdots = \frac{(-1)^n c_0}{(2n)!}, \quad n \geq 1$$

$$c_{2n+1} = \frac{-c_{2n-1}}{(2n+1)2n} = \frac{c_{2n-3}}{(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)} = \cdots = \frac{(-1)^n c_1}{(2n+1)!}, \quad n \geq 1.$$

Bi soluzio linealki independenteak aurkitzeko, aski da, adibidez, c_0 eta c_1 parametroetarako honako balio hauek aukeratzea (zergatik?):

$$c_0 = 1\ , c_1 = 0 \quad \longrightarrow \quad x_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n} = \cos t\ ,\ (t \in \mathbf{R})$$

$$c_0 = 0\ , c_1 = 1 \quad \longrightarrow \quad x_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} = \sin t\ ,\ (t \in \mathbf{R}).$$

Eta hauxe da ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra:

$$x(t) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1},\ c_0, c_1 \in R$$

Adibideak.

1) Legendre-ren ekuazioa, $(1-t^2)x'' - 2tx' + \lambda x = 0$.

$$a(t) = \frac{-2t}{1-t^2}, \qquad b(t) = \frac{\lambda}{1-t^2}$$

funtzioak $t = 0$-n analitikoak dira $r = 1$ konbergentzia-erradioarekin. Beraz, $x(t)$ soluzioa ere horrelakoa izango da. Izan bedi

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n,$$

$$x'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) C_{n+1} t^n,$$

$$x''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) C_{n+2} t^n$$

eta ordezkatuz,

$$(1-t^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) C_{n+2} t^n - 2t \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) C_{n+1} t^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n = 0.$$

Orduan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) C_{n+2} t^n - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n C_n t^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n C_n t^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n = 0.$$

$n = 0$ kasurako $1 \cdot 2 \cdot C_2 + \lambda C_0 = 0$, dugu, $n = 1$ kasurako $2 \cdot 3\, C_3 - 2 \cdot 1\, C_1 \lambda C_1 = 0$ eta $n \geq 2$ kasurako

$$(n+1)(n+2)C_{n+2} - (n-1)nC_n 2nC_n + \lambda C_n = 0 \quad \longrightarrow \quad C_{n+2} = \frac{C_n(n^2+n-\lambda)}{(n+1)(n+2)}.$$

Gai bakoitiak eta bikoitiak banatuko ditugu. $C_0 = 1$ eta $C_1 = 0$ direnean, seriean gai bikoitiak agertzen dira, eta $C_0 = 0$ eta $C_1 = 1$ direnean gai bakoitiak. Horrela, bi soluzio linealki independenteak lortzen dira, eta $r = 1$ da (gutxienez) konbergentzia-erradioa.

$k \in \mathbb{N}$ baterako $\lambda = k(k+1)$ kasuan, honako hau dugu

$$C_{k+2} = \frac{C_k(k^2+k-k(k+1))}{(k+1)(k+2)} = 0,$$

beraz, k bikoitia bada, $C_{2n} = 0, \quad \forall 2n \geq k+2$ izango da, eta berretura bikoitien seriea $C_0 + C_2 t^2 + C_4 t^4 + \cdots + C_k t^k$ motako polinomioa. Ekuazio honen soluzioei Legendreren funtzioak deritze eta, oro har, ez dira funtzio elementalak.

2) Hermiteren ekuazioa, $x'' - 2tx' + \lambda x = 0$. $a(t)$ eta $b(t)$ funtzioak $\mathbf{R}$ guztian analitikoak dira, eta aurreko adibidean bezala jarraituz, honako hau dugu:

$$C_{n+2} = \frac{2n-\lambda}{(n+1)(n+2)} C_n \quad , \quad \forall n \geq 2.$$

Horrela, bi berretura-serie ditugu; bat berretura bikoitiekin eta bestea bakoitiekin, eta biak dira $\mathbf{R}$ osoan konbergenteak eta linealki independenteak.

$k \in \mathbb{N}$ balioren baterako $\lambda = 2k$ bada, Hermiteren ekuazioaren soluzio bat polinomioa da, k mailako polinomioa.

4.4 Bigarren ordenako ekuazio lineal homogeneoa. Puntu singular erregularrak

Izan bedi

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \tag{4}$$

ekuazio lineal homogeneoa, eta demagun t_0 puntua (4) ekuazioaren puntu singularra dela. $a(t)(t-t_0)$ eta $b(t)(t-t_0)^2$ funtzioak t_0 puntuan analitikoak direnean, t_0 puntua (4) ekuazio diferentzialaren puntu singular erregularra dela esaten da.

Adibidez, Eulerren bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal homogeneorako, hau da,

$$t^2x'' + a_1tx' + a_2x = 0$$

ekuaziorako, $t_0 = 0$ puntua puntu singular erregularra da. Dakigunez, ekuazio horren soluzioak $x(t) = t^m$ edo $x(t) = t^m \ln t, (t > 0)$ tipokoak izan daitezke; m zenbakia erreala denean, horrelakoak dira aurreko Eulerren ekuazioaren soluzio errealak. Oro har, $t_0 = 0$ puntua (4) ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren puntu singular erregularra denean, (4) ekuazioaren soluzioren bat

$$x(t) = t^m \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n \right) \quad , \quad C_0 \neq 0$$

formakoa den aztertuko dugu. Adierazpen horri Frobenius-en seriea edo berretura-serie orokortua deritzo ($t_0 = 0$ puntuaren inguruan).

Ekuazio diferentzialaren puntu singular erregularra $t_0 \neq 0$ denean, aldagai independentean translazioa eginez t_0 0 bihurtuko denez, hurrengo teoremako enuntziatuan 0 izango da puntu singular erregularra.

10. teorema. *Demagun $t_0 = 0$ puntua*

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \tag{4}$$

ekuazioaren puntu singular erregularra dela, hots,

$$ta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad (ta(t)|_{t=0} = a_0)$$

$$t^2b(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \quad (t^2b(t)|_{t=0} = b_0)$$

konbergenteak $|t| < r, (r > 0)$ tartean. Demagun m_1, m_2 $(m_2 \leq m_1)$ zenbaki errealak $m(m-1) + ma_0 + b_0 = 0$ ekuazio erakuslearen erroak direla. ($m(m-1) + ma_0 + b_0 = f(m)$ idatziko dugu). Orduan,

- *(4) ekuazio diferentzialaren soluzio bat gutxienez, Frobeniusen serie baten bidez adieraz daiteke, hau da:*

  $$x_1(t) = t^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n, \quad C_0 \neq 0,$$

  non $\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$ seriea $|t| < r$ tartean konbergentea baita.

- *(4) ekuazio diferentzialaren bigarren soluzio linealki independentearen adierazpen tipoa $m_1 - m_2$ kenduraren balioaren arabera finkatuko da.*

  i) $m_1 - m_2 \neq 0, 1, 2, \ldots$ denean, bigarren soluzio linealki independentea Frobeniusen seriea da:

  $$x_2(t) = t^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} D_n t^n, \quad D_0 \neq 0$$

  eta $\sum_{n=0}^{\infty} D_n t^n$ seriea $|t| < r$ tartean konbergentea da.

  ii) $m_2 = m_1 = m$ denean, ez da existitzen Frobeniusen serierik (4) ekuazio diferentzialaren soluzioarekin eta x_1 soluzioarekin linealki independentea denik. Kasu horretan, bigarren soluzio linealki independentea ordenaren beherapen-metodoaren bidez kalkula daiteke, eta honelakoa da bere adierazpena:

  $$x_2(t) = x_1(t) \ln t + t^m \sum_{n=0}^{\infty} D_n t^n, \quad D_0 \neq 0, \quad t > 0;$$

  iii) $m_1 - m_2$ kendura zenbaki arrunta denean, oro har, ezin da erabaki bigarren soluzio linealki independentea, x_2, Frobeniusen serie baten bidez adierazgarria den. Batzuetan bigarren soluzio linealki independentea, x_2, Frobeniusen serie bat izango da, baina ez beti.

  Horrela, bada,

  $$x_2(t) = Cx_1(t) \ln t + t^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} D_n t^n, \quad D_0 \neq 0, \quad t > 0$$

  dugu, batzuetan $C = 0$ eta beste batzuetan $C \neq 0$ izanik.

Oharra. $\{C_n\}$ eta $\{D_n\}$ koefizienteak kalkulatzeko formula errepikaria ezagutzen da; C_n koefizienteetarako m_1-i lotuta eta D_n-rako m_2 balioari lotuta.

Adibidea. Ebatz dezagun $tx'' + (t-6)x' - 3x = 0$ ekuazio diferentziala $t_0 = 0$ puntuaren inguruan. $t_0 = 0$ ekuazioaren puntu singular erregularra da:

$$a(t) = \frac{t-6}{t} \quad \longrightarrow \quad ta(t) = t - 6, \quad a_0 = -6$$

$$b(t) = \frac{-3}{t} \quad \longrightarrow \quad t^2 b(t) = -3t, \qquad b_0 = 0$$

Ekuazio erakuslearen erroak kalkulatuko ditugu:

$$m(m-1)+a_0m+b_0=m(m-1)-6m=0 \quad \longrightarrow \quad m_1=7, m_2=0.$$

Teoremaren arabera, ekuazio diferentzialaren soluzio batek, gutxienez, honako adierazpen hau onartzen du:

$$x(t)=t^m\sum_{n=0}^{\infty}C_nt^n=\sum_{n=0}^{\infty}C_nt^{n+m}, \quad C_0\neq 0,$$

beraz,

$$\begin{aligned}
&tx''+(t-6)x'-3x\\
&=t\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(n+m-1)C_nt^{n+m-2}+t\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)C_nt^{n+m-1}\\
&-6\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)C_nt^{n+m-1}-3\sum_{n=0}^{\infty}C_nt^{n+m}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(n+m-1)C_nt^{n+m-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)C_nt^{n+m}\\
&-6\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)C_nt^{n+m-1}-3\sum_{n=0}^{\infty}C_nt^{n+m}\\
&=t^m\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(n+m-1)C_nt^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)C_nt^n-6\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)C_nt^{n-1}\right\}\\
&+t^m\left\{-3\sum_{n=0}^{\infty}C_nt^n\right\}\\
&=t^m\left\{[m(m-1)C_0-6mC_0]t^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+m+1)(n+m)C_{n+1}t^n+\right\}\\
&+t^m\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)C_nt^n-6\sum_{n=0}^{\infty}(n+m+1)C_{n+1}t^n-3\sum_{n=0}^{\infty}C_nt^n\right\}\\
&=t^m\left\{[m(m-7)C_0]t^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}t^n[(n+m+1)(n+m-6)C_{n+1}+(n+m-3)C_n]\right\}\\
&=0.
\end{aligned}$$

$C_0\neq 0$ hartu dugu eta, koefizienteak identifikatuz, honako infinitu ekuazio hauek lortuko ditugu:

$$m(m-7)=0$$

$$(n+m+1)(n+m-6)C_{n+1}+(n+m-3)C_n=0, \quad \forall n\geq 0.$$

Orain, $m=7$ baliorako:

$$C_{n+1}=\frac{-(n+4)C_n}{(n+8)(n+1)}, \quad \forall n\geq 0,$$

hau da,

$$C_n=\frac{-(n+3)C_{n-1}}{(n+7)n}=\cdots=\frac{(-1)^n(n+3)(n+2)\cdots 4}{(n+7)(n+6)\cdots 8n!}C_0, \quad \forall n\geq 1;$$

beraz, honako hau da lehen soluzioa:

$$x_1(t)=t^7\ C_0\ \left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+3)(n+2)\cdots 4}{(n+7)(n+6)\cdots 8\ n!}t^n\right).$$

$m=0$ baliorako formula errepikaria:

$$(n+1)(n-6)D_{n+1}+(n-3)D_n=0, \quad \forall n\geq 0,$$

eta

$$\begin{gathered}
n=0 \quad\longrightarrow\quad -6D_1-3D_0=0\\
n=1 \quad\longrightarrow\quad -10D_2-2D_1=0\\
n=2 \quad\longrightarrow\quad -12D_3-D_2=0\\
n=3 \quad\longrightarrow\quad -12D_4=0 \quad\longrightarrow\quad D_4=0\\
n=4 \quad\longrightarrow\quad -10D_5+D_4=0 \quad\longrightarrow\quad D_5=0\\
n=5 \quad\longrightarrow\quad -6D_6+2D_5=0 \quad\longrightarrow\quad D_6=0\\
n=6 \quad\longrightarrow\quad 0D_7+3D_6=0 \quad\longrightarrow\quad D_7 \text{ edozein.}
\end{gathered}$$

$D_7=0$ aukeratuko dugu eta

$$D_0\neq 0, D_7=0 \quad\longrightarrow\quad D_n=0, \quad \forall n\geq 4$$

dugu. Bigarren soluzio linealki independentea

$$x_2(t)=\left(1-\frac{1}{2}t+\frac{1}{10}t^2-\frac{1}{120}t^3\right)D_0$$

da. Beraz, soluzio orokorra:

$$x(t) = t^7 C_0(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+3)(n+2)\cdots 4}{(n+7)(n+6)\cdots 8\ n!} t^n) + D_0 \left(1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{10}t^2 - \frac{1}{120}t^3\right).$$

Besselen ekuazioa. Ekuazio hau fisika matematikoaren aplikazio anitzetan agertzen da. Honela adierazten da p ordenako Besselen ekuazioa

$$x'' + \frac{1}{t}x' + \frac{t^2 - p^2}{t^2}x = 0, \quad (p \geq 0)$$

eta $t = 0$ puntua singularra da. Baina $ta(t) = 1$ eta $b(t) = t^2 - p^2$ analitikoak dira $t = 0$-n, beraz, $t = 0$ puntua puntu singular erregularra da. Hasierako ekuazioa

$$m(m-1) + m - p^2 = 0 \ \longrightarrow \ \begin{cases} m_1 = p \\ m_2 = -p \end{cases}$$

da eta Frobeniusen metodoak

$$x_1(t) = t^p \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, t^n \quad , \quad C_0 \neq 0$$

motako soluzioa duela baieztatzen du. Agertzen den errekurrentzia-formula

$$C_0 \neq 0\ ,\ C_1 = 0\ ,\ n(2p+n)C_n + C_{n-2} = 0,\ \forall n \geq 2$$

da, hau da,

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n C_0}{2^{2n} n!(n+p)(n+p-1)\ldots(p+1)}, \qquad \forall n \geq 1.$$

$C_0 = \dfrac{1}{2^p p!}$ kasurako lortzen den funtzioari p ordenako eta lehen motako Besselen funtzioa deritzo, eta honako hau da:

$$J_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t/2)^{2n+p}}{n!(n+p)!}.$$

Besselen funtziorik erabilgarrienak zero eta bat ordenakoak dira

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}, \quad J_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+1},$$

eta $J_0'(t) = -J_1(t)$ berdintza egiaztatzen dute. ($p!$ adierazpena soilik p zenbaki osoa eta positiboa denean dago definituta). Gainerako balioen interpretazioa Eulerrren Gamma funtzioaren bidez egiten da:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}\, e^{-t}\, dt, \qquad p > 0.$$

Eta $\forall p \in \mathbf{R}$, $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ da. Beraz, n zenbaki arrunta bada $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$, eta $\Gamma(1) = 1$, izango dugu.

Ekuazioaren lehenengo soluzioa:

$$J_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t/2)^{2n+p}}{n!\Gamma(n+p+1)}.$$

Bigarren soluzio linealki independentea, ($m_2 = -p$ baliorako eta $2p \neq 0$ eta $2p$ zenbaki osoa ez denean),

$$J_{-p}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t/2)^{2n-p}}{n!\Gamma(n-p+1)}$$

izango da.

Infinituaren inguruan. Batzuetan,

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \tag{4}$$

ekuazio diferentzialaren soluzioak t aldagaiaren balio handietarako aztertu nahi dira; hau da, $|t| > r$ balioetarako. Kasu honetan

$$s = \frac{1}{t}$$

ordezkapena eginez, ekuazio diferentzial berriaren soluzioak s-ren balio txikietarako aztertu beharko dira, hau da $s_0 = 0$ puntuaren ingurunean; kasu hori aurrean aztertu dugu. Funtzio ezezagun berria $y(s)$ izendatuz, horrek honako ekuazio diferentzial hau egiaztatu beharko du:

$$x(t) \quad \longrightarrow \quad x(\frac{1}{s}) = y(s), \quad x(t) = y(s(t))$$

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} = y'(s).(-s^2)$$

$$x'' = \frac{dx'}{dt} = y''(s)s^4 + 2y'(s)s^3$$

beraz,

$$y''(s) + y'(s)\left(\frac{2}{s} - \frac{a(1/s)}{s^2}\right) + y(s)\frac{b(1/s)}{s^4} = 0. \tag{7}$$

Infinitu puntua erregularra edo singularra dela esaten da, 0 puntua (7) ekuazio diferentzialaren puntu erregularra edo singularra denean, hurrenez hurren.

$s_0 = 0$ puntuaren inguruko (7) ekuazioaren $y(s)$ soluzioetan aldaketa deseginez, $t_0 = \infty$ puntuaren inguruko (4) ekuazioaren soluzioak lortuko ditugu.

Bigarren ordenako ekuazio lineal interesgarriak:

Legendreren ekuazioa: $(1-t^2)x'' - 2tx' + v(1+v)x = 0, \quad (v \geq 0)$

Hermiteren ekuazioa: $x'' - 2tx' + \lambda x = 0, \quad (\lambda \in \mathbf{R})$

Chebyshev-en ekuazioa: $(1-t^2)x'' - tx' + \alpha^2 x = 0, \quad (\alpha \in \mathbf{R})$

Besselen ekuazioa: $t^2x'' + tx' + (t^2 - p^2)x = 0, \quad (p \geq 0)$

Laguerre-ren ekuazioa: $tx'' + (1-t)x' + \lambda x = 0, \quad (\lambda \in \mathbf{R})$.

Ariketa. 1) Aurreko lehen hiru ekuazio diferentzialetarako $t_0 = 0$ puntua puntu erregularra da; kalkulatu bi soluzio linealki independenteak berretura-seriez adierazita. 2) Azken bi ekuazioetarako, $t_0 = 0$ puntua puntu singular erregularra da; kalkulatu zenbat soluzio linealki independente eman daitezkeen Frobeniusen seriez adierazita, parametroen balioen arabera.

4.5 ARIKETAK

1.- Ebatz ezazu

$$\begin{cases} (t^2+1)x'' + tx' - x = 0 \\ x(0) = a \\ x'(0) = b \end{cases}$$

problema t-ren berretura-serieen bidez.

2.- Ebatz ezazu berretura-serieen bidez $x'' - (1+t)x = 0$ ekuazio diferentziala, $t = 0$ puntuaren ingurunean.

3.- Aurkitu honako ekuazio diferentzial hauen puntu singularrak eta singular erregularrak:

(a) $(t^2-4)^2x'' + (t-2)x' + x = 0.$

(b) $t^2(t+1)^2x'' + (t^2-1)x' + 2x = 0.$

(c) $(1-t^2)x'' - 2tx' + 30x = 0.$

(d) $tx'' - 2tx' + 5x = 0.$

4.- λ zenbakia osoa eta ez-negatiboa denean, $tx'' + (1-t)x' + \lambda x = 0$ Laguerreren ekuazioak t aldagaiko soluzio polinomiko bat du; aurki ezazu soluzio hori $\lambda = 2, 3$ balioetarako.

5.- Ebatz itzazu honako ekuazio diferentzial hauek $t = 0$ puntuaren inguruan:

(a) $3tx'' + x' - x = 0$.

(b) $tx'' + (t-6)x' - 3x = 0.$

(c) $tx'' + 3x' - x = 0.$

(d) $2tx'' + (1+t)x' + x = 0$.

6.- Kalkula ezazu $x'' + tx' + (2t-1)x = 0$ ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra $t = 1$ balioaren ingurunean.

7.- Aurki ezazu, berretura-serieen bidez, $(t^2+4)x'' + tx = 0$ ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra $t = 0$ puntuaren ingurunean.

8.- Aurki ezazu $8t^2x'' + 10tx' + (t-1)x = 0$ ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra $t = 0$ puntuaren inguruan.

9.- Izan bedi Chebysheven ekuazio diferentziala

$$(1-t^2)x'' - t\,x' + \alpha^2\,x = 0$$

non α parametro erreala baita. Kalkula itzazu ekuazioaren bi soluzio linealki independenteak $t=0$ puntuaren inguruan (adierazi konbergentzia-eremua). Zehaztu α-ren balioak zeinentzat ekuazio diferentzialak soluzio polinomiko ez-nuluren bat baitu.

10.- Izan bedi Besselen ekuazio diferentzial hiperbolikoa:

$$x'' + \frac{1}{t}\,x' - \left(1 + \frac{\alpha^2}{t^2}\right)x = 0$$

Zehaztu zenbat soluzio linealki independente adieraz daitezkeen Frobeniusen serie bidez $\alpha \geq 0$ parametroaren balioen arabera $t=0$ puntuaren inguruan.

11.- 1) Honako lehen hiru ekuazio diferentzial hauetarako $t=0$ puntu erregularra da; kalkulatu bi soluzio linealki independenteak berretura-seriez adierazita. 2) Azken bi ekuazioetarako, $t=0$ puntu singular erregularra da; kalkulatu zenbat soluzio linealki independente eman daitezkeen Frobeniusen seriez adierazita, parametroen balioen arabera:
Legendreren ekuazioa: $(1-t^2)x'' - 2tx' + v(1+v)x = 0, (v \geq 0)$
Hermiteren ekuazioa: $x'' - 2tx' + \lambda x = 0, \qquad (\lambda \in \mathbf{R})$
Chebyshevren ekuazioa: $(1-t^2)x'' - tx' + \alpha^2 x = 0, \quad (\alpha \in \mathbf{R})$
Besselen ekuazioa: $t^2x'' + tx' + (t^2 - p^2)x = 0, \quad (p \geq 0)$
Laguerreren ekuazioa: $tx'' + (1-t)x' + \lambda x = 0, \quad (\lambda \in \mathbf{R})$

5. Kapitulua

Sistema diferentzial linealak

5.1 Sarrera

Gai honetan, lehen ordenako ekuazio diferentzialetako sistema (esplizitua)

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \\ x_2'(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \\ \ldots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \end{cases}$$

aztertuko dugu, non $f_i : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R^n} \longrightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, n$ funtzio jarraituak baitira; funtzio ezezagunak $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ funtzioak dira.

Bestalde, enegarren ordenako ekuazio diferentzial esplizitua n ekuazioetako sistema diferentzial baten baliokidea da; hau da,

$$y^{n)} = f(t, y, y', y'', \ldots, y^{n-1)})$$

ekuazio diferentzialean $y(t) = x_1(t)$, $y'(t) = x_2(t) \ldots y^{n-1)}(t) = x_n(t)$ eginez, honako sistema

diferentzial hau lortuko dugu:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \dots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

Gai honetan sistema diferentzial linealak aztertuko ditugu; hots, honako forma hau dutenak:

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ \dots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

non $a_{ij}(t), b_i(t) : [a,b] \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $(i,j = 1, \dots, n)$ funtzio jarraituak baitira. Matrizeak erabiliz adieraz dezakegu sistema diferentzial lineal hori:

$$\overline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \ , \ A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t)\, a_{12}(t) \dots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t)\, a_{22}(t) \dots a_{2n}(t) \\ \dots \\ a_{n1}(t)\, a_{n2}(t) \dots a_{nn}(t) \end{pmatrix} \ , \ \overline{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \dots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

izendatuz, sistema diferentziala honela idazten da:

$$(3) \qquad \overline{x}'(t) = A(t) \cdot \overline{x}(t) + \overline{b}(t)$$

Soluzioa $\overline{x}(t) : [a,b] \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R^n}$ formako funtzioa da.

$\overline{b}(t) \equiv \overline{0}$ denean (funtzio bektorial nulua) sistema homogeneoa dela esaten da.

11. teorema. *Izan bedi (2) (edo (3)) sistema diferentzial lineala,* $a_{ij}(t), b_i(t) : [a,b] \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *funtzio jarraituak direlarik* $(i,j = 1, \dots, n)$. *Orduan, edozein* $t_0 \in [a,b]$, *eta edozein* $\overline{\xi}_0 \in \mathbf{R^n}$ *baliotarako,*

$$\begin{cases} \overline{x}'(t) = A(t) \cdot \overline{x}(t) + \overline{b}(t) \\ \overline{x}(t_o) = \overline{\xi}_0 \end{cases}$$

Cauchyren problemaren soluzio bakar bat dago; soluzio hori $[a,b]$ tartean definituta dago eta, sarritan, $\overline{x}(t;t_0,\overline{\xi}_0)$ idazten da.

5.2 Sistema lineal homogeneoak

12. teorema. *Izan bedi $A(t)$, $n\times n$ ordenako funtzio matrizial erreala $[a,b]$ tartean definitua eta jarraitua. Orduan*

$$\overline{x}'(t) = A(t)\cdot\overline{x}(t) \quad , \quad (t\in[a,b]) \tag{4}$$

sistema lineal homogeneoaren soluzio multzoa, V, n dimentsioko espazio bektoriala da ($V\subset C^1([a,b]\to\mathbf{R^n})$).

Definizioa. V espazio bektorialaren edozein oinarri (4) sistema lineal homogeneoaren oinarrizko soluzio-sistema da, eta oinarrizko soluzioak zutabe gisa hartuz osatzen den matrizeari (4) sistema diferentzial homogeneoaren oinarrizko matrize deritzo. Horrela, bada, $\overline{x}'(t) = A(t)\cdot\overline{x}(t)$ sistema lineal homogeneoaren oinarrizko soluzio-sistema bat $\{\overline{x}_1(t),\overline{x}_2(t),\ldots,\overline{x}_n(t)\}$ bada, orduan

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t),\ x_{12}(t),\ \ldots\ x_{1n}(t) \\ x_{21}(t),\ x_{22}(t),\ \ldots\ x_{2n}(t) \\ \cdots \\ x_{n1}(t),\ x_{n2}(t),\ \ldots\ x_{nn}(t) \end{pmatrix} = (\overline{x}_1(t),\overline{x}_2(t),\ldots,\overline{x}_n(t))$$

matrizea, non i-garren zutabea $\{\overline{x}_i(t)\}$ funtzioa baita (i=1..n), sistema diferentzialaren oinarrizko matrize bat da.

(4) sistema diferentzialaren soluzio orokorra

$$\overline{x}(t) = C_1\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \cdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \cdots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix} + \cdots + C_n\begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \cdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix} = X(t)\cdot\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \cdots \\ C_n \end{pmatrix} = X(t)\cdot\overline{\xi}$$

da, $\overline{\xi}$ hori $C_1,C_2,\ldots,C_n$ osagaietako hautazko $\mathbf{R^n}$-ko bektorea izanik.

Izan bedi $t_0 \in [a,b]$. (4) sistema diferentzial lineal homogeneoaren oinarrizko matrize bat t_0 puntuan identitate-matrizea denean, t_0 puntuarekiko (edo t_0 puntuan) matrize nagusia dela esaten da (hau da, $X(t_0) = I$).

13. teorema. *Izan bitez* $\{\overline{x}_1(t), \overline{x}_2(t), \ldots, \overline{x}_n(t)\}$ *funtzioak* $\overline{x}'(t) = A(t) \cdot \overline{x}(t)$ *sistema diferentzial lineal homogeneoaren* n *soluzio eta* $A(t)$, $n \times n$ *ordenako funtzio matrizial erreala* $[a,b]$ *tartean definitua eta jarraitua; orduan,* $\{\overline{x}_1(t), \overline{x}_2(t), \ldots, \overline{x}_n(t)\}$ *funtzio multzoa sistema diferentzialaren oinarrizko soluzio-sistema bat da, baldin eta soilik baldin,* $\exists t_o \in [a,b]$, *non* $\mathrm{detX}(\mathrm{t}_0) = \det(\overline{\mathrm{x}}_1(\mathrm{t}_0), \overline{\mathrm{x}}_2(\mathrm{t}_0) \ldots, \overline{\mathrm{x}}_\mathrm{n}(\mathrm{t}_0)) \neq 0$ *baita.*

Definizioa. Izan bitez $\{\overline{x}_1(t), \overline{x}_2(t), \ldots, \overline{x}_n(t)\}$ funtzioak $\overline{x}'(t) = A(t) \cdot \overline{x}(t)$ sistema lineal homogeneoaren n soluzio. $W(t) = W(\overline{x}_1(t), \overline{x}_2(t), \ldots, \overline{x}_n(t)) = \det(\overline{\mathrm{x}}_1(\mathrm{t}), \overline{\mathrm{x}}_2(\mathrm{t}) \ldots, \overline{\mathrm{x}}_\mathrm{n}(\mathrm{t}))$ funtzioari $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n\}$ funtzioen wronskiarra deritzo.

14. teorema. *(Jacobi-Liouville-en formula). Izan bitez* $\{\overline{x}_1(t), \overline{x}_2(t), \ldots, \overline{x}_n(t)\}$ *funtzioak,* $[a,b]$ *tartean definitutako* $\overline{x}'(t) = A(t) \cdot \overline{x}(t)$ *sistema lineal homogeneoaren* n *soluzio,* $t_0 \in [a,b]$, *eta* $A(t)$, $n \times n$ *ordenako funtzio matrizial erreala* $[a,b]$ *tarten definitua eta jarraitua. Orduan:*

$$W'(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t) \right) W(t), \quad \forall t \in [a,b].$$

Hots, $W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} TrA(s)\, ds}$, *non* $TrA(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)$ *baita.*

Horren ondorioz, $\{\overline{x}_1(t), \overline{x}_2(t), \ldots, \overline{x}_n(t)\}$ *funtzioak* $\overline{x}'(t) = A(t) \cdot \overline{x}(t)$ *sistema lineal homogeneoaren oinarrizko soluzio-sistema bat dira, baldin eta soilik baldin,* $W(t) \neq 0, \quad \forall t \in [a,b]$ *bada.*

Oharrak. Izan bedi $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n\}$, $\overline{x}' = A(t) \cdot \overline{x}$ sistema diferentzialaren oinarrizko soluzio-sistema bat, eta izan bedi $X(t) = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ oinarrizko matrize elkartua.

1) $X(t)$ matrizeko zutabeak $\overline{x}' = A(t) \cdot \overline{x}$ sistema diferentzialaren soluzioak direnez, $\overline{x}_i' = A(t) \cdot \overline{x}_i$, $(i = 1, \ldots, n)$ egiaztatzen dute eta, beraz, $X(t)$ matrizeak ekuazio diferentzial matrizial hau egiaztatzen du:

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t).$$

2) Izan bedi $B \quad n \times n$ ordenako matrize konstante bat eta izan bedi $Y(t) = X(t) \cdot B$, orduan

$$Y'(t) = X'(t) \cdot B = (A(t) \cdot X(t)) \cdot B = A(t) \cdot (X(t) \cdot B) = A(t) \cdot Y(t)$$

dugu; beraz, $Y(t)$ matrizearen zutabeak sistema diferentzialaren soluzioak dira eta matrize hori sistema diferentzialaren oinarrizko matrize bat da, baldin eta soilik baldin, $\det B \neq 0$ bada.

3) Orain, $t_0 \in [a, b]$ puntuan oinarrizko matrize nagusia kalkulatuko dugu. Har dezagun $Z(t) = X(t) \cdot B$ ($B \quad n \times n$ ordenako matrize konstantea izanik) eta kalkulatuko dugu B hori $Z(t_0) = I$ izan dadin:

$$Z(t_0) = I \leftrightarrow X(t_0) \cdot B = I \leftrightarrow B = X^{-1}(t_0);$$

beraz, $Z(t) = X(t) \cdot X^{-1}(t_0)$ da sistema diferentzial homogeneoaren oinarrizko matrize nagusia t_0-n.

Horren ondorioz,

$$\begin{cases} \overline{x}' = A(t) \cdot \overline{x} \\ \overline{x}(t_0) = \overline{\xi} \end{cases}$$

Cauchyren problemaren soluzioa (bakarra denean) honela adierazten da: $\overline{x}(t; t_0, \overline{\xi}) = X(t) \cdot X^{-1}(t_0) \cdot \overline{\xi}$.

5.3 Sistema lineal ez-homogeneoak

15. teorema. *Izan bitez*

$$\overline{x}' = A(t) \cdot \overline{x} + \overline{b}(t) \quad , \quad t \in [a, b] \tag{5}$$

sistema diferentzial lineal ez-homogeneoa, $A(t)$ funtzio matrizial jarraitua $[a, b]$-n, eta $\overline{b}(t)$ funtzio jarraitua $[a, b]$-n. Sistema ez-homogeneoaren edozein bi soluzioren kendura sistema homogeneo elkartuaren soluzioa da eta, horren ondorioz, honela adierazten da (5) sistema diferentzial ez-homogeneoaren soluzio orokorra:

$$\overline{x} = X(t) \cdot \overline{\xi} + \overline{x}_p, \quad \overline{\xi} \in \mathbf{R^n},$$

non $X(t)$ esleituriko sistema homogeneoaren oinarrizko matrizea baita eta $\overline{x}_p$ sistema ez-homogeneoaren soluzio bat.

Koefizienteen aldakuntzaren metodoa (Lagrange)

16. teorema. *Azken teoremaren hipotesiak egiaztatzen direnean, honako hau da (5) sistema diferentzial ez-homogeneoaren soluzio bat:*

$$\overline{x}_p = X(t) \cdot \int_a^t X^{-1}(s) \cdot \overline{b}(s)\, ds.$$

Integrakizuna balio bektorialeko funtzioa da.

Ariketa. n-garren ordenako ekuazio diferentzial linealaren sistema diferentzial baliokidea idatzi ondoren, konparatu 3. gaiko kontzeptuak eta teoremak gai honetako kontzeptuekin eta teoremekin.

5.4 Koefiziente konstanteetako sistema diferentzial homogeneoak

Atal honetan

$$\overline{x}' = A \cdot \overline{x}\ ,\ t \in [a,b] \tag{6}$$

sistema lineal homogeneoa aztertuko dugu, non $A = (a_{i,j})$, $n \times n$ ordenako matrizea erreala baita; hau da:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\ ,\ i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

- **n=2 kasua.** Ondoren koefiziente konstanteetako bi ekuazioetako sistema homogeneoa aztertuko dugu, hau da:

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y \\ y' = a_2 x + b_2 y \end{cases} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

$x(t) = \alpha e^{mt}$, $y(t) = \beta e^{mt}$ sistema diferentzial horren soluzio ez-nulua da, baldin eta soilik baldin,

$$\begin{cases} \alpha m e^{mt} = a_1 \alpha e^{mt} + b_1 \beta e^{mt} \\ \beta m e^{mt} = a_2 \alpha e^{mt} + b_2 \beta e^{mt} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha m = a_1 \alpha + b_1 \beta \\ \beta m = a_2 \alpha + b_2 \beta \end{cases}$$

bada; hau da,

$$\begin{cases} (a_1 - m)\alpha + b_1 \beta = 0 \\ a_2 \alpha + (b_2 - m)\beta = 0 \end{cases} \tag{9}$$

egiaztatzen bada. (9) sistemaren soluzio ez-nuluak kalkulatu nahi ditugunez, $\det(A - mI) = 0$ egiaztatu behar da (hau da, m, A matrizearen balio propioa da) eta $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ bektorea m balio propioari elkartutako bektore propio ez-nulu bat da:

$$(A - mI) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A matrizearen balio propioak bigarren mailako $m^2 - (a_1 + b_2)m + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$ ekuazioaren soluzioak direnez, bi erro izango ditugu anizkoiztasunak kontuan hartuz. Bi erroak errealak eta ezberdinak direnean, m_1, m_2, erraz lortuko ditugu gure sistema diferentzialaren bi soluzio linealki independenteak $x(t) = \alpha_1 e^{m_1 t}$, $y(t) = \beta_1 e^{m_1 t}$, eta $x(t) = \alpha_2 e^{m_2 t}$, $y(t) = \beta_2 e^{m_2 t}$. Erroak konplexu konjugatuak direnean, hasieran, bi soluzio konplexu lortuko ditugu, eta soluzio konplexu baten zati erreala eta zati irudikaria dira (8) sistema diferentzial homogeneoaren bi soluzio erreal linealki independenteak. Erro erreala, m, bikoitza denean, soluzio bat $x(t) = \alpha e^{mt}$, $y(t) = \beta e^{mt}$ da, eta bigarren soluzio linealki independenteak

$$\begin{pmatrix} c + dt \\ e + ft \end{pmatrix} e^{mt}$$

formako adierazpena izango du ($c, d, e, f \in \mathbf{R}$).

Adibidea. Izan bedi honako sistema hau:

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 4x - 2y \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aurki ditzagun bere balio propioak:

$$|A - mI| = \begin{vmatrix} 1-m & 1 \\ 4 & -2-m \end{vmatrix} = m^2 + m - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} m_1 = -3 \\ m_2 = 2. \end{cases}$$

$m = m_1 = -3$ kasurako, $(1-m)A_1 + B_1 = 0 \rightarrow 4A_1 + b_1 = 0 \rightarrow A_1 = 1,\ B_2 = -4$ dugu. Eta $m = m_2 = 2$ kasurako $-A_2 + B_2 = 0 \rightarrow A_2 = 1,\ B_2 = 1$. Beraz, soluzio orokorra honako hau da:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

- n **ekuazioetako sistema homogeneoa: balio propioen eta bektore propioen metodoa.** Izan bedi

$$\overline{x}' = A \cdot \overline{x}\ ,\ t \in [a,b] \tag{6}$$

koefiziente konstanteetako sistema lineal homogeneoa, non $A = (a_{i,j})$, $n \times n$ ordenako matrizea erreala baita. Sistema diferentziala ebazteko, honako emaitz hauek erabil daitezke:

Jordan-en teorema eta ondorioak. Izan bedi A, $n \times n$ ordenako zenbaki erreal edo konplexuetako matrizea. Orduan, matrize konplexu ez-singularra, P, existitzen da, non $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$ baita, eta J matrizeak (blokez diagonala) honako adierazpen hau baitu:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & J_2 & 0 \dots 0 \\ & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 \dots J_h \end{pmatrix},$$

0 elementuak matrize nuluak dira eta J_k bakoitza tipo honetako matrizea da:

$$J_k = \begin{pmatrix} m_k & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & m_k & 1 \dots 0 \\ & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 \dots m_k \end{pmatrix}.$$

Jordanen J matrizeak duen bloke kopurua h bada, bloke horien dimentsioen batura n izango da; hau da, $\forall k : 1 \leq k \leq h$, $1 \leq \dim J_k = l_k \leq n$ da eta $l_1 + l_2 + ... + l_h = n$.

J_k blokea A matrizearen m_k balio propioari dagokio (m_k erreala edo konplexua). J_k bloke bakoitzari loturik, hots, k bakoitzerako, $\mathbb{C}^n$-ko l_k bektore konplexu n-dimentsional linealki independenteak, $\overline{v}_1^k, \overline{v}_2^k, \ldots, \overline{v}_{l_k}^k$ existitzen dira, eta honako l_k baldintza hauek egiaztatzen dituzte:

$$(A - m_k I) \cdot \overline{v}_1^k = \overline{0}, \quad (\overline{v}_1^k \text{ bektore propioa } m_k\text{−ri lotua})$$

$$(A - m_k I) \cdot \overline{v}_2^k = \overline{v}_1^k$$

$$(A - m_k I) \cdot \overline{v}_3^k = \overline{v}_2^k$$

$$....$$

$$(A - m_k I) \cdot \overline{v}_{l_k}^k = \overline{v}_{l_k-1}^k.$$

Eta $V_k = \{\overline{v}_1^k, \overline{v}_2^k, \ldots, \overline{v}_{l_k}^k\}$ idatziz, $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_h$ bektore-sistema askea da; hots, V hori $\mathbb{C}^n$-ren oinarri bat da.

Aurreko baldintzen ondorioz, sistema diferentzial homogeneoen soluzioei buruz honako emaitza hauek ditugu:

2. korolarioa. *Izan bitez A, $n \times n$ ordenako zenbaki errealetako matrizea eta J bere Jordanen matrizea aurreko puntuan definitua. $\forall k : 1 \leq k \leq h$ bakoitzerako $\overline{x}' = A \cdot \overline{x}$ sistema diferentzialaren l_k soluzio linealki independente hauek lortuko ditugu:*

$$\overline{v}_1^k \, e^{m_k t},$$

$$(\overline{v}_2^k + t \; \overline{v}_1^k) \, e^{m_k t},$$

$$(\overline{v}_3^k + t \; \overline{v}_2^k + \frac{t^2}{2!} \; \overline{v}_1^k) \, e^{m_k t},$$

$$\ldots$$

$$(\overline{v}_{l_k}^k + t \; \overline{v}_{l_k-1}^k + \cdots + \frac{t^{l_k-1}}{(l_k-1)!} \; \overline{v}_1^k) \, e^{m_k t}.$$

Modu honetan, $k = 1, 2, \ldots, h$ guztietarako lortutako soluzioen multzoa $\overline{x}' = A \cdot \overline{x}$ sistema diferentzialaren soluzioen oinarri bat da, eta horietariko batzuk soluzio konplexu

(ez-errealak) izan daitezke. Guk balio errealak hartzen dituzten soluzioak nahi baditugu, A matrizearen elementu guztiak errealak direnez, beti existituko dira soluzio errealak; $m_1 = a + ib \ \ (b \neq 0)$ A matrizearen balio propioa bada, $m_2 = a - ib \ \ (b \neq 0)$ ere balio propioa izango da eta $\dim J_1 = \dim J_2$*; horren ondorioz, sistema diferentzialaren soluzio errealak lortzeko nahikoa da J_1 blokeari dagozkion soluzioen zati errealak eta zati irudikariak aukeratzea. J matrizea bakarra da (blokeen ordenarekiko izan ezik).*

- **Kasu partikularra:** $n = 3$. A matrizea 3×3 tamainakoa da eta dimentsio horretan dauden kasu ezberdinak aztertuko ditugu: $\det(A - mI) = 0$ bada, hiru erro izango ditugu eta horietatik bat beti izango da erreala. Izan bedi $m_1 \in \mathbf{R}$ erro erreal hori.

  (i) m_1, m_2, m_3 balio propioak ezberdinak badira, orduan, $J = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}$.
  Horrek adierazten digu A matrizea diagonaliza daitekeela. $m_1 \in \mathbf{R}$ bada eta $m_2 \neq m_3 \neq m_1$ $\mathbf{R}$-n (edo $\mathbb{C}$-n) badaude, orduan, $\overline{x}_1 \in \mathbf{R^3}$ eta $\overline{x}_2, \overline{x}_3$ $\mathbf{R^3}$-n (edo $\mathbb{C}^3$-n) egongo dira, eta $A \cdot \overline{x}_i = m_i\, \overline{x}_i, \ i = 1, 2, 3$ beteko dute. Beraz,
  a) $m_2, m_3 \in \mathbf{R}$ badira, $\{\overline{x}_1\, e^{m_1 t}; \overline{x}_2\, e^{m_2 t}; \overline{x}_3\, e^{m_3 t}\}$ sistema fundamental bat izango da. b) $m_2 = a + ib$ eta $m_3 = a - ib$ $(b \neq 0)$ badira, $\overline{x}_2^*$, $\overline{x}_3^*$, existituko dira, non

  $$\left\{\overline{x}_1\, e^{m_1 t}, \mathrm{Re}\left(\overline{x}_2^*\, e^{(a+ib)t}\right\}\right), \mathrm{Im}\left(\overline{x}_2^*\, e^{(a+ib)t}\right)\Big\}$$

  soluzioen sistema fundamental bat baita.

  (ii) $m_2 = m_3 \neq m_1$ badira, guztiak errealak izango dira, eta $J = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 1 \\ 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix}$
  bada, $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3\} \in \mathbf{R^3}$ existitzen dira non $A \cdot \overline{x}_1 = m_1\, \overline{x}_1$, $A \cdot \overline{x}_2 = m_2\, \overline{x}_2$, $A \cdot \overline{x}_3 = m_2\, \overline{x}_3 + \overline{x}_2$ eta $\{\overline{x}_1\, e^{m_1 t}; \overline{x}_2\, e^{m_2 t}; (\overline{x}_3 + t\, \overline{x}_2)\, e^{m_2 t}\}$ sistema fundamentala baita. Baldin $J = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix}$ bada, linealki independenteak diren bi bektore propio existitzen dira m_2-rekin erlazionatuta daudenak, hau da, $A \cdot \overline{x}_2 = m_2\, \overline{x}_2$, $A \cdot \overline{x}_3 = m_2\, \overline{x}_3$ eta oinarrizko sistema $\{\overline{x}_1\, e^{m_1 t}; \overline{x}_2\, e^{m_2 t}; \overline{x}_3\, e^{m_2 t}\}$ da.

(iii) $m_1 = m_2 = m_3 = m \in \mathbf{R}$ badira, Jordanen matrizea hiru motatakoa izan daiteke: bloke batekoa, bloke bikoa edo hiru blokekoa. Lehenengo kasuan, $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3\} \in \mathbf{R^3}$ existitzen dira non $A \cdot \overline{x}_1 = m\,\overline{x}_1$, $A \cdot \overline{x}_2 = m\,\overline{x}_2 + \overline{x}_1$, $A \cdot \overline{x}_3 = m\,\overline{x}_3 + \overline{x}_2$ baitira eta oinarrizko sistema $\left\{\overline{x}_1\, e^{mt}; (\overline{x}_2 + t\ \overline{x}_1)\, e^{mt}; (\overline{x}_3 + t\ \overline{x}_2 + \frac{t^2}{2!}\ \overline{x}_1)\, e^{mt}\right\}$ baita. J-k bi bloke dituenean, (ii) kasuan gaude. J-k hiru bloke dituenean, (i) kasuan gaude. Blokeen kopurua bektore propioek sortutako espazioaren dimentsioaren araberakoa da.

5.5 Funtzio esponentzial matriziala

Definizioa. Izan bedi A , $n \times n$ ordenako matrize erreala; honela definitzen da e^{At} funtzio esponentzial matriziala:

$$e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + \ldots + A^n\frac{t^n}{n!} + \ldots. \tag{9}$$

(9) seriea (serie matriziala) konbergentea da $\mathbf{R}$ osoan.

A matrizea diagonala bada, A^n matrizea ere diagonala da, eta erraza da e^{At} funtzio esponentzialaren kalkulua.

Funtzio esponentzial matrizialaren propietateak

Izan bitez A eta B matrize konstanteak, $n \times n$ ordenakoak, eta r, s eta t zenbaki erreal edo konplexuak:

a) $e^{A0} = I$

b) $e^{A(t+s)} = e^{At}\, e^{As}$

c) $\left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At}$

d) $e^{(A+B)t} = e^{At}\, e^{Bt}$, baldin $A \cdot B = B \cdot A$ bada

e) $e^{rIt} = e^{rt} I$

f)
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{At} &= \frac{d}{dt}(I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + A^n\frac{t^n}{n!} + \ldots) \\ &= A + A^2 t + \cdots + A^n\tfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots \\ &= A(I + At + A^2\tfrac{t^2}{2!} + \ldots + A^n\tfrac{t^n}{n!} + \ldots) = Ae^{At} \end{aligned}$$

Beraz, e^{At} funtzio esponentziala $X'(t) = A \cdot X(t)$ ekuazio diferentzial matrizialaren soluzio bat da; hau da, zutabeetako funtzioak $\overline{x}' = A \cdot \overline{x}$ sistema diferentzialaren soluzioak dira.

Ondorioa. e^{At} funtzio esponentzial matriziala $\overline{x}' = A \cdot \overline{x}$ sistema diferentzial homogeneoaren oinarrizko matrize bat da, $t = 0$ puntuan nagusia dena. Beraz, $\overline{x}' = A\overline{x}$ sistema homogeneoaren soluzio orokorra

$$\overline{x}(t) = e^{At} \cdot \overline{\xi} \ , \quad \overline{\xi} \in \mathbf{R^n}$$

lez adieraz dezakegu, edo bestela:

$$\overline{x}(t) = e^{At} \cdot \overline{x}(0).$$

Ondorioz, $X(t)$ matrizea $\overline{x}' = A \cdot \overline{x}$ sistema diferentzialaren edozein oinarrizko matrize bada,

$$e^{At} = X(t) \cdot X^{-1}(0).$$

5.6 ARIKETAK

1.- Kalkula ezazu

$$\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = 5x + 3y \end{cases}$$

sistema diferentzialaren soluzio orokorra. Aurki ezazu oinarrizko matrize nagusia $t = 0$ puntuan.

2.- Ebatz itzazu honako sistema diferentzial hauek:

$a)$ $\begin{cases} x' = -3x + 4y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$; $b)$ $\begin{cases} x' = 2x + 8y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$

$c)$ $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -\frac{1}{2}x + y \end{cases}$; $d)$ $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3y \end{cases}$

$e)$ $\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = -x + y \end{cases}$; $f)$ $\begin{cases} x' = x + y - 5t + 2 \\ y' = 4x - 2y - 8t - 8 \end{cases}$

$g)$ $\begin{cases} x' = 3x - 18y \\ y' = 2x - 9y \end{cases}$; $h)$ $\overline{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \overline{x} + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$.

3.- Ebatz itzazu honako sistema eta problema diferentzial hauek:

$a)$ $\overline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overline{x}, \quad \overline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$b)$ $\begin{cases} x' = 2x + 4y + 4z \\ y' = -x - 2y \\ z' = -x - 2z \end{cases}$; $c)$ $\begin{cases} x' = -4x + y + z \\ y' = x + 5y - z \\ z' = y - 3z \end{cases}$

$d)$ $\overline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \overline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3e^t \\ 3 \end{pmatrix}$; $e)$ $\overline{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overline{x}$

$f)\quad \overline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \overline{x};$ $\qquad g)\quad \overline{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \overline{x}$

4.- Izan bedi $t\overline{x}' = A.\overline{x}$ sistema diferentziala, A matrize karratuaren elementuak zenbaki errealak izanik (Eulerren sistema lineal homogeneoa). Froga ezazu $\overline{x} = \overline{C}t^r$, $\overline{C} \in \mathbf{R^n}$ sistema diferentzialaren soluzioa dela, baldin eta soilik baldin $(A - rI)\overline{C} = \overline{0}$ bada. Horren ondorioz, ebatzi honako sistema diferentzial hauek $t > 0$ izanik:

$a)\quad t\overline{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \overline{x},\ b)\quad t\overline{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \overline{x},$

$c)\quad t\overline{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \overline{x}$

5.- i) Kalkula ezazu

$$\begin{cases} x_1'' - 3x_1' + 2x_1 + x_2' - x_2 = 0 \\ x_1' - 2x_1 + x_2' + x_2 = 0 \end{cases}$$

sistema diferentzialaren soluzio orokorra.

ii) Aurkitu $x_1(0) = 0$, $x_1'(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ baldintzak betetzen dituen sistemaren soluzioa.

6.- Ebatz ezazu honako sistema diferentzial hau a parametroaren balioen arabera:

$$\begin{cases} x' = 2y + z \\ y' = z \\ z' = ay \end{cases}$$

7.- Izan bitez

$$\begin{pmatrix} 2+t \\ 1+t^2 \\ -1-t+t^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+t^2 \\ 2t+t^2 \\ -3-t^2+t^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t^2 \\ -t+t^3 \end{pmatrix}$$

funtzio bektorialak koefiziente konstanteetako sistema diferentzial lineal ez-homogeneo baten soluzioak. Kalkula ezazu esleituriko sistema homogeneoaren oinarrizko matrize bat. Kalkula itzazu matrize horren balio propioak eta bektore propioak.

6. Kapitulua

Hastapen-balioetako problema: existentzia-teoria

6.1 Sarrera

Cauchyren problema, hastapen-balioetako problema. Izan bedi f, $n+1$ aldagaietako funtzio jarraitua, bere balioak $\mathbf{R^n}$ espaziokoak izanik, hots, $f : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R^n} \longrightarrow \mathbf{R^n}$ jarraitua; eta izan bitez $\xi_0 \in \mathbf{R^n}$, $(t_0, \xi_0) \in D$. Cauchyren problema (hastapen-balioetako problema) hau da: aurkitu $x \in C^1(I \to \mathbf{R^n})$ (I tarte erreala, t_0 -ren ingurunea) funtzioa,

$$(1) \qquad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \ , \ \forall t \in I \\ x(t_0) = \xi_0. \end{cases}$$

baldintzak egiaztatzen dituena.

Oharra. Gai honetan, $\overline{x}$-ren ordez x idatziko dugu funtzio bektoriala adierazteko.

(1) hastapen-balioetako problema era bektorialean idatzita dago: lehen ordenako ekuazio diferentzial bektorial esplizitua gehi hastapen-balioa. 5. gaian aztertu diren sistema diferentzialei lotutako hastapen-balioetako problemak aurreko (1) eredukoak dira. Eta 3. gaian aztertu diren enegarren ordenako ekuazio diferentzial linealei loturiko hastapen-balioetako problemak ere aurreko (1) eredukoak dira.

Bistakoa denez, Cauchyren problema problema diferentziala da; baina, jarraian, bere problema integral baliokide bat ikusiko dugu:

Problema integrala. Izan bedi $f : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R^n} \longrightarrow \mathbf{R^n}$ jarraitua eta izan bitez $\xi_0 \in \mathbf{R^n}$, $(t_0, \xi_0) \in D$. Aurkitu $x \in C(I \to \mathbf{R^n})$ (I tarte erreala t_0 -ren ingurunea) funtzioa, non $\forall t \in I$,

$$x(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \quad \text{baita.} \tag{2}$$

(1) problema diferentzialak eta (2) problema integralak soluzio jarraitu berberak dituzte, hau da, problema baliokideak dira (soluzioak funtzio jarraituen multzoan hartzen direnean) (ariketa).

Bestalde, aurreko problema integrala **puntu finkoaren problema** bezala uler dezakegu. Interpretazio hori funtsezkoa da Cauchyren problemaren soluzioei buruzko teoria frogatzeko:

Izan bedi $T : C(I \to \mathbf{R^n}) \longrightarrow C(I \to \mathbf{R^n})$ aplikazioa, non edozein $x \in C(I \to \mathbf{R^n})$ funtziotarako $T(x) = T_x \in C(I \to \mathbf{R^n})$ funtzioa honela definiturik baitago:

$$T_x(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{3}$$

Aurkitu T aplikazioaren puntu finkoak. Hau da, aurkitu behar dira $x \in C(I \to \mathbf{R^n})$ funtzioak, non

$$T_x = x. \tag{4}$$

(1) Cauchyren problema ebaztea da funtzio jarraituetako espazioan aurreko T aplikazioaren puntu finkoak kalkulatzea: hots, $x : T_x = x$ problema ebaztea.

Aplikazioen puntu finkoei buruz honako teorema hau dugu:

17. teorema. *(Banach-en puntu finkoaren teorema). Izan bedi (E, d) espazio metriko osoa eta izan bedi $F : E \longrightarrow E$ aplikazio uzkurkorra d metrikarekiko; hau da, $\forall x, y \in E$ puntuetarako $d(F(x), F(y)) < d(x, y)$. Orduan, F aplikazioak puntu finko bakarra du (E, d) espazio metrikoan:*

$$\exists! x \in E \quad non \quad F(x) = x \ baita\ .$$

Banachen teoremaren frogapenaren barruan, puntu finkoa kalkulatzeko metodoa aurki dezakegu, eta hauxe da: edozein $x_0 \in E$ elementutik abiatuz eta honako formula errepikari hau erabiliz: $x_1 = F(x_0)$, $x_2 = F(x_1), \ldots, x_k = F(x_{k-1}), \ldots$ segida konbergentea osatzen da, eta segida horren limitea F eragilearen puntu finkoa da.

Definizioak. Izan bedi $f : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R^n} \longrightarrow \mathbf{R^n}$. Esaten da f funtzioak Lipschitz-en baldintza uniformea egiaztatzen duela x-rekiko D multzoan (edo uniformeki lipschitziarra dela x-rekiko D multzoan) honako baldintza hau betetzen duenean:

$$\exists L > 0 : \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|, \qquad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in D.$$

Hemen $\|\cdot\|$ ikurra $\mathbf{R^n}$ espazioko norma da (norma guztiak baliokideak dira $\mathbf{R^n}$ espazioan).

Esaten da f funtzioak Lipschitzen baldintza egiaztatzen duela x-rekiko D multzoan (edo (lokalki) lipschitziarra dela x-rekiko D multzoan) honako baldintza hau betetzen duenean:

$$\forall (\tau, \xi) \in D, \quad \exists E\,((\tau, \xi)-\text{ren ingurunea}) \text{ eta} \quad \exists L_{(\tau,\xi)} > 0 :$$

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L_{(\tau,\xi)}\|x_1 - x_2\|, \qquad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in E.$$

Bistakoa denez, lehenengo definizioak bigarrena inplikatzen du, baina alderantzizkoa ez da egiaztatzen.

Propietatea. $D \subset \mathbf{R^n}$ multzoa trinkoa denean kontzeptu baliokideak dira Lipschitzen baldintza D multzoan eta Lipschitzen baldintza uniformea D multzoan.

6.2 Cauchy-ren problemaren soluzio globalei buruzko teoremak

18. teorema. *(Picard-Lindelof-en teorema globala). Izan bedi honako Cauchyren problema hau:*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \ , \ \forall t \in [a, b] \\ x(t_0) = \xi_0, \quad t_0 \in [a, b] \quad \xi_0 \in \mathbf{R^n}, \end{cases}$$

non $f : [a, b] \times \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n}$ *funtzioa jarraitua eta x-rekiko uniformeki lipschitziarra baita. Orduan, Cauchyren problemak soluzio bakar bat du eta soluzio hori globala da, hau da,* $[a, b]$ *tartean definituriko funtzioa da.*

Teorema hori frogatzeko, $T_x(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$ eragilea eta Banachen teorema erabiltzen dira. Teoremako Cauchyren problemaren soluzio bakarra lortzeko, $x_0(t) = \xi_0$ funtzio konstantetik abiatuko gara. $x_{k+1}(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))ds$ formula errepikariaren bidez

definitzen den funtzio-segida konbergentea da supremoaren normarekiko, eta, segida horren ondoz ondoko elementuak Cauchyren problemaren soluzioaren hurbilketak dira; soluzioaren **Picarden ondoz ondoko hurbilketak** deritze.

3. korolarioa. *Bosgarren gaiko 11. teorema 11 Picard-Lindelof-en teorema globalaren ondorioa da. Eta ekuazio diferentzial linealak sistema diferentzial bereziak direnez, hirugarren gaiko 2. teorema ere Picard-Lindelof-en teorema globalaren ondorioa da.*

19. teorema. *(Cauchy-Peano-ren teorema). Izan bedi honako Cauchyren problema hau:*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \ , \ \forall t \in [a, b] \\ x(t_0) = \xi_0, \quad t_0 \in [a, b] \quad \xi_0 \in \mathbf{R^n}, \end{cases}$$

non $f : [a, b] \times \mathbf{R^n} \longrightarrow \mathbf{R^n}$ *funtzioa bornatua eta jarraitua baita. Orduan, Cauchyren problemak gutxienez soluzio bat du eta soluzio hori* $[a, b]$ *tartean definiturik dago.*

f funtzioak x-rekiko Lipschitzen baldintza egiaztatzen ez duenean $x_0(t) = \xi_0$, $x_{k+1}(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))ds$ formula errepikariaren bidez definitzen den funtzio-segidaren limitea, existitzen bada ere, ez da, oro har, Cauchyren problemaren soluzioa.

Müllerren kontraadibidea. Izan bedi honako Cauchyren problema hau

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \ \forall t \in [0, 1] \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

non

$$f(t, y) = \begin{cases} 2t & y \leq 0 \\ -2t & y \geq t^2 \\ \lambda 2t + (1 - \lambda)(-2t) & (t, y) = \lambda(t, 0) + (1 - \lambda)(t, t^2) \end{cases}$$

funtzioa jarraitua eta bornatua $[0, 1] \times \mathbf{R}$ eremuan baita, eta, beraz, Cauchyren problemak soluzioa du. Izan bedi $x_0(t) \equiv 0$,

$$x_1(t) = \int_0^t f(s, 0)\, ds = t^2,\ x_2(t) = \int_0^t f(s, s^2)\, ds = -t^2,\ x_3(t) = \int_0^t f(s, -s^2)\, ds = t^2,\ \ldots.$$

Beraz, lortzen den segida ez da konbergentea; azpisegida bat t^2-rantz eta bestea $-t^2$-rantz doazelako, eta bietako bat ere ez da ekuazio diferentzialaren soluzioa. Cauchy-Peano teoremaren arabera, Müllerren problemak, gutxienez, soluzio bat duela dakigu; orain ikus dezagun bakarra dela. Absurdura eramanez, demagun bi soluzio existitzen direla, $x_1(t)$ eta $x_2(t)$. Izan bedi $g(t) = (x_1(t) - x_2(t))^2 \geq 0$ eta $g(0) = 0$. Horrez gain,

$$g'(t) = 2(x_1(t) - x_2(t))(x_1'(t) - x_2'(t)) = 2(x_1(t) - x_2(t))(f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t)) \leq 0$$

da, f funtzioa bigarren aldagaiarekiko beherakorra delako. Ondorioz, $g(0) = 0$ eta g beherakorra da, orduan, $g(t) \leq 0$. Guztia kontuan hartuz, $g(t) \equiv 0$, hau da, $x_1 \equiv x_2$, eta, ondorioz, soluzioa bakarra da.

6.3 Cauchyren problemaren soluzio lokalei buruzko teoremak

Aurreko teoremetan, $f(t, x)$ funtzioak hipotesi guztiak $[a, b] \times \mathbf{R^n}$ eremuan egiaztatzen zituen eta soluzioak $[a, b]$ tartean definituta egon dira. Baina, sarritan, $f(t, x)$ funtzioak hipotesi ahulagoak egiaztatzen ditu (f-ren propietateak ez dira $[a, b] \times \mathbf{R^n}$ eremu osoan egiaztatzen) eta Cauchyren problemaren soluzio lokalak lortzen dira. Esate baterako:

Izan bedi $f : A = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}(\xi_0, r) \longrightarrow \mathbf{R^n}$ funtzio jarraitua ($\overline{B}(\xi_0, r)$ bola itxia ξ_0-n zentratua eta δ erradiokoa $\mathbf{R^n}$ espazioan eta $\delta > 0$, $r > 0$). Aztertu behar dira

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = \xi_0 \end{cases}$$

problemaren soluzioak, t_0 puntuaren ingurune batean definiturik daudenak. Soluzio horiei soluzio lokalak deritze. (Soluzioaren definizio-eremua ez dago finkatuta).

Noiz esango dugu bi soluzio lokal ≪desberdinak≫ direla? Galdera horri erantzuteko, ordena-erlazio bat definituko dugu soluzio multzoan. Dakigunez, soluzioen adierazpide geometrikoei kurba integralak deritze. Ikuspuntu geometrikotik, kurba bat eta bere luzapenak edo murrizketak unitate bakar bezala hartzea interesatzen zaigu, eta ideia hhori adierazten duen ordena-erlazioa definituko dugu.

Bestalde, askotan, t_0-ren eskuin-ingurune batean definituriko Cauchyren problemaren soluzioak (eskuin-soluzio lokala) aztertzen dira, edo t_0-ren ezker-ingurune batean definituak (ezker-soluzio lokala).

Aurrekoa dela eta, honako definizio hauek ditugu:

Definizioa. Izan bedi $(t > t_0)$,

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = \xi_0. \end{cases}$$

$I = [t_0, t_0 + h)$ edo $I = [t_0, t_0 + h]$, $h > 0$ tartean definitutako $x(t) \in C^1(I \to \mathbf{R^n})$ funtzio batek edozein $t \in I$ puntutarako problemako baldintzak egiaztatzen dituenean, Cauchyren eskuin-problemaren soluzioa dela esaten dugu (edo Cauchyren problemaren eskuin-soluzioa) eta soluzio hori (x, I) idatziko dugu.

Eskuin-problemaren kasuan, suposatuko dugu f funtzioa

$$A = [t_0, t_0 + \delta) \times \overline{B}(\xi_0, r) \quad , \quad \delta > 0 \ , \ r > 0$$

eremuan definitua eta jarraitua dela.

Definizioa. (x, I) eskuin-soluzioa ≪eskuinerantz luzagarria≫ dela esan ohi da, baldin (x_1, I_1) eskuin-soluzio bat existitzen bada, non $I \subset I_1$ eta $x_1|_I = x$ baitira. Luzapena hertsia da baldin eta $I \underset{\neq}{\subset} I_1$ bada.

(x, I) eskuin-soluzio bat badago, beti existituko da hertsiki luzatu ezin den bere luzapen bat, hots, luzapen maximala eskuinetik.

Eskuin-soluzioen multzoan, honako ordena partzialeko erlazio hau dugu:

$$(x_1, I_1) \leq (x_2, I_2) \quad \text{baldin} \quad I_1 \subset I_2 \quad \text{eta} \quad x_2|_{I_1} = x_1 \quad \text{badira.}$$

Eta Zorm-en lemaren bidez, badakigu (x, I) eskuin-soluzioaren luzapen maximala, (x^*, I^*), existitzen dela.

20. teorema. *(Existentziarako teorema lokala). Izan bitez* $(t_0, \xi_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R^n}$, $f : A = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}(\xi_0, r) \longrightarrow \mathbf{R^n}$, $(\delta > 0 \ , \ r > 0)$ *funtzio jarraitua eta izan bedi* M *zenbakia* $| \ f(t, \xi) \ |$*-ren supremoa,* $\forall (t, \xi) \in A$ *ingurune trinkoan. Orduan,*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = \xi_0 \end{cases}$$

problemak gutxienez soluzio bat du $I = [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$, $(\alpha = \min\{\delta, \frac{r}{M}\})$ *ingurunean definitua. Horrez gain, beste edozein soluzio* I*-raino luzagarria da.*

21. teorema. *(Existentzia eta bakartasunerako teorema lokala). Demagun aurreko teoremaren hipotesiak egiaztatzen direla, eta* f *funtzioak* A *multzoan* x*-rekiko Lipschitzen baldintza egiaztatzen duela. Orduan, Cauchyren problemak aurreko* I *tartean definitutako soluzio bakar bat izango du.*

4. korolarioa. *Bigarren gaiko 1. teorema azken teorema lokalaren ondorioa da.*

22. teorema. *(Bakartasuna). Izan bedi* D *multzoa* $\mathbf{R} \times \mathbf{R^n}$*-ren azpimultzo irekia eta izan bedi* $f : D \longrightarrow \mathbf{R^n}$ *funtzioa, jarraitua eta* x*-rekiko lokalki lipschitziarra.* $x_1 : I_1 \longrightarrow \mathbf{R^n}$ *eta* $x_2 : I_2 \longrightarrow \mathbf{R^n}$ *funtzioak* $x' = f(t, x)$ *ekuazioaren soluzioak badira eta* $x_1(t_0) = x_2(t_0)$, $(t_0 \in I_1 \bigcap I_2)$ *bada, halabeharrez,* $x_1 \equiv x_2$, $\forall t \in I_1 \bigcap I_2$ *izango da.*

6.4 Soluzioen luzapena

Hurrengo bi teoremetan, Cauchyren problemaren soluzio lokalen luzapen maximalak aztertzen dira, zehazki, eskuin-soluzio maximalak; hauek (x, I) adieraziko ditugu, x soluzio funtzioa eta I bere definizio-eremua (t_0-ren eskuin-ingurunea) izanik.

23. teorema. *Izan bedi* $K \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R^n}$ *multzo trinkoa eta izan bitez* $f : K \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R^n} \longrightarrow \mathbf{R^n}$ *funtzio jarraitua eta* $(t_0, \xi_0) \in K$*. Orduan,*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = \xi_0 \end{cases}$$

problemaren eskuin-soluzio maximalak, (x, I) *delakoak, honako baldintza hauek egiaztatzen ditu:*

$$I = [t_0, t_1],\ t_1 < \infty \quad \text{eta} \quad (t_1, x(t_1)) \in \mathrm{Fr}K.$$

(Eskuin-soluzio maximalaren adierazpide grafikoa K-ren mugan, FrK, bukatzen da).

24. teorema. *Izan bedi* $D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R^n}$ *multzo irekia eta izan bitez* $f : D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R^n} \longrightarrow \mathbf{R^n}$ *funtzio jarraitua eta* $(t_0, \xi_0) \in D$. *Orduan,*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = \xi_0 \end{cases}$$

problemaren eskuin-soluzio maximalak, (x, I) *delakoak, ondoko baldintzak egiaztatzen ditu:*

$$I = [t_0, t_1),\ t_1 \leq \infty \quad \text{eta} \quad (t_1, \lim_{t \to t^-_1} x(t)) \in \mathrm{Fr}D.$$

Kasu honetan, $(t_1, \xi_1) = (t_1, \lim_{t \to t^-_1} x(t))$ *puntua* x *soluzioaren limite-puntua dela esaten da.*

Adibidea. Izan bedi

$$\begin{cases} x' = x(1 - x), \\ x(0) = \xi. \end{cases}$$

1) Marraztu problemaren kurba integralak ξ-ren balioen arabera, ekuazio diferentziala analitikoki ebatzi gabe. 2) Aztertu problemaren soluzio maximalen existentzia-tartea ξ-ren balioen arabera. 3) Frogatu $x(t; 0, \xi), (0 < \xi < 1)$ soluzioaren limitea $t \to \infty$ doanean 1 dela.

$f(t, x) = g(x) = x(1-x)$ funtzioa $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ espazioan jarraitua eta x-rekiko lokalki Lipschitz da; beraz, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ espazioko puntu bakoitzetik problemaren kurba integral bakar bat igarotzen da.

Lehendabizi, ekuazio diferentzialaren bi soluzio konstante aurkitzen ditugu (kurba integral horizontalak): $x(t) \equiv 0$ soluzioa eta $x(t) \equiv 1$ soluzioa, biak $\mathbf{R}$ osoan definituak ($\xi = 0$ eta $\xi = 1$ balioei loturikoak). Kurba integralak ebaki ezin direnez, ekuazio diferentzialaren beste kurba integralak (ξ-ren beste balioei loturikoak) ezin dira igaro kurba integral horizontal bi horiek mugatutako eremu batetik beste eremu batera.

i) Izan bedi $x(t)$ soluzio bat, non $x(0) = \xi > 1$ baita. Soluzio horietarako propietate hauek ditugu: $x(t) > 1, \forall t$ eta $f(t, x) = x(1 - x) < 0$ denez, $x'(t) < 0, \forall t$; beraz, kasu honetan soluzioak beti beherakorrak dira eta $x = 1$ zuzenaren gainetik daude.

ii) Izan bedi $x(t)$ soluzio bat non $x(0) = \xi < 0$ baita. Soluzio horietarako propietate hauek ditugu: $x(t) < 0$, $\forall t$, eta $f(t, x) = x(1 - x) < 0$ denez, $x'(t) < 0, \forall t$; beraz, kasu honetan soluzioak beti beherakorrak dira eta $x = 0$ zuzenaren azpitik daude.

iii) Izan bedi $x(t)$ soluzio bat, non $0 < x(0) = \xi < 1$ baita. Soluzio horietarako propietate hauek ditugu: $0 < x(t) < 1$,$\forall t$, eta $f(t,x) = x(1-x) > 0$ denez, $x'(t) > 0, \forall t$; beraz, kasu honetan soluzioak beti gorakorrak dira, eta $x = 0$ eta $x = 1$ zuzenen artean daude.

Horrez gain, problemaren edozein $x(t)$ soluziotarako

$$x''(t) = (1-2x)x(1-x)$$

denez, $x''(t) = 0 \leftrightarrow (t \in \mathbf{R},\ x = \frac{1}{2})$. Beraz, problemaren kurba integralek inflexio-puntuak dituzte $(t, \frac{1}{2})$ puntuetan. Eta zein eremutan ahurra edo zeinetan ganbila den aztertzeko aski da $x''(t)$-ren zeinua aztertzea.

Dakigunez, problemaren soluzio (maximalen) grafikoak planoko mugan bukatu behar dira. Hori dela eta, $0 < x(0) = \xi < 1$ hastapen-baldintzari loturiko $x(t)$ soluzioak $\mathbf{R}$ osoan definitutako funtzioak dira, hau da, soluzio globalak dira. $x(0) = \xi > 1$ hastapen-baldintzari loturiko eskuin-soluzioak $[0, \infty)$ tartean definiturik daude. $x(0) = \xi < 0$ hastapen-baldintzari loturiko ezker-soluzioaren definizio-eremua $(-\infty, 0]$ da.

Bestalde, frogatuko dugu $0 < x(0) = \xi < 1$ hastapen-baldintzari loturiko $x(t)$ soluzioek $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1$ baldintza egiaztatzen dutela. Demagun $\lim_{t\to+\infty} x(t) = l < 1$ dela eta izan bedi $m = \inf_{[\xi,l]} g(x) > 0$.

Problemaren ekuazio integral baliokidea erabiliz, hauxe dugu:

$$x(t) = \xi + \int_0^t f(s, x(s))\, ds = \xi + \int_0^t g(x(s))\, ds \geq \xi + m\, t.$$

Baina aurreko desberdintzan $t \to +\infty$ doanean limiteak hartuz, ezinezkoa da lortzen den ondorioa; hau da, $x(t)$ soluzioaren grafikoak $x = 1$ zuzena ebakitzen duela inplikatzen du. Beraz, $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1$ dela frogatu dugu.

6.5 Soluzioen mendekotasuna hastapen-baldintzekiko

Izan bedi honako Cauchyren problema hau:

$$(P) \qquad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \ , \ \forall t \in [a,b] \\ x(t_0) = \xi_0, \quad t_0 \in [a,b] \quad \xi_0 \in \mathbf{R^n}, \end{cases}$$

non $f : [a,b] \times \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n}$ funtzioa jarraitua baita.

i) Askotan, zaila da (P) problemaren ekuazio diferentziala ebaztea, baina badago funtzio errazago bat, f^*, f-ren hurbilketa ≪ona≫ dena; orduan, jakin nahi genuke

$$(P^*) \qquad \begin{cases} x'(t) = f^*(t, x(t)) \\ x(t_0) = \xi_0. \end{cases}$$

problemaren soluzioa, $x^*(t)$, aurreko P problemaren $x(t)$ soluzioaren hurbilketa ≪ona≫ ote den.

ii) Hastapen-baldintza zehatza, ξ_0 datua t_0 baliorako, ezagutzen ez denean, hastapen-balio hurbildua dugunean, adibidez, ξ_1 datua t_0 baliorako, jakin nahi genuke ξ_1 honi loturiko Cauchyren problemaren soluzioa problema zehatzaren soluzioaren hurbilketa ≪ona≫ ote den.

Honako teorema hau da galdera horien erantzun bat:

25. teorema. *(Funtsezko desberdintza). Izan bitez $x_1(t), x_2(t) : [a,b] \to \mathbf{R^n}$ funtzio deribagarriak, $|x_1(a) - x_2(a)| \leq \delta$, eta*

$$\begin{cases} |x_1'(t) - f(t, x_1(t))| \leq \epsilon_1 \\ |x_2'(t) - f(t, x_2(t))| \leq \epsilon_2 \end{cases}, \qquad \forall t \in [a,b].$$

Demagun, baita ere, $f : [a,b] \times \mathbf{R^n} \longrightarrow \mathbf{R^n}$ funtzio jarraitua eta x-rekiko uniformeki Lipschitz dela, hau da:

$$\exists L > 0 : |f(t,\xi_1) - f(t,\xi_2)| \leq L|\xi_1 - \xi_2|, \qquad \forall t \in [a,b] \ , \ \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbf{R^n}.$$

Orduan, honako bornapen hau dugu:

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \delta e^{L(t-a)} + (\epsilon_1 + \epsilon_2)\frac{e^{L(t-a)} - 1}{L}.$$

(Errorea hastapen-baliotik soilik datorrenean, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ dira).

6.6 ARIKETAK

1.- a) Azter ezazu honako funtzio hauek jarraitutasun-eremuetan x-rekiko Lipschitzen baldintza (lokala) egiaztatzen duten. b) Aztertu $[a,b]\times\mathbf{R}$ motako eskualdeetan x-rekiko Lipschitzen baldintza uniformea betetzen duten.

$a)\quad f(t,x)=1+x^2;$ $\qquad b)\quad f(t,x)=1+t^2$

$c)\quad f(t,x)=\dfrac{1}{1+x^2};$ $\qquad d)\quad f(t,x)=\dfrac{t}{1+x^2}$

2.-Kalkulatu honako Cauchyren problema haunen soluzioetarako Picarden ondoz ondoko hurbilketak:

$$a)\begin{cases}x'=x-1\\ x(0)=2\end{cases};\qquad b)\begin{cases}x'+x^2=0\\ x(0)=0\end{cases}\qquad c)\begin{cases}x'=1+x^2\\ x(0)=0\end{cases};\qquad d)\begin{cases}tx'=2t-x\\ x(1)=2\end{cases}$$

3.- Izan bedi

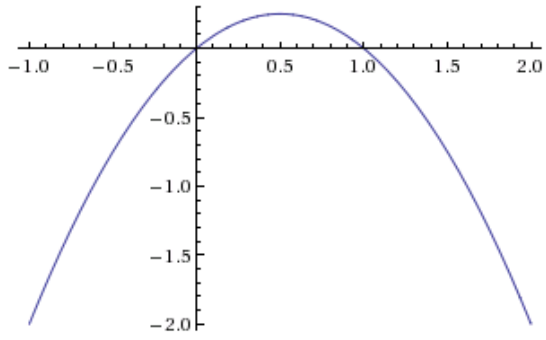
$$\begin{cases}x'=\dfrac{1}{1-x^2}\\ x(0)=\xi\end{cases}.$$

1) Marraztu ekuazio diferentzialaren kurba integralak, ekuazioa ebatzi gabe. 2) Aztertu problemaren eskuin-soluzio maximalen definizio-eremua ξ-ren balioen arabera.

4.-Izan bitez

$$\begin{cases}x'=f(x)\\ x(0)=\xi,\end{cases}$$

eta $f\in C^1(\mathbf{R}\to\mathbf{R})$ funtzioaren grafikoa:



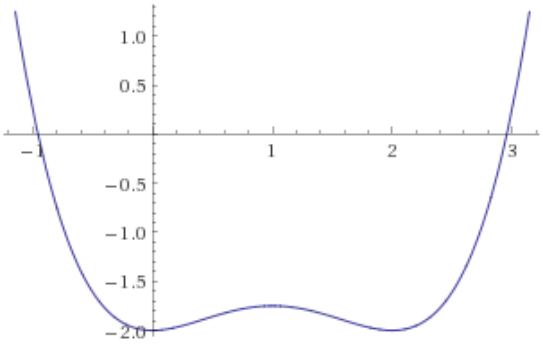
1) Marraztu ekuazio diferentzialaren kurba integralak. 2) $0<\xi<1$ denean, problemaren soluzioak (maximalak) globalak al dira? Eta $\xi>1$ edo $\xi<0$ direnean? 3) Frogatu $0<\xi<1$

denean problemaren soluzioak, $x(t)$ delakoak, $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1$ baldintza egiaztatzen duela.

5.- Izan bedi

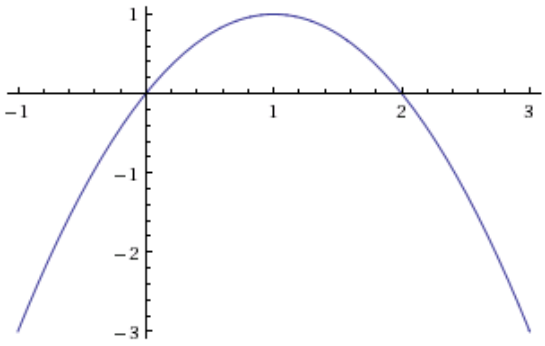
$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = \xi, \end{cases}$$

eta izan bedi $f \in C^1(\mathbf{R} \to \mathbf{R})$ funtzioaren grafikoa honako hau:



1) Marraztu ekuazio diferentzialaren kurba integralak eta kalkulatu inflexio-puntuak. 2) Froga ezazu $-1 \leq \xi \leq 3$ denean problemaren soluzioa globala dela.

6.- Izan bedi $x' = (1-t)f(x)$, $f \in C^1(\mathbf{R} \to \mathbf{R})$. Eta f-ren grafikoa:



1) Marraztu kurba integralak. 2) Froga ezazu $0 < \xi < 2$ denean $x(t; 0, \xi)$ soluzioa globala dela eta $\lim_{t\to\pm\infty} x(t, 0, \xi) = 0$ dela.

7.- Marraztu honako Cauchyren problema honen kurba integralak $\xi \in \mathbf{R}$ parametroaren balioen arabera. (Aztertu definizio-eremuak, gorakortasun-eremuak eta ahurtasun-eremuak).

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x+t}{t-2} \\ x(0) = \xi \end{cases}$$

8.- Marraztu honako problema honen eskuin-soluzio maximalak, ξ-ren balioen arabera:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{4-t}{x-2} \\ x(0) = \xi \end{cases}$$

Kalkulatu soluzio horien limitea, aldagaia definizio-eremuko eskuin muturrerantz doanean.

9.- Izan bedi

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x-3}{x+t-5} \\ x(0) = 2. \end{cases}$$

Azter ezazu eskuin-soluzio maximalaren definizio-eremua. Definizio-eremua $[0, b)$ adierazten bada, posible da $b = 1$ izatea? (Justifika ezazu erantzuna). Kalkula ezazu $\lim_{t \to b^-} x(t; 0, 2)$.

10.- a) Izan bedi

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{1-t^2-x} \\ x(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Azter ezazu problemaren eskuin-soluzio maximalaren definizio-eremua, eta kalkula ezazu soluzio horren limitea t definizio-eremuko eskuin-muturrerantz doanean.

7. Kapitulua

Sistema autonomoak

7.1 Sarrera

Orain arte ikusitako metodo gehienak ekuazio diferentzial linealak eta sistema diferentzial linealak ebazteko izan dira. Sarritan, aztertu behar diren sistema diferentzialak ez dira linealak, eta horien soluzioa aurkitzea zaila edo ezinezkoa izan daiteke. Gai honetan, sistema diferentzialen informazio kualitatiboa lortzen saiatuko gara; hau da, sistema diferentziala ebatzi gabe, sistemaren soluzioen propietateak ezagutuko ditugu.

Adibidea. Izan bitez $x(t)$ eta $y(t)$ bi espezieen populazio-funtzioak (t denbora); demagun espezie horiek bat bestearekin norgehiagoka ari direla elikadura lortzeko eta bizigunea edukitzeko, eta populazio horien hazkunde-tasak honako sistema diferentzial honen bidez adierazten direla:

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y). \end{cases}$$

Gehienetan, ezin izango dugu sistema diferentzial hori ebatzi eta, beraz, ez dugu ezagutuko espezie bakoitzeko populazio-kideen kopurua t aldiunean. Baina, batzuetan, soluzioen propietate interesgarri batzuk ezagut daitezke sistema ebatzi gabe, esate baterako:

(i) Existitzen badira α eta β zenbaki errealak, non t guztietarako $x(t) = \alpha$ eta $y(t) = \beta$ sistema diferentzialaren soluzio konstanteak baitira. Soluzio horiei oreka-soluzioak edo sistemaren puntu kritikoak deritze.

(ii) Demagun bi espezieak orekan bizi direnean espezie bateko kide berriak sartzen ditugula t_0 aldiunean. Jakin nahi dugu espezieen populazio kopuruak oreka-balioetatik hurbil jarraituko duten etorkizunean.

(iii) t_0 aldiunean bi espezieen populazio kopuruak ezagutuz gero, etorkizunean nola aldatuko diren ezagutu nahi dugu: oreka-balioetarantz hurbilduko diren (oreka-balioak existitzen direnean) edo espezie batek irabaziko duen.

7.2 Sistema autonomoak. Fase-planoa

Definizioa. Sistema diferentzial honi:

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

non f eta g funtzioak XY planoan funtzio jarraituak baitira eta deribatu partzial jarraituak baitituzte, sistema autonomo laua deritzo. Sistema diferentzial autonomoetan, ez da esplizituki agertzen ekuazio diferentzialetako eskuineko ataletan aldagai independentea, t, eta laua dela esaten da sistemaren ekuazio kopurua bi delako. $x(t)$ eta $y(t)$ delakoei sistema autonomoaren egoera-aldagaiak deritze.

Aurreko gaian emandako existentziaren eta bakartasunaren teoremaren arabera, $\forall t_0 \in \mathbf{R}$ eta $\forall (x_0, y_0) \in \mathbf{R^2}$ balioetarako

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \\ x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

hastapen-balioetako problemak soluzio bakarra du.

Bestalde, bigarren ordenako ekuazio diferentzial esplizitu batean t aldagai independentea esplizituki idatzita agertzen ez denean,

$$x'' = f(x, x'),$$

(bigarren ordenako ekuazio diferentzial autonomoa), autonomoa da horren sistema diferentzial baliokidea:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = f(x, y). \end{cases}$$

Definizioak. (1) sistema autonomoaren soluzio bat $(\phi(t), \psi(t))$ funtzio-bikotea bada, orduan, $\{(t, \phi(t), \psi(t)) : t \in I\}$ multzoa $\mathbf{R^3}$ espazioko kurba bat da (I tarte erreala izanik). Kurba horren proiekzioari XY planoan (1) sistemaren ibilbidea edo orbita deritzo, eta $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ ekuazioak ibilbidearen ekuazio parametrikoak dira.

Ibilbide bateko (x, y) puntua finkatuz, $(f(x, y), g(x, y))$ bektorea ibilbidearekiko bektore ukitzailea (tangentea) da (x, y) puntuan. $\{(f(x, y), g(x, y))\}$ bektore multzoari sistema autonomoaren norabide-eremu deritzo. Eta XY planoari fase-plano esaten zaio (hau da, (x, y) bikoteak osatutako planoari).

Oharra. Sistema autonomoaren eta sistema ez-autonomoaren arteko ezberdintasunak erakusteko, honako bi adibide hauek aztertuko ditugu.

Adibidea. Demagun partikula batzuk XY planoko $P(1, 2)$ puntutik igortzen ari direla, eta honako lege honen arabera mugitzen direla planoan:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y. \end{cases}$$

Partikula batek $t = t_0$ aldiunean $x(t_0) = 1, y(t_0) = 2$ hastapen-baldintzak egiaztatzen ditu. Zein da partikula horrek jarraituko duen ibilbidea $t \geq t_0$ balioetarako? Erantzuteko, hastapen-balioetako problema hau ebatzi behar dugu:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \\ x(t_0) = 1, \quad y(t_0) = 2. \end{cases}$$

Bi ekuazio diferentzialak integratuz eta hastapen-balioak ezarriz, $x = e^{t-t_0}, y = 2e^{t-t_0}, (t \geq t_0)$ soluzioa lortzen dugu, eta horiek dira partikulak jarraituko duen ibilbidearen ekuazio parametrikoak. Bi ekuazio parametrikoetan t parametroa ezabatuz, $y = 2x$, $(x \geq, y \geq 2$ zuzenerdia lortuko dugu. Ohar gaitezen partikularen ibilbidearen ekuazioak ez daudela hastapen-

baldintzetako t_0 balioaren mende. Hau da, $P(1,2)$ puntutik edozein unetan igarotzen den partikulak kurba bera deskribatzen du: $y = 2x$, $(x \geq 1, y \geq 2)$ zuzenerdia.

Adibidea. Honako sistema diferentzial hau ez da autonomoa izango. Demagun partikulak XY planoko $P(1,2)$ puntutik igortzen ari direla eta planoan mugitzen direla lege honen arabera:

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{t}, \\ y' = y. \end{cases}$$

Aurrean bezala, partikula batek $t = t_0$ aldiunean $x(t_0) = 1$, $y(t_0) = 2$ hastapen-baldintzak egiaztatzen ditu. Hauxe da hastapen-balio horiekin osatzen den problemaren soluzioa: $x = \frac{t}{t_0}, y = 2e^{t-t_0}, (t \geq t_0)$. t parametroa ezabatuz, $y = 2\,e^{t_0(x-1)}$, $(x \geq 1, y \geq 2)$ ekuazioa lortzen da; ekuazio hori t_0 balioaren mende dagoenez, bigarren adibide honetan partikulak jarraitzen duen ibilbidea partikula igortzen den unearen mende dago.

Aldiz, lehen adibideko sistema autonomorako $x = e^{t-t_0}, y = 2e^{t-t_0}, (t \in \mathbf{R})$ sistemaren soluzioa bada, $x = e^t, y = 2e^t, (t \in \mathbf{R})$ eta $x = e^{t+c}, y = 2e^{t+c}, (t \in \mathbf{R})$ ere sistemaren soluzioak dira, c edozein zenbaki erreal izanik. Soluzio horiek ere $P(1,2)$ puntutik pasatzen dira, baina une desberdinetan; horrela, soluzio guztiek ibilbide bera ematen dute eta ibilbidearen ekuazio parametriko guztien arteko ezberdintasun bakarra t parametroaren translazioa da.

Sistema autonomoaren ibilbideen propietateak.

(1) sistema autonomoen ibilbideen propietate kualitatiboak aztertu nahi ditugu. Ibilbideek honako propietate hauek egiaztatzen dituzte:

1.- Fase-planoaren ibilbide bakoitzak (1) sistema autonomoaren infinitu soluzio adierazten ditu, eta ibilbide batek sistema autonomoaren $(\phi(t), \psi(t))$ soluzioa adierazten badu, $(\overline{\phi}(t), \overline{\psi}(t)) = (\phi(t+c), \psi(t+c))$, $(c \in \mathbf{R})$ infinitu soluzioak ere adierazten ditu.

2.- XY planoko edozein (x_0, y_0) puntutatik (1) sistema autonomoaren ibilbide bakarra pasatzen da. Beraz, (1) sistema autonomoaren ibilbideek plano osoa estaltzen dute, eta ez dago ibilbide biren arteko ebaki-punturik. Izan ere, existentziaren eta bakartasunaren teoremaren arabera t_0 finkatuz, sistemaren soluzio bakar bat dago: $(\phi(t), \psi(t))$, $(\phi(t_0) = x_0, \psi(t_0) = y_0)$. Beste t_1 finkatuz, sistemaren soluzio bakar bat dago: $(\Phi(t), \Psi(t))$, $(\Phi(t_1) = x_0, \Psi(t_1) = y_0)$ dena. Orduan, $(\phi(t) = \Phi(t + t_1 - t_0))$ eta $(\psi(t) = \Psi(t + t_1 - t_0))$ da; eta bi soluzio horien adierazpena ibilbide bera da.

3.- Fase-planoko (x_0, y_0) puntuan (1) sistema autonomoko f eta g funtzioak aldi berean

zero badira (hau da, $f(x_0, y_0) = 0, g(x_0, y_0) = 0$ badira), (x_0, y_0) puntutik pasatzen den (1) sistema autonomoaren soluzioa konstantea da, hau da, $(\phi(t) = x_0, \psi(t) = y_0), \forall t \in \mathbf{R})$. Kasu honetan, (x_0, y_0) puntutik pasatzen den ibilbidea puntua bera da. (x_0, y_0) puntuari sistema autonomoaren puntu kritikoa edo oreka-puntua edo pausagune-puntua deritzo.

4.- Puntu ez-kritiko batetik pasatzen den ibilbidea ezin da berarekin moztu (arku bakuna da) kurba itxia ez bada. Ibilbideak kurba itxiak direnean, sistema autonomoaren soluzio periodikoak adierazten dituzte. Sistemaren $(x(t), y(t))$ soluzioak balio bera hartzen badu t_0 eta $t_0 + T$ aldiuneetan, orduan, bakartasuna erabiliz, $(x(t), y(t)) = (x(t + T), y(t + T))$, $\forall t$ dugu, hau da, $(x(t), y(t))$ soluzio periodikoa da.

Definizioak. (1) sistema autonomoak XY planoan eremu bektorial bat definitzen du: $P(x, y)$ puntuari $\overrightarrow{v}(x, y) = f(x, y)\overrightarrow{i} + g(x, y)\overrightarrow{j}$ bektorea dagokio. P puntuan $\overrightarrow{v}(x, y)$ bektorea puntu horretatik pasatzen den ibilbidearen bektore ukitzaile da, eta puntu horretan ibilbidearen abiadura adierazten du (bektore hori nulua ez denean). Puntu kritikoetan $\overrightarrow{v}$ bektore nulua denez, Fisikaren ikuspuntutik, sistema autonomoaren puntu kritikoak $\overrightarrow{v}(x, y)$ eremu bektorialaren oreka-puntuak dira.

Adibideak. Hiru adibideko puntu kritikoak aztertuko ditugu:

a)

$$\begin{cases} x' = 1 - y \\ y' = x^3 + y \end{cases}$$

sistema autonomoaren puntu kritikoak

$$\begin{cases} 1 - y = 0 \\ x^3 + y = 0 \end{cases}$$

sistemaren (x, y) soluzioak dira; hau da, $(-1, 1)$ puntua. $(x(t), y(t)) = (-1, 1)$ soluzioa da sistema autonomoaren soluzio konstante bakarra.

b)

$$\begin{cases} x' = (1 - x)(1 - y) \\ y' = (x + 1)(y + 1) \end{cases}$$

sistema autonomoaren puntu kritikoak $(1, -1)$ eta $(-1, 1)$ dira.

c)

$$\begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = x(y+1) \end{cases}$$

sistema autonomoaren puntu kritikoak

$$\begin{cases} x(1-y) = 0 \\ x(y+1) = 0 \end{cases}$$

sistemaren (x, y) soluzioak dira, hau da, $x = 0$ zuzeneko puntu guztiak. Puntu kritikoak ez dira isolatuak.

Oharra. Sarritan, sistema autonomoaren ibilbideak kalkula daitezke sistema ebatzi barik. Demagun $(x(t), y(t))$ funtzio-bikotea (1) sistema autonomoaren soluzioa dela, soluzio hori ez dela konstantea eta $\frac{dx}{dt}$ deribatua ez dela zero $t = t_1$ puntu batean; beraz, $x_1 = x(t_1)$ balioaren ingurune batean hau dugu:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}.$$

Orduan, soluzio horren ibilbideak lehen ordenako ekuazio diferentzial hau egiaztatzen du:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}.$$

Bestalde, $\frac{dx}{dt}$ deribatua t guztietarako zero bada, $\frac{dy}{dt}$ ez da beti zero izango eta, aurreko kasuan bezala, soluzioaren ibilbideak ekuazio diferentzial hau egiaztatuko du:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}.$$

Adibidea. Izan bedi

$$\begin{cases} x' = 2xy \\ y' = y^2 - x^2. \end{cases}$$

Sistema horren puntu kritiko bakarra $(0, 0)$ da. Beste ibilbideak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

ekuazio diferentziala ebatziz lortzen dira. $(a,0)$ puntuan zentratutako $|a|$ erradioko zirkunferentziak. $a>0$ denean, erlojuaren orratzen noranzkoarekin, eta $a<0$ denean, aurkako noranzkoarekin.

Penduluaren problema. Penduluaren hagatxoaren luzera l bada eta hagatxoak bertikalarekin osatzen duen angelua θ bada, hau da penduluaren higiduraren ekuazio diferentziala:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0.$$

$x_1=\theta$ eta $x_2=d\theta/dt$ izendatuz,

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-\dfrac{g}{l}\sin x_1\end{cases}$$

sistema diferentzial baliokidea dugu. Sistema horren oreka-puntuak infinitu dira, hots, $(k\pi,0)$ puntuak $k\in\mathbb{Z}$ izanik. $(0,0)$ eta $(\pi,0)$ puntu kritikoak aztertuko ditugu. Lehen kasuan, $x_1=\theta=0$ eta $x_2=d\theta/dt=0$ direnez, ez dago desplazamendu bertikalik eta pendulua geldi dago (abiadura zero).

Bigarren kasuan, $x_1=\theta=\pi$ eta $x_2=d\theta/dt=0$ direnez, desplazamenduaren angelua π da eta abiadura zero da.

Bi egoera horietan penduluak toki berean jarraituko du beti. Baina bi puntu horiek propietate ezberdinak dituzte. Lehen kasuan, bere egoera-baldintzaren bat (posizioa edo abiadura edo biak) pixka bat aldatu arren, sistema fisikoak oszilazio txikiak soilik erakutsiko ditu, eta $(0,0)$ puntua egonkorra dela esaten da. Aldiz, $(\pi,0)$ oreka-puntuaren kasuan, egoera-baldintzen aldaketa txikiek puntu horretatik desbideratze handiak eragingo dituzte sistema fisikoan, eta $(\pi,0)$ puntua egongaitza dela esaten da.

Definizioak. Izan bedi (x_0,y_0) puntua

$$\begin{cases}x'=f(x,y)\\ y'=g(x,y)\end{cases}\tag{1}$$

sistema autonomoaren puntu kritikoa, hau da:

$$f(x_0,y_0)=0,\ g(x_0,y_0)=0.$$

Hemendik aurrera, suposatuko dugu puntu kritikoa isolatua dela (hau da, puntuaren inguru ne bat existitzen da, non beste puntu kritikorik ez baitago). (1) sistema autonomoaren $(\phi(t), \psi(t))$ soluzioaren ibilbidea (x_0, y_0) punturantz hurbiltzen edo sartzen dela esaten da $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = x_0$ eta $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = y_0$ egiaztatzen direnean. Eta $(\phi(t), \psi(t))$ soluzioaren ibilbidea (x_0, y_0) puntutik urruntzen dela esaten da, $\lim_{t\to-\infty} \phi(t) = x_0$ eta $\lim_{t\to-\infty} \psi(t) = y_0$ direnean.

Puntu kritikoak lau multzotan sailkatzen ditugu, bere inguruko ibilbideek duten formaren arabera.

Zeladura-puntua: puntu kritikoaren ingurunea lau eremutan zatituta dago ibilbide partikular batzuen bidez, eta eremu horietako ibilbideak ez dira hurbiltzen ezta urruntzen ere punturantz.

Zentroa: inguruko ibilbideak kurba itxiak dira, zeinen barruan puntu kritikoa baitago.

Espiral-puntua: inguruko ibilbideak espiralak dira, eta denak puntu kritikorantz doaz edo denak puntu kritikotik urruntzen dira.

Nodoak: aurreko motakoak ez diren puntu kritikoak.

Aurrerantzean, (1) sistema autonomoaren puntu kritikoa $(0, 0)$ **puntua dela suposatuko dugu**. Horrelakoa ez denean, hau da, (1) sistemaren puntu kritikoa $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ denean, nahikoa da aldagai-aldaketa hau egitea:

$$X = x - x_0, \qquad Y = y - y_0,$$

eta

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = f(X + x_0, Y + y_0) \\ \dfrac{dY}{dt} = g(X + x_0, Y + y_0) \end{cases}$$

sistemaren puntu kritikoa $(0, 0)$ izango da.

Definizioak. Izan bedi $(0, 0)$ puntua (1) sistema autonomoaren puntu kritikoa.

a) (1) sistemaren $(0, 0)$ puntu kritikoa egonkorra dela esaten da, baldin eta $\forall R > 0$, $\exists r : 0 < r < R$ non $t = t_0$ momenturen batean $x^2 + y^2 \leq r^2$ zirkuluaren barruan dagoen edozein ibilbidek $x^2 + y^2 \leq R^2$ zirkuluaren barruan jarraitzen badu $t \geq t_0$ denean. Definizioaren arabera, puntu kritiko egonkor batetik hurbil dagoen ibilbideak hurbil jarraituko du denboran

zehar.
b)(1) sistemaren $(0,0)$ puntu kritikoa asintotikoki egonkorra dela esaten da, egonkorra bada eta $r_0 > 0$ zenbakia existitzen bada, non $x^2+y^2 \leq r_0^2$ zirkuluaren barruan $t = t_0$ momenturen batean dagoen edozein ibilbide $(0,0)$ puntu kritikorantz hurbiltzen bada $t \to \infty$ doanean.
c) Puntu kritikoa egonkorra ez denean, egongaitza dela esaten da.

7.3 Sistema autonomo linealak: fase-planoaren azterketa

Izan bedi honako sistema diferentzial lineal autonomo hau:

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y \\ y' = a_2 x + b_2 y, \end{cases} \tag{3}$$

eta demagun

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

matrizea ez dela singularra, hau da, $|A| \neq 0$; honela, sistemaren puntu kritiko bakarra $(0,0)$ da. (3) sistema linealaren balio propioak honako ekuazio honen soluzioak dira:

$$|A - \lambda I| = \lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + (a_1 b_2 - b_1 a_2) = \lambda^2 - (\mathrm{Tr}A)\lambda + |A| = 0.$$

A matrizearen balio propioak ez dira inoiz zero, matrizea singularra ez delako.
Puntu kritikoaren sailkapena A matrizearen balio propioen arabera.

a) Bi balio propioak, (λ_1, λ_2), errealak eta zeinu berekoak direnean, (3) sistemaren $(0,0)$ puntu kritikoa nodoa da. Horrez gain, i) balio propio biak positiboak direnean, ibilbide guztiak jatorritik urruntzen dira (egongaitza), eta ii) negatiboak direnean ibilbide guztiak jatorrirantz hurbiltzen dira (asintotikoki egonkorrak).
Adibidea. Izan bedi

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -x + 2y. \end{cases}$$

Sistemaren soluzioak $x(t) = C_1 e^t$, $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$ dira, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ izanik. Ibilbideak aztertuko ditugu:

Baldin $C_1 = 0$ eta $C_2 \neq 0$ hartzen badira, $x(t) = 0$, $y(t) = C_2 e^{2t}$ dugu. Soluzio horiek bi ibilbide ematen dizkigute C_2 konstantearen zeinuaren arabera: $C_2 > 0$ denean, ardatzerdi bertikal positiboa dugu (gorantza doa $t \to \infty$ denean), eta $C_2 < 0$ denean, ardatzerdi bertikal negatiboa dugu (beherantza doa $t \to \infty$ denean).

Baldin $C_1 \neq 0$ eta $C_2 = 0$ hautatzen badira, $x(t) = C_1 e^t$, $y(t) = C_1 e^t$ soluzioak ditugu. Soluzio horiek ibilbide bat adierazten dute $C_1 > 0$ denean: fase-planoaren lehen koadranteko erdikaria (gorantza $t \to \infty$ denean). Eta $C_1 < 0$ denean, hirugarren koadranteko erdikaria (beherantza $t \to \infty$ denean).

Baldin $C_1 \neq 0$ eta $C_2 \neq 0$ badira, t parametroa ezabatuz,

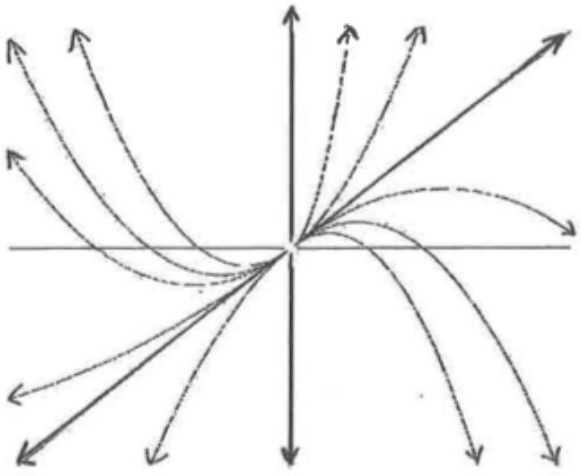
$$y = x + \frac{C_2}{{C_1}^2} x^2$$

parabolak lortzen ditugu, jatorriko puntua salbu. $C_2 > 0$ kasuan, parabola ahurra da; $C_1 > 0$ denean, parabolaren eskuin-adarra dugu (gorantza $t \to \infty$ denean) eta $C_1 < 0$ denean, parabolaren ezker-adarra dugu (gorantza $t \to \infty$ denean).

Aldiz, $C_2 < 0$ kasuan, parabola ganbila da; $C_1 > 0$ denean, parabolaren eskuin-adarra dugu (beherantza $t \to \infty$ denean), eta $C_1 < 0$ denean, parabolaren ezker-adarra dugu (beherantza $t \to \infty$ denean). Horrez gain,

$$\frac{y}{x} = 1 + \frac{C_2}{{C_1}^2} e^t$$

beraz, $\lim_{t\to\infty} \frac{y}{x} = \infty$ edo $-\infty$ eta $\lim_{t\to-\infty} \frac{y}{x} = 1$ edo -1. Aurreko sistemaren balio propioak positiboak dira eta ibilbide guztiak jatorritik (puntu kritikotik) urruntzen dira.

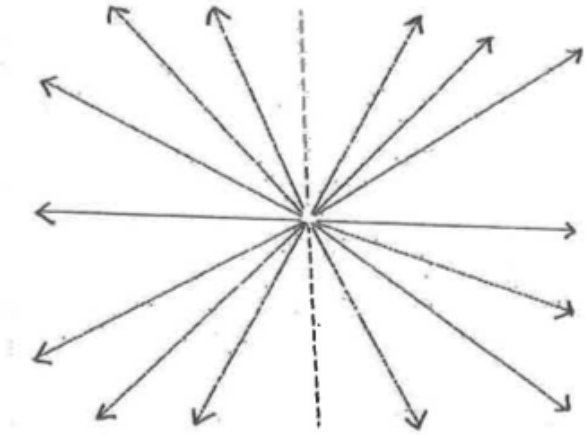


Bi balio propioak bat direnean (balio propio bikoitza), $(0,0)$ puntuaren inguruko ibilbideen diagrama ezberdina izango da bektore propioen azpiespazio bektorialaren dimentsioaren arabera (liburu batzuetan, balio propioa bikoitza denean, puntu kritikoari nodo inpropioa deritze).

Balio propio bikoitza eta bektore propioen azpiespazioaren dimentsioa 2 denean:

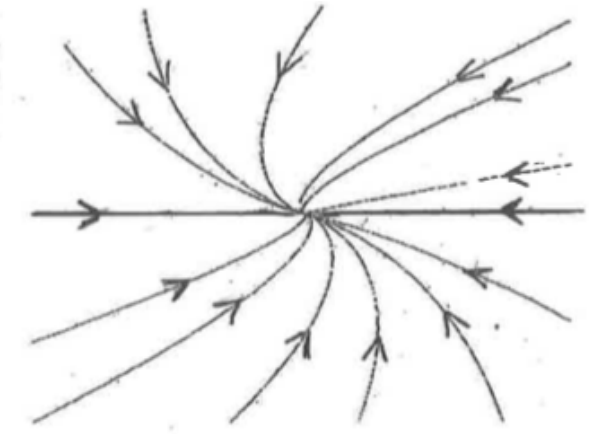
Adibidea. Izan bedi

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y. \end{cases}$$



Balio propio bikoitza eta bektore propioen azpiespazioaren dimentsioa 1 denean:

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -y. \end{cases}$$



b) Bi balio propioak, (λ_1, λ_2), errealak eta zeinu ezberdinekoak direnean, (3) sistema linealaren $(0,0)$ puntu kritikoa zeladura-puntua da. Egoera honetan, ibilbide batzuk jatorrirantz hurbilduko dira eta beste batzuk jatorritik urrunduko dira $t \to \infty$ denean. Zeladura-puntuak egongaitzak dira beti.

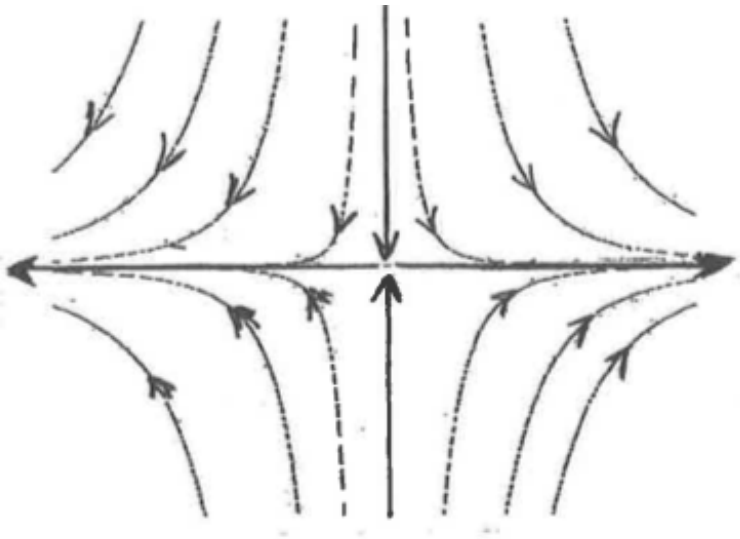
Adibidea. Izan bedi

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -3y. \end{cases}$$

Sistema honen soluzioak $x(t) = C_1 e^t,\ y(t) = C_2 e^{-3t}$ dira $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ izanik. Hainbat kasu aztertuko ditugu:
Baldin $C_1 = 0$ eta $C_2 \neq 0$ hartzen badira, $x(t) = 0$, $y(t) = C_2 e^{-3t}$ dugu. Soluzio horiek guztiek bi ibilbide soilik ematen dituzte, biak $x = 0$ zuzenaren gainean: $C_2 > 0$ denean $x = 0$, $y > 0$ zuzenerdia eta $C_2 < 0$ denean $x = 0$, $y < 0$ zuzenerdia. $t \to \infty$ denean, ibilbide biak jatorrirantz doaz.
Baldin $C_1 \neq 0$ eta $C_2 = 0$ hautatzen badira, $x(t) = C_1 e^t$, $y(t) = 0$ dugu eta soluzio horiek guztiek bi ibilbide ematen dituzte, biak $y = 0$ zuzenaren gainean: $C_1 > 0$ denean $x < 0$, $y = 0$ zuzenerdia eta $C_1 < 0$ denean $x < 0$, $y = 0$. $t \to \infty$ denean biak jatorritik urruntzen dira.
Oro har, $C_1 \neq 0$ eta $C_2 \neq 0$ hartuz, $y = \frac{C_2}{C_1^{-3}} x^{-3}$ kurbak ditugu, hiperbolen antzekoak. $\frac{C_2}{C_1^{-3}} > 0$ denean, ibilbideak kurba horien lehenengo eta hirugarren koadranteetako adarrak dira; aurkako kasuan, bigarren eta laugarren koadranteetako adarrak dira. $t \to \infty$ denean, ibilbide horiek ez dira puntu kritikorantz hurbiltzen, aurreko zuzenerdietarantz hurbiltzen dira asintotikoki,

$$\frac{y}{x} = \frac{C_2}{C_1} e^{-4t}$$

delako.



c) Bi balio propioak zenbaki konplexu irudikari hutsak (zati errealak zero) direnean, (3) sistemaren $(0,0)$ puntu kritikoa zentroa da. Kasu horretan, sistemaren soluzioak funtzio periodikoak dira. Ibilbideak jatorria inguratzen duten kurba itxiak dira, gehienetan elipseak; beraz, ibilbideak ez doaz jatorrirantz $t \to \infty$ edo $t \to -\infty$ denean. Zentroak egonkorrak dira, baina ez dira asintotikoki egonkorrak.

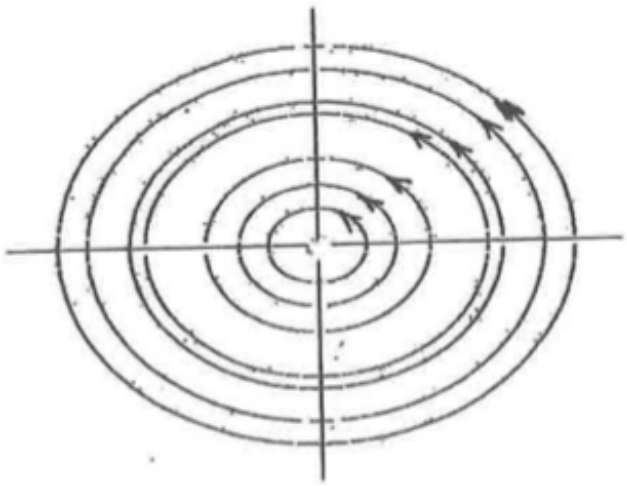
Adibidea. Izan bedi

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x. \end{cases}$$

Sistemaren soluzioak $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $y(t) = C_1 \sin t - C_2 \cos t$ dira, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ izanik. Ibilbideek

$$-xdx = ydy$$

ekuazio diferentziala egiaztatzen dute, jatorrian zentratutako zirkunferentziak dira; $t > 0$ denean, erlojuaren orratzen aurkako noranzkoa dute, abiadura-bektorea $(-y, x)$ delako.



d) Bi balio propioak zati erreal ez-nulua duten zenbaki konplexu konjugatuak direnean, (3) sistemaren $(0,0)$ puntu kritikoa espiral-puntua (fokoa) da. i) Balio propioen zati erreala positiboa denean, ibilbideak jatorritik urruntzen diren espiralak dira ($t \to \infty$ denean), espiral-puntu egongaitza da. ii) Aldiz, zati erreala negatiboa denean, ibilbideak jatorrirantz hurbiltzen diren espiralak dira, espiral-puntua asintotikoki egonkorra da.

Adibidea. Izan bedi

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

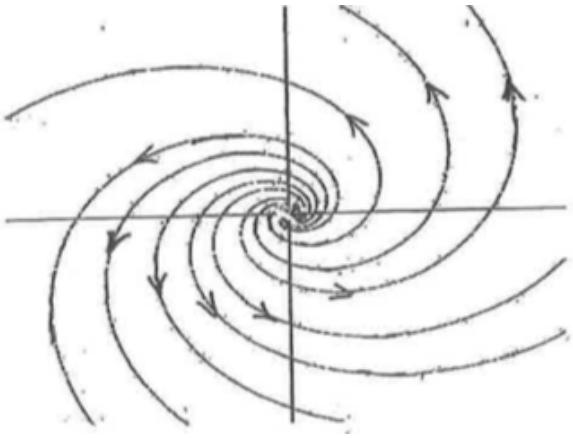
Sistemaren soluzioak $x(t) = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$, $y(t) = e^{2t}(C_1 \sin t - C_2 \cos t)$ dira $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ izanik. Ibilbideak kalkulatzen dira ekuazio diferentzial hau ebatziz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{2x-y} \quad \longrightarrow \quad 4 \arctan \frac{y}{x} - \ln (x^2 + y^2) = C.$$

Koordenatu polarretan $4\theta - \ln r^2 = C$, beraz,

$$r = Ce^{2\theta}.$$

Kurba horiek espiral logaritmikoak dira, jatorritik urruntzen direnak.



Aztertzen ari garen

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y \\ y' = a_2 x + b_2 y \end{cases} \tag{3}$$

sistema lineal autonomoaren

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

matrize ez-singularraren balio propioak λ_1, λ_2,

$$|A - \lambda I| = \lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + (a_1 b_2 - b_1 a_2) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}A\lambda + |A| = 0$$

ekuazioaren soluzioak dira. Dakigunez, $\mathrm{Tr}A = \lambda_1 + \lambda_2$, $|A| = \lambda_1\,\lambda_2$ eta ekuazioaren diskriminatzailea $\Delta = \sqrt{(\mathrm{Tr}A)^2 - 4|A|}$ dira. Horren ondorioz, $\mathrm{Tr}A$, $|A|$, Δ datuen arabera ere egin daiteke (3) sistema linealaren oreka-puntuaren sailkapena:

Puntu kritikoaren sailkapena A matrizearen trazaren eta determinantearen arabera.

Laburtzeko, $\mathrm{Tr}A = T$ eta $|A| = D$ egingo ditugu. $D \neq 0$ da eta

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{T \pm \Delta}{2} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2}.$$

Aukera hauek ditugu:

a) $\Delta = T^2 - 4D < 0$. Beraz, balio propioak zenbaki konplexu konjugatuak dira, zati erreala $T/2$ izanik.

(i) $T = 0$ denean, puntu kritikoa zentroa da (egonkorra).

(ii) $T < 0$ denean, puntu kritikoa espiral-puntua da eta asintotikoki egonkorra.

(iii) $T > 0$ denean, puntu kritikoa espiral-puntua da eta egongaitza.

b) $\Delta = T^2 - 4D \geq 0$ eta $D > 0$. Beraz, balio propioak zenbaki errealak dira eta T-ren zeinu bera dute.

(i) Baldin $T < 0$ eta $T^2 - 4D = 0$ badira, balio propio bikoitza eta negatiboa dugu, beraz, nodo asintotikoki egonkorra.

(ii) Baldin $T < 0$ eta $T^2 - 4D > 0$ badira, balio propio erreal ezberdinak eta negatiboak ditugu, nodo asintotikoki egonkorra.

(iii) Baldin $T > 0$ eta $T^2 - 4D = 0$ badira, balio propio bikoitza eta positiboa dugu, nodo egongaitza.

(iv) Baldin $T > 0$ eta $T^2 - 4D > 0$ badira, balio propio erreal ezberdinak eta positiboak dira, nodo egongaitza.

c) $D < 0$ denean balio propioek aurkako zeinua dutenez, puntu kritikoa zeladura-puntua da, egongaitza. Laburbilduz:

(i) (3) sistema linealaren $(0, 0)$ puntu kritikoa asintotikoki egonkorra da, baldin eta soilik baldin A matrizearen balio propio guztien zati errealak negatiboak badira.

(ii) $(0, 0)$ puntu kritikoa egonkorra da, baldin eta soilik baldin A matrizearen balio propio guztien zati errealak zero edo negatiboak badira.

Oharra. Ikusi dugunez, A matrizearen balio propioek λ_1, λ_2, puntu kritikoaren mota eta egonkortasuna zehazten dituzte. Aldi berean, balio propioak A matrizearen a_1, b_1, a_2, b_2 elementuen mende daude, hau da, sistema autonomo linealaren koefizienteen mende. Praktikan, mundu fisikoan, koefiziente horiek askotan ez direnez datu zehatzak, jakin behar dugu datu horietan aldaketa txikiak (perturbazioak) izateak puntu kritikoaren egonkortasuna edo bere inguruko ibilbideen diagrama (nodo, zeladura-puntua, espiral puntua edo zentroa) eraldatzen duen; eta, hala izanez gero, zenbat edo nola aldatzen dituen. Ikusiko dugunez, puntu

kritikoa zentroa denean, hau da, balio propioak zenbaki konplexu irudikari hutsak direnean, egonkortasuna eta inguruko ibilbideen diagrama guztiz alda daitezke, sistema autonomo linealaren koefizienteetan perturbazio txikiak ditugunean. Bestalde, balio propioa bikoitza denean ere, aldaketa nabarmenak egon daitezke. Aldiz, beste kasuetan, ez da egonkortasuna ez puntu kritikoaren mota aldatuko, perturbazioak behar bezain txikiak direnean.

7.4 Sistema autonomo ez-linealak: sistema lineal elkartua

Izan bedi

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \tag{4}$$

sistema autonomoa eta izan bedi (x_0, y_0) sistemaren puntu kritikoa ($f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$). Aurrerantzean, suposatuko dugu $f(x,y)$ eta $g(x,y)$ funtzioek deribatu partzial jarraituak dituztela (x_0, y_0) puntuaren ingurune batean. Bi funtzio horien lehen ordenako Taylorren formulak idatziko ditugu:

$$f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + r_1(x,y)$$

$$g(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + r_2(x,y)$$

non

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{r_i(x,y)}{\parallel (x-x_0, y-y_0) \parallel} = 0, (i = 1,2)$$

baita. Beraz, $(x,y) \to (x_0, y_0)$ denean

$$f(x,y) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

$$g(x,y) \approx \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0).$$

Izan bedi A matrizea $(f(x,y), g(x,y))$ eremu bektorialaren matrize jakobiarra (x_0, y_0) puntuan:

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}.$$

A matrizeari loturik, honako sistema lineal autonomo hau definitzen da:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

(5) sistema lineala (4) sistema ez-linealetik hurbil dago (x, y) puntua (x_0, y_0) puntutik hurbil dagoenean; jakin nahi dugu ea berdinak diren (5) sistemaren ibilbideen ezaugarriak eta (4) sistemaren ibilbidearenak (x_0, y_0) puntu kritikoaren inguruan.

Translazio egokia eginez

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{6}$$

sistema lineala dugu, zeinaren puntu kritikoa (oreka-puntua) $(0, 0)$ baita.

3. lema. *Baldin* $(0,0)$ *puntua (6) sistema linealaren puntu kritiko isolatua (*$det(A) \neq 0$*) bada, orduan (4) sistemaren* (x_0, y_0) *puntu kritiko isolatua ere bada.*

Honako teorema honetan azaltzen denez, askotan berdinak dira (6) sistema linealaren $(0, 0)$ puntu kritikoaren eta (4) sistema ez-linealaren (x_0, y_0) puntu kritikoaren egonkortasuna eta sailkapena. (Ez, adibidez, $(0, 0)$ puntua zentroa denean).

26. teorema. *Linealizazio-teorema (Poincaré-Liapunov).*

a) (4) sistema autonomoaren (x_0, y_0) *puntu kritikoa asintotikoki egonkorra da, baldin eta soilik baldin A matrizearen balio propioen zati errealak negatiboak badira; hau da, (6) sistemaren* $(0, 0)$ *puntu kritikoa asintotikoki egonkorra bada.*

b) (4) sistema autonomoaren (x_0, y_0) *puntu kritikoa egongaitza da, baldin eta soilik baldin A matrizeak gutxienez zati erreal positiboko balio propio bat badu; hau da, (6) sistemaren* $(0, 0)$ *puntu kritikoa egongaitza bada. (Zalantzazko kasua: autobalioak zenbaki konplexu irudikari hutsak direnean).*

Horrez gain, A matrizearen autobalioak λ_1, λ_2 *ezberdinak direnean eta nuluak ez direnean, honako propietate hauek egiaztatzen dira:*

(i) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ *denean,* (x_0, y_0) *nodo asintotikoki egonkorra da.*

(ii) $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ *denean,* (x_0, y_0) *nodo egongaitza da.*

(iii) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ *denean,* (x_0, y_0) *zeladura-puntua da (egongaitza).*

(iv) λ_1 *zenbaki erreala ez bada eta* $Re(\lambda_1) < 0$ *bada,* (x_0, y_0) *espiral-puntua asintotikoki egonkorra da.*

(v) λ_1 *zenbaki erreala ez bada eta* $Re(\lambda_1) > 0$ *bada,* (x_0, y_0) *espiral-puntu egongaitza da.*

Oharra. (6) sistemaren $(0, 0)$ puntu kritikoa eta (4) sistemaren (x_0, y_0) puntu kritikoa mota berekoak izan arren, puntu horien inguruko ibilbideen grafikoak ez dira berdinak izango.

Adibidea. Izan bedi

$$\begin{cases} x' = -y + \mu(x^2 + y^2)x \\ y' = x + \mu(x^2 + y^2)y \end{cases} \qquad \text{eta} \quad \mu \in \mathbf{R}.$$

$(0, 0)$ puntua da puntu kritiko bakarra. Sistema linealizatua hau da:

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x. \end{cases}$$

Balio propioak zenbaki konplexu irudikari hutsak dira: $\lambda = \pm i$. Puntu kritikoa zentro bat da; beraz, egonkorra da sistema linealerako baina ez da asintotikoki egonkorra. Hasierako sistema autonomoa koordenatu polarrez adieraziko dugu.

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

eta

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x};$$

t-rekiko deribatuz,

$$xx' + yy' = rr' \qquad \theta' = \frac{y'x - x'y}{r^2}$$

eta, horren ondorioz, emandako sistema autonomoa honela idazten da koordenatu polarretan:

$$\begin{cases} r' = \mu r^3, \\ \theta' = 1. \end{cases}$$

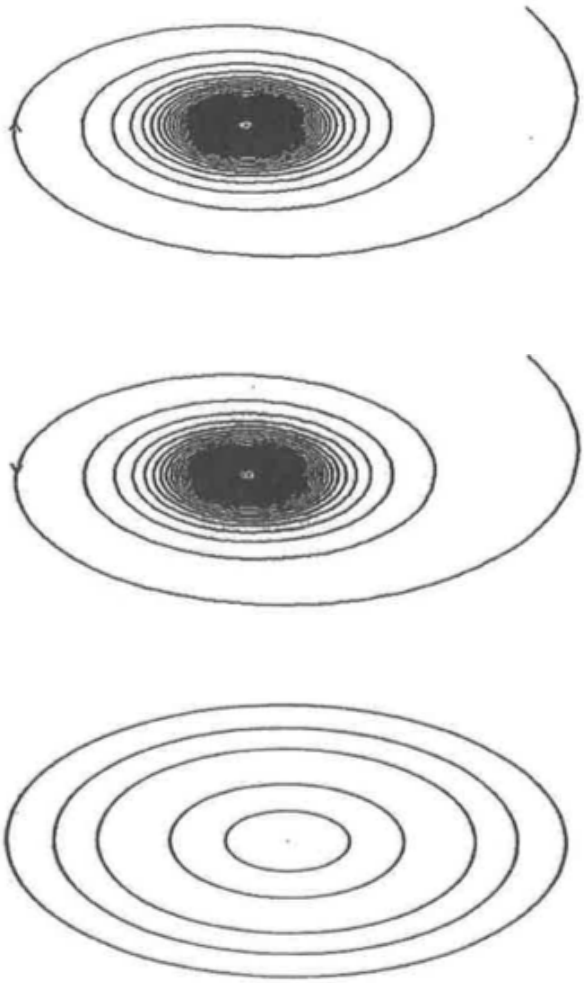
Orain, erraz ondorioztatzen ditugu honako emaitz hauek:

(i) Baldin $\mu < 0$ bada, orduan, $r(t)$ zerorantz doa $t \to \infty$ doanean; beraz, $(0,0)$ puntua asintotikoki egonkorra da hasierako sistema autonomorako.

(ii) Baldin $\mu > 0$ bada, orduan, $r(t)$ zerorantz doa $t \to -\infty$ doanean; beraz, $(0,0)$ puntua egongaitza da.

(iii) Baldin $\mu = 0$ bada, $(0,0)$ puntua egonkorra da (zentroa) (aurrean aztertu dugun sistema lineala da).

Hemen aurreko hiru emaitzen plano-fasea puntu kritikoaren inguruan:



Adibidea. Izan bedi

$$\begin{cases} x' = -x - y - 3x^2 y \\ y' = -2x - 4y + y \sin x. \end{cases}$$

Aztertu $(0,0)$ puntuaren egonkortasuna. Sistema linealizatua:

$$\begin{cases} x' = -x - y \\ y' = -2x - 4y \end{cases}$$

da. Hemen $D = 2$ eta $T = -5$ dira (balio propioak biak negatiboak dira), beraz, $(0,0)$ puntua asintotikoki egonkorra da. Linealizazio-teoremaren arabera emandako sistemarako ere $(0,0)$ puntua asintotikoki egonkorra da.

7.5 Liapunov-en metodo zuzena

Aurrerantzean, $(0,0)$ puntua (1) sistema autonomoaren puntu kritiko isolatua dela suposatuko dugu. Gogoratuko dugu definizio ezagun hau:

Definizioa. Bi aldagaiko funtzio erreala $E(x,y)$:

a) **Positiboki definitua** dela esaten da $E(0,0) = 0$ eta $E(x,y) > 0$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$ egiaztatzen denean. Adibidez, $E(x,y) = ax^2 + by^2$, $a, b > 0$ izanik.

b) **Positiboki erdi definitua** dela esaten da $E(0,0) = 0$ eta $E(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$. Adibidez, $E(x,y) = ax^2$, $a > 0$ izanik.

c) **Negatiboki definitua** dela esaten da $E(0,0) = 0$ eta $E(x,y) < 0$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$. Hau da, $-E(x,y)$ funtzio positiboki definitua da.

d) **Negatiboki erdi definitua** dela esaten da $E(0,0) = 0$ eta $E(x,y) \leq 0$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$.

Definizioa. Izan bedi $E(x,y)$ funtzio bat definitua eta deribatu partzialak jarraituak dituena, jatorria bere barruan duen barruti batean. Funtzio hori (1) sistema autonomorako Liapunoven funtzioa dela esaten da, honako baldintza hauek egiaztatzen dituenean:

a) $E(x,y)$ positiboki definitua da (definizio-eremuan).

b)$E'(x,y) = \frac{\partial E}{\partial x} \cdot f + \frac{\partial E}{\partial y} \cdot g$ funtzioa negatiboki erdi definitua da (definizio-eremuan).

27. teorema. *(1) sistema autonomorako honako propietate hauek egiaztatzen dira:*

a) (1) sistema autonomorako Liapunoven funtzio bat existitzen bada, $(0,0)$ *puntu kritikoa*

egonkorra da. Horrez gain, $E'(x,y)$ negatiboki definitua bada, orduan $(0,0)$ puntu kritikoa asintotikoki egonkorra da.
b) Demagun honako baldintz hauek egiaztatzen dituen $E(x,y)$ funtzio bat existitzen dela:

(i) *$E(x,y)$ jarraitua da eta deribatu partzial jarraituak ditu jatorria bere barruan duen barruti batean.*

(ii) *$E(0,0)=0$, eta jatorrian zentratutako zirkulu bakoitzak puntu bat du gutxienez, non $E(x,y)$ positiboa baita.*

(iii) *$E'(x,y)$ positiboki definitua da.*

Orduan, (1) sistemaren puntu kritikoa egongaitza da.

Honako adibide hauetan nahiko erraz aurkituko dugu sistemaren Liapunoven funtzioa.

Adibidea. Izan bedi

$$\begin{cases} x' = -3x^3 - y \\ y' = x^5 - 2y^3. \end{cases}$$

Aztertu $(0,0)$ puntu kritikoaren egonkortasuna Liapunoven metodoa erabiliz.

$(0,0)$ sistemaren puntu kritiko bakarra da. Sistema linealizatuaren matrizea singularra da, eta linealizazio bidezko metodoak ez du emaitzarik ematen. Liapunoven funtzioa aurkitzeko, honako adierazpen hau duten funtzioetatik abiatuko gara:

$$E(x,y) = ax^{2m} + by^{2n}, \qquad a,b>0, \quad m,n \in \mathbb{N}$$

beraz, positiboki definitua da.

$\frac{\partial E}{\partial x}\cdot f + \frac{\partial E}{\partial y}\cdot g$ negatiboki definitua izatea hauxe egiaztatzea da:

$$\frac{\partial E}{\partial x}\cdot f + \frac{\partial E}{\partial y}\cdot g = 2max^{2m-1}(-3x^3-y) + 2nby^{2n-1}(x^5-2y^3)$$

$$= -(6max^{2m+2} + 4nby^{2n+2}) + (-2max^{2m-1}y + 2nby^{2n-1}x^5).$$

Lehen batugaia negatiboa da eta bigarrena zero egiten saiatuko gara; horretarako:

$$2m-1=5, \qquad 2n-1=1, \qquad 2ma = 2nb \quad a,b>0,$$

hau da, $m = 3$, $n = 1$ eta adibidez $a = 1$ eta $b = 3$, ($b = 3a$). Beraz, $E(x, y) = x^6 + 3y^2$ Liapunoven funtzioa da, eta, horren ondorioz, $(0, 0)$ puntu kritikoa asintotikoki egonkorra dugu.

Adibidea. m masa bat malguki batez finkatua dago; masa horren higiduraren ekuazioa

$$mx'' + cx' + kx = 0$$

da; $c \geq 0$ konstanteak inguruneak eragiten duen moteltze-prozesua adierazten du, eta $k > 0$ malgukiaren errekuperazio-konstantea da. Ekuazio diferentzial horren sistema baliokidea:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}y. \end{cases}$$

Puntu kritiko bakarra $(0, 0)$ da. Masaren energia zinetikoa eta potentziala:

$$E_c = my^2/2, \qquad E_p = \int_0^x ktdt = kx^2/2.$$

Sistemaren energia totala:

$$E(x, y) = my^2/2 + kx^2/2.$$

Erraz egiazta daiteke funtzio hori sistemaren Liapunoven funtzioa dela. Kasu honetan, E' negatiboki erdi definitua denez, badakigu $(0, 0)$ puntua egonkorra dela. Izatez, $c > 0$ denean $(0, 0)$ puntua asintotikoki egonkorra da.

(Liapunoven metodo zuzena eta sistema kontserbakorren printzipio fisikoa erlazionatuta daude. Liapunoven funtzioak sistema fisiko baten energia osoaren kontzeptuaren hedapenak dira. Sistema fisiko baten energia osoak oreka-puntu batean minimo lokal bat badu, puntu hori egonkorra izango da).

7.6 ARIKETAK

1.- Kalkulatu honako sistema autonomo hauen puntu kritikoak:

$$a)\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = 5x - 7y \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x' = xy \\ y' = x - y \end{cases} \qquad c)\begin{cases} x' = \sin y \\ y' = x + y^2 \end{cases}$$

$$d)\begin{cases} x' = x^2 + y^2 \\ y' = x^2 - y^2 \end{cases} \qquad e)\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = x^2 - y \end{cases} \qquad f)\begin{cases} x' = e^{xy} \\ y' = x + y^2 \end{cases}$$

2.- Aztertu honako sistema autonomo hauen puntu kritikoen egonkortasuna:

$$a)\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = y \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = 3x - y \end{cases} \qquad c)\begin{cases} x' = -2x \\ y' = x - y \end{cases}$$

$$d)\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -3x - 2y \end{cases} \qquad e)\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -3x + y \end{cases} \qquad f)\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -3x + y \end{cases}$$

3.- Marraztu honako sistema hauen fase-diagramak eta aztertu puntu kritikoen egonkortasuna:

$$a)\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x' = x \\ y' = 3x - 4y \end{cases} \qquad c)\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$$

$$d)\begin{cases} x' = y(2 - y) \\ y' = (x - 2)(y - 1) \end{cases} \qquad e)\begin{cases} x' = y \\ y' = y^2 + x \end{cases} \qquad f)\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x^2 + y \end{cases}$$

4.- Zehaztu honako sistema ez-lineal hauen egonkortasuna linealizazio-teoremaren bidez, hori posible denean.

$$a)\begin{cases} x' = x - xy \\ y' = -y + y^2 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + x^3 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} x' = x - xy \\ y' = x - y \end{cases}$$

5.- Izan bedi

$$x'' + x - \epsilon x'(1 - x^2) = 0$$

Van Der Pol-en ekuazio diferentziala. Idatzi sistema diferentzial baliokidea. Aurkitu eta sailkatu puntu kritikoak ϵ-en balioen arabera.

6.- Egiaztatu honako kasu hauetan $E(x, y)$ funtzioak Liapunoven funtzioak direla, eta aztertu $(0, 0)$ puntu kritikoaren egonkortasuna:

$$a) \begin{cases} x' = x^3 - x - y \\ y' = x \end{cases} , \quad E(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

$$b) \begin{cases} x' = y - x^3 \\ y' = -x \end{cases} , \quad E(x, y) = x^2 + y^2$$

$$c) \begin{cases} x' = y - xy^2 \\ y' = -x^3 \end{cases} , \quad E(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2$$

8. Kapitulua

Aldagaien banantze-metodoa. Sturm-Liouville-ren problemak

8.1 Aldagaien banantze-metodoa eta bi aldagaiko deribatu partzialetako ekuazioak

(DPE = Deribatu Partzialetako Ekuazioa)

Beroaren ekuazioa

Beroaren problema (dimentsio batekoa) homogeneoa aztertuko dugu. Aztertuko dugun DPEk beroaren difusioa adierazten du, l luzerako hagatxo zuzen batean zehar hagatxo hori material homogeneoz eginda dagoenean eta kanpokoarekin bero-trukerik ez dagoenean. Hagatxo horren puntuak x aldagai errealaren bidez adieraziko ditugu, $0 \leq x \leq l$; t denbora da eta $u(x,t)$ delakoak t aldiunean hagatxoko x puntuaren tenperatura adierazten du.

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < l,\, t > 0, \tag{1}$$

α^2 konstante positiboa bero-disipazioaren konstantea da. (1) ekuazioarekin batera, hastapen-baldintzak eta mugalde-baldintzak beharko ditugu, problema fisikoak ematen dizkigunak. Demagun hagatxoko puntuetan ezaguna dela hasierako tenperatura-banaketa, hots,

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < l, \tag{2}$$

Horrez gain, demagun hagatxoaren mutur-puntuetako tenperatura konstante berdin zero mantentzen dela (mugalde-baldintzak); hau da:

$$u(0,t) = 0, \quad t > 0, \tag{3}$$

$$u(l,t) = 0, \quad t > 0. \tag{4}$$

(1)-(2)-(3)-(4) baldintzek osatzen duten problema diferentziala P izendatuko dugu.
Gure helburua P problemaren $X(x)T(t)$ adierazpen berezia duten soluzioak aurkitzea da (soluzio nulua baztertuta); hau da, P problema ebazteko BANANTZE-METODOA erabiliko dugu.
$u(x,t) = X(x)T(t)$ formako soluzio ez-nuluak aurkitu nahi ditugunez, (1) DPEn ordezkatuz,

$$\alpha^2 \, X''(x)\, T(t) = X(x)\, T'(t)$$

dugu, hau da,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)}.$$

Azken ekuazioaren ezkerreko atala x-ren funtzioa da soilik, eta eskuinekoa soilik t-ren funtzioa; beraz, berdintza hori egiaztatzeko aukera bakarra atal biak funtzio konstanteak izatea da (edozein konstante erreal). Konstante hori $-\lambda$ idatziko dugu eta banantze-konstantea deritzo.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$$

Horrela, edozein λ-tarako bi ekuazio diferentzial ditugu:

$$X''(x) + \lambda \, X(x) = 0, \tag{5}$$

$$T'(t) + \alpha^2 \lambda \, T(t) = 0 \tag{6}$$

Horrela, (1) DPEren ordez, λ konstantearen balio bakoitzerako bi ekuazio diferentzial idatzi ditugu, eta λ-ren balio bakoitzerako (5)-aren soluzioa bider (6)-aren soluzioa, (1) ekuazioaren soluzio da. Bestalde, P problemaren $X(x)T(t)$ soluzioek (3) baldintza egiaztatu behar dute, beraz,

$$X(0)\, T(t) = 0, \; (t > 0), \to X(0) = 0;$$

eta (4) baldintza egiaztatu behar dute, beraz:

$$X(l)\,T(t) = 0,\ (t > 0), \to X(l) = 0.$$

Ikusi dugunez, X(x) funtzioa honako mugalde-balio hauetako problemaren soluzioa izan behar da (λ hori parametro erreala izanik):

$$(7) \qquad \begin{cases} X''(x) + \lambda\, X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Azken problema horren soluzio ez-nuluak kalkulatu nahi ditugu; horretarako, jakin nahi dugu λ parametroaren zein baliotarako dituen (7) problemak soluzio ez-nuluak. λ-ren balio horiei (7) problemaren balio propioak deritze. (7)-ko ekuazioaren polinomio ezaugarria: $r^2 + \lambda$ da.

- $\lambda = 0$ bada, erraz ikusten da (7) problemaren soluzio bakarra funtzio nulua dela.
- $\lambda < 0$ denean, (7) problema ebatziz, bere soluzio bakarra soluzio nulua dela ondorioztatzen da.
- $\lambda > 0$ denean, hau da (7)-ko ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra:

  $$X(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x);$$

  eta

  $$X(0) = 0 \to C_2 = 0$$
  $$X(l) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \to \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \to \lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2},\ n \neq 0.$$

  $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$, $n \in \mathbb{N}$ balioetarako (balio propioak) (7) problemaren soluzio ez-nuluak daude; hain zuzen ere, $X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$ eta bere multiploak (funtzio propioak).

  Orain, $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$ baliorako (6) ekuazioa honako hau bihurtzen da:

  $$T'(t) + \alpha^2 \frac{n^2\pi^2}{l^2} T(t) = 0,$$

eta ekuazio horren soluzioak $T_n(t) = \exp^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t}$ funtzioa eta bere multiploak dira.

Laburbilduz,

$$u_n(x,t) = \exp^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3... \tag{8}$$

funtzioek eta horien konbinazio linealek (1)-(3)-(4) baldintzak egiaztatzen dituzte. Hau da, (1)-(3)-(4) baldintzak soluzio formal honek egiaztatzen ditu:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$c_n, n = 1, 2, \ldots$ edozein zenbaki izanik. (Horietatik (2) baldintza betetzen dutenek emandako beroaren problemaren soluzioak izango dira).

Adibidea. Demagun (P) problemaren $f(x) = 3 \sin \frac{4\pi x}{l}$ dela. (8) baldintzatik $u_n(x,0) = \sin \frac{n\pi x}{l}$ dugunez,

$$u(x,t) = 3 \exp^{-\frac{\alpha^2 16\pi^2}{l^2} t} \sin \frac{4\pi x}{l}$$

funtzioa da (P) problemaren soluzioa f horretarako.

Adibidea. Demagun $f(x) = b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + ... + b_m \sin \frac{m\pi x}{l}$ dela, $b_1, .., b_m$ zenbaki erreal finkatuak izanik. (8) baldintzatik $u_n(x,0) = \sin \frac{n\pi x}{l}$ dugunez,

$$u(x,t) = b_1 \exp^{-\frac{\alpha^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{\pi x}{l} + \ldots + b_m \exp^{-\frac{\alpha^2 m^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{m\pi x}{l}$$

da (P) problemaren soluzioa f horretarako.

Adibidea. Demagun $\forall x \in (0, l)$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{9}$$

dela, $b_1, b_2, ...$ zenbaki erreal finkatuak izanik. (8) baldintzatik $u_n(x,0) = \sin \frac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, 3...$ dugunez, kasu honetan, honako hauxe da (P) problemaren soluzio formala:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{10}$$

Galdera: zein dira $(0, l)$ tartean $\{\sin \frac{n\pi x}{l}\}$ sinuetako serie baten bidez adieraz daitezkeen $f(x)$ funtzioak?

Oharra. $\forall x \in (0,l)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \sin \frac{n\pi x}{l}$$

bada eta baldintza erregularrak betetzen badira, b_n koefizienteek honako formula hauek egiaztatuko dituzte:

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx, \qquad n = 1, 2, 3, ... \tag{11}$$

(11) formula frogatzen da honako ortogonaltasun-baldintza hauek erabiliz: $n \neq m$ denean

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x)\, dx = \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l}\, dx = 0,$$

(hau da, $X_n(x)$ eta $X_m(x)$ funtzio ortogonalak dira $< f, g >= \int_0^l f(x)g(x)\, dx$ biderkadura eskalarrarekiko); eta edozein n-tarako:

$$\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l}\, dx = \frac{l}{2}$$

da, hots, $< X_n(x), X_n(x) >= \frac{l}{2}$.

Beroaren problema, hagatxoaren muturrak isolatuta daudenean

$$\begin{cases} \alpha^2 \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < l, \\ u_x(0,t) = 0, \quad t > 0, \\ u_x(l,t) = 0, \quad t > 0. \end{cases} \tag{12}$$

Aldagaien banantze-metodoa erabiliko dugu; hots, $u(x,t) = X(x)T(t)$ soluzioak, beraz,

$$\alpha^2 \ X''(x)\, T(t) = X(x)\, T'(t)$$

ondorioz:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda. \tag{13}$$

X(x) funtzioak honako mugalde-balio hauetako problemaren soluzio ez-nuluak izan behar dira, λ hori parametro erreala izanik:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda\, X(x) = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X'(l) = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Aurkitu behar dugu λ parametroaren zein baliotarako duen (14) problemak soluzio ez-nulua (balio propioak). Polinomio ezaugarria $r^2 + \lambda$.

- $\lambda = 0$ balio propioa da eta $X(x) \equiv 1$ funtzio konstantea eta horren multiploak mugalde-baldintzetako problemaren soluzioak dira (funtzio propioak).

- $\lambda < 0$ bada, (14) problema ezabatuz, mugalde-problemak duen soluzio bakarra soluzio nulua dela ikusten da.

- $\lambda > 0$ denean, ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra hau da:

  $$X(x) = k_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + k_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

  eta $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$, $(n \neq 0,\, n \in \mathbb{N})$ balio propioak eta $X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}$ funtzio propioak ditugu. Beraz, (12) problemaren DPE eta mugalde-baldintzen soluzioak

  $$u_0(x,t) \equiv 1$$

  $$u_n(x,t) = \exp^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3...$$

  funtzioak dira, eta horien konbinazio lineal finituak edo infinituak (formalki); hots,

  $$\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad (c_0, c_1, \ldots \text{edozein}).$$

Adibidea. Demagun ebatzi nahi dugun problemaren f funtzioa $\{\frac{1}{2}; \cos\frac{n\pi x}{l} : n \in \mathbb{N}\}$ funtzioetako seriearen bidez adierazita dagoela, hau da,

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad (b_0, b_1, \ldots \text{datuak});$$

orduan, (12) problemaren soluzio formala honako hau da:

$$u(x,t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, \exp^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

Galdera: zein dira $(0,l)$ tartean aurreko kosinuetako serie baten bidez adieraz daitezkeen $f(x)$ funtzioak?

Oharra. $\forall x \in (0,l)$

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, \cos \frac{n\pi x}{l},$$

bada eta baldintza erregularrak betetzen badira, koefizienteek honako propietate hauek dituzte:

$$b_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x)\, dx,$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Aurreko emaitzak lortzeko ortogonaltasun-baldintza hauek erabiltzen dira: $n \neq m$ denean

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x)\, dx = \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l}\, dx = 0$$

eta edozein n-tarako:

$$\int_0^l X_n^2(x)\, dx = \int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l}\, dx = \frac{l}{2}.$$

Uhin-ekuazioa (dimentsio batekoa): hari elastiko baten bibrazioak

Dimentsio bateko uhinen ekuazio homogeneoa aztertuko dugu. Izan bedi l luzerako hari elastikoa muturretatik finkatua. Muturrak 0 eta l dira, eta $u(x,t)$ funtzioak t momentuan hariko x puntuaren desplazamendu bertikala adierazten du; $u(x,t)$ horrek honako deribatu partzialetako ekuazio hau egiaztatzen du:

$$a^2 \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} \quad , \quad 0 < x < l, \quad t > 0. \tag{15}$$

Orain, honako mugalde-baldintza eta hastapen-baldintza hauek izango ditugu:

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0, \quad \text{(mugalde-baldintzak)} \tag{16}$$

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x),\ 0 < x < l,\ \text{(hastapen-baldintzak)}. \tag{17}$$

(15)-(16)-(17) baldintzez osatutako problema ebazteko, aldagaien BANANTZE-METODOA erabiliko dugu; hots, $u(x,t) = X(x)T(t)$ formako soluzioak aurkitu nahi ditugu (soluzio ez-nuluak); DPEn ordezkatuz,

$$a^2\ X''(x)\,T(t) = X(x)\,T''(t),$$

beraz,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda.$$

(16) baldintzen ondorioz, X(x) funtzioak honako mugalde-balio hauetako problemaren soluzioak izan behar dira, λ hori parametro erreala izanik:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda\ X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$

Problema hori aurrean ebatzi dugu, bere balio propioak $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$, $n = 1, 2, ...$ dira eta funtzio propioak $X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$.

λ_n-rako $T_n(t)$ funtzioak honako ekuazio diferentzial hau egiaztatu behar du:

$$T_n{}'' + \frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}T_n = 0;$$

eta ekuazio horren soluzio orokorra honako hau da:

$$T_n(t) = c_n \sin\frac{n\pi at}{l} + k_n \cos\frac{n\pi at}{l} \quad (c_n, k_n \text{ edozein}).$$

Beraz, (15)-(16) baldintzez osatutako problemaren oinarrizko soluzioak λ_n-rako honako bi hauek dira:

$$\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi at}{l}, \quad n = 1, 2, 3, .. \tag{18}$$

eta

$$\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}, \quad n = 1, 2, 3, .. \tag{19}$$

Beraz, hau da (15)-(16) baldintzez osatutako problemaren soluzio orokorra (formala):

$$(*)\sum_{n=1}^{\infty}\ \sin\frac{n\pi x}{l}\ (c_n \sin\frac{n\pi at}{l} + k_n \cos\frac{n\pi at}{l})$$

$c_n, k_n (n = 1, 2, ...)$ edozein zenbaki erreal izanik.

Oharra. Lehen hastapen-baldintzako $f(x)$ funtzioa aurreko $\sin \frac{n\pi x}{l}$ funtzio propioen serie baten bidez adierazita badago, esate baterako

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

bada, orduan $(*)$ formulan

$$k_n = b_n, (n = 1, 2, 3...)$$

hartuz lortzen den adierazpenak (15),(16) baldintzak eta (17)-ko lehen hastapen-baldintza egiaztatzen ditu.

Demagun (17)-ko bigarren hastapen-baldintzako $g(x)$ funtzioa ere aurreko sinuetako serie baten bidez adierazita dagoela $(0, l)$ tartean; adibidez:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Hastapen-baldintza hori egiaztatzeko, honako bi serie hauek identifikatuko ditugu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin \frac{n\pi x}{l};$$

hau da, c_n koefizienteak finkatzen dira honela:

$$c_n = \frac{l}{n\pi a} d_n, (n = 1, 2...)$$

Honako hau da(15)-(16)-(17) baldintzez osatutako problemaren soluzio formal orokorra:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left(\frac{l}{n\pi a} d_n \sin \frac{n\pi at}{l} + b_n \cos \frac{n\pi at}{l} \right)$$

($g(x)$ funtzio nulua denean $c_n = 0$, $n = 1, 2, ...$)

Laplaceren ekuazioa errektangelu baten gainean. Aldagaien banantze-metodoa erabil daiteke honako problema hau ebazteko ere:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0, \qquad 0 < x < l, \quad 0 < y < L, \\ u(0, y) = u(l, y) = 0, \quad 0 < y < L, \\ u(x, 0) = f_1(x), \quad 0 < x < l, \\ u(x, L) = f_2(x), \quad 0 < x < l. \end{cases}$$

Suposa dezagun problema honen soluzioa $u(x,y) = X(x)Y(y)$ idatz daitekeela. Deribatuz eta Laplaceren ekuazioan ordezkatuz $X''Y + XY'' = 0$ lortzen da, beraz:

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} = \lambda.$$

Mugalde-baldintzak, $u(0,y) = u(l,y) = 0$, inposatuz, $X(x)$ honako Sturm-Liouvilleren problema honen soluzioa lortuko dugu

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

eta Y, $Y'' - \lambda Y = 0$ ekuazioaren soluzioa izan behar da. Sturm-Liouvilleren problemaren autobalioak $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ dira, eta dagokien autofuntzioak $X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$.

Beste alde batetik,

$$Y''(y) - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Y(y) = 0$$

ekuazioaren soluzio orokorra sinu eta cosinu hiperbolikoen terminoetan adierazita, hau da:

$$Y(y) = \alpha_n \cosh\frac{n\pi y}{l} + \beta_n \sinh\frac{n\pi y}{l}.$$

Gogoratu:

$$\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \qquad \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}.$$

Guztia kontuan harturik, gure problemaren soluzioaren adierazpena

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{l}\left(\alpha_n \cosh\frac{n\pi y}{l} + \beta_n \sinh\frac{n\pi y}{l}\right)$$

da, non α_n eta β_n koefizienteak kalkulatu beharko baitira mugalde-baldintzak bete ditzaten. Horretarako f_1 eta f_2 funtzioen Fourierren sinu-serie bidezko garapenak hartuko ditugu, hau da:

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l} \quad \text{eta} \quad f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

$u(x,0) = f_1(x)$ eta $u(x,L) = f_2(x)$ baldintzak egiaztatu behar direnez, $\alpha_n = a_n$, $\beta_n \sinh\frac{n\pi L}{l} = b_n - a_n \cosh\frac{n\pi L}{l}$. Beraz, α_n eta β_n $u(x,y)$-ren azken adierazpenean ordezkatuz, Laplaceren problemaren soluzioa lortzen da.

8.2 Sturm-Liouvilleren mugalde-problemak

Bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal batek eta bi mugalde-baldintzek osatutako honako problema diferentzial honi bigarren ordenako mugalde-problema lineala deritzo:

$$\begin{cases} x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t), \qquad t \in [a,b], \\ a_1\, x(a) + b_1\, x(b) + c_1\, x'(a) + d_1\, x'(b) = A_1, \\ a_2\, x(a) + b_2\, x(b) + c_2\, x'(a) + d_2\, x'(b) = A_2. \end{cases}$$

Ekuazio diferentziala eta mugalde-baldintzak homogeneoak badira, mugalde-problema homogeneo deritzo.

Mugalde-problemetako soluzioen kopurua nahiko irregularra da. Adibidez,

$$x'' + x = 0$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

problemaren soluzio bakarra $x(t) = 0, \forall t$ soluzio nulua da. Aldiz,

$$x'' + \pi^2 x = 0$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

problemaren soluzio multzoa infinitua da: $x = C \sin(\pi t)$ (C edozein). Eta

$$x'' + \pi^2 x = 0$$

$$x(0) + x(1) = 0, \quad x'(0) + x'(1) = 0$$

problemaren soluzio multzoa : $x = C_1 \sin(\pi t) + C_2 \cos(\pi t)$, ($C_1, C_2$ edozein).

Sarritan, mugalde-balioetako problemetan parametro bat agertzen da, eta parametroaren balio guztietarako aztertu behar da problema. Adibidez, 8.1 atalean, banantze-metodoaren ondorioz, λ parametro bati loturiko mugalde-problemak agertu dira (ikusi atal horretako (7) eta (19) problemak). Problema horiek Sturm-Liouvilleren problemak dira.

8.2.1 Sturm-Liouvilleren problema homogeneo erregularra

Mugalde-problema linealen artean, Sturm-Liouvilleren problemak aztertuko ditugu. Horien enuntziatuetan, era autoadjuntuan adierazita egoten da ekuazio diferentziala.
Sturm-Liouvilleren problema homogeneo erregularra:

$$(1) \qquad (r(t)\,x')' - p(t)\,x + \lambda q(t)\,x = 0 \quad , \quad t \in [a,b], \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} a_1\,x(a) + a_2\,x'(a) = 0 \\ b_1\,x(b) + b_2\,x'(b) = 0, \end{cases}$$

$a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}$, $|a_1| + |a_2| \neq 0$, $|b_1| + |b_2| \neq 0$, $\forall t \in [a,b], r(t) > 0$, $q(t) > 0$ eta $p(t)$ funtzio erreala non $p(t) \in C([a,b])$, $q(t) \in C([a,b])$ eta $r(t) \in C^1([a,b])$ baitira.

λ parametroaren balio baterako aurreko (1)-(2) Sturm-Liouvilleren problema homogeneoak soluzio ez-nulua duenean, balio horri problemaren balio propio (edo autobalio) deritzo. Eta balio propio bati elkartutako (1)-(2) problemaren soluzio ez-nuluei funtzio propioak (edo autofuntzioak) deritze.

Adibideak. 8.1 atalean problema hau aztertu dugu:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda\ X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Sturm-Liouvilleren problema honetan, aldagai independentearen izena x da, eta $r(x) = 1$, $q(x) = 1$ (edozein x-rako) eta $a = 0$, $b = l$ dira. $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$, $n \in \mathbb{N}$ dira balio propioak, eta $C \sin \frac{n\pi x}{l}$ funtzioak λ_n balio propioari loturiko funtzio propioak dira.

Honako problema hau ere aztertu dugu:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda\ X(x) = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X'(l) = 0 \end{cases}$$

$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$, $(n = 0, 1, 2, ...)$ balio propioak dira eta $X_0(x) = C$, $X_n(x) = C \cos \frac{n\pi x}{l}, n = 1, 2, ...$ funtzio propioak.

(1) ekuazio diferentziala bigarren ordenako ekuazio lineala da, forma autoadjuntuan idatzita. Bere soluzio orokorra bi soluzio linealki independenteren arteko konbinazio lineala izango da: $x = C_1 x_1(t,\lambda) + C_2 x_2(t,\lambda)$ formakoa.

Azter dezagun Sturm-Liouvilleren problema **eragileen ikuspuntutik**.

Definizioa. L eragile diferentziala honela definitzen dugu:

$$L\,x = (r(t)\,x')' - p(t)\,x, \quad \forall x \in C^2([a,b])$$

L eragilea lineala eta homogeneoa da. Definizio horren ondorioz, honela idazten da Sturm-Liouvilleren problemaren ekuazio diferentziala:

$$L\,x = -\lambda q(t)\,x$$

1. proposizioa. *(Lagrangeren identitatea)* $\forall x, y \in C^2([a,b])$ *funtziotarako*

$$\int_a^b (x\,Ly - y\,Lx)\,dt = (r(t)(x\,y' - x'\,y))|_a^b = r(t)W(x,y)(t)|_a^b\,, \tag{3}$$

egiaztatzen da, $W(x,y)$ *delakoa izanik* x *eta* y *funtzioen wronskiarra.*

Hau da:

$$x\,L\,y - y\,L\,x = (r(t)(x\,y' - x'\,y))' = \frac{d}{dt}(r(t)W(x,y)(t)). \tag{4}$$

(Zatikako metodoaren bidez frogatzen da).

2. proposizioa. *Sturm-Liouvilleren*

$$\begin{cases} a_1\,x(a) + a_2\,x'(a) = 0 \\ b_1\,x(b) + b_2\,x'(b) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

mugalde-baldintzak egiaztatzen dituzten x *eta* y *funtzio orotarako*

$$W(x,y)(a) = 0, \quad W(x,y)(b) = 0$$

dira, eta

$$\int_a^b (x\,L\,y - y\,L\,x)\,dt = 0$$

egiaztatzen da (L *eragilea autoadjuntua da).*

Definizioa. Izan bedi A **eragile** berri hau:

$$A\,x = -\frac{1}{q(t)}\,Lx, \quad \forall x \in C^2([a,b]). \tag{5}$$

Definizioa. A eragilearen balio propioak λ parametroaren balioak dira non

$$A\,x = \lambda\,x \tag{6}$$

ekuazioak soluzio ez-nulua (funtzio propioa) baitu.

Ikusten denez, (6) ekuazioa Sturm-Liouvilleren problemaren ekuazio bera da:

$$(r(t)\,x')' - p(t)\,x + \lambda\,q(t)\,x = 0.$$

Beraz, (2) mugalde-baldintzak egiaztatzen dituzten x eta y funtzioetarako A eragilearen balio propioak kalkulatzea da (1)-(2) Sturm-Liouvilleren problemaren balio propioak kalkulatzea. (Horrela, ikusten dugu Sturm-Liouvilleren problemarako balio propio edo funtzio propio izenak eragileen teorian justifikatzen direla).

Funtzio propioen funtzio-espazioa

(1)-(2) Sturm-Liouvilleren problemaren funtzio propioen propietateak aztertzeko, (a,b) **tartean definitutako funtzio-espazio euklidear** egoki bat erabiliko da.

Espazio horretako edozein f eta g funtziotarako, honako hau da biderkadura eskalarra:

$$< f, g >_q = \int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,q(t)\,dt, \tag{7}$$

non $q(t)$ funtzio positiboari pisu deritzo. $q(t)$ pisuak $\mu(t) = \int_a^t q(u)\,du$ neurri monotono gorakorra definitzen du ($d\mu = q(t)dt$).

Biderkadura horrek induzitzen duen norma:

$$||\ f\ ||_q = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,q(t)\,dt}. \tag{8}$$

Espazio horretako bi funtzio, f eta g, ortogonalak dira $< f, g >_q = 0$ denean. $\{g_1, g_2, ..\}$ funtzio-sistema ortogonala da funtzio guztiak binaka ortogonalak direnean. Horrez gain, funtzio guztien $||\cdot||_q$ norma 1 denean, sistema ortonormala esan ohi zaio. Hau da, $\{f_1, f_2, ..\}$ funtzio-sistema ortonormala da

$$< f_n, f_m >_q = \int_a^b f_n(t)\,\overline{f_m(t)}\,q(t)\,dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

denean.

(a,b) tartean definitutako eta $||\cdot||_q$ norma finituko funtzioek osatzen duten espazio euklidearra $L^2(a,b;d\mu)$ edo $L^2_q(a,b)$ ikurraz izendatuko dugu. Pisua $q(t)=1\,(\forall t)$ denean, $d\mu=dt$ dugu, eta notazioa laburtzeko $L^2(a,b)$ eta $<f,g>$ ikurrak erabiltzen dira.

$L^2(a,b;d\mu)$ espazioan sistema ortonormal zenbakarriak daude. Adibidez, $L^2(0,l)$ espazioan $\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi t}{l} : n=1,2...\right\}$ funtzio-sistema ortonormala da.

Balio propioen eta funtzio propioen propietateak

28. teorema. *Izan bedi Sturm-Liouvilleren (1)-(2) problema erregular homogeneoa:*

$$(r(t)\,x')' - p(t)\,x + \lambda q(t)\,x = 0, \qquad t\in[a,b], \quad \lambda\in\mathbf{R} \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_1\,x(a) + a_2\,x'(a) = 0 \\ b_1\,x(b) + b_2\,x'(b) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

$a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbf{R}$, $|a_1|+|a_2|\neq 0$, $|b_1|+|b_2|\neq 0$, $\forall t\in[a,b], r(t)>0$, $q(t)>0$ *eta* $p(t)$ *funtzio erreala, non* $p(t)\in C([a,b])$, $q(t)\in C([a,b])$ *eta* $r(t)\in C^1([a,b])$ *baitira. Problema horren balio propioak eta funtzio propioak propietate hauek dituzte:*

(i) *Problemaren balio propioek zenbaki errealen segida gorakor bat osatzen dute* $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\ldots$, *eta* $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$ *da.*

(ii) *Funtzio propioak funtzio errealak dira, eta balio propio bakoitzari esleituriko funtzio propioen multzoa dimentsio bateko espazio bektoriala da. Eta* φ_k *idatziko dugu* λ_k *balio propioari (* $||\cdot||_q$ *normarekiko) dagokion 1 normako funtzio propioa.*

(iii) λ_k *balio propioari esleituriko funtzio propioek* $k-1$ *zero dituzte* (a,b) *tartean (bereziki,* φ_1 *funtzio propioak ez du zeinu-aldaketarik* (a,b) *tartean).*

(iv) *Izan bitez* ϕ_i *funtzio propioa* λ_i *balio propioari elkarturikoa,* ϕ_j *funtzio propioa* λ_j *balio propioari elkarturikoa, eta* $\lambda_i\neq\lambda_j$ *bada, halabeharrez,*

$$<\phi_i,\phi_j>_q=\int_a^b \phi_i(t)\,\phi_j(t)\,q(t)\,dt=0$$

da; ϕ_i *eta* ϕ_j *ortogonalak dira* $L^2_q(a,b)$ *espazioan. Horren ondorioz, 1 normako funtzio propioen segida* $\{\varphi_n\}$ *sistema ortonormal bat da* $L^2_q(a,b)$ *espazioan.*

29. teorema. *Izan bedi Sturm-Liouvilleren (1)-(2) problema erregular homogeneoa:*

$$(r(t)\,x')' - p(t)\,x + \lambda q(t)\,x = 0, \qquad t \in [a,b], \quad \lambda \in \mathbf{R} \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_1\,x(a) + a_2\,x'(a) = 0 \\ b_1\,x(b) + b_2\,x'(b) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

$a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}$, $|a_1| + |a_2| \neq 0$, $|b_1| + |b_2| \neq 0$, $\forall t \in [a,b], r(t) > 0$, $q(t) > 0$ *eta* $p(t)$ *funtzio erreala, non* $p(t) \in C([a,b])$, $q(t) \in C([a,b])$ *eta* $r(t) \in C^1([a,b])$ *baitira.*

Izan bedi $\{\varphi_n\}$ *aurreko problemaren funtzio propioen sistema ortonormala. Edozein* $f \in L^2_q(a,b)$ *funtziotarako*

$$b_k =< f, \varphi_k >_q = \int_a^b f(t)\,\varphi_k(t)\,q(t)\,dt, \quad n = 1, 2, ... \tag{9}$$

hartuz,

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b \left| f(t) - \sum_{i=1}^{k} b_i\,\varphi_i(t) \right|^2 q(t)\,dt = 0 \tag{10}$$

egiaztatzen da; hau da, $L^2_q(a,b)$ *espazioan*

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i\,\varphi_i(t), \quad (||\cdot||_q \text{normarekiko}). \tag{11}$$

Horrez gain,

$$\int_a^b |f(t)|^2\,q(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2$$

egiaztatzen da. (Parseval-en identitatea).

30. teorema. *(Puntuz puntuko konbergentzia).* $\forall k \in \mathbb{N}$ *izan bedi* ϕ_k *funtzio propio eznulu bat* λ_k *balio propioari elkartua; beraz,* $\{\phi_k\}$ *segida Sturm-Liouvilleren (1)-(2)problema erregular homogeneoaren funtzio propioen segida ortogonal bat da.* $f(t)$ *funtzioa* $[a,b]$ *tartean definitua bada, eta* f *eta* f' *funtzioak* $[a,b]$ *tartean zatika jarraituak badira, hauxe da* f*-ri elkartutako Fourier-en seriea (*$\{\phi_k\}$ *sistemarekiko):*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\phi_k(t), \qquad \left(b_k = \frac{1}{||\,\phi_k\,||_q^{\,2}} < f, \phi_k >_q, \quad n = 1, 2, ... \right)$$

seriea (a,b) tarteko t puntu bakoitzean konbergentea da eta

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\phi_k(t) = \frac{f(t+)+f(t-)}{2}$$

($f(t+)$ eta $f(t-)$ f-ren eskuin-limitea eta ezker-limitea t puntuan izanik). Baldin $t \in (a,b)$ puntuan f jarraitua bada, orduan serieak puntu horretan $f(t)$ baliorantz konbergitzen du.

31. teorema. *Edozein α eta β zenbaki errealetarako*

$$(r(t)\,x')' - p(t)\,x + \lambda q(t)\,x = 0, \quad t \in [a,b], \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

$$\begin{cases} a_1\,x(a) + a_2\,x'(a) = \alpha \\ b_1\,x(b) + b_2\,x'(b) = \beta, \end{cases}$$

problemak soluzio bakarra du, baldin eta soilik baldin, λ hori

$$(r(t)\,x')' - p(t)\,x + \lambda q(t)\,x = 0 \quad , \quad t \in [a,b], \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

$$\begin{cases} a_1\,x(a) + a_2\,x'(a) = 0 \\ b_1\,x(b) + b_2\,x'(b) = 0, \end{cases}$$

problemaren balio propioa ez bada.

Sturm-Liouvilleren problema periodikoa.

Izan bedi

$$(r(t)\,x')' - p(t)\,x + \lambda q(t)\,x = 0, \quad t \in [a,b], \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

ekuazioa, non $\forall t \in [a,b], r(t) > 0$ eta $q(t) > 0$, $p(t) \in C([a,b])$ funtzio erreala, $q(t) \in C([a,b])$ eta $r(t) \in C^1([a,b])$ eta $r(a) = r(b)$ baitira. Eta mugalde-baldintza periodikoak ditugu:

$$x(a) = x(b), \quad x'(a) = x'(b)$$

λ parametroaren balio baterako aurreko mugalde-problema periodikoak soluzio ez-nulua duenean, balio horri problemaren balio propio (edo autobalio) deritzo. Eta balio propio bakoitzerako problemaren soluzio ez-nuluei funtzio propioak (edo autofuntzioak) deritze.

Izan bedi

$$L\,x = (r(t)\,x')' - p(t)\,x, \quad \forall x \in C^2([a,b])$$

Dakigunez, $\forall x, y \in C^2([a,b])$ funtzioetarako

$$\int_a^b (x\,Ly - y\,Lx)\,dt = r(t)W(x,y)(t)\Big|_a^b$$

da eta, horrez gain, x, y funtzioak mugalde-baldintza periodikoak egiaztatzen badituzte,

$$W(x,y)(t)\Big|_a^b = 0$$

denez,

$$\int_a^b (x\,L\,y - y\,L\,x)\,dt = 0$$

dela frogatzen da.

Adibidea. Edozein $t \in [-l,l]$, $(l>0)$ baliotarako, izan bedi

$$\begin{cases} x''(t) + \lambda\, x(t) = 0 \\ x(-l) = x(l), \quad x'(-l) = x'(l). \end{cases}$$

Problemaren balio propioak $\lambda_0 = 0$ eta $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$, $(n \in \mathbb{N})$ dira.

$\lambda_0 = 0$ balio propioari elkartutako funtzio propioak 1 funtzio konstantea eta bere multiploak dira.

$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$ balio propioari elkartutako funtzio propioak $\sin\frac{n\pi t}{l}$ eta $\cos\frac{n\pi t}{l}$ funtzioak dira eta horien konbinazio linealak. Hemen $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$ balio propioari dagokion funtzio propioen azpiespazio bektoriala dimentsio bikoa da (hori ez da gertatzen Sturm-Liouvilleren problema erregularrean).

Funtzio propioen ortogonalitatea: $\sin\frac{n\pi t}{l}$ eta $\cos\frac{n\pi t}{l}$ funtzioak ortogonalak dira $[-l,l]$ tartean $q(t)$ pisuarekin, eta balio propio ezberdinei dagozkien funtzio propioak ortogonalak dira $[-l,l]$ tartean $q(t)$ pisuarekin. Horrela, funtzio propioen sistema ortogonal hau dugu:

$$\{1,\, \sin\frac{n\pi t}{l},\, \cos\frac{n\pi t}{l} : n \in \mathbb{N}\}$$

8.2.2 Sturm-Liouvilleren problema ez-homogeneo erregularra

Izan bedi honako problema ez-homogeneo hau: ekuazio lineal ez-homogeneoa era autoadjuntuan

$$(r(t)\,x')' - p(t)\,x + \lambda\, q(t)\,x = f(t), \qquad t \in [a,b], \quad \lambda \in \mathbf{R},$$

non $f \in C([a,b])$ baita, eta mugalde-baldintzak

$$\begin{cases} a_1\, x(a) + a_2\, x'(a) = \alpha, \\ b_1\, x(b) + b_2\, x'(b) = \beta \end{cases}$$

non $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}$, $|a_1| + |a_2| \neq 0$, $|b_1| + |b_2| \neq 0$, $r(t) > 0$, $q(t) > 0$ eta $p(t), q(t) \in C([a,b])$ eta $r(t) \in C^1([a,b])$. Orduan, (12)-(13) baldintzek Sturm-Liouvilleren problema ez-homogeneo erregular bat osatzen dute.

Oharra. Sturm-Liouvilleren problema ez-homogeneoak zenbat soluzio dituen aztertzeko, aski da $\alpha = \beta = 0$ suposatzea. Izan ere, $x(t) = y(t) + u(t)$ idatz daiteke, non

$$(r(t)\, y')' - p(t)\, y + \lambda\, q(t)\, y = f(t), \qquad t \in [a,b],$$

$$\begin{cases} a_1\, y(a) + a_2\, y'(a) = 0, \\ b_1\, y(b) + b_2\, y'(b) = 0 \end{cases}$$

eta

$$(r(t)\, u')' - p(t)\, u + \lambda\, q(t)\, u = 0, \qquad t \in [a,b],$$

$$\begin{cases} a_1\, u(a) + a_2\, u'(a) = \alpha, \\ b_1\, u(b) + b_2\, u(b) = \beta \end{cases}$$

egiaztatzen baitira (aurrerago aztertu izan da azken problemaren soluzioen kopurua).

Izan bedi Sturm-Liouvilleren problema ez-homogeneo erregularra:

$$(r(t)\, x')' - p(t)\, x + \lambda\, q(t)\, x = f(t), \quad f \in C([a,b]) \quad \lambda \in \mathbf{R}, \tag{12}$$

$$\begin{cases} a_1\, x(a) + a_2\, x'(a) = 0, \\ b_1\, x(b) + b_2\, x'(b) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

non $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}$, $|a_1| + |a_2| \neq 0$, $|b_1| + |b_2| \neq 0$, $r(t) > 0$, $q(t) > 0$ eta $p(t), q(t) \in C([a,b])$ eta $r(t) \in C^1([a,b])$.

Funtzio propio bidezko ebazpen-metodoa

Izan bitez $\{\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3 ...\}$ (12)-(13) problemari esleituriko problema homogeneoaren balio propioen segida eta $\{\varphi_1\, \varphi_2\, \varphi_3 ...\}$ funtzio propioen sistema ortonormala.

Demagun $\frac{f}{q}$ funtzioa honela definiturik dagoela:

$$\frac{f}{q}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k\, \varphi_k(t), \qquad (d_k = <\frac{f}{q}, \varphi_k>_q = <f, \varphi_k>). \tag{14}$$

Kalkulatu nahi ditugu $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\, \varphi_k(t)$ adierazpeneko (12)-(13) Sturm-Liouvilleren problemaren soluzioak (λ parametroaren balioen arabera). Horretarako, (12) ekuazio diferentzialean $x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, \varphi_k(t)$ ordezkapena egingo dugu:

$$\left(r(t)\, \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, \varphi_k'(t)\right)' - p(t)\, \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, \varphi_k(t) + \lambda\, q(t)\, \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, \varphi_k(t) = f(t).$$

Aurreko berdintzako ezkerreko zatian eragiketak eginez eta funtzio propioak (12) ekuazioari esleituriko ekuazio homogeneoaren soluzioak direla erabiliz,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} c_k\, ((r(t)\, \varphi_k'(t))' - p(t)\, \varphi_k(t) + \lambda\, q(t)\, \varphi_k(t)) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, ((r(t)\, \varphi_k'(t))' - p(t)\, \varphi_k(t) + \lambda_k\, q(t)\, \varphi_k(t) - \lambda_k\, q(t)\, \varphi_k(t) + \lambda\, q(t)\, \varphi_k(t)) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, (\lambda\, q(t)\, \varphi_k(t) - \lambda_k\, q(t)\, \varphi_k(t))
\end{aligned}$$

dugu; beraz, ekuazio hau lortzen da:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\, (\lambda\, \varphi_k(t) - \lambda_k\, \varphi_k(t)) = \frac{f(t)}{q(t)}.$$

Eta $\frac{f}{q}(t)$ delakoaren garapena erabiliz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\, (\lambda\, - \lambda_k\,)\varphi_k(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k\, \varphi_k(t).$$

Orain, koefizienteak identifikatuz, honako baldintza hauek ditugu:

$$c_k\, (\lambda\, - \lambda_k\,) = d_k,\ \ k = 1, 2, ... \tag{15}$$

Horren ondorioz:
a) λ parametroaren balioa problemaren balio propioa ez denean $c_k = \frac{d_k}{\lambda - \lambda_k}$, $n = 1, 2, ...$ hartuz, (12)-(13)-(14) problemaren soluzio hau lortzen dugu:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{\lambda - \lambda_k} \varphi_k(t). \tag{16}$$

b) λ parametroa problemaren espektroan dagoenean, adibidez, $\lambda = \lambda_p$ denean, bi posibilitate daude:

$d_p =< f, \varphi_p > \neq 0$; eta aukera honetan ez dago (12)-(13)-(14) problemaren soluziorik.

$d_p =< f, \varphi_p >= 0$; aukera honetan (12)-(13)-(14) problemaren soluzioek parametro bateko familia bat osatzen dute:

$$x(t) = \sum_{n \neq p} \frac{b_k}{\lambda - \lambda_k} \varphi_k(t) + C\varphi_p \quad (C \in \mathbf{R}). \tag{17}$$

32. teorema. *Izan bedi Sturm-Liouvilleren problema ez-homogeneo erregularra:*

$$(r(t)\, x')' - p(t)\, x + \lambda\, q(t)\, x = f(t), \quad f \in C([a,b]) \quad \lambda \in \mathbf{R}, \tag{12}$$

$$\begin{cases} a_1\, x(a) + a_2\, x'(a) = 0, \\ b_1\, x(b) + b_2\, x'(b) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

non $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}$, $|a_1| + |a_2| \neq 0$, $|b_1| + |b_2| \neq 0$, $r(t) > 0$, $q(t) > 0$ *eta* $p(t), q(t) \in C([a,b])$ *eta* $r(t) \in C^1([a,b])$.

λ konstantea eta problema homogeneoaren balio propioak ezberdinak direnean, Sturm-Liouvilleren (12)-(13) problemak soluzio bakarra du.

λ konstantea problema homogeneoaren balio propio bat bada, adibidez, $\lambda = \lambda_p$ bada, Sturm-Liouvilleren (12)-(13) problemak soluzioak ditu, baldin eta soilik baldin $< f, \varphi_p >= 0$ bada; aukera horretan soluzioa ez da bakarra (φ_p-ren multiplo oro ditu).

33. teorema. *(Fredholm-en teorema). λ-ren balio finko baterako, Sturm-Liouvilleren problema ez-homogeneoak soluzio bakarra du (finkatutako f funtzio jarraitu baterako) edo esleituriko problema homogeneoak soluzio ez-nulua du.*

Adibidea. Honako autobalio hauen problema ebatzi nahi da:

$$\begin{cases} x'' + \lambda\, x = 0 \\ x'(0) = x'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Ekuazioaren polinomio karakteristikoa $r^2 + \lambda = 0$ da.

(i) $\lambda = 0$ bada, $r = 0$ erro bikoitza da, beraz,

$$x(t) = C_1 + C_2\, t \quad \longrightarrow \quad x'(t) = C_2 \quad \longrightarrow \quad x'(0) = x'(\pi) = C_2 = 0$$

eta, orduan, $\lambda = 0$ autobalio bat da.

(ii) $\lambda < 0$ bada, hau da, $\lambda = -a^2\ ,\ a > 0$, erroak $r = \pm a$ dira eta soluzioa

$$x(t) = C_1\, e^{at} + C_2\, e^{-at} \ \longrightarrow\ x'(t) = aC_1\, e^{at} - aC_2\, e^{-at} \ \longrightarrow$$

$$\begin{cases} x'(0) = aC_1 - aC_2 = 0 \ \to\ C_1 = C_2 \\ x'(\pi) = aC_1(e^{a\pi} - e^{-a\pi}) = 0 \ \to\ C_1 = 0 \end{cases}$$

izango da. Orduan, λ ez da autobalio bat izango.

(iii) $\lambda > 0$ bada, hau da, $\lambda = a^2\ ,\ a > 0$, erroak $r = \pm ia$ dira eta soluzioa

$$x(t) = C_1\, \cos at + C_2\, \sin at \ \longrightarrow\ x'(t) = -aC_1\, \sin at + aC_2\, \cos at \ \longrightarrow$$

$$\begin{cases} x'(0) = aC_2 = 0 \ \to\ C_2 = 0 \\ x'(\pi) = -aC_1 \sin a\pi = 0, \end{cases}$$

beraz, $a = k,\ k \in \mathbb{N}$ izan behar da. Problemaren autobalioak

$$\lambda = k^2\ ,\ k \in \mathbb{N}, \quad \lambda = 0$$

dira, eta autofuntzioak (konstanteak salbu):

$$x_k(t) = \cos kt,\ k \in \mathbb{N}, \quad x_0(t) = 1.$$

$$\int_0^\pi \cos^2 kt\, dt = \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^\pi dt = \pi,$$

direnez,

$$\varphi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos kt,\ k \in \mathbb{N}, \quad \varphi_0(t) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}.$$

Orain, honako problema ez-homogeneo hau azter dezakegu ($\lambda = 2$) aurreko metodoa erabiliz:

$$\begin{cases} x'' + 2x = 3 \\ x'(0) = x'(\pi) = 0 \end{cases}$$

2 problemaren autobalioa ez denez, soluzioa bakarra da. Izan bedi,

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, \varphi_k(t)$$

eta soluzioa izan behar bada, orduan,

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k\, \varphi_k''(t) + 2 \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, \varphi_k(t) = 3 \ \longrightarrow\ \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, (\varphi_k''(t) + 2\, \varphi_k(t)) = 3$$

baina φ_k problema homogeneoaren soluzioa denez, honako hau egiaztatzen du $\varphi_k''(t) = -k^2\, \varphi_k(t)$ eta hortik $\sum_{k=0}^{\infty} C_k\, (2 - k^2)\, \varphi_k(t) = 3$ ondorioztatzen dugu. Bestalde,

$$3 = \sum_{k=0}^{\infty} B_k\, \varphi_k(t)$$

non

$$B_0 = \int_0^{\pi} 3\, \varphi_0(t)\, dt = 3\sqrt{\pi}\,, \quad B_k = \int_0^{\pi} 3 \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \cos kt\, dt = 0,\ k \geq 1,$$

beraz, $3 = 3\sqrt{\pi}\, \varphi_0(t)$. Koefizienteak berdinduz,

$$C_0(2 - 0) = 3\sqrt{\pi}\ \rightarrow\ C_0 = \frac{3}{2}\sqrt{\pi},\ C_k = 0,\ k \geq 1,$$

eta soluzioa honako hau izango da $x(t) = \frac{3}{2}\sqrt{\pi}\, \varphi_0(t) = \frac{3}{2}$.

8.3 Green-en funtzioa

Atal honetan, mugalde-problema ez-homogeneoa ebazteko beste metodo bat azalduko dugu, λ konstantea problema homogeneo elkartuaren **balio propioa ez den kasurako**.

Izan bedi problema ez-homogeneo hau:

$$(r(t)\,x')' - p(t)\,x + \lambda\,q(t)\,x = f(t) \quad , \quad t \in [a,b], \tag{12}$$

$f \in C([a,b])$ eta honako mugalde-baldintza hauek betetzen direlarik

$$\begin{cases} a_1\,x(a) + a_2\,x'(a) = 0, \\ b_1\,x(b) + b_2\,x'(b) = 0, \end{cases} \tag{13}$$

non $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}$, $|a_1| + |a_2| \neq 0$, $|b_1| + |b_2| \neq 0$, $r(t) > 0$, $q(t) > 0$ eta $p(t), q(t) \in C([a,b])$ eta $r(t) \in C^1([a,b])$. λ ez da elkartutako problema homogeneoaren balio propioa.

Izenda dezagun

$$L_t x = (r(t)\,x')' - p(t)x + \lambda\,q(t)x \tag{18}$$

eta izan bedi λ zenbaki erreal bat problema homogeneoaren balio propioa ez dena.

Izan bitez $x_1(t)$ eta $x_2(t)$ bi funtzio (ez-nulu) linealki independenteak, non

$$\begin{cases} L_t\,x_1 = 0 \\ a_1\,x_1(a) + a_2\,x_1'(a) = 0 \end{cases} \tag{19}$$

eta

$$\begin{cases} L_t\,x_2 = 0 \\ b_1\,x_2(b) + b_2\,x_2'(b) = 0 \end{cases} \tag{20}$$

baitira (horrelako bi funtzio beti existitzen dira λ zenbaki erreala problema homogeneoaren balio propioa ez denean). Beraz, $x_1(t)$ eta $x_2(t)$ funtzioen wronskiarra ez da inoiz zero izango. Izan bedi

$$C(t) = r(t)(x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t)) = r(t)W(x_1,x_2)(t) \neq 0. \tag{21}$$

Lagrangeren identitatea erabiliz,

$$C'(t) = x_1 L_t\,x_2 - x_2 L_t\,x_1 = x_1 \cdot 0 - x_2 \cdot 0 = 0$$

dugu; beraz, $C(t)$ hori funtzio konstante bat da, zero ez dena: C.

Definizioa. Izan bedi

$$L_t\, x = (r(t)\, x')' - p(t)x + \lambda x = 0, \quad a < t < b,$$

$$\begin{cases} a_1\, x(a) + a_2\, x'(a) = 0 \\ b_1\, x(b) + b_2\, x'(b) = 0, \end{cases}$$

eta problema horren λ zenbakia ez da balio propioa. Bi aldagaiko funtzio hau definitzen da:

$$G(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{C}\, x_2(s)\, x_1(t), & t < s, \\ \\ -\dfrac{1}{C}\, x_1(s)\, x_2(t), & t \geq s, \end{cases} \tag{22}$$

non x_1, x_2 eta C aurrean definitu baitira. $G(t,s)$ funtzioari aurreko mugalde-problema homogeneoaren **Greenen funtzioa** deritzo.

Propietateak. Aurrean definitutako Greenen funtzioak propietate hauek egiaztatzen ditu:

(i) G funtzio jarraitua da $[a,b] \times [a,b]$ eremuan.

(ii) s finkatuz, t aldagaiaren funtzio gisa mugalde-baldintzak egiaztatzen ditu. Izan ere,

$$G(b,s) = -\frac{1}{C}\, x_2(b)\, x_1(s), \qquad a \leq s \leq b$$

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t,s)|_{t=b} = -\frac{1}{C}\, x_2'(b)\, x_1(s)$$

baitira eta x_2 funtzioak bigarren baldintza egiaztatzen duenez, $G(t,s)$ funtzioak ere egiaztatzen du. Bestalde, $s > a$ denean:

$$G(a,s) = -\frac{1}{C}\, x_2(s)\, x_1(a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t,s)|_{t=a} = -\frac{1}{C}\, x_2(s)\, x_1'(a).$$

Eta $s = a$ denean:

$$G(a,a) = -\frac{1}{C}\, x_2(a)\, x_1(a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t,a)|_{t=a} = -\frac{1}{C}\, x_2(a)\, x_1'(a).$$

Gainera, x_1 funtzioak lehen baldintza egiaztatzen duenez, $G(t,s)$ funtzioak ere egiaztatzen du.

(iii) s finkatuz, t aldagaiaren funtzio gisa ekuazio hau egiaztatzen du:

$$L_t\, G(t,s) = 0 \quad , \quad t \neq s.$$

Izan ere, $P(t) = p(t) - \lambda$ eginez $t < s$ denean

$$\begin{aligned} L_t\, G(t,s) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(r(t)\frac{\partial}{\partial t}G(t,s)\right) - P(t)G(t,s) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(r(t)\left(-\frac{1}{C}\, x_2(s)\, x_1'(t)\right)\right) - P(t)\left(-\frac{1}{C}\, x_2(s)\, x_1(t)\right) \\ &= -\frac{1}{C}\, x_2(s)((r(t)x_1')' - P(t)x_1) = 0 \end{aligned}$$

eta, era berean, $t > s$ denean.

(iv) $t = s$ denean $\dfrac{\partial}{\partial t}G(t,s)$ deribatuak salto finitua du. Horrelako puntu batean

$$\lim_{\substack{t\to t_0 \\ t<s}} \frac{\partial}{\partial t}G(t,t_0) = -\frac{1}{C}\, x_2(t_0)\, x_1'(t_0)$$

eta

$$\lim_{\substack{t\to t_0 \\ t\geq s}} \frac{\partial}{\partial t}G(t,t_0) = -\frac{1}{C}\, x_2'(t_0)\, x_1(t_0)$$

dugu. Beraz, C-ren definizioaren arabera:

$$G_t(t+0,t) - G_t(t-0,t) = -\frac{1}{r(t)}.$$

(v) Eremu guztian $G(t,s) = G(s,t)$.

34. teorema. *Izan bitez $f(t)$ funtzio jarraitua $[a,b]$ tartean, honako mugalde-problema hau*

$$\begin{cases} L_t\, x = -f(t),\ a < t < b, \\ a_1\, x(a) + a_2\, x'(a) = 0, \\ b_1\, x(b) + b_2\, x'(b) = 0, \end{cases} \tag{23}$$

non λ zenbakia ez baita problema homogeneo elkartuaren balio propioa eta $G(t,s)$ problema homogeneo elkartuaren Greenen funtzioa baita. Orduan,

$$x(t) = \int_a^b G(t,s)\, f(s)\, ds \tag{24}$$

funtzioa aurreko (23) mugalde-problema ez-homogeneoaren soluzioa da.

Adibidea. Honako mugalde-problema hau ebatzi nahi da:

$$\begin{cases} x'' - 4\,x = 3 \\ x'(0) = x'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Badakigu -4 ez dela problema homogeneoaren autobalioa, ondorioz, Greenen funtzioa existitzen da. Izan bedi $x_1(t)$ non:

$$\begin{cases} x_1'' - 4\,x_1 = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} \ \to \ x_1'(t) = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t} \\ x_1'(0) = 0 \ \to \ C_1 = C_2. \end{cases}$$

Hortik $x_1(t) = e^{2t} + e^{-2t}$ ondorioztatzen da. Izan bedi $x_2(t)$ non

$$\begin{cases} x_2'' - 4\,x_2 = 0 \\ x'(\pi) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_2(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} \ \to \ x_1'(t) = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t} \\ x_2'(\pi) = 0 \ \to \ C_2 = C_1 e^{4\pi}. \end{cases}$$

Beraz, $x_2(t) = e^{2t} + e^{4\pi} e^{-2t}$. Eta ondorioz, Greenen funtzioa honako hau da:

$$C = r(x_1 x_2' - x_1' x_2)|_{t=0} = 2(2 - 2e^{4\pi}),$$

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{-1}{2(2-2e^{4\pi})}(e^{2t} + e^{-2t})(e^{2s} + e^{4\pi} e^{-2s}), & t < s \\ \dfrac{-1}{2(2-2e^{4\pi})}(e^{2s} + e^{-2s})(e^{2t} + e^{4\pi} e^{-2t}), & t \geq s. \end{cases}$$

Problema ez-homogeneoaren soluzioa hau da:

$$\begin{aligned} x(t) &= -\int_0^\pi G(t,s)\,3\,ds = \frac{3}{2(2-2e^{4\pi})}(e^{2t} + e^{4\pi} e^{-2t}) \int_0^t (e^{2s} + e^{-2s})\,ds \\ &+ \frac{3}{2(2-2e^{4\pi})}(e^{2t} + e^{-2t}) \int_t^\pi (e^{2s} + e^{4\pi} e^{-2s})\,ds \\ &= 3\frac{(e^{2t} + e^{4\pi} e^{-2t})}{2(2-2e^{4\pi})}\frac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t}) - 3\frac{(e^{2t} + e^{-2t})}{2(2-2e^{4\pi})}\frac{1}{2}(e^{2t} - e^{4\pi} e^{-2t}) = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

8.4 ARIKETAK

1.- Ebatzi banantze-metodoaren bidez

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad , \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < l$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u_x(l,t) = 0, \quad t > 0,$$

a) $l = \pi$ eta $f(x) = 4 + 5\cos 3x$ direnean;
b) $l = 3\pi$ eta $f(x) = 4 + 5\cos 3x$ direnean;
c) $l = \pi$ eta $f(x) = x$ direnean.

2.- Ebatzi banantze-metodoaren bidez

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad , \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(l,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < l$$

$$u_t(x,0) = g(x), \quad 0 < x < l$$

a) $l = \pi$, $f(x) = 4\sin x + 5\sin 3x$, eta $g(x) \equiv 0$ direnean;
b) $l = 3\pi$, $f(x) = 4\sin \frac{x}{3} + 5\sin 3x$, eta $g(x) = 2\sin \frac{2x}{3}$ direnean.

3.- Ebatz ezazu honako mugalde-balio hauetako problema:

$$\begin{cases} x'' + 3x = \cos t \\ x'(0) = 0 \\ x'(\pi) = 0. \end{cases}$$

4.- Kalkulatu autobalioak, autofuntzioak eta autofuntzio normalizatuak honako Sturm-Liouvillen problema homogeneo honetarako:

$$\begin{cases} x'' + \lambda\, x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x(\pi) = 0 \end{cases}$$

5.- Kalkulatu honako mugalde-problema homogeneo hauen autobalioak eta autofuntzioak:

$$a)\, x'' + \lambda\, x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(1) = 0$$

$$b)\, x'' + \lambda\, x = 0, \quad x'(0) = 0, \quad x(1) + x'(1) = 0$$

$$c)\, x'' + \lambda\, x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(1) + x'(1) = 0$$

Emaitzak: a) $\lambda_n = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}$, $x_n = \sin\frac{(2n-1)\pi t}{2}$, $n = 1, 2, ...$ autofuntzioak.
b) λ_n non $\lambda_n > 0$, $\sqrt{\lambda_n} = \cot\sqrt{\lambda}_n$ eta $\lambda_n \approx (n-1)^2\pi^2$, $n \to \infty$ eta $x_n = \sin(\sqrt{\lambda_n}t)$, $n = 1, 2, ...$;
c) λ_n non $\lambda_n > 0$, $\sqrt{\lambda_n} = -\tan\sqrt{\lambda}_n$ eta $\lambda_n \approx \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}$, $n \to \infty$ eta $x_n = \sin(\sqrt{\lambda_n}t)$, $n = 1, 2, ...$;

6.- Kalkula itzazu

$$x'' - 2x' + (1+\lambda)x = 0,\ x(0) = 0,\ x(1) = 0.$$

mugalde-balioetako problemaren autobalioak eta autofuntzioak. Froga ezazu problema hau Sturm-Liouvilleren problema erregular homogeneoa dela.

Emaitzak: $\lambda_n = n^2\pi^2$, $x_n = e^t \sin(n\pi t)$, $n = 1, 2, ...$;

7.- a) Adierazi $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$ funtzioa $x'' + \lambda x = 0$,
$x(0) = 0$, $x'(1) = 0$ mugalde-problemaren autofuntzio normalizatuen bidez. Zenbat balio du serie horren baturak $t = \frac{1}{4}$, $t = \frac{1}{2}$ eta $t = \frac{2}{3}$ puntuetan?
b) Adierazi $f(t) = t + \pi$ funtzioa $x'' + \lambda x = 0$,
$x(-\pi) = 0$, $x(\pi) = 0$ mugalde-problemaren autofuntzio normalizatuen serie baten bidez.

Emaitzak: a) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}(1-\cos\frac{(2n-1)\pi}{4})\sqrt{2}\sin\frac{(2n-1)\pi t}{2}.$, $L2(0,1)$ espazioan
b) $t+\pi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n}(-1)^{n+1}\sin\frac{n}{2}(t+\pi)$, $-\pi<t<\pi$, $L^2(-\pi,\pi)$ espazioan.

8.- Ebatz ezazu

$$x''+\lambda x=-t,\quad x(0)=0,\quad x(l)=0$$

Sturm-Liouvilleren problema ez-homogeneoa λ parametroaren balioen arabera.

Emaitza: $\lambda\neq\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2}$, $n=1,2,...$ denean, soluzioa $x(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda-\frac{n^2\pi^2}{l^2}}\frac{2l}{n\pi}\sin\frac{n\pi t}{l}$ da. λ autobalioa denean, problemak ez du soluziorik.

9.- Ebatz ezazu Sturm-Liouvillen honako problema ez-homogeneo hau ($\lambda\in\mathbf{R}$ parametroaren balioen arabera):

$$x''+\lambda\,x=3\sin\frac{5\pi t}{2},\quad x(0)=0,\quad x'(1)=0.$$

10.- Izan bedi:

$$tx''+x'+\lambda\frac{1}{t}x=\frac{1}{t},\quad x(1)=0,\quad x'(e^{\pi})=0$$

Kalkulatu problema homogeneo elkartuaren autofuntzioetako sistema normalizatua. Kalkulatu emandako problema ez-homogeneoaren soluzioak $\lambda\in\mathbf{R}$ parametroaren balioen arabera.
Emaitzak: $\lambda_n=(\frac{2n-1}{2})^2$; $\phi_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(\frac{2n-1}{2}\ln t)$, autofuntzio normalizatuak. λ balio propioa ez denean, problema ez-homogeneoaren ebazpen bakarra:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{2}}{(2n-1)\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{\lambda-(\frac{2n-1}{2})^2}\,\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sin(\frac{(2n-1)}{2}\ln t).$$

λ balio propioa denean, problema ez-homogeneoak ez du soluziorik.

11.- Banantze-metodoa erabiliz, ebatzi:

$$\begin{cases}a^2u_{xx}=u_t,\ 0<x<\pi,\ t>0\\ u(0,t)=0,\ u_x(\pi,t)=0\\ u(x,0)=\begin{cases}x,\ 0<x\leq\frac{\pi}{2}\\ 0,\ \frac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}\end{cases}$$

9. Kapitulua

Deribatu partzialetako ekuazioak

9.1 Fisika matematikoaren ekuazioak: ohiko adibideak eta beste adibide batzuk.

Hauek dira $u(x, y)$ funtzioaren deribatu partzialak bigarren ordenaraino:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = u_{yx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy}.$$

Definizioa. Izan bedi $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R^n}$ eta $u(x) : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R}$. Orduan, m ordenako *deribatu partzialetako ekuazioa* honela adieraziko dugu:

$$F(x, u, Du, D^2u, \ldots, D^m u) = 0$$

non $u(x)$ funtzio ezezaguna baita eta $D^m u$ ikurrak u-ren m. ordenako deribatu partzial guztiak adierazten baititu. Honela, bada:

$$D^m u = \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2} \ldots \partial x_m^{j_m}}, \quad m = j_1 + \ldots + j_n, \quad j_n \in \mathbb{N}.$$

Deribatu partzialetako ekuazioaren ordena u-ren deribatuen ordena nagusiak finkatzen du, eta gure kasuan m da.

Definizioa. Deribatu partzialetako ekuazio bat *lineala* dela esango dugu, baldin eta x aldagaia izan ezik beste guztiak, $u, Du, D^2u, \ldots, D^m u$, linealak badira.

Adibidea. Izan bedi $u(x,t)$ funtzioa non $t, x \in \mathbf{R}$. Orduan,

$$u_t - \sin(x^2 t) u_{xx} = 0$$

ekuazioa lineala da, u_t eta u_{xx} linealak direlako.

Gai honetan aztertuko ditugun ekuazio guztiak linealak eta, gehienez, 2. ordenakoak izango dira.

Definizioa. Deribatu partzialetako ekuazio bat *kuasi-lineala* dela esango dugu, baldin eta ekuazioaren ordena bereko u-ren deribatu guztiak linealak badira.
Adibidea. Izan bedi $u(x,t)$ funtzioa non $t, x \in \mathbf{R}$. Orduan,

$$u_{tt} - u_x + \sin(u) = 0$$

ekuazioa ez da lineala, u-ren sinua agertzen delako eta sinua ez delako funtzio lineala. Aldiz, kuasi-lineala da, 2. ordenako gaia, u_{tt}, lineala delako.

9.1.1 Ekuazio linealak. Adibideak

Definizioa. Izan bitez $x, y \in \mathbf{R}$. Lehen ordenako ekuazio lineal orokorra

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y)$$

definitzen da. $f(x,y) = 0$ denean, ekuazioa *homogeneoa* dela esaten da.
Definizioa. Bigarren ordenako ekuazio lineal orokor bat

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + h(x,y)u = f(x,y)$$

definitzen da.
Uhinen ekuazioa. Izan bedi $t \in \mathbf{R}$ denbora eta $x \in \mathbf{R^n}$ aldagai espaziala; aurkitu nahi da $u(x,t)$ funtzio bat non

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = F(x,t)$$

baita, c konstante bat, $\Delta u = u_{x_1 x_1} + \ldots + u_{x_n x_n}$ eta F datua. Dimentsio bateko kasu partikularrean, $n = 1$, ekuazioa $u_{tt} - c^2 u_{xx} = F$ izango da.

Beroaren ekuazioa. Izan bitez $t \in \mathbf{R}$ eta $x \in \mathbf{R^n}$; aurkitu behar da $u(x,t)$ funtzio bat non

$$u_t - \Delta u = F(x,t)$$

baita. $n = 1$ denean $u_t - u_{xx} = F$.

Potentzialaren ekuazioa. Izan bedi $x \in \mathbf{R^n}$; aurkitu nahi da $u(x)$ funtzio bat non

$$\Delta u = F(x)$$

baita. $n = 2$ denean, $u_{xx} + u_{yy} = F$.

Aurreko hiru ekuazio horiek aztertuko ditugu gai honetan, baina badaude beste batzuk ere, hala nola:

Schrödinger-en ekuazioa. Izan bitez $t \in \mathbf{R}$ eta $x \in \mathbf{R^n}$,

$$iu_t - \Delta u = F(x,t).$$

Cauchy-Riemann-en ekuazioak. $\mathbf{R^2}$-n definitutako $u(x,y)$ eta $v(x,y)$ funtzioak kalkulatu behar dira

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

ekuazio-sistema egiaztatzen dutenak.

9.2 Aldagai-aldaketa

Deribatu partzialetako ekuazioetan aldagai-aldaketa egin daiteke $u(x,t)$ funtzio ezezagunean edo x aldagai askean. Aldagai-aldaketa aldagai askearekiko egin nahi bada, katearen erregela erabili behar da.

Katearen erregela. Izan bedi $v(y) : D \subset \mathbf{R^n} \to \mathbf{R}$, C^m klaseko funtzio bat eta $\varphi : D' \subset \mathbf{R^n} \to D$, bijektiboa eta C^m klasekoa; definituko dugu $u(x) = v(\varphi(x))$. Orduan:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_i}(\varphi(x)) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x).$$

Bestalde, φ-ren alderantzizko funtzioarekin $v(y) = u(\varphi^{-1}(y))$ idatz daiteke, eta v-ren deribatuak u-ren menpe adieraz daitezke.

Adibideak. a) Izan bedi $u(x,y)$ funtzioa eta $x,y \in \mathbf{R}$. Aurkitu $u_x + u_y = 0$ ekuazioaren soluzioa. Honako aldagai-aldaketa hau eginez

$$\begin{cases} \xi = x + y \\ \eta = x - y \end{cases}$$

funtzio berri bat lortuko dugu $v(\xi,\eta) = u(x,y)$ non

$$u_x = v_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + v_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$u_y = v_\xi \frac{\partial \xi}{\partial y} + v_\eta \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

baitira. Deribatuak kalkulatuz eta ekuazioan ordezkatuz $v_\xi = 0$ lortzen da. Beraz, $v(\xi,\eta) = \varphi(\eta)$, eta aldagai-aldaketa deseginez,

$$u(x,y) = \varphi(x-y)$$

lortzen da edozein φ funtziotarako.

b) Dimentsio bateko uhinen ekuazio homogeneorako, $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, honako aldagai-aldaketa hau egingo dugu:

$$\begin{cases} \xi = x + ct \\ \eta = x - ct \end{cases}$$

Orduan, $v(\xi,\eta) = u(t,x)$ izango da eta

$$u_x = v_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + v_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = v_\xi + v_\eta$$

$$u_t = v_\xi \frac{\partial \xi}{\partial t} + v_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = c v_\xi - c v_\eta$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + v_{\xi\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + v_{\eta\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + v_{\eta\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}$$

$$u_{tt} = c(v_{\xi\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + v_{\xi\eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} - v_{\eta\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} - v_{\eta\eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}) = c^2 v_{\xi\xi} - 2c^2 v_{\xi\eta} + c^2 v_{\eta\eta}.$$

Uhinen ekuazioan ordezkatuz $-4c^2 v_{\xi\eta} = 0$, beraz, $v_{\xi\eta} = 0$. Ondorioz, $v_\xi(\xi,\eta) = f(\xi)$ izango da, eta ξ-rekiko integratuz

$$v(\xi,\eta) = \int f(\xi)\ d\xi + \psi(\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

lortzen da φ, ψ funtzio batzuetarako. Aldagai-aldaketa deseginez:

$$u(t,x) = v(\xi,\eta) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct).$$

Uhinen ekuazio homogeneoak infinitu soluzio ditu. Soluzio bat lortuz gero, soluzio horri edozein konstate gehituz soluzio berri bat lortuko dugu. Bestalde, ekuazio ez-homogeneo baten bi soluzio baditugu, beren arteko kenketa ekuazio homogeneoaren soluzioa izango da.

c) Laplaziarra $\mathbf{R^2}$-n koordenatu polarretan. Honako aldagai-aldaketa honen bidez

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

non $r > 0$ eta $-\pi < \theta < \pi$ baitira, $v(r,\theta) = u(x,y)$ lortzen da, eta ekuazioan ordezkatuz:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}.$$

d) Laplaziarra $\mathbf{R^3}$-n koordenatu zilindriko eta esferikoetan. Koordenatu zilindrikoetarako aldagai-aldaketa:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

non $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$ eta $-\infty < z < +\infty$ baitira. Aldaketa hori eginez, $u(x,y,z) = v(r,\theta,z)$ lortzen da, eta ekuazioan ordezkatuz:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} + v_{zz}.$$

Koordenatu esferikoetarako aldaketa:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

non $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \varphi < \pi$ baitira. Horrela, $u(x,y,z) = v(r,\theta,\varphi)$ dugu, eta ekuazioan ordezkatuz:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = v_{rr} + \frac{2}{r}v_r + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}v_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} + \frac{\cot\varphi}{r^2}v_\varphi.$$

Adibideak. a) Izan bedi $u_t = u_x^2 + u_{xx}$ bigarren ordenako ekuazio ez-lineala, $u = u(x,t)$ izanik. Ekuazioan $v = e^u$ aldagai-aldaketa eginez, gai ez-lineala desagertu egingo da eta emaitza $v_t - v_{xx} = 0$ izango da.

b) Izan bedi $u_t - u_{xx} - \alpha u = 0$ ekuazioa. Honako aldagai-aldaketa hau eginez,

$$v(x,t) = e^{-\alpha t} u(x,t),$$

v-rentzat beroaren ekuazioa lortzen da: $v_t - v_{xx} = 0$.

Hemendik aurrera, u funtzioak eta beren deribatuak behar beste erregularrak izango direla suposatuko dugu, hau da, funtzio horiek eta beren deribatuak jarraikiak izango dira haien definizio-eremuetan.

9.3 Lehen ordenako eta koefiziente konstanteetako deribatu partzialetako ekuazio linealak

Demagun funtzio ezezaguna, u, bi aldagairen menpekoa dela, hau da, $u(x,y)$. Orduan, lehen ordenako eta koefiziente konstanteetako deribatu partzialetako ekuazio linealak honako adierazpen hau du

$$au_x + bu_y + cu = f(x,y) \tag{1}$$

$a, b, c \in \mathbf{R}$, $|a| + |b| > 0$ eta $f(x,y)$ ezagunak izanik.

Hasteko, suposa dezagun $a = 0$ eta $b \neq 0$ direla, beraz,

$$bu_y + cu = f(x,y) \tag{2}$$

izango da. Finko dagoen x bakoitzerako lehen ordenako ekuazio diferentzial lineal bat bezala ikus dezakegu. Mota horretako ekuazioak ebazten ikasi dugu jadanik. Kontuan hartu y-rekiko konstanteak x-ren funtzioak izango direla.

$bu_y + cu = 0$ ekuazio homogeneoaren soluzioa

$$u_H(x,y) = K(x)e^{-cy/b}$$

da. Ekuazio ez-homogeneoaren soluzio partikularra, aldiz,

$$u_p(x,y) = C(y)e^{-cy/b} = e^{-cy/b} \int_i^y \frac{1}{b} f(x,r)e^{cr/b} dr.$$

Beraz, hau izango da ekuazioaren soluzioa:

$$u(x,y) = e^{-cy/b}\left(K(x) + \int_i^y \frac{1}{b} f(x,r) e^{cr/b}\, dr\right) \tag{3}$$

non i delakoa y bizi den definizio-eremuko puntu bat eta K edozein funtzio baitira.

Kasu orokorra aztertzeko, hau da, $a \neq 0, b \neq 0$, beste aldagai bat definituko dugu:

$$\xi = bx - ay.$$

Beraz, funtzio berria $v(\xi, y) = u(x, y)$ izango da. Ekuazioa v-rekiko idazten badugu,

$$bv_y + cv = f\left(\frac{\xi + ay}{b}, y\right)$$

lortuko dugu. Hau da, (2) motako ekuazio bat lortuko dugu. Ekuazioa ξ finko baterako ebazten badugu

$$v(\xi, y) = e^{-cy/b}\left(K(\xi) + \int_i^y \frac{1}{b} f\left(\frac{\xi + ar}{b}, r\right) e^{cr/b}\, dr\right)$$

lortuko da eta aldagai-aldaketa deseginez

$$u(x,y) = e^{-cy/b}\left(K(bx - ay) + \int_i^y \frac{1}{b} f\left(x + \frac{a(r-y)}{b}, r\right) e^{cr/b}\, dr\right) \tag{4}$$

dugu, K edozein funtzio izanik. Honako mota honetako zuzenei,

$$bx - ay = k,$$

deribatu partzialeko ekuazioen **zuzen karakteristikoak** deritze. Ekuazioan agertzen diren bi deribatu partzialetako bat desagerraraztea da horren helburua, ekuazio diferentzial arrunt bilakatuz.

Lehen u_x ezabatu dugun antzera ezaba dezakegu u_y aldagai-aldaketa berdina eginez, baina, oraingoan, $v(x, \xi) = u(x, y)$ idatziko dugu. Ekuazioa v-rekiko idazten badugu

$$av_x + cv = f\left(x, \frac{bx - \xi}{a}\right)$$

lortuko dugu. Orain, y finko bakoitzerako ekuazioa ebatzi eta aldagai-aldaketa deseginez

$$u(x,y) = e^{-cx/a}\left(K_1(bx - ay) + \int_j^x \frac{1}{a} f\left(r, y + \frac{b(r-x)}{a}\right) e^{cr/a}\, dr\right) \tag{5}$$

lortuko dugu. Bi aldagai-aldaketetan lortutako soluzioek ezberdinak dirudite, eta berdinak izan daitezen erlazioren bat egon behar da K eta K_1 funtzioen artean. Soluzioak berdinduz eta x edo y-ri balio zehatzak emanez lortuko dugu bien arteko erlazio hori.

Oharra. (x, y) puntua $bx - ay = k$ karakteristikan badago, $u(x, y)$-n agertzen den $f(x, y)$ funtzioa definituta dagoen balio guztiak karakteristika berdinean daude. Beraz, u soluzioa f-k karakteristiken gainean hartzen dituen balioen menpekoa da.

Ariketa. Froga ezazu $3u_x - 2u_y + u = 1$ ekuazioaren soluzio orokorra $u(x, y) = 1 + K(-2x - 3y)e^{y/2}$ dela non K edozein funtzio baita. Aurkitu soluzio partikularrak, K modu ezberdinetan aukeratuz. Frogatu, baita ere, soluzioa $u(x, y) = 1 + K_1(-2x - 3y)e^{-x/3}$ bezala adieraz daitekeela, K_1 edozein funtzio izanik. Horrez gain, adierazpen biek bat egiten dute baldin eta soilik baldin $K(-2x - 3y)e^{y/2} = K_1(-2x - 3y)e^{-x/3}$, $x, y \in \mathbf{R}$ bakoitzerako; $x = 0$ eginez, adibidez, $K(-3y)e^{y/2} = K_1(-3y)$ lortzen da edo baliokidea dena, $K(r)e^{-r/6} = K_1(r)$. Ohartu $u(x, y)$-ren aurreko bi adierazpenak bat direla K eta K_1 modu horretan erlazionaturik badaude.

Aplikazio batzuetarako interesgarria izan daiteke $u(x, \varphi(x)) = g(x)$ bezalako baldintza gehigarri bat betetzen duen deribatu partzialetako ekuazio baten soluzio partikular bat zehaztea, non φ eta g funtzioak ezagunak baitira. Baliokideki, ekuazioak $u(\varphi(y), y) = g(y)$ betetzen badu. Askotan, baldintza gehigarri hau nahikoa da K funtzioa modu bakar batean zehazteko. $y = \varphi(x)$ (baliokideki $x = \varphi(y)$) deribatu partzialetako ekuazioaren zuzen karakteristikoa bada, g funtzio batzuetarako bakarrik existituko da baldintza gehigarria betetzen duen soluzioa. Horrez gain, nahiz eta g-k eskatzen den forma izan, baldintza hori betetzen duten infinitu K existituko dira. Hori frogatzeko, nahikoa da $u(x, \varphi(x)) = g(x)$ x-rekiko deribatzea, horrela,

$$u_x(x, \varphi(x)) + u_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) = g'(x)$$

lortzen da. Orain, a-rekin biderkatuz,

$$au_x(x, \varphi(x)) + a\varphi'(x)u_y(x, \varphi(x)) = ag'(x).$$

Eta deribatu partzialetako ekuazioan $y = \varphi(x)$ eginez:

$$au_x(x, \varphi(x)) + bu_y(x, \varphi(x)) + cu(x, \varphi(x)) = f(x, \varphi(x)).$$

Beraz, $a\varphi'(x) = b$ denean bistakoa da adierazpen biak bat direla soilik

$$ag'(x) + cg(x)) = f(x, \varphi(x))$$

gertatzen bada.

Adibidea. Aurreko ariketako $3u_x(x,y) - 2u_y(x,y) + u(x,y) = 1$ ekuazioaren soluzio bakarra, $u(x,0) = x^2$ betetzen duena, $u(x,y) = 1 + \left(\frac{(2x+3y)^2}{4} - 1\right) e^{y/2}$ da. Bestalde, deribatu partzialetako ekuazioaren soluzio batek ere ez du $u(x, 1 - \frac{2x}{3}) = x$ betetzen. Aldiz, infinitu soluzio daude $u(x, -\frac{2x}{3}) = 1 + e^{-x/3}$ betetzen dutenak; horiek $K_1(0) = 1$ betetzen duten guztiak izango dira. Ohartu $y = 0$ zuzena ez dela deribatu partzialetako ekuazioaren karakteristikoa; bai, ordea, $y = 1 - \frac{2x}{3}$ eta $y = -\frac{2x}{3}$.

9.4 Lehen ordenako eta koefiziente aldakorretako deribatu partzialetako ekuazio linealak

Aurreko atalean bezala, lehen ordenako ekuazioak aztertuko ditugu; baina, hemen, deribatu partzialen koefizienteak x-ren eta y-ren menpeko funtzioak izango dira. Izan bedi

$$a(x,y)u_x(x,y) + b(x,y)u_y(x,y) + c(x,y)u(x,y) = f(x,y) \tag{6}$$

ekuazioa, non $a(x,y), b(x,y), c(x,y)$, $|a(x,y)| + |b(x,y)| > 0$ eta $f(x,y)$ funtzio ezagunak baitira.

(6) Ekuazioa ebazteko aurreko atalean jarraitutako pausoen antzekoak emango ditugu. Izan bitez $a(x,y) = 0$ eta $b(x,y) \neq 0$, beraz,

$$b(x,y)\ u_y + c(x,y)\ u = f(x,y). \tag{7}$$

(7) Ekuazioa lehen ordenako deribatu partzialetako ekuazioa da x finko bakoitzerako eta bere soluzioa

$$u(x,y) = e^{-\int_i^y \frac{c(x,r)}{b(x,r)}\ dr} \left(K(x) + \int_i^y \frac{f(x,r)}{b(x,r)} e^{\int_j^r \frac{c(x,s)}{b(x,s)} ds} dr \right) \tag{8}$$

izango da edozein K funtziotarako.

Oro har, $a(x,y) \neq 0$ eta $b(x,y) \neq 0$, beste aldagai bat definituko dugu

$$\xi = \xi(x,y), \tag{9}$$

$v(\xi,y) = u(x,y)$ funtzio ezezagunak, (7) bezalako ekuazio bat egiazta dezan. Ikus dezagun nola aukeratu behar den ξ:

$$u_x(x,y) = v_\xi(\xi,y)\frac{\partial \xi}{\partial x}(x,y), \quad u_y(x,y) = v_\xi(\xi,y)\frac{\partial \xi}{\partial y}(x,y) + v_y(\xi,y),$$

eta, ekuazioan ordezkatuz,

$$\begin{aligned} &a(x,y)v_\xi(\xi,y)\frac{\partial \xi}{\partial x}(x,y) + b(x,y)\left(v_\xi(\xi,y)\frac{\partial \xi}{\partial y}(x,y) + v_y(\xi,y)\right) \\ &+c(x,y)v(\xi,y) = f(x,y) \end{aligned}$$

lortzen da. Beraz, v_ξ ekuazioan ager ez dadin

$$a(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x}(x,y) + b(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial y}(x,y) = 0 \tag{10}$$

izan behar da, hau da, $\xi(x,y)$ hori (6) ekuazioaren soluzioa izan behar da $c(x,y) = 0$ eta $f(x,y) = 0$ diren kasurako. Hori lortzeko $\xi(x,y) = kte$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)} \tag{11}$$

ekuazioaren soluzio inplizitua izan behar da, $\xi(x,y) = kte$ x-rekiko deribatuz

$$0 = \frac{\partial \xi}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial \xi}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial \xi}{\partial y}(x,y)\frac{b(x,y)}{a(x,y)}$$

lortzen delako. Horrela,

$$b(x,y)\ v_y(\xi,y) + c(x,y)v(\xi,y) = f(x,y)$$

lortzen da. (9) ekuaziotik x askatuz, $x = h(\xi,y)$ adierazpena dugu, eta ekuazioan ordezkatuz:

$$b(h(\xi,y),y)\ v_y(\xi,y) + c(h(\xi,y),y)v(\xi,y) = f(h(\xi,y),y).$$

Ezaguna da, jadanik, azken ekuazioa nola ebazten den, eta, bukatzeko, aldagai-aldaketa deseginez $u(x,y) = v(\xi(x,y),y)$ lortuko dugu.

Ariketa. Froga ezazu $xu_x - yu_y + yu = 0$ ekuazioaren soluzio orokorra $u(x,y) = K(xy)e^y$ funtzioa dela. Aurkitu soluzio partikularrak, K-ri balio desberdinak emanez.

Praktikan, zaila izan daiteke ξ kurba karakteristikoa kalkulatzea, eta, bestalde, oso zaila gertatzen da, oro har, h-ren alderantzizko funtzioaren adierazpen esplizitua ematea. Hori dela eta, nahiko zail bihur daiteke aldagai aldakorretako deribatu partzialetako ekuazioen ebazpena.

Aurrean aztertutako (11) ekuazioaren soluzioei, $\xi(x,y) = k$, k konstante bat izanik, (6) deribatu partzialetako ekuazioaren **kurba karakteristikoak** deritze. Ekuazioaren $a(x,y)$ eta $b(x,y)$ koefizienteak konstanteak direnean (11)-ren soluzioak $y = \frac{b}{a}x + k$ zuzenak dira, hau da, $\xi(x,y) = bx - ay = k$ (aurreko atalean aztertutako zuzen karakteristikoak).

Berriz ere, $u(x,\varphi(x)) = g(x)$ (baliokideki $u(\varphi(y),y) = g(y)$) bezalako baldintza gehigarri bat lagungarri izan daiteke K modu bakarrean zehazteko. Baina posible da baldintza gehigarri hori deribatu partzialetako ekuazioarekin bateraezina izatea edo baldintza betetzen duten infinitu K funtzio egotea. $u(x,\varphi(x)) = g(x)$ funtzioa x-rekiko deribatzen badugu, honako hau lortuko dugu:

$$u_x(x,\varphi(x)) + u_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) = g'(x).$$

Orain $a(x,\varphi(x))$ konstantearekin biderkatuz:

$$a(x,\varphi(x))u_x(x,\varphi(x)) + a(x,\varphi(x))\varphi'(x)u_y(x,\varphi(x)) = a(x,\varphi(x))g'(x).$$

Deribatu partzialetako ekuazioan $y = \varphi(x)$ eginez:

$$a(x,\varphi(x))u_x(x,\varphi(x)) + b(x,\varphi(x))u_y(x,\varphi(x)) + c(x,\varphi(x))u(x,\varphi(x)) = f(x,\varphi(x)).$$

Beraz, $a(x,\varphi(x))\varphi'(x) = b(x,\varphi(x))$ denean, adierazpen biak bat dira, baldin eta

$$a(x,\varphi(x))g'(x) - c(x,\varphi(x))u(x,\varphi(x)) = f(x,\varphi(x))$$

bada. Ohar zaitez gerta daitekeela deribatu partzialetako ekuazioaren eta baldintza gehigarriaren arteko bateraezintasuna honako kasu honetan:

$$\varphi'(x) = \frac{b(x,\varphi(x))}{a(x,\varphi(x))},$$

hau da, baldintza gehigarria kurba karakteristiko baten gainean emanda dagoenean.
Adibidea. $u(x,1) = x^2$ baldintza betetzen duen $xu_x - yu_y + yu = 0$ ekuazioaren soluzio bakarra $u(x,y) = (xy)^2 e^{y-1}$ da. Bestalde, deribatu partzialetako ekuazio horren soluzio batek ere ez du $u(x,0) = x$ baldintza betetzen. Aldiz, $u(x,0) = 1$ betetzen duten infinitu soluzio daude, $K(0) = 1$ betetzen duten guztiak, hain zuzen ere.

9.5 Bigarren ordenako deribatu partzialetako ekuazio linealak

Izan bedi **koefiziente konstanteetako** bigarren ordenako deribatu partzialetako ekuazioa:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Gu = f(x,y)$$

non $A, B, C, D, E, G \in \mathbf{R}$ eta f ezagunak baitira. Honako aldagai-aldaketa hau eginez,

$$\xi = ax + by, \qquad \eta = cx + dy,$$

a, b, c, d konstanteak izanik $u(x,y) = v(\xi, \eta)$ lortuko da. Katearen erregela erabiliz:

$$u_x = av_\xi + cv_\eta,$$

$$u_y = bv_\xi + dv_\eta,$$

$$u_{xx} = a^2 v_{\xi\xi} + 2acv_{\xi\eta} + c^2 v_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = abv_{\xi\xi} + (bc + ad)v_{\xi\eta} + cdv_{\eta\eta},$$

$$u_{yy} = b^2 v_{\xi\xi} + 2bdv_{\xi\eta} + d^2 v_{\eta\eta}.$$

Eta ekuazioan ordezkatzean, honako hau lortuko dugu:

$$(Aa^2 + Bab + Cb^2)v_{\xi\xi} + (2Aac + (bc + ad)B + 2Cbd)v_{\xi\eta} + (Ac^2 + Bcd + Cd^2)v_{\eta\eta}$$

$$+(aD + bE)v_\xi + (Dc + Ed)v_\eta + Gv = F(\xi, \eta).$$

Azken ekuazioa errazteko, nahiko genuke $v_{\xi\xi}, v_{\xi\eta}$ edo $v_{\eta\eta}$-ren koefizienteak zero izatea. Lehenengo eta hirugarren batugaiak zero izango dira, baldin eta

$$Aa^2 + Bab + Cb^2 = 0, \quad Ac^2 + Bcd + Cd^2 = 0$$

badira, hau da,

$$A + B\left(\frac{b}{a}\right) + C\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 0, \quad A + B\left(\frac{d}{c}\right) + C\left(\frac{d}{c}\right)^2 = 0.$$

Ekuazio horiek $A + B\alpha + C\alpha^2 = 0$ itxurako ekuazio aljebraikoak dira, eta mota honetako ekuazioen erroak

$$\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}$$

dira. Ekuazio horiek $D = B^2 - 4AC$ diskriminantearen arabera sailka daitezke:

(i) $B^2 - 4AC > 0$ denean ekuazioak bi erro erreal izango ditu: α_1, α_2. Goiko bi ekuazioak egiaztatzen dituzten a, b, c, d parametroen balioak aurkitu nahi ditugu; hau da, α_1, α_2 erroak berdinak izan behar dira bi ekuazioetarako. Kasu honetan, $a = c = 1$ eta $b = \alpha_1, d = \alpha_2$ hartzen baditugu, $v_{\xi\xi}$ eta $v_{\eta\eta}$-ren koefizienteak zero izango dira, eta hau da geratzen den ekuazioa:

$$(2A + (\alpha_1 + \alpha_2)B + 2C\alpha_1\alpha_2)v_{\xi\eta} + (D + \alpha_1 E)v_\xi + (D + E\alpha_2)v_\eta + Gv = F(\xi, \eta).$$

Azken motako ekuazioei **hiperbolikoak** deritze. Adibide bat uhinen ekuazioa da.

(ii) $B^2 - 4AC = 0$ denean, ekuazioak erro erreal bikoitza izango du: α. Hemen $a = 1, b = \alpha, c = 0$ eta $d = 1$ hartuz, $v_{\xi\xi}$-ren koefizientea zero izango da, eta baita $v_{\xi\eta}$-rena ere,

$$2Aac + (bc + ad)B + 2Cbd = B + 2C\alpha = 0$$

delako. Beraz, honako hau da geratzen den ekuazioa:

$$Cv_{\eta\eta} + (D + \alpha E)v_\xi + Ev_\eta + Gv = F(\xi, \eta).$$

Mota horretako ekuazioei **parabolikoak** deritze. Beroaren ekuazioa da adibide bat.

(iii) $B^2 - 4AC < 0$ denean, ekuazioak bi erro konplexu ditu: $\beta \pm \gamma i$. Kasu horretan, $a = 1, b = \beta, c = 0$ eta $d = \gamma$ hartuz, $v_{\xi\eta}$-ren koefizientea zero izango da, eta $v_{\xi\xi}$ eta $v_{\eta\eta}$-ren koefizienteak berdinak izango dira:

$$(A + B\beta + C\beta^2)v_{\xi\xi} + C\gamma^2 v_{\eta\eta} + (D + \beta E)v_\xi + E\gamma v_\eta + Gv = F(\xi, \eta).$$

Mota horretako ekuazioei **eliptikoak** deritze. Adibidez, Laplaceren ekuazioa.

Azter dezagun, orain, kasu orokorra: **koefiziente ez-konstanteetako** bigarren ordenako deribatu partzialetako ekuazioak. Har dezagun eragile hau:

$$Lu =$$

$$A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + D(x,y)u_x + E(x,y)u_y + G(x,y)u.$$

Definizioa. L eragilea (x_0, y_0) puntuan hiperbolikoa, parabolikoa edo eliptikoa izango da, baldin eta puntu horretako diskriminatzailea

$$B^2(x_0,y_0) - 4A(x_0,y_0)C(x_0,y_0)$$

positiboa, nulua edo negatiboa bada, hurrenez hurren. Horrez gain, L eragilea eremu batean hiperbolikoa, parabolikoa edo eliptikoa izango da, baldin eta eremu horretako puntu guztietan diskriminatzailea positiboa, nulua edo negatiboa bada, hurrenez hurren.
Adibidea. Izan bedi $Lu = u_{xx} + (5+2y^2)u_{xy} + (1+y^2)(4+y^2)u_{yy} = 0$. Kasu honetan, $A(x,y) = 1, B(x,y) = 5+2y^2, C = (1+y^2)(4+y^2)$ dira, eta diskriminantea,

$$B^2(x,y) - 4A(x,y)C(x,y) = 9 > 0,$$

positiboa da x, y guztietarako; beraz, L eragile hiperbolikoa da puntu guztietan.

Koefiziente konstanteetako bigarren ordenako deribatu partzialetako ekuazioak aztertzerakoan, aldagai-aldaketa lineala aukeratu dugu. Oro har, aldiz, beste aldagai-aldaketa bat aukeratu beharko dugu, eta ez da beti lineala izango.

Izan bedi honako aldagai-aldaketa hau;

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y), \end{cases}$$

non ξ, η jakobiarra ez-nulua duten funtzio erregularrak baitira. Aldaketaren ondorioz, $u(x,y) = v(\xi,\eta)$ izango da. Katearen erregela erabiliz, u-ren deribatu partzialak v-ren deribatu partzialen bidez idatz daitezke, honela:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + 2v_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + v_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + v_\xi\xi_{xx} + v_\eta\eta_{xx}$$

$$u_{yy} = v_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + 2v_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + v_{\eta\eta}(\eta_y)^2 + v_\xi\xi_{yy} + v_\eta\eta_{yy}$$

$$u_{xy} = v_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + v_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + v_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + v_\xi\xi_{xy} + v_\eta\eta_{xy}.$$

Eta aldagai-aldaketa $Lu = 0$ adierazpenean ordezkatuz,

$$\alpha_1 v_{\xi\xi} + \alpha_2 v_{\xi\eta} + \alpha_3 v_{\eta\eta} + \alpha_4 v_\xi + \alpha_5 v_\eta + \alpha_6 v = 0$$

dugu,

$$\alpha_1 = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2$$

$$\alpha_2 = 2A\ \xi_x\eta_x + B\xi_x\eta_y + B\xi_y\eta_x + 2C\xi_y\eta_y$$

$$\alpha_3 = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2$$

$$\alpha_4 = A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y$$

$$\alpha_5 = A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y$$

$$\alpha_6 = G$$

izanik.

(1) Demagun L eragile hiperbolikoa dela, hau da, α_1, α_3 zero direla. Hori gertatzen da baldin eta

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad \frac{\eta_x}{\eta_y} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

badira. Baina

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

ekuazio diferentzialaren soluzioak $\xi(x, y) = K$ kurbak dira eta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

ekuazioaren soluzioak $\eta(x, y) = k$ kurbak. $\xi(x, y) = K$ kurba badugu, bere deribatua eginez, $\xi_x + \xi_y \frac{dy}{dx} = 0$ dugu, hau da, $\frac{dy}{dx} = -\frac{\xi_x}{\xi_y}$. Kurba horiek kurba karakteristikoak dira. Horrela, aukeratu dugun aldagai-aldaketarekin $Lu = 0$ ekuazioa bigarren ordenako gai bakarra, $v_{\xi\eta}$, duen ekuazio bihurtu da.

Adibidea. Izan bedi $Lu = u_{xx} + (5 + 2y^2)u_{xy} + (1 + y^2)(4 + y^2)u_{yy} = 0$. Ekuazio horren kurba karakteristikoak honako ekuazio hauen soluzioak dira:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \quad \frac{dy}{dx} = 4 + y^2,$$

hau da, $x - \arctan y = k$ eta $x - \arctan \frac{y}{2} = k$ kurbak, hain zuzen. Kasu honetan,

$$\xi(x, y) = x - \arctan y, \quad \eta(x, y) = x - \arctan \frac{y}{2}$$

aldagai-aldaketarekin α_1, α_3 zero izango dira.

(2) Demagun L eragile parabolikoa dela, hau da, $B^2 - 4AC = 0$ dela. Orduan, $\xi(x, y) = K$ kurbak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A}$$

ekuazio diferentzialaren soluzioak badira eta aurreko kasuko aldagai-aldaketa bera egiten badugu, η edozein funtziotarako, $\alpha_1, \alpha_2 = 0$ lortuko dugu. Beraz, ekuazioan $v_{\eta\eta}$-ri dagokion deribatu partziala soilik agertuko da.

(3) Izan bedi L eragile eliptikoa. Kasu honetan

$$B^2(x, y) - 4A(x, y)C(x, y) < 0$$

ekuazioaren erroak konplexuak izango dira, $\alpha(x, y) \pm i\beta$. Orain, $\overline{\xi}(x, y)$ ξ-ren konjokatua izanik,

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \overline{\xi}(x, y), \end{cases}$$

aldagai-aldaketa eginez, honako aldagai erreal hauek lortzen dira:

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2}(\xi + \overline{\xi}) \\ s = \frac{1}{2i}(\xi - \overline{\xi}). \end{cases}$$

Azken aldagai-aldaketa egin ondoren, deribatu partzialetako ekuazioan $v_{\xi\eta}$ delakoaren koefizientea zero da, eta $v_{\xi\xi}$-ren koefizientea eta $v_{\eta\eta}$-renak berdinak dira.

Ariketa. Aztertu

$$u_{xx} - 6u_{xy} + 12u_{yy} = 0$$

ekuazioa zein motatako ekuazioa den, eta egin dagokion aldagai-aldaketa ekuazioa laburtzeko.

9.6 Hastapen-baldintzak, mugalde-baldintzak eta ondo planteaturiko problema

Oro har, ekuazio batek hainbat soluzio izan ditzake. Horietako soluzio bat finkatzeko ze datu behar dugun jakin nahi dugu. Ekuazio diferentzial arruntetarako, datu hori izan daiteke puntu bateko funtzioaren eta bere ondoz ondoko deribatuen balioen multzoa. Baina deribatu partzialetako ekuazioetarako, datu hori ez da nahikoa. Apunte hauetan ez dugu gai hori aztertuko, Deribatu Partzialetako Ekuazioak irakasgaiari dagokiolako. Hala ere, zenbait ideia komentatuko ditugu.

Uhinen eta beroaren ekuazioak aztertuko ditugu $D \times (0, \infty)$ eremuan, $D \subset \mathbf{R^n}$ izanik. Potentzialaren ekuazioa aztertuko dugu $D \subset \mathbf{R^n}$ eremuan. Datuak $t = 0$ baliorako ematen dira: beroaren ekuazioaren kasuan $u(x, 0)$, eta uhinen kasuan $u(x, 0)$ eta $u_t(x, 0)$. Hauek hastapen-baldintzak dira.

Ekuazioak eta hastapen-baldintzak osatutako problemari *Cauchyren problema* deritzo.

Horrez gain, beharrezkoak dira x aldagaiaren D eremuari lotutako baldintzak. Baldintza horiek hiru motatakoak izan daitezke: 1) *Dirichlet-en baldintza*, hau da, D-ren mugan u-ren balioa ematea; 2) *Neumann-en baldintza*, hots, u-ren deribatu normalaren mugako balioa ematea; 3) *bien nahasketa bat*, hau da, Dirichlet motakoa mugan eta Neumann motakoa gainerakoan. Horiek mugalde-baldintzak dira. Uhinen eta beroaren problemetan, baldintza horiek eman behar dira D-ren mugan eta edozein t-tarako.

J. Hadamard (1850-1945) matematikariak sortu zuen ondo planteaturiko problemaren kontzeptua. Problema ondo planteaturik dagoela esaten da hiru baldintza hauek aldi berean egiaztatzen direnean: soluzioa existitzen da, bakarra da, eta hastapen-datuetatik menpekotasun jarraitua du. Oharra: problema ondo planteatuta egotea soluzioen espazioaren aukeraren araberakoa da. Hau da, problema batek soluzio bat baino gehiago izan arren, soluzioa bakarra izan daiteke funtzio mota konkretu batera mugatzen garenean.

9.7 ARIKETAK

1.- Ebatzi honako ekuazio hauek koordenatu polarretara pasatuz:

$$(a)\ xu_y - yu_x = 0 \quad (b)\ y^{-1}u_y - x^{-1}u_x = x^2 + y^2.$$

2.- Idatzi $\mathbf{R^3}$ espazioan laplaziarra koordenatu zilindriko eta esferikoetan.

3.- Aurkitu Cauchyren problema honen soluzioa:

$$\begin{cases} 2u_x + 3u_y = 0 \\ u(x,0) = |x|. \end{cases}$$

$u(x,y)$ funtzioa $\mathcal{C}^1(\mathbf{R^2})$ espaziokoa da? Deskribatu u_x-ren singulartasunak. $|x|$ funtzioaren ordez $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R})$ funtzioa hartzen badugu, zer esan dezakegu u funtzioaren erregulartasunari buruz?

4.- Izan bedi u, $\mathbf{R^n}$ espazioan definituriko funtzio erradiala, hau da, $u(x) = f(\|x\|)$ non f funtzioa $(0, +\infty)$-n definituriko edozein funtzio baita.

(i) Idatz ezazu u-ren laplaziarra f-ren deribatuen bidez. Koordenatu polarretako eta esferikoetako adierazpenak erabiliz, egiaztatu erantzuna $n = 2$ eta $n = 3$ kasuetarako.

(ii) Idatz ezazu u-ren bilaplaziarra f-ren deribatuen bidez (u-ren bilaplaziarra honela definitzen da: $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$).

5.- Izan bedi u honako lehen ordenako ekuazio honen soluzioa:

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0$$

eta $(x(t), y(t))$ kurba bat, non $u(x(t), y(t)) = c$ baita, c konstantea izanik. Idatz ezazu kurba horrek egiaztatzen duen ekuazio diferentziala. Ebatzi 1.- (a) ariketarako eta konparatu lehen aurkitutako emaitzarekin.

6.-Aurki ezazu honako problema honen $u(x,t)$ soluzioa:

$$\begin{cases} u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = t^2,\ u(1,t) = 1, \quad t > 0. \end{cases}$$

7.- Aurki ezazu $u_{xy} + 3u_x = 1$ ekuazioaren soluzio orokorra. Oharra: egin $v = u_x$ aldaketa.

8.- Aurkitu $xu_{xx} - 4u_{xt} = 0$ ekuazioaren soluzio orokorra honako aldagai-aldaketa hau eginez, $\tau = t$, $\xi = t + 4\log x$.

9.- Egiaztatu $u_t = u_x^2 + u_{xx}$ ekuazio ez-lineala ekuazio lineal bihurtzen dela $v = e^u$ aldaketa egitean.

10.- Idatzi honako ekuazio honen soluzioa:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2}. \end{cases}$$

10. Kapitulua

Ekuazio bereziak: uhinen, beroaren eta potentzialaren ekuazioak

10.1 Dimentsio bakarreko uhinen ekuazioa

Uhin-ekuazioari loturik, hainbat problema aztertuko ditugu. Uhin-ekuazioaren Cauchyren problema, ekuazio ez-homogeneoa, uhinak zuzenerdi batean, eta uhinak hari finitu batean, besteak beste. Irakurleak gogoratu behar du apunte hauek deribatu partzialetako ekuazioen sarrera bat direla, eta problema hauek beren osotasunean ebazteko kontuan izan behar direla mendekotasun-eremuak eta eragin-eremuak, problema ondo planteatuta dagoela ziurtatzeaz gain.

Jadanik, aztertu dugu 8. gaiko 8.1 atalean luzera finitua duen hari baten bibrazioaren problema. Hariaren bi muturrak finko daudela suposatuz, hariaren bibrazioak $u(x, y)$ funtzio baten bidez adieraz daitezke, eta u-k honako ekuazio, hastapen-baldintza eta mugalde-baldintza hauek beteko ditu:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), & t > 0, 0 < x < l, \\ u(x,0) = f(x); u_t(x,0) = g(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Gogoratu problema hau ebazteko aldagaien banantze-metodoa erabili izan dela.

Bestalde, 9.2 ataleko b) adibidean ikusi dugu, zehazki, $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ ekuazioaren soluzio

orokorra

$$u(t,x) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

dela.

10.1.1 Uhin-ekuazioaren Cauchyren problema

Honako hastapen-balio hauetako problemaren soluzioa aurkitu nahi dugu:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), & t>0, x\in\mathbf{R}, \\ u(x,0) = f(x), & x\in\mathbf{R}, \\ u_t(x,0) = g(x), & x\in\mathbf{R}. \end{cases}$$

Soluzio orokorreko, $u(t,x) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$, φ eta ψ funtzioak aurkitu behar dira. Horretarako, u eta u_t delakoak ebaluatu behar ditugu $t=0$ puntuan. Hau da:

$$u(x,0) = \varphi(x) + \psi(x) = f(x), \qquad u_t(x,0) = c\varphi'(x) - c\psi'(x) = g(x).$$

Lehenengo ekuazioan, x-rekiko deribatuz $\varphi'(x) + \psi'(x) = f'(x)$ ondorioztatzen da, eta hiru ekuazioetako sistema hori ebatziz honako hau lortzen da:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds + k \quad \psi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds - k,$$

k konstante baterako, konstante hori zero har dezakegu. Beraz, hau da problemaren soluzioa:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds.$$

Adibidea. Izan bedi uhin-ekuazioaren honako Cauchyren problema hau:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = 4u_{xx}(x,t), & t>0, x\in\mathbf{R}, \\ u(x,0) = e^{-x^2}, & x\in\mathbf{R}, \\ u_t(x,0) = 0, & x\in\mathbf{R}. \end{cases}$$

Problema horren soluzioa $u(x,t) = \frac{1}{2}\left(e^{-(x+2t)^2} + e^{-(x-2t)^2}\right)$ da.

10.1.2 Ekuazio ez-homogeneoa

Atal honetan, uhin-ekuazio ez-homogeneoaren problema aztertuko dugu, hau da:

$$(1)\qquad \begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = F(x,t), & t>0, x\in\mathbf{R}, \\ u(x,0) = f(x), & x\in\mathbf{R}, \\ u_t(x,0) = g(x), & x\in\mathbf{R}. \end{cases}$$

(1) problema honako bi hauen konbinazio bat da:

$$(2)\qquad \begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = F(x,t), & t>0, x\in\mathbf{R}, \\ u(x,0) = 0, & x\in\mathbf{R}, \\ u_t(x,0) = 0, & x\in\mathbf{R} \end{cases}$$

eta

$$(3)\qquad \begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, & t>0, x\in\mathbf{R}, \\ u(x,0) = f(x), & x\in\mathbf{R}, \\ u_t(x,0) = g(x), & x\in\mathbf{R}. \end{cases}$$

(2)-ren eta (3)-ren soluzioak $u_1(x,y)$ eta $u_2(x,t)$ badira, hurrenez hurren, orduan (1)-en soluzioa $u(x,t) = u_1(x,y) + u_2(x,t)$ izango da. (3) problema 10.1.1 atalean ebatzi dugu eta, horren ondorioz, nahikoa da (2) problemaren soluzioa aurkitzea. Horretarako,

$$v(\xi,\eta) = u_1\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\right)$$

aldagai-aldaketa eginez, honako hau lortzen da:

$$-4c^2 v_{\xi\eta}(\xi,\eta) = F\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\right).$$

Orain, $u(x,0)=0$ baldintzatik $v(\xi,\xi)=0$ ondorioztatzen da, eta hori deribatuz $v_\xi(\xi,\xi) + v_\eta(\xi,\xi) = 0$. Bestalde, $u_t(x,0)=0$-tik, $v_\xi(\xi,\xi) - v_\eta(\xi,\xi) = 0$ dugu, eta, ondorioz,

$$v(\xi,\xi) = v_\xi(\xi,\xi) = v_\eta(\xi,\xi) = 0.$$

Beraz, v eta v-ren lehen ordenako bi deribatuak zero dira $\xi = \eta$ diagonalean. Kalkulu infinitesimalaren oinarrizko teoremaren arabera:

$$v_\xi(\xi,\eta) - v_\xi(\xi,\xi) = -\int_\eta^\xi v_{\xi\eta}(\xi,s)\,ds;$$

$$v(\xi,\eta) - v(\eta,\eta) = \int_\eta^\xi v_\xi(r,\eta)\,dr = \int_\eta^\xi \int_\eta^r -v_{\xi\eta}(r,s)\,ds\,dr.$$

Orduan,

$$v(\xi,\eta) = \frac{1}{4c^2}\int_\eta^\xi \int_\eta^r F\left(\frac{r+s}{2}, \frac{r-s}{2c}\right)\,ds\,dr.$$

eta

$$u_1(x,t) = \frac{1}{4c^2}\int_{x-ct}^{x+ct} \int_{x-ct}^r F\left(\frac{r+s}{2}, \frac{r-s}{2c}\right)\,ds\,dr.$$

Aurreko integral bikoitzean aldagai-aldaketa egokia eginez, $\dfrac{r+s}{2} = y$, eta $\dfrac{r-s}{2c} = z$, honako adierazpen hau lortuko dugu:

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-z)}^{x+c(t-z)} F(y,z)\,dy\,dz = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(r,s)\,dr\,ds.$$

Ondorioz, honako hau da (1) problemaren soluzioa:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(r,s)\,dr\,ds.$$

10.1.3 Uhinak zuzenerdian

(i) *Dirichlet motako mugalde-baldintzak.* Har dezagun problema hau:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0\,, & x > 0,\ t > 0\,, \\ u(x,0) = f(x)\,, & x > 0\,, \\ u_t(x,0) = g(x)\,, & x > 0\,, \\ u(0,t) = h(t)\,, & t > 0. \end{cases}$$

Soluzio orokorra $u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$ da. Orduan:

- $x-ct>0$ denean, hasierako baldintzak ezarriz $\varphi(x)$ eta $\psi(x)$ funtzioak kalkulatzen ditugu, eta, beraz, aurreko atalean kalkulatutakoa izango da soluzioa:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\,ds.$$

- $x-ct<0$ denean, soluzio orokorrean $x=0$ eginez, $\varphi(ct)+\psi(-ct)=h(t)$ lortuko dugu. Horrela, hauexek dira ψ-ren balioak $s<0$ eremuan:

$$\psi(s)=-\varphi(-s)+h\left(\frac{-s}{c}\right),$$

orduan,

$$\psi(x-ct)=-\varphi(ct-x)+h\left(\frac{ct-x}{c}\right).$$

Beraz, hauxe da soluzioa:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)-f(ct-x)]+\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct}g(s)\,ds+h\left(t-\frac{x}{c}\right).$$

u-ren erregulartasuna f , g eta h-ren erregulartasunetik ondorioztatzen da $x-ct>0$ eta $x-ct<0$ eremuetan.
$x=ct$ zuzenean, beharrezkoak dira bateragarritasunezko baldintzak: u jarraitua da, baldin eta $f(0)=h(0)$ bada; eta $u\in\mathcal{C}^2$ izango da, baldin eta $f,h\in\mathcal{C}^2([0,+\infty))$, $g\in\mathcal{C}^1([0,+\infty))$ eta $f(0)=h(0)$, $g(0)=h'(0)$ eta $h''(0)=c^2f''(0)$ badira.

(ii) *Neumann motako mugalde-baldintzak.* Har dezagun honako problema hau:

$$\begin{cases}u_{tt}-c^2u_{xx}=0\,, & x>0,\ t>0\,,\\ u(x,0)=f(x)\,, & x>0\,,\\ u_t(x,0)=g(x)\,, & x>0\,,\\ u_x(0,t)=h(t)\,, & t>0.\end{cases}$$

- $x-ct>0$ denean, hauxe da problemaren soluzioa:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\,ds.$$

- $x-ct<0$ denerako, soluzio orokorrean x-rekiko deribatuz, $u_x(x,t)=\varphi'(x+ct)+\psi'(x-ct)$ dugu, eta $x=0$ eginez, $\varphi'(ct)+\psi'(-ct)=h(t)$ dugu, $t>0$ balioetarako. Horrela, H funtzioa h-ren jatorrizko funtzioa bada, hots, $H'(s)=h(s)$, honako adierazpen hau egiaztatzen da:

$$\psi(s)=\varphi(-s)-cH\left(\frac{-s}{c}\right)+k_1,\quad s<0,\ k_1 \text{ konstantea}$$

eta adierazpen horren bidez, soluzioa kalkulatuko dugu aipaturiko eremuan:

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\varphi(x+ct)+\varphi(ct-x)-c\int_0^{t-\frac{x}{c}}h(s)\,ds+k_1\\&=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(ct-x)]+\frac{1}{2c}\left[\int_0^{x+ct}g(s)\,ds+\int_0^{ct-x}g(s)\,ds\right]\\&\quad-c\int_0^{t-\frac{x}{c}}h(s)\,ds+2k+k_1.\end{aligned}$$

$x=ct$ zuzenean u soluzioa jarraitua izan dadin, $2k+k_1=0$ izan behar da. Hala eta guztiz ere, u-ren deribatuak ez dute zertan jarraituak izan behar.

Oharra: $h=0$ bada, u soluzioa honela ere kalkula daiteke: uhin-ekuazioa zuzen osora luzatzen da eta hasierako datuen hedapen bikoitia egiten da ($f(x)=f(-x)$, eta $g(x)=g(-x)$). (Islapenen metodoa).

10.1.4 Uhinak hari finitu batean

Karakteristikoen metodoa. Suposa dezagun hari baten luzera l dela. Orduan, hauxe da Dirichlet motako mugalde-baldintzetako problema:

$$\begin{cases}u_{tt}-c^2u_{xx}=0\,, & 0<x<l,\ t>0\,,\\ u(x,0)=f(x)\,, & 0<x<l\,,\\ u_t(x,0)=g(x)\,, & 0<x<l\,,\\ u(0,t)=h_0(t)\,, u(l,t)=h_1(t)\,, & t>0.\end{cases}$$

Soluzioa $u(x,t)=\varphi(x+ct)+\psi(x-ct)$ denez, hasierako baldintzak erabiliz, $\varphi(s)$ eta $\psi(s)$ kalkulatuko ditugu $s>0$ denerako. Horrela, $I=\{(x,t):t>0,\,0<x-ct<x+ct<l\}$

triangeluan hau da soluzioa:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,.$$

Gainontzeko eremuak aztertzeko beharrezkoak dira mugalde-baldintzak. Izan bedi $II = \{(x,t) : t > 0,\, 0 < x+ct < l,\, -l < x-ct < 0\}$ triangelua. Kasu honetan, ezin daiteke $\psi(x-ct)$ definitu, aldagaia negatiboa baita. Beraz, lehenengo mulgalde-baldintza erabiliz,

$$\varphi(ct) + \psi(-ct) = h_0(t), \quad t > 0,$$

edo, $s = -ct$ aldagai-aldaketa eginez,

$$\psi(s) = -\varphi(-s) + h_0\left(-\frac{s}{c}\right), \quad s < 0$$

lortzen da. Orduan, eremu horretan hauxe da soluzioa:

$$u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct) = \varphi(x+ct) - \varphi(ct-x) + h_0\left(t - \frac{x}{c}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}[f(x+ct) - f(ct-x)] + \frac{1}{2c}\left[\int_0^{x+ct} g(s)\,ds - \int_0^{ct-x} g(s)\,ds\right] + h_0\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

Izan bedi $III = \{(x,t) : t > 0,\, l < x+ct < 2l,\, 0 < x-ct < l\}$ triangelua. Kasu honetan, bigarren mulgalde-baldintza erabiliz,

$$\varphi(l+ct) + \psi(l-ct) = h_1(t), \quad t > 0,$$

edo, $s = l + ct$ aldagai-aldaketa eginez,

$$\varphi(s) = -\psi(2l-s) + h_1\left(\frac{s-l}{c}\right), \quad s > 0$$

lortzen da eta, $l < s < 2l$ bada, $0 < 2l - s < l$ denez, $\psi(2l-s)$ ondo definituta dago. Ondorioz, eremu horretan hauxe da soluzioa:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-ct) - f(2l-(x+ct))] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{2l-(x+ct)} g(s)\,ds + h_1\left(t - \frac{l-x}{c}\right).$$

Azkenik, izan bedi $IV = \{(x,t) : t > 0,\, l < x+ct < 2l,\, -l < x-ct < 0\}$ eremua. Kasu hau II eta III eremuetan aurkitutako arazoen konbinazio bat da, eta soluzioa honako hau da:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2}[f(ct-x)+f(2l-(x+ct))]+\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{2l-(x+ct)} g(s)\,ds+h_0\left(t-\frac{x}{c}\right)+h_1\left(t-\frac{l-x}{c}\right).$$

Oharra: $h_0 = 0$ eta $h_1 = 0$ direnean, u soluzioa honela ere kalkula daiteke: uhin-ekuazioa zuzen osoan hartuko dugu, horretarako hasierako datuen hedapen bakoitia eginez: $f(x) = -f(-x)$, $f(l+x) = -f(l-x)$, $g(x) = -g(-x)$ eta $g(l+x) = -g(l-x)$.

Aldagaien banantze-metodoa. Azter dezagun uhin-ekuazioaren honako problema hau:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0\,, & 0 < x < l,\ t > 0\,, \\ u(x,0) = f(x)\,, & 0 < x < l\,, \\ u_t(x,0) = g(x)\,, & 0 < x < l\,, \\ u(0,t) = 0\,, u(l,t) = 0\,, & t > 0. \end{cases}$$

Aldagaien banantze-metodoa erabiliz, honela idatz daiteke problemaren soluzioa:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

Beraz, alde batetik

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

sistema dugu eta, aurreko gaietan ikusi denez, $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = (n\pi/l)^2$ balio propioak eta $X_n = \sin(\frac{n\pi x}{l})$ funtzio propioak ditu. Bestalde,

$$T''(t) + \left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 T(t) = 0$$

ekuazioaren soluzio orokorra

$$T_n(t) = k_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + c_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right), \quad (k_n, c_n \in \mathbf{R}).$$

Beraz, hauek dira deribatu partzialetako ekuazioa eta mugalde-baldintzak egiaztatzen dituzten u funtzioak:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(k_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + c_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Eta u-k hastapen-baldintzak ere egiaztatu behar dituenez:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

$$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

izan behar dira, non k_n eta $\frac{n\pi c}{l} c_n$, f eta g funtzioen sinuaren Fourierren seriearen koefizienteak baitira, hurrenez hurren; beraz,

$$k_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx,$$

$$c_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

Ekuazio ez-homogeneoa. Izan bedi honako problema ez-homogeneo hau:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)\,, & 0 < x < l,\ t > 0\,, \\ u(x,0) = 0\,, & 0 < x < l\,, \\ u_t(x,0) = 0\,, & 0 < x < l\,, \\ u(0,t) = 0\,, u(l,t) = 0\,, & t > 0. \end{cases}$$

Problema horren soluzioa

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) X_n(x) \tag{4}$$

da, X_n problema homogeneoaren funtzio propioak izanik. Lehen hastapen-baldintza erabiliz,

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(0) X_n(x) = 0$$

da, beraz, $C_n(0) = 0$ da n guztietarako. Bestalde, u-ren deribatua eginez

$$u_t(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n'(t) X_n(x)$$

lortzen da, eta hastapen-baldintza erabiliz

$$u_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n'(0) X_n(x) = 0$$

dugu; beraz, $C_n'(0) = 0$, n guztietarako. Orain, (4) problema ez-homogeneoaren ekuazioan ordezkatuz,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n''(t) X_n(x) - c^2 C_n(t) X_n''(x) = F(x,t).$$

Bestalde, $X_n'' + \lambda_n X_n = 0$ ekuaziotik lortutako $X_n'' = -\lambda_n X_n$ adierazpena aurreko berdintzan ordezkatzerakoan, honako ekuazio hau lortuko dugu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (C_n'' + c^2 \lambda_n C_n) X_n(x) = F(x,t).$$

Eta $F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t) X_n(x)$ bada, non

$$B_n(t) = \frac{\int_0^l F(x,t) X_n(x) dx}{\int_0^l X_n^2(x) dx}$$

baita, hasierako problema ez-homogeneoa honako Cauchyren problema honetara murriztu da:

$$\begin{cases} C_n''(t) + c^2 \lambda_n C_n(t) = B_n(t), \\ C_n(0) = 0 = C_n'(0). \end{cases}$$

Aurreko gaietan problema honen ebazpena aztertu da.

Beste alde batetik, aurreko problema berdina baina hastapen-baldintza ez-homogeneoen kasua aztertu nahi badugu, hau da,

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n X_n(x)$$

deneko kasua, orduan, $C_n(0) = B_n$ izango dugu. Horrez gain,

$$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n X_n(x)$$

baldintza izango bagenu, kontuan izan behar dugu $C_n'(0) = A_n$ dela.

Mugalde-baldintzak ez-homogeneoak direnean, hau da,

$$u(0,t) = h_1(t), \qquad u(l,t) = h_2(t),$$

hoanko aldaketa hau egin behar da:

$$v(x,t) = h_1(t)\frac{l-x}{l} + \frac{x}{l} h_2(t).$$

Beraz,

$$u(x,t) = z(x,t) + v(x,t) \longrightarrow z(x,t) = u(x,t) - v(x,t).$$

Eta hauek dira z-rako hastapen-baldintzak eta mugalde-baldintzak:

$$z(x,0) = f(x) - \left(h_1(0)\frac{l-x}{l} + \frac{x}{l}h_2(0)\right), \quad z_t(x,0) = g(x) - \left(h_1'(0)\frac{l-x}{l} + \frac{x}{l}h_2'(0)\right),$$

$$z(0,t) = 0 = z(l,t).$$

Eta hau da z-rako deribatu partzialetako ekuazioa:

$$z_{tt} - c^2 z_{xx} = F(x,t) - (v_{tt} - c^2 v_{xx}),$$

beraz, mugalde-baldintzak zero dituen problema batera murriztu gara.

10.2 Dimentsio bakarreko beroaren ekuazioa

8. 1 atalean beroaren ekuazio homogeneo hau ebatzi dugu:

$$\begin{cases} \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Beroaren problema mugalde-baldintza ez-homogeneoekin: izan bedi honako beroaren ekuazio hau mugalde-baldintza ez-homogeneoekin:

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0,t) = h_1(t),\ u(l,t) = h_2(t), \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < l. \end{cases} \tag{5}$$

Problema hau mugalde-baldintza homogeneoetako problema bihurtuko dugu, honako $v(x)$ funtzio honen bidez. Izan bedi

$$v''(x) = 0, (0 < x < l),\ v(0) = h_1,\ v(l) = h_2 \tag{6}$$

honen soluzioa $v(x) = \frac{(h_2 - h_1)x}{l} + h_1$ da.
Har dezagun $w(x,t)$ honako forma honetan definitua:

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t). \tag{7}$$

$u(x,t)$ funtzioak $\alpha^2 u_{xx} = u_t$ egiaztatu behar duenez, $w(x,t)$ funtzioak baldintza hauek egiaztatzen ditu:

$$\alpha^2\ (v+w)_{xx} = (v+w)_t \Rightarrow \alpha^2\ w_{xx} = w_t$$

$$u(0,t) = h_1 \Rightarrow w(0,t) = 0$$

$$u(l,t) = h_2 \Rightarrow w(l,t) = 0.$$

Beraz, $w(x,t)$ funtzioa honako problema homogeneo honen soluzioa da:

$$\alpha^2\ w_{xx} = w_t, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

$$w(0,l) = w(l,t) = 0, \quad t > 0$$

$$w(x,0) = f(x) - v(x). \quad 0 < x < l$$

Beraz,

$$f(x) - \frac{(h_1 - h_2)x}{l} - h_1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\ \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{8}$$

denean, hau da (5) problemaren soluzioa (formala):

$$u(x,t) = \frac{(h_1 - h_2)x}{l} + h_1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\ \exp^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t}\ \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{9}$$

Beroaren problema ez-homogeneoa mugalde-baldintza homogeneoekin: izan bedi

$$\begin{cases} u_t - \alpha^2 u_{xx} = F(x,t)\,, & 0 < x < l,\ t > 0\,, \\ u(x,0) = f(x)\,, & 0 < x < l\,, \\ u(0,t) = 0\,, u(l,t) = 0\,, & t > 0. \end{cases} \tag{10}$$

Honako era honetan idatz daitekeen soluzio bat aurkitu nahi dugu:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l},$$

$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$ funtzioak problema homogeneoaren funtzio propioak direlako. Demagun $f(x)$ eta $F(x,t)$ funtzioak honela gara daitezkeela:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l},$$

non

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad \text{eta} \quad b_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l F(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

baitira. Adierazpen hauek guztiak beroaren ekuazioan ordezkatuz,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n'(t) + \left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2 C_n(t)\right)\sin\frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

eta, ondorioz,

$$C_n'(t) + \left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2 C_n(t) = b_n(t) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bestalde, $u(x,0) = f(x)$ hastapen-baldintzatik, $C_n(0) = a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ dela ateratzen da. Guztia kontuan hartuz, $n \in \mathbb{N}$ bakoitzerako hastapen-balioetako honako problema hau lortzen da:

$$\begin{cases} C_n'(t) + \left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2 c_n(t) = b_n(t) \\ C_n(0) = a_n \end{cases}$$

bere soluzioa

$$C_n(t) = a_n e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2 t} + \int_0^t b_n(s)e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2 (t-s)}ds$$

izanik. Eta azken emaitza $u(x,t)$-ren aurreko adierazpenean ordezkatuz, (10) problemaren soluzioa dugu:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2 t} + \int_0^t b_n(s)e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2 (t-s)}ds\right]\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Beroaren problema ez-homogeneoa mugalde-baldintza ez-homogeneoekin: har dezagun beroaren honako ekuazio hau:

$$\begin{cases} u_t - \alpha^2 u_{xx} = F(x,t)\,, & 0 < x < l,\ t > 0\,, \\ u(x,0) = f(x)\,, & 0 < x < l\,, \\ u(0,t) = h_1(t)\,, u(l,t) = h_2(t)\,, & t > 0. \end{cases}$$

Izan bedi $v(x,t) = h_1(t)\frac{l-x}{l} + \frac{x}{l}h_2(t)$. Orduan, $z(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$ da baldintza homogeneoak dituen problema honen soluzioa:

$$\begin{cases} z_t - \alpha^2 z_{xx} = F(x,t) - h_1'(t) - \frac{x}{l}[h_2'(t) - h_1'(t)]\,, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ z(x,0) = f(x) - h_1(0) - \frac{x}{l}[h_2(0) - h_1(0)]\,, & 0 < x < l, \\ z(0,t) = 0,\ z(l,t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

z funtzioa ezagutuz, u funtzioa kalkulatuta dugu.

10.3 Laplaceren ekuazioa koordenatu polarretan

Jadanik, 8. gaiko 8.1 atalean aztertu dugu Laplaceren ekuazioa errektangelu batean; hau da,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0, \qquad 0 < x < l, \quad 0 < y < L, \\ u(0,y) = u(l,y) = 0, \quad 0 < y < L, \\ u(x,0) = f_1(x), \quad 0 < x < l, \\ u(x,L) = f_2(x), \quad 0 < x < l. \end{cases}$$

Bestalde, 9. gaian ikusi dugu Laplaceren ekuazioa koordenatu polarretan.

Atal honetan, Laplaceren ekuazioa aztertuko dugu eremu zirkularretan; adibidez, zirkulua, koroa zirkularra edo honako mota honetako eremua:

$$\Omega = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) : 0 < r_0 \leq r < r_1 \quad \text{eta} \quad \alpha \leq \theta \leq \beta\}.$$

Horrelako eremuetan, komeni da laplaziarra koordenatu polarretan idaztea. Aurreko gaian ikusi dugun bezala, hau da laplaceren ekuazioa koordenatu polarretan:

$$u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0.$$

Izan bedi honako problema hau:

$$\begin{cases} u_{rr}(r,\theta) + r^{-1}u_r(r,\theta) + r^{-2}u_{\theta\theta}(r,\theta) = 0, & 0 < r_0 < r < r_1, \ 0 < \theta < \beta \\ u(r,0) = u(r,\beta) = 0, & r_0 < r < r_1, \\ u(r_0,\theta) = f(\theta), \ u(r_1,\theta) = g(\theta), & 0 < \theta < \beta. \end{cases}$$

Aldagaien banantze-metodoa erabiliko dugu. Horretarako, $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ motako soluzioak aurkitu nahi ditugu. Deribatuz, Laplaceren ekuazioan ordezkatuz eta mugaldebaldintzak kontuan hartuz, $\Theta(\theta)$ funtzioa honako Sturm-Liouvilleren problema honen soluzioa izan behar da:

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(\beta) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Eta $R(r)$ funtzioa honako ekuazio honen soluzioa izan behar da:

$$r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0. \tag{12}$$

Sturm-Liouvilleren (11) problemaren balio propioak $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2$ dira, eta funtzio propioak $\Theta(\theta) = \sin\frac{n\pi\theta}{\beta}$. (12) ekuazioaren soluzioa aurkitzeko $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2$ balioetarako, honako ekuazio honen soluzioak bilatu behar ditugu:

$$r(r-1) + r - \left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2 = 0.$$

Ekuazio horrek $r_1 = \frac{n\pi}{\beta}$ eta $r_2 = \frac{-n\pi}{\beta}$ soluzioak ditu, beraz, honako hau da (12) ekuazioaren soluzio orokorra:

$$R(r) = a_n r^{n\pi/\beta} + b_n r^{-n\pi/\beta}.$$

Ondorioz, Laplaceren problemaren soluzioak adierazpen hau du:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi\theta}{\beta}(a_n r^{n\pi/\beta} + b_n r^{-n\pi/\beta}).$$

Oraindik a_n eta b_n koefizienteak aukeratzea geratzen da, $u(r_0) = f(\theta)$ eta $u(r_1,\theta) = g(\theta)$ mugalde-baldintzak bete ditzaten. Horretarako, $f(\theta)$ eta $g(\theta)$ funtzioen Fourierren sinu serieen garapenak kalkulatuko ditugu:

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi\theta}{\beta} \quad g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin\frac{n\pi\theta}{\beta}.$$

Mugalde-baldintzak egiaztatzera behartuz, hau bete behar da:

$$a_n r_0^{n\pi/\beta} + b_n r_0^{-n\pi/\beta} = c_n \quad \text{eta} \quad a_n r_1^{n\pi/\beta} + b_n r_1^{-n\pi/\beta} = d_n$$

eta hemendik a_n eta b_n kalkulatuko dira.

10.4 ARIKETAK

1.- Kalkulatu Cauchyren problema honen soluzioa:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0\,, & x \in \mathbf{R},\, \mathbf{t} > \mathbf{0}\,, \\ u(x,0) = f(x)\,, & x \in \mathbf{R}\,, \\ u_t(x,0) = g(x)\,, & x \in \mathbf{R}\,. \end{cases}$$

honako kasu hauetan:

(i) $f(x) = e^{-x}, \quad g(x) = 0.$

(ii) $f(x) = A \sin \omega\, x, \quad g(x) = B \cos \mu\, x.$

(iii) $f(x) = 0, \quad g(x) = 1$ $|x| \leq \epsilon$ denean, $g(x) = 0$ $|x| > \epsilon$ denean.

2.- Har dezagun uhin-ekuaziorako Cauchyren problema ez-homogeneoa:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = F(x,t)\,, & x \in \mathbf{R},\, \mathbf{t} > \mathbf{0}\,, \\ u(x,0) = f(x)\,, & x \in \mathbf{R}\,, \\ u_t(x,0) = g(x)\,, & x \in \mathbf{R}\,. \end{cases}$$

Aurkitu soluzioa kasu hauetan:

(i) $F(x,t) = 1, \quad f(x) = \sin \omega\, x, \quad g(x) = 0.$

(ii) $F(x,t) = A \cos \omega\, t \sin \omega\, x, \quad f(x) = g(x) = 0.$

(iii) $F(x,t) = x^2, \quad f(x) = x, \quad g(x) = 0.$

3.- Kalkula ezazu $u(1/2, 1)$, problema honen soluzioa $u(x,t)$ funtzioa bada:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0\,, & 0 < x < 1,\ t > 0\,, \\ u(x,0) = \sin 4\pi x, & 0 < x < 1\,, \\ u_t(x,0) = \sin^2 \pi x\,, & 0 < x < 1\,, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0\,, & t > 0\,. \end{cases}$$

4.- Kalkulatu problema honen soluzioa:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 2, t > 0\,, \\ u(x,0) = 0, \quad 0 < x < 2\,, \\ u_t(x,0) = 1 - 2x, \quad 0 < x < 2\,, \\ u(0,t) = t,\ u(2,t) = 0, \quad t > 0\,. \end{cases}$$

Aldagai-banantzearen metodoa erabiliz, aurkitu honako problema hauen soluzioak:

5.-

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0\,, & 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u(0,t) = T_1,\ u(\pi,t) = T_2\,, & t > 0\,, \\ u(x,0) = x(\pi - x)\,, & 0 < x < \pi\,. \end{cases}$$

Zenbat da $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$?

6.-

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 2e^{3x}\,, & 0 < x < 1/2\,, t > 0\,, \\ u(0,t) = u(1/2,t) = 0\,, & t > 0\,, \\ u(x,0) = \frac{2}{9}(1 - e^{3x})\,, & 0 < x < 1/2\,. \end{cases}$$

(Laguntza: aurkitu lehenengo t-gandik independente den v soluzio geldikor bat, egin $u-v$ eta aurkitu problema berriaren soluzioa).

7.-

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = x\cos t\,, & 0 < x < 1\,, t > 0\,, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0\,, & t > 0\,, \\ u(x,0) = 0\,, & 0 < x < 1\,. \end{cases}$$

Bibliografia

[1] J. M. AGIRREGABIRIA, *Fisika ikasleentzako ekuazio diferentzial arruntak*, EHU, 2000.

[2] G. BIRKHOFF, G. ROTA, *Ordinary differential equations*, J. Wiley Sons Inc., 1989.

[3] W. E. BOYCE, R.C. DIPRIMA, *Ecuaciones difenciales y problemas con valores en la frontera*, Limusa, 2000.

[4] M. BRAUN, *Differential equations and their applications*, Springer-Verlag, New York, 1978.

[5] M. DE GUZMAN, *Ecuaciones diferenciales ordinarias, teoria de estabilidad y control*, Alhambra, 1975.

[6] L. C. EVANS, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, 1997.

[7] G. FOLLAND, *Fourier analysis and its applications*, Pacific Grove, 1992.

[8] G. FOLLAND, *Introduction to partial differential equations*, Princeton Univ. Press, (2. argitalpena), 1995.

[9] M. W. HIRSCH, S. SMALE, *Ecuaciones difenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*, Alianza, 1983.

[10] F. JOHN, *Partial differential equations*, Springer-Verlag, (4. argitalpena), 1982.

[11] A. KISELIOV, M. KRASNOV, G. MAKARENKO, *Problemas de ecuaciones difenciales ordinarias*, MIR, 1984.

[12] E. MARTÍNEZ, *Ekuazio diferentzialak*, UEU, 1994.

[13] R. K. NAGGLE, E. B. SAFF, *Fundamentos de ecuaciones diferenciales*, Addison-Wesley Iberoamericana, (2. argitalpena), 1992.

[14] I. PERAL, *Primer curso de ecuaciones en derivadas parciales*, Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, 1995.

[15] F. SIMMONS, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*, Mc-Graw Hill, (2. argitalpena), 1993.

[16] D. G. ZILL, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*, Grupo editorial Iberoamericana, (2. argitalpena), 1988.

[17] MATERIAL GEHIGARRIA, ocw.bib.upct.es/pluginfile.php/7522/mod_resource/content/1/tema6.pdf