eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

MATEMATIKA OROKORRA I

Egilea

MATTEO VANNACCI

EUSKARA, KULTURA ETA NAZIOARTEKOTZEAREN ARLOKO ERREKTOREORDETZA

Argitalpen honek UPV/EHUko Euskara, Kultura eta Nazioartekotzearen arloko Errektoreordetzaren laguntza izan du

ISSN 2603-8900

Gaien aurkibidea

Sarrera 5

1. Zenbakiak eta funtzioak 7
   1.1. Zenbakiak 7
   1.2. Inekuazioak 8
   1.3. Funtzioak 9
   1.4. Zenbaki konplexuak 22
   1. ATALAREN ARIKETAK 25

2. Limiteak eta jarraitutasuna 29
   2.1. Limiteak 29
   2.2. Jarraitutasuna 34
   2.3. Funtzio jarraituen teorema nagusiak 35
   2.4. Bolzanoren algoritmoa eta `C++` programazio-lengoaian 37
   2. ATALAREN ARIKETAK 38

3. Deribatuak 43
   3.1. Deribatuak 43
   3.2. Muturrak, gorakortasuna eta beherakortasuna 48
   3.3. Ahurtasuna eta ganbiltasuna. Inflexio-puntuak 51
   3.4. Funtzioen adierazpen grafikoa 51
   3.5. Funtzioak aztertzea eta inekuazioak 54
   3. ATALAREN ARIKETAK 56

4. Integralak 61
   4.1. Integralei buruzko teoremak eta propietateak 62
   4.2. Integralen kalkulua 66
   4.3. Azalera eta bolumena kalkulatzea 74
   4.4. Bigarren ordenagailuko praktika: Taylorren polinomioa eta integral numerikoak 77
   4. ATALAREN ARIKETAK 80

5. Aljebra lineala 85
   5.1. Matrizeak 85
   5.2. Ekuazio linealen sistemak 86
   5.3. Determinantea 92
   5.4. Balio eta bektore propioak 94
   5. ATALAREN ARIKETAK 100

A. Espazio bektorial errealak 104
A.1. Espazio bektorialak 104
A.2. Azpiespazio bektorialak 105
A.3. Oinarriak eta dimentsioa 106
A.4. Sistema linealak eta azpiespazioak 109
A.5. Matrizeak eta aplikazio linealak 110

Pasatu diren urteetako azterketa batzuk 111

Sarrera

> Zientzia adituen ezjakintasuneko sinesmena da. ≪Zientziak hori irakasten du≫ esatean, irakatsi aditza txarto erabilita dago. Zientziak ez du irakasten; eskarmentuak irakasten du.
>
> R. Feynman

Apunte hauek Matematika I kurtsorako euskarria dira. Hemen definizio eta emaitza nagusiak agertuko dira.

Hasi baino lehen, izenei buruzko oharpenen bat eman nahi dut. Matematika oso gai zehatza denez, egiten dugun guztia *definizio*etan oinarrituta dago; hau da, objektu matematiko bati buruz hitz egiten dugunean, lehenik eta behin objektu hori definitu behar dugu.

Hori egin ondoren, definizioetatik abiatuta, emaitzak frogatzea daukagu. Emaitzek izen desberdinak dituzte. Emaitzarik garrantzitsuenak *teoremak* dira. Teoremak frogatzeko eta gaiak lantzeko erabiltzen ditugun emaitzek *lema* eta *proposizio* izenak izango dituzte. Azkenik, teorema batetik zuzen-zuzen eskuratu ahal ditugun emaizak *korolarioak* dira.

Nahiz eta kurtsoan zehar emaitza guztiak frogatzeko denborarik izango ez dugun, apunteetan frogapen gehienak biltzen saiatuko gara, gaiak ulertzeko eta sakontzeko baliagarriak izan lekizkizuekeelako.

Bukatzeko, atal guztien amaieran ariketa ugari agertzen dira, eta horiek *zuen kabuz* egiten saiatzea ikas-prozesuaren ezinbesteko partea da.

1

Zenbakiak eta funtzioak

> Ontza bat aljebrak tona bat argudiok baino gehiago balio du.
>
> J. B. S. Haldane

Atal honetan, oinarrizko definizioak errepasatzeaz gain, kurtso osoan erabiliko ditugun gaiak sartuko ditugu.

1.1. Zenbakiak

1.1. DEFINIZIOA. Zenbaki arruntak zenbatzeko erabiltzen diren zenbakiak dira:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, 137, \ldots\}.$$

Zenbaki arrunten batura eta biderkadura zenbaki arruntak dira, baina batuketarekin lotutako arazo bat sortzen da. Adibidez, $x + 3 = 1$ ekuazioak ez du soluziorik zenbaki arruntetan. Problema hori zenbaki berri batzuk kontuan hartuz konponduko dugu.

1.2. DEFINIZIOA. Zenbaki osoak zenbaki arruntak eta horien aurkakoak dira, zero barne:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Hala eta guztiz ere, zenbaki osoekin batuketarekin geneukan problema konpontzen bada ere, biderketaren kasuan arazo berbera sortzen da. Adibidez, $3x = 1$ ekuazioak ez du soluzio osorik. Zenbaki multzo oraindik handiago bat behar dugu.

1.3. DEFINIZIOA. Zenbaki arrazionalak zenbaki osoen zatidura moduan adierazi daitezkeenak dira:

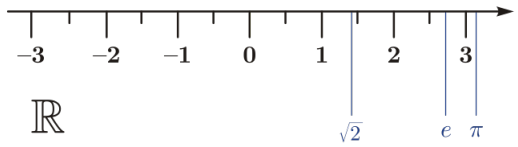
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}.$$

Zenbaki arrazionalak erabiliz, $ax = b$ moduko ekuazioak ebatzi daitezke, a eta b zenbaki arrazional guztietarako, non $a \neq 0$ baita. Hala ere, badaude soluzio arrazionalik ez duten ekuazio polinomikoak, $x^2 = 2$ ekuazioa adibidez. Beraz, zenbaki arrazionalak ez diren zenbakiak existitzea komeniko litzaiguke. Hemen ez gara zenbaki errealen definizio formalean sartuko, eta hurrengo definizioa bakarrik erabiliko dugu, *hedapen hamartarra* erabiltzen duena.

1.4. DEFINIZIOA. Zenbaki errealak honako modu honetan adieraz ditzakegun a zenbakiak dira:

$$a = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots,$$

non $a_0 \in \mathbb{Z}$ eta $a_i \in \{0, \ldots, 9\}$ diren. Zuzen batean adieraz daitezke, *zuzen erreala* deritzo zuzen horri.



1.5. OHARRAK. (i) Zenbaki errealen batuketa eta biderketa ohiko moduan egiten dira. Adibidez, $0,1 + 0,9 = 1$ eta $0,1 \cdot 0,1 = 0,01$.

(ii) Zenbaki arrazionalak zenbaki errealen artean adierazi ditzakegu. Izan ere, hedapen hamartar *periodikoa* duten zenbaki errealak arrazionalak dira. Adibidez,

$$\frac{1}{10} = 0,1, \quad \frac{1}{3} = 0,33333\ldots \quad \text{eta} \quad \frac{2}{7} = 0,285714285710000\ldots$$

(iii) Esandakoarengatik, zenbaki arrazionalak zenbaki errealen azpimultzoa direla dugu. Arrazionalak ez diren zenbaki errealak zenbaki *irrazionalak* deitzen dira, eta

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}, e, \pi \ldots\}.$$

1.6. ERRONKA. *Zein zenbaki erreal da honako hau?*

$$0,9999999\ldots$$

1.2. Inekuazioak

Hemen oinarrizko gai bat errepasatuko dugu. Ekuazioen kasuan egiten dugun bezala, batzuetan bi espresioren artean zein den handiagoa jakitea interesatzen zaigu. Hori dela eta, inekuazioa honelako adierazpenak dira:

$$A(x) \leq B(x) \qquad \text{edo} \qquad A(x) < B(x).$$

Lehen adierazpenean x aldagaiaren menpeko bi espresio ditugu, A eta B, eta zein x-tarako den $A(x)$ $B(x)$ baino txikiagoa edo berdina jakin nahi dugu. Bigarrenean, aldiz, soilik $A(x)$ $B(x)$ baino txikiagoa den ala ez aztertzen dugu.

Inekuazioak ezabatzeko, ekuazioetan erabil ditzakegun eragiketa batzuk berriro erabiltzea daukagu: bi aldeei zerbait gehitu edo kendu diezaiekegu, inekuazioaren soluzioa aldatu gabe.

Aitzitik, bi aldeak zerbaitez biderkatzean, kontuz ibili: $2 < 3$ da, baina $-2 > -3$ da! Horregatik, inekuazio baten bi aldeak zenbaki positiboaz biderka edo zati daitezke, inekuazioaren soluzioa aldatu gabe. Hala ere, zenbaki negatiboaz biderkatzean edo zatitzean, inekuazioaren norabidea aldatu behar da.

Ildo beretik jarraituz, x-ren menpeko espresioaz inekuazio baten bi aldeak biderkatu nahi izanez gero, bi kasu bereizi behar dira, espresioa positiboa ala negatiboa den.

Beste alde batetik, honako hau dakigu:

- $a > 0$ eta $b > 0$ badira, orduan $a \cdot b > 0$ da.
- $a > 0$ eta $b < 0$ badira, orduan $a \cdot b < 0$ da.
- $a < 0$ eta $b < 0$ badira, orduan $a \cdot b > 0$ da.

Beraz, bi zenbaki errealen arteko biderkadura positiboa izango da, baldin eta soilik baldin bi zenbakiak positiboak edo negatiboak badira.

1.7. ADIBIDEA. Demagun $x^2 - x > 0$ inekuazioaren soluzioak aurkitu nahi ditugula. Ondo pentsatu gabe, x-z zatitzea bururatu lekiguke. Horrela, $x - 1 > 0$ ekuazioa izango genuke. Edonola ere, $x = -2$ ekuazioaren soluzioa dela ikusten da, $x > 1$ betetzen ez duena.

Has gaitezen berriro. $x^2 - x > 0$ inekuazioa $x(x-1) > 0$ bezala berridatzi dezakegu. Orduan, $x(x-1)$ positiboa izan behar denez, x eta $x - 1$ espresioa biak positiboak *edo* negatiboak izan behar dira. Horregatik, inekuazioaren soluzioa honako hau izango da:

$$(x > 0 \text{ eta } x > 1) \quad \text{edo} \quad (x < 0 \text{ eta } x < 1).$$

Baina, $x > 0$ eta $x > 1$ izateak $x > 1$ izan behar dela dakar berekin, eta gauza bera bigarren bikotearekin. Orduan,

$$x > 1 \quad \text{edo} \quad x < 0 \tag{1.1}$$

inekuazioaren soluzioa izango da. Berriro ere, matematikan denbora aurrezteko, ez ditugu *eta* eta *edo* idatziko, eta $\wedge$ eta $\vee$ ikurrak erabiliko ditugu, hurrenez hurren. Hori dela eta, (1.1) inekuazioaren soluzioa honako bi modu hauetan idatziko dugu:

- $(x < 0) \vee (x > 1)$ ala
- $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

1.3. Funtzioak

Jarraian funtzioak sartuko ditugu, kurtsoaren euskarri inportanteak baitira.

1.3.1. Funtzioak eta funtzioen arteko eragiketak.

1.8. DEFINIZIOA. Izan bitez A eta B multzoak (normalean $\mathbb{R}$-ren azpimultzoak izango dira). Orduan, $f : A \to B$ araua *funtzioa* dela esaten da A-ko a elementu bakoitza B-ko $b = f(a)$ elementu **bakar** batekin erlazionatzen bada. Hala bada, A multzoa f-ren *eremua* dela eta B multzoa f-ren *co-eremua* dela esango dugu.

1.9. ADIBIDEA. Har dezagun honako arau hau; $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, non $f(a/b) = a$ den. Hau da, f-k zenbaki arrazional bakoitzari bere zenbakitzailea esleitzen dio. Dena den, zenbaki arrazional baten zenbakitzailea ez da unibokoki definituta. Hain zuzen,

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \dots$$

Horrenbestez, $f(1) = 1 = 2 = 3 = 4 = \dots$ eta f ez da funtzio bat.

Funtzioa definitzeko, hiru osagai behar ditugu: A, B multzoak eta f araua. Adibidez, $f_1 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ eta $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioak, biak $x \mapsto x$ erregelaren bitartez emandakoak, funtzio desberdinak dira, arau berbera jarraitzen duten arren.

NOTAZIOA. Dena dela, askotan $f : A \to B$ funtzioaren definizioa idazten da axolagabe. Esaterako, $f(a)$ ematen duen arauak 0-z zatitzea ekar lezake, $a \in A$ elementurako. Kasu horretan, f-ren eremua **funtzioak zentzua duen multzorik handiena** dela ulertuko dugu.

1.10. ADIBIDEAK.

(i) Izan bedi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ izanik. Orduan, f ez da funtzioa, $1/0$ idazteak ez duelako zentzurik ($x = 0$ harturik). Aitzitik, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ guztietarako, $1/x$ zenbaki erreala da. Hori dela eta, f-ren eremua $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ da.

(ii) Izan bedi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ izanik. Orduan, g-ren eremua $\mathbb{R}_{\geq 0}$ da.

1.11. DEFINIZIOA. Izan bitez $A, B \subseteq \mathbb{R}$ eta $f : A \to B$ funtzioa. Orduan, f funtzioaren *grafikoa* honako planoko azpimultzo hau da:

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}.$$

Grafikoa ikusiz, funtzioen propietate batzuk definitu ditzakegu.

1.12. DEFINIZIOA. Izan bitez $A, B \subseteq \mathbb{R}$ eta $f : A \to B$ funtzioa. Orduan, f *bikoitia* dela esango dugu $f(-x) = f(x)$ bada, $x \in A$ guztietarako. Aldiz, f *bakoitia* dela esango dugu, $f(-x) = -f(x)$ bada, $x \in A$ guztietarako.

1.13. ADIBIDEAK.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ definituta, bikoitia da, $(-x)^2 = x^2$ baita.

(ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ definituta, bakoitia da, $(-x)^3 = -x^3$ baita.

Behin funtzioak definituta, emandako bi funtzioren bidez funtzio berri bat definitzeko eragiketa batzuk ikusiko ditugu.

1.14. DEFINIZIOA (Funtzioen arteko eragiketak). Izan bitez $A, B \subseteq \mathbb{R}$ eta $f, g : A \to B$ funtzioak. Orduan:

- f-ren eta g-ren arteko *batuketa* honako funtzio hau da:

$$\begin{array}{rccc} f+g: & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array}.$$

- f-ren eta g-ren arteko *biderketa* honako funtzio hau da:

$$\begin{array}{rccc} fg: & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & f(x)g(x) \end{array}.$$

1.15. ADIBIDEAK. Izan bitez $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzio errealak, $f(x) = x + 1$ eta $g(x) = x - 1$ izanik. Orduan:

(i) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x + 1) + (x - 1) = 2x$.

(ii) $(fg)(x) = f(x)g(x) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$.

Hau da,

$$f+g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array} \quad \text{eta} \quad fg: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2-1 \end{array}$$

dira.

Kontuan izan funtzioen arteko aurreko eragiketak zenbaki errealen eragiketetan dautzala. Aitzitik, hurrengo definizioak edozein multzotarako balio du.

1.16. DEFINIZIOA. Izan bitez $f : A \to B$ eta $g : B \to C$ funtzioak. Orduan, f-ren eta g-ren arteko *konposizioa* honako funtzio hau da:

$$g \circ f: \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}.$$

Definizioez betetako atal hau azken definizio batekin bukatuko dugu. Zenbaki errealen artean argi dago x zenbaki baten x^{-1} alderantzizkoa zein den; hots, $x^{-1} \cdot x = 1$ betetzen duen zenbakia da. Gauza bera egingo dugu funtzio baten alderantzizkoa definitzean.

1.17. DEFINIZIOA. Izan bitez $f : A \to B$ eta $g : B \to A$ funtzioak. Orduan, g funtzioa f-ren alderantzizkoa dela diogu, baldin eta honako bi baldintzak hauek betetzen badira:

(i) $(g \circ f)(a) = a$, $a \in A$ guztietarako.
(ii) $(f \circ g)(b) = b$, $b \in B$ guztietarako.

1.18. ADIBIDEA. Har ditzagun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, non $f(x) = x + 1$ den, eta $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, non $g(x) = x - 1$ den, funtzioak. Orduan, $x \in \mathbb{R}$ guztietarako,

$$g(f(x)) = g(x+1) = (x+1) - 1 = x \quad \text{eta} \quad f(g(x)) = f(x-1) = (x-1) + 1 = x$$

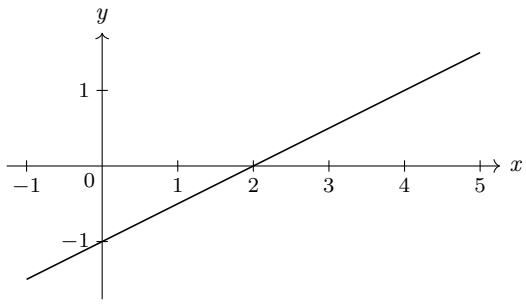
eta g funtzioa f-ren alderantzizkoa da.

1.3.2. Funtzioen adibide nagusiak. Atal honetan kurtsoan zehar agertzen diren funtzioen adibideak batuko ditugu.

1.3.2.1. *Funtzio linealak.* Funtzio linealak $f(x) = ax + b$ modukoak dira, non a eta b zenbaki errealak diren. Bere irudikapena zuzen bat da: a zuzenaren *malda* da. Malda kalkula daiteke

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

eginez.



$y = \frac{1}{2}x - 1$ funtzioaren adierazpen grafikoa.

Beste alde batetik, $f(x) = b$ moduko funtzioa linealak *konstanteak* deitzen dira. Beraien grafikoa marra horizontal bat da.

Bi puntutatik pasatzen den zuzenaren ekuazioa honako hau da: (x_1, y_1) eta (x_2, y_2) puntuak emanda,

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \tag{1.2}$$

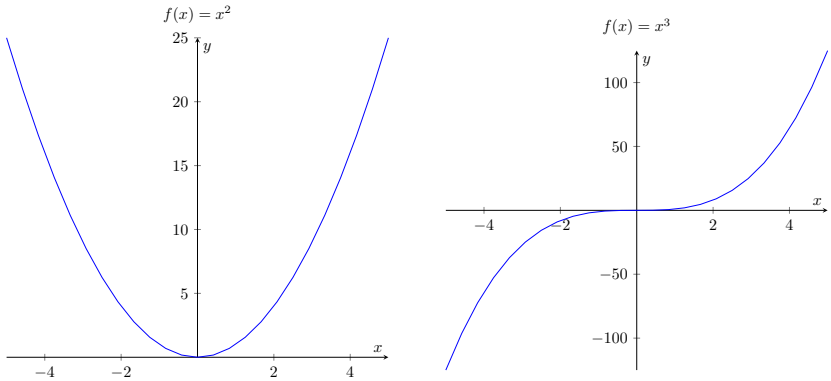
ekuazioa da. Izan ere, $x = x_1$ jarriz, $y = y_1$ dela nabaria da; $x = x_2$ jarriz, aldiz, $y = y_2$ da. Deribatuak definitzen ditugunean, ekuazio hau beharko dugu.

1.3.2.2. *Polinomioak.* Polinomioak era honetako funtzioak dira:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

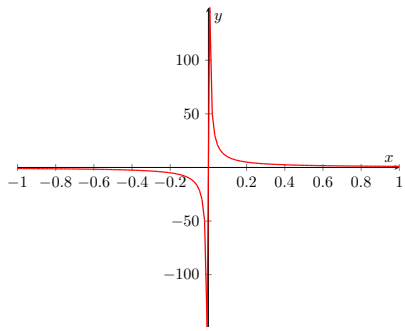
non $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ diren. Adibidez, $f(x) = x^2$ polinomioa da. Gainera, polinomio baten maila goiko formulan agertzen den n zenbakiari polinomioaren *maila* (edo *gradua*) esaten zaio. Esaterako, f-ren maila bat bada, orduan f funtzio lineala da.

Argi dago polinomio baten definizio-eremua $\mathbb{R}$ osoa dela.



Polinomioen grafoen adibideak.

1.3.2.3. *Funtzio arrazionalak.* Funtzio arrazionalak polinomioen arteko zatiketak dira. Eremua $\mathbb{R}$ osoa da, izendatzailea anulatzen duten puntuak salbu. Adibidez, $f(x) = 1/x$ funtzio arrazionala da, eta bere eremua $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ da.



$f(x) = \frac{1}{x}$ funtzio arrazionala.

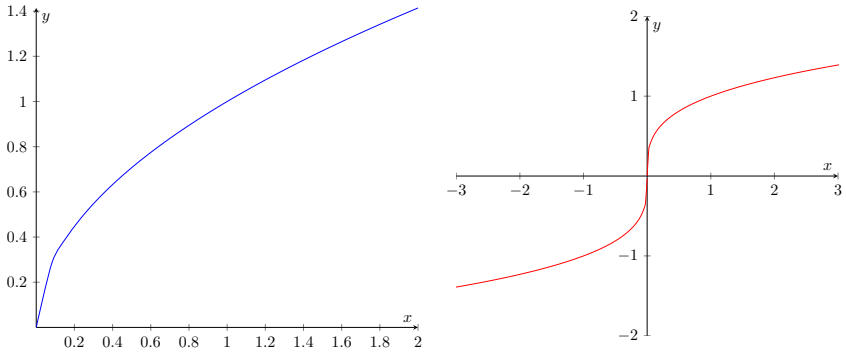
1.3.2.4. *Erroak.* Berreturak polinomioen adibideak dira, eta erroak berreturen alderantzizko funtzioak besterik ez dira. Hala ere, kontuz ibili behar gara, zenbaki bat bere buruarekin aldi kopuru bikoiti batez biderkatu eta gero beti emaitza zenbaki positiboa izango delako. Horrenbestez, x^{2n} funtzioaren alderantzizkoa definituta egongo da soilik $x \geq 0$ denean, eta honako funtzio hauek izango ditugu: $n \in \mathbb{N}$ hartuta,

$$\begin{array}{rccc} \sqrt[2n]{}: & \mathbb{R}_{\geq 0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt[2n]{x} \end{array},$$

non $\sqrt[2n]{x}$ zenbakiak $(\sqrt[n]{x})^{2n} = x$ ekuazioa betetzen duen, eta

$$\begin{array}{rccc} \sqrt[2n+1]{}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt[2n+1]{x} \end{array},$$

non $\sqrt[2n+1]{x}$ zenbakiak $(\sqrt[2n+1]{x})^{2n+1} = x$ ekuazioak betetzen duen. Ohartu, esponentea bakoitia edo bikoitia den, definizio-eremua aldatu egiten dela!



$\sqrt{x}$ eta $\sqrt[3]{x}$ funtzioak.

1.3.2.5. *Oinarrizko funtzio esponentziala.* Funtzio esponentziala

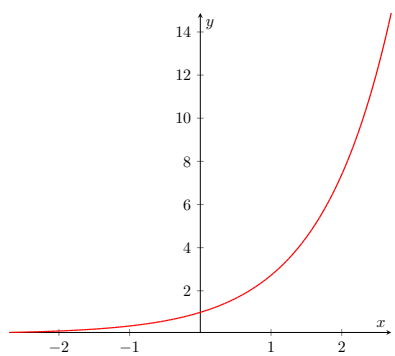
$$\begin{array}{rccc} \exp: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^x \end{array}$$

funtzioa da, non $e \approx 2,718$ den. Eremua $\mathbb{R}$ osoa eta $e^x > 0$ da beti.

Bestetik, gogoratu

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y} \tag{1.3}$$

betetzen dela, $x, y \in \mathbb{R}$ guztietarako.



$f(x) = e^x$ funtzio esponentziala.

1.3.2.6. *Oinarrizko funtzio logaritmikoa.* Logaritmo nepertarra e^x funtzioaren alderantzizkoa da, eta $\ln x$ ikurraz adieraziko dugu. Hau da, $\ln x$ zenbakia honako bi ekuazio hauen soluzioa da:

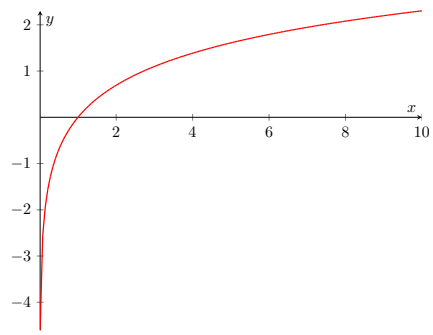
$$\exp(\ln(x)) = x \quad \text{eta} \quad \ln(\exp(x)) = x.$$

Beraz, $e^x > 0$ denez, ln funtzioaren eremua $(0, +\infty)$ tartea da. Bestalde, bi funtzio bata bestearen alderantzizkoak direla jakinez, balio batzuk kalkula ditzakegu. Adibidez, $e^1 = e$ eta $e^0 = 1$ direnez, $\ln(e) = \ln(e^1) = 1$ eta $\ln(1) = \ln(e^0) = 0$ dugu.

Beste alde batetik, $e^x e^y = e^{x+y}$ denez, bi aldeetan ln funtzioa aplikatuz

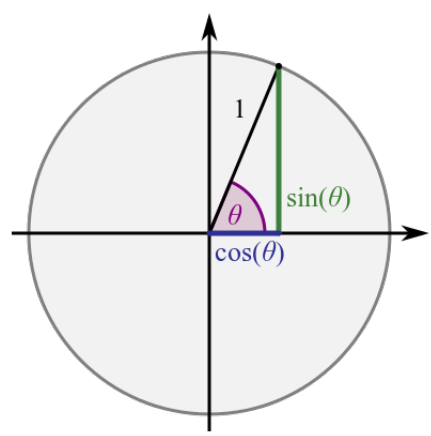
$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

berdintza dugu, $x, y \in \mathbb{R}$ guztietarako.



$f(x) = \ln x$ logaritmo naturala.

1.3.2.7. *Funtzio trigonometrikoak.* Jo dezagun 1 erradioko C zirkulua. Orduan, α angelua emanda, x ardatzarekin α angelua osatzen duen ℓ zuzenerdia marraztu dezakegu. Argi dago ℓ eta C puntu bakar batean elkartzen direla. Puntu horrek $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ koordenatuak dituela idatziko dugu.



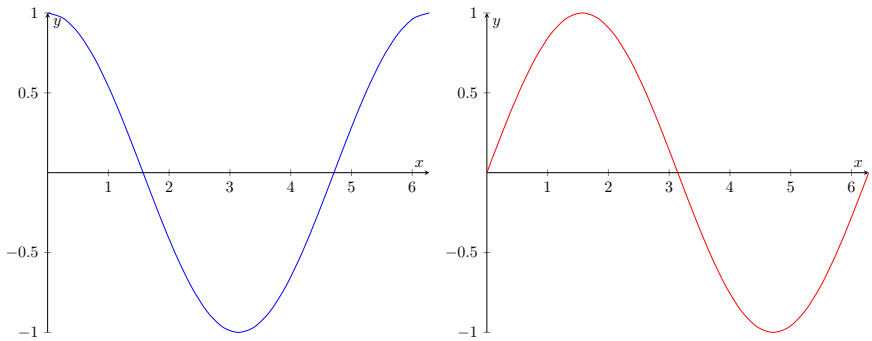
Ohartu $\cos\alpha$ eta $\sin\alpha$ beti $[-1, 1]$ tartean daudela, C zirkuluaren erradioa 1 delako. Bestalde, bira oso batzuk egin eta gero, irudian ezer ez da aldatu; hots, bira osoa 2π biraketa denez,

$$\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha \qquad \text{eta} \qquad \sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha$$

dugu, $k \in \mathbb{Z}$ guztietarako.

Horrela, honako bi funtzio erreal hauek definitu ditugu:

$$\begin{array}{rccc} \cos: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \cos x \end{array} \quad \text{eta} \quad \begin{array}{rccc} \sin: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \sin x \end{array}.$$



$\cos x$ eta $\sin x$ funtzioak.

Definitutako funtzio trigonometrikoek eta zirkuluaren erradioak hiruki zuzena osatzen dutenez, $\cos x$ eta $\sin x$ funtzioek honako oinarrizko ekuazio hau betetzen dute:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1. \tag{1.4}$$

Ildo beretik jarraituz, (1.4) ekuazioak funtzio trigonometrikoen balioak kalkulatzen lagun diezaguke. Adibidez, $x = \pi/4$ bada, irudia begiratuz, argi dago $\cos \pi/4 = \sin \pi/4$ eta $\cos \pi/4, \sin \pi/4 > 0$ direla. Hori eta (1.4) direla eta, $2\cos^2 \pi/4 = 1$ ekuaziotik $\cos \pi/4 = \sin \pi/4 = \sqrt{2}/2$ dela ondorioztatu dezakegu. Hona hemen funtzio trigonometrikoen balio ezagunen laburpena.

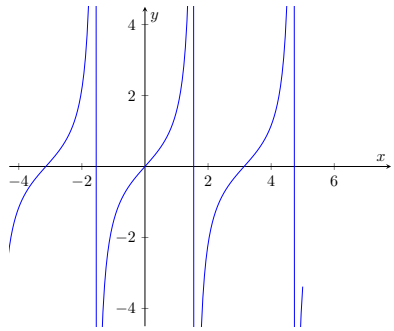
x-ren balioa	$\cos x$	$\sin x$	$\tan x$
0	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	$\nexists$
π	-1	0	0

Funtzio trigonometrikoen balio batzuk

Kurtsoan zehar beste funtzio trigonometriko batzuk erabiliko ditugu, baina horiek cos eta sin funtzioen bitartez defini daitezke.

Lehen funtzioa *tangentea* da:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$



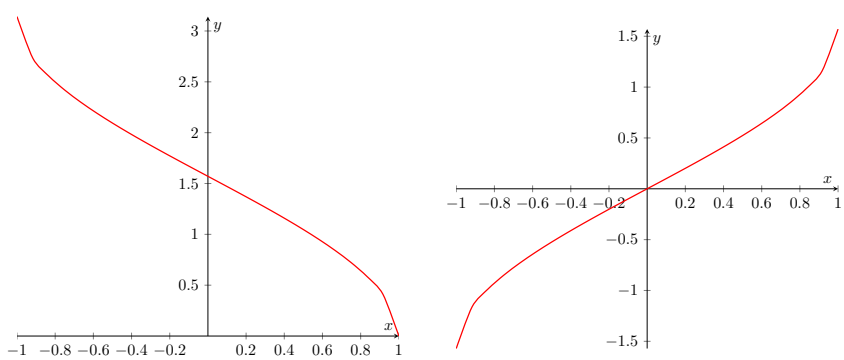
$\tan x$ funtzioa.

Ohartu tan funtzioaren eremua $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ dela, horixek baitira $\cos x = 0$ betetzen duten puntuak.

Adieraztzen ditugun azken funtzio trigonometrikoak arccos, arcsin eta arctan dira. Horiek cos, sin eta tan funtzioen alderantzizko funtzioak dira, hurrenez hurren. Zoritxarrez, cos eta sin funtzioek sarritan balio bera hartzen dute beraien buruekin; adibidez, $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$. Zein izan beharko litzateke $\cos^{-1}(1)$? 0 ala 2π? Horrenbestez, cos funtzioaren alderantzizkoa definitzeko eremua mugatu behar dugu. Hori egin ondoren, honako bi funtzio hauek izango ditugu:

$$\arccos : \quad [-1,1] \quad \longrightarrow \quad [0,\pi] \qquad \text{eta} \qquad \arcsin : \quad [-1,1] \quad \longrightarrow \quad [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

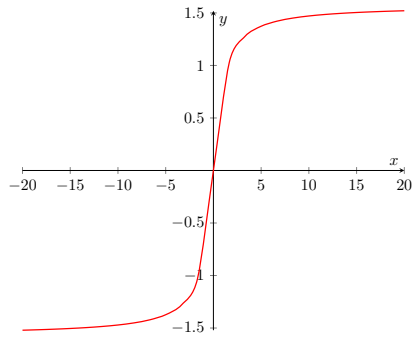
Esaterako, $\arccos(1) = 0$, $\cos 0 = 1$ delako.



$\arccos x$ eta $\arcsin x$ funtzioak.

Bestalde, tan funtzioaren alderantzizkorako,

$$\arctan : \quad \mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$



$\arctan x$ funtzioa.

Atal hau bukatu baino lehen, geroago erabiliko ditugun bi formula emango ditugu. Lehena batuketa baten cos-ren balioari dagokio:

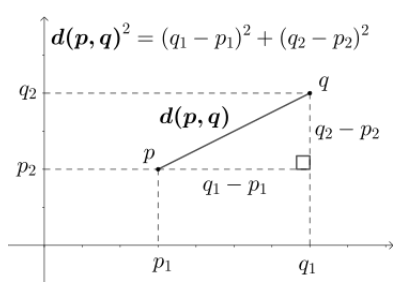
1.19. PROPOSIZIOA. *$x, y \in \mathbb{R}$ guztietarako,*

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y. \tag{1.5}$$

(1.5) ekuazioa frogatu aurretik, gogoratu planoko bi punturen artean distantzia nola kalkulatu: (p_1, p_2) eta (q_1, q_2) puntuen arteko distantzia

$$\sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$$

da, Pitagorasen teorema erabiliz frogatu dezakegun bezala (begiratu irudia).



1.19 PROPOSIZIOAREN FROGAPENA. Hartu α eta β angeluak, eta 1-erradioko zirkuluan adierazi $\alpha + \beta$, β eta $-\alpha$ angeluak. Orduan, $(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$ eta $(1, 0)$ puntuen arteko distantzia karratua $(\cos(\alpha+\beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha+\beta) - 0)^2$ da. Bestalde, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ eta $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, definizioarengatik. Beraz, $(\cos\beta, \sin\beta)$ eta $(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$ puntuen arteko distantzia karratua $(\cos(\beta) - \cos(\alpha))^2 + (\sin(\beta) + \sin(\alpha))^2$ da.

Orain, frogapen honen oharpenik garrantzitsuena egingo dugu: $-\alpha$-ren eta β-ren artean osatutako angelua $\alpha + \beta$-rekin bat dator. Hori dela eta, aipatutako

puntuen arteko distantzia berdina da. Hau da,

$$(\cos(\alpha+\beta)-1)^2+(\sin(\alpha+\beta)-0)^2=(\cos(\beta)-\cos(\alpha))^2+(\sin(\beta)+\sin(\alpha))^2 \Rightarrow$$
$$\underline{\cos(\alpha+\beta)^2}+1-2\cos(\alpha+\beta)+\underline{\sin(\alpha+\beta)^2}=$$
$$\underline{\cos(\beta)^2}+\underline{\cos(\alpha)^2}-2\cos(\beta)\cos(\alpha)+\underline{\sin(\beta)^2}+\underline{\sin(\alpha)^2}+2\sin(\beta)\sin(\alpha)\Rightarrow$$
$$-2\cos(\alpha+\beta)=-2\cos(\beta)\cos(\alpha)+2\sin(\beta)\sin(\alpha).$$

Azpimarratuta daude $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ berdintzaren bitartez elkarrekin sinplifikatzen diren terminoak. Txukundu eta gero, (1.5) berdintza dugu. □

1.20. KOROLARIOA. *$x, y \in \mathbb{R}$ guztietarako,*

$$\begin{aligned}
\cos(x-y) &= \cos x\cos y+\sin x\sin y\\
\sin(x+y) &= \sin x\cos y+\cos x\sin y\\
\sin(x-y) &= \sin x\cos y-\cos x\sin y\\
\sin(2x) &= 2\sin x\cos x\\
\cos(2x) &= \cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1
\end{aligned}$$

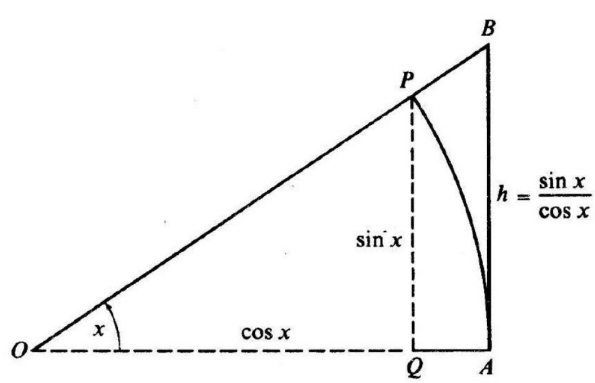
1.21. ERRONKA. *Frogatu 1.20 korolarioa, 1.19 proposizioa eta* $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos(x)$ *identitatea erabiliz.*

Bigarren formula garrantzitsua honako hau da:

1.22. PROPOSIZIOA.

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1, \tag{1.6}$$

FROGAPENA. Proposizioa irudiaren bitartez frogatuko dugu.



Gogoratu hiruki zuzen baten azalera katetoen biderkaduraren erdia dela. Orduan, OPQ hirukiaren azalera $\frac{1}{2}\sin x\cos x$ da. Gero, OPQ eta OBA hirukiak proportzionalak direnez, AB aldearen luzera PQarenarekiko proportzionala da, eta

$$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{AB}{OA}=AB.$$

Hori dela eta, OBA hirukiaren azalera $\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}$ da. Azkenean, OPA eremuaren azalera $\frac{1}{2}x$ da*.

Irudira begiratuz, OPQren azalera OPA eremuaren azalera baino txikiagoa da eta OPAren azalera OBArena baino txikiagoa. Beraz,

$$\frac{1}{2}\sin x\cos x \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Orduan, $\frac{1}{2}\sin x$-z zatituz eta alderantzizkoak hartuz, (1.6) inekuazioak ditugu. □

1.3.2.8. *Balio absolutua.* Zientzia egiten dugunean, askotan zenbaki erreal baten *magnitudea* hartu nahi dugu kontuan; hau da, zenbakiaren handiera zeinurik gabe. Horregatik, honako funtzio hau definituko dugu:

$$\begin{array}{rccc} |\cdot|: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x & x \geq 0 \text{ bada} \\ -x & x < 0 \text{ bada.} \end{cases} \end{array}$$

Adibidez, $|3| = 3$ eta $|-\pi| = \pi$. Beste alde batetik, gogoratu $\sqrt{x^2} = |x|$ dela, zenbaki baten erro karratua beti positiboa delako*.

1.23. PROPOSIZIOA. *Izan bitez a eta b zenbaki errealak. Orduan:*

(i) $|-a| = |a|$.
(ii) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
(iii) $b \neq 0$ *bada,* $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$.

1.24. OHARRA. Aitzitik, $|a+b| = |a| + |b|$ berdintza orokorrean ez da egia: $|2 + (-3)| = 1$, baina $|2| + |-3| = 5$.

---

*Adibidez, $x = 2\pi$ bada, azalera π izango da. Halaber, $x = \pi$ bada, azalera $\pi/2$, eta $x = \pi/4$ bada, azalera $\pi/2$ izango dira, hurrenez hurren.

*Hori hitzarmena baino ez dela azpimarratzea inportantea da. Hain zuzen, $\sqrt{\ }$ funtzioa izan dadila nahi badugu, $x = y^2 = (-y)^2$ betetzen duten bi balioen artean bakarra erabaki behar dugu.

Definizio-eremuak erraz bilatu ditzazuen, honako zerrenda hau emango dugu.

$\sin x \Longrightarrow x \in \mathbb{R}$	$\cos x \Longrightarrow x \in \mathbb{R}$
$\log x \Longrightarrow x > 0$	$e^x \Longrightarrow x \in \mathbb{R}$
$\sqrt[2n]{x},\ n \in \mathbb{N} \Longrightarrow x > 0$	$\sqrt[2n+1]{x},\ n \in \mathbb{N} \Longrightarrow x \in \mathbb{R}$
$\dfrac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$	
$\tan x \Longrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$	$\arctan x \Longrightarrow x \in \mathbb{R}$
$\arccos x \Longrightarrow x \in [-1, 1]$	$\arcsin x \Longrightarrow x \in [-1, 1]$

1.4. Zenbaki konplexuak

Hasteko, ohartu zenbaki errealen multzoa ez dela nahikoa ekuazio polinomiko batzuk ebazteko. Adibidez, ez da existitzen $x \in \mathbb{R}$, non $x^2 = -1$ den. Arazo hau konpontzeko, berriro, zenbaki multzo oraindik handiago bat behar dugu, zenbaki errealak eta haien propietate nagusiak mantentzen dituena.

1.25. DEFINIZIOA. Zenbaki konplexuak $x+yi$ moduko zenbakiak dira, non $x, y \in \mathbb{R}$ diren eta i ikurrak $i^2 = -1$ propietatea betetzen duen zenbakia adierazten duen. Zenbaki konplexuen multzoa honela definituko dugu:

$$\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Bestalde, $z = x + yi$ idazkera z zenbaki konplexuaren adierazpen *binomikoa* edo *kartesiarra* dela esango dugu. Laburki, izen hori nondik datorren azalduko dugu. Zenbaki errealak zuzen horizontal baten puntuekin identifikatzen diren bezala, zenbaki konplexuak planoko puntuekin honako modu honetan identifika daitezke: parte erreala zuzen horizontal batean eta parte irudikaria zuzen bertikal batean jarriz, $x + yi$ zenbakia (x, y) planoko puntuarekin identifikatzen da.

Horrez gain, x z-ren *parte erreala* eta y z-ren *parte irudikaria* direla diogu, eta $x = \Re(z)$, $y = \Im(z)$ idatzi ohi da. Azkenik, i zenbakia *unitate irudikaria* da.

Zenbaki errealetan egin dezakegun bezala, zenbaki konplexuen arteko batuketa eta biderketa defini ditzakegu.

1.26. DEFINIZIOA. Izan bitez $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ bi zenbaki konplexuak. Orduan, batuketa eta biderketa honako modu honetan definitzen dira:

(i) $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i$.
(ii) $z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$.

Era berean, zenbaki konplexu baten alderantzizkoa kalkulatu dezakegu. Gogoratu, zenbaki errealetan adibidez, x elementuaren *alderantzizkoa* y beste elementu bat dela, non $x \cdot y = 1$ betetzen den.

1.27. PROPOSIZIOA. *Izan bedi $z = x + yi$ zenbaki konplexua. Orduan, alderantzizkoak honako adierazpen hau dauka:*

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i. \tag{1.7}$$

FROGAPENA. Izan bedi w (1.7) ekuazioan agertzen den zenbakia. Bakarrik egiaztatu behar dugu $z \cdot w = 1$ dela. Horrela,

$$z \cdot w = (x + yi) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i \right) \underset{1.26 \text{ Def.}}{=}$$
$$= x \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} - y \cdot \frac{-y}{x^2 + y^2} + \left(x \cdot \frac{-y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot y \right) i = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} + 0i = 1$$

dugu, frogatu nahi dugun bezala. □

1.28. ADIBIDEA. Har dezagun $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ zenbaki konplexua. Lehenik, 1.27 proposizioaren arabera $\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 1$ dela kalkulatu, eta, ondorioz,

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} - i\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

dugu.

1.29. DEFINIZIOA. Izan bedi $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Orduan, z-ren *konjugatua* honela definitzen da:

$$\overline{z} = x - yi.$$

1.30. DEFINIZIOA. Izan bedi $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Orduan, z-ren *modulua* jatorria eta z puntua lotzen dituen zuzenkiaren luzera da, eta $|z|$ ikurraren bidez adierazten da. Formuletan:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Izan bedi $z = x+yi \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Orduan, z-ren *argumentu nagusia* da jatorria eta z puntua lotzen dituen zuzenak ardatz erreal positiboarekin osatzen duen angelua eta $\arg z$ ikurraz adieraziko dugu.

Ohartu $\arg z$ argumentua $(-\pi, \pi]$ tartean dagoela. Frogatu gabe utziko dugu $\arg z$ kalkulatzeko honako proposizio garrantzitsu hau.

1.31. PROPOSIZIOA. *Izan bedi $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Orduan,*

$$\arg z = \begin{cases} 2\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}\right), & y \neq 0 \text{ bada} \\ 0, & y = 0 \text{ eta } x > 0 \text{ badira} \\ \pi, & y = 0 \text{ eta } x < 0 \text{ badira} \end{cases}.$$

Har dezagun $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Orduan, irudian ikus dezakegun moduan, zenbaki konplexu bakoitza bere moduluaz eta argumentuaz finkatuta dago. Gainera, θ angelua finkatuz gero, x ardatzarekin θ angelua osatzen duen zuzenerdiak 1-erradioko zirkuluarekin ebaki-puntu bakarra du, $(\cos\theta, \sin\theta)$ koordenatuak dituena, eta puntu horrek $\cos\theta + i\sin\theta$ zenbaki konplexua adierazten du. Beraz, $|z| = r$ eta $\theta = \arg(z)$ z-ren modulua eta argumentua badira, hurrenez hurren, orduan z-ren *adierazpen polarra* honako idazkera hau da:

$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right).$$

Ohikoa den moduan, aurreko ekuazioaren eskuinaldea $e^{i\theta}$ idatziko dugu, eta, $z \in \mathbb{C}$ guztietarako, honela idatz dezakegu:

$$z = |z|e^{i\arg(z)}.$$

Nahiz eta esponentziala bezala idatzi, $e^{i\theta}$ notaziotzat hartuko dugu. Hala ere, notazioa bidezkotzeko, honako proposizio hau frogatuko dugu.

1.32. LEMA. *Izan bitez $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zenbaki errealak. Orduan,*

$$e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}.$$

FROGAPENA. Definizioetatik abiatuko gara:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,\ e^{iy} = \cos y + i \sin y \text{ eta } e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i \sin(x+y).$$

Beraz,

$$\begin{aligned} e^{ix} \cdot e^{iy} = (\cos x + i \sin x) \cdot (\cos y + i \sin y) = \\ = (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y). \end{aligned}$$

Bestalde, $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ eta $\sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$ dira, eta bi aldeak bat datoz. □

Beste alde batetik, zenbaki konplexuen berreturak kalkulatzean, Eulerren formula erabiltzeak gure bizitza biziki errazten duela azalduko dugu orain.

1.33. PROPOSIZIOA. *Izan bitez $z = re^{i\theta}, w = se^{i\phi}$ bi zenbaki konplexuak, adierazpen polarrean idatzita. Orduan:*

(i) $zw = rse^{i(\theta+\phi)}$.
(ii) $z^n = r^n e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$ *guztietarako.*
(iii) $z/w = \frac{r}{s} e^{i(\theta-\phi)}$

FROGAPENA. 1.32 lematik zuzenean jarraitu dezakegu. □

1.34. ADIBIDEA. Har dezagun $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ zenbaki konplexua. Bi eratan z^4 kalkulatuko dugu.

- Lehenik, zenbaki konplexuen arteko biderkaduraren definizioa baino ez dugu erabiliko. Kontuan izanez $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$ dela, kalkulatu:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\right)^2 = i^2 = -1. \end{aligned}$$

- Bigarrenik, koordenatu polarrak erabiliko ditugu. Hori egin baino lehen, z-ren modulua eta argumentua kalkulatu behar ditugu:

$$\left|\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$

  eta

$$\arg(z) = \arctan\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) / \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

  Beraz, 1.33 proposizioaren ondorioz,

$$z^4 = |z|^4 e^{i4\theta} = 1^4 e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1.$$

Atal hau bukatzeko, moduluaren eta argumentuaren propietate ugari emango ditugu. Kontuan izan hurrengo propietateak baliagarriak izan daitezkeela zenbaki konplexuen arteko eragiketak egiteko momentuan. Moduluarekin hasiko gara.

1.35. PROPOSIZIOA. *Izan bitez $z, w \in \mathbb{C}$ zenbaki konplexu. Orduan:*

(i) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
(ii) $z\overline{z} = |z|^2$. *Beraz,* $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, $z \neq 0$ *bada.*
(iii) $|z| = |-z| = |\overline{z}|$.
(iv) $|\Re(z)| \leq |z|$, $|\Im(z)| \leq |z|$ *eta* $|\Re(z)| + |\Im(z)| \leq |z|$.
(v) $|zw| = |z||w|$.
(vi) $|z + w| \leq |z| + |w|$.
(vii) $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

Frogapena. Baieztapen guztiak erraz jarraitu ditzakegu definizioetatik.

Adibidez, lehen puntua frogatzeko, argi dago $|0| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$ dela. Beste aldetik, $z = x + iy$ idatziz, gogoratu $|z|^2 = x^2 + y^2$ dela. Baina, $x^2, y^2 \geq 0$ direnez, $x \neq 0$ bada, $|z|^2 = x^2 + y^2 > 0$ izango da, eta $|z| > 0$ dela ondoriozta dezakegu. Gauza bera $y \neq 0$ bada. Hori dela eta, $|z| = 0$ bada, $x = y = 0$ izan behar dira; hau da, $z = 0$ izan behar da. □

Eta orain argumentuaren propietate batzuk azalduko ditugu.

1.36. proposizioa. *Izan bedi* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *zenbaki konplexu ez-nulua. Orduan:*
(i) $\arg(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+$ *(hau da,* $z = x$, $x > 0$ *izanik).*
(ii) $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$.
(iii) $\arg(z^{-1}) = -\arg(z)$.

Frogapena. Propietate horiek begi-bistakoak dira, irudia begiratutakoan. □

1. ATALAREN ARIKETAK

1.1 ariketa. Askatu desberdintza hauek:

(a) $2 + 3x < 5$	(b) $3x - 2 \leq 1 + 6x$	(d) $x^2 - 1 < 0$
(e) $x(x-1)(x-2) > 0$	(f) $x^3 - 2x^2 + x \geq 0$	(g) $1 - 3x^2 < \frac{1}{2}(2 - x^2)$
(h) $\dfrac{x}{x-5} > \dfrac{1}{4}$	(i) $\dfrac{1}{x} < x$	(j) $x + \dfrac{1}{x} \geq 1$
(k) $\dfrac{x}{x-5} \geq 0$	(l) $\dfrac{3x^2+1}{1-x^2} < 0$	(m) $\dfrac{1}{3x-5} < 2$
(n) $\dfrac{x+2}{1-x} > 1$	(o) $x(2x-1)(3x-5) \leq 0$	(p) $x^2 + 9x + 20 > 0$
(r) $3x + 5 > \frac{1}{4}(x-2)$	(s) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} > 0$	(t) $5 - x^2 < -2$

1.2 ariketa. Izan bitez a eta b bi zenbaki erreal positiboak. Frogatu, $a^2 \leq b^2$ bada, orduan $a \leq b$ dela. (*Argibidea:* $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$, berdintza hau erabiliz askatu $b^2 - a^2 \geq 0$.)

1.3 ariketa. Frogatu, $0 \leq a \leq b$ bada, orduan

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} \text{ dela.}$$

1.4 ariketa. (i) Biz $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Kalkulatu: $f(f(x)), f(\frac{1}{x}), f(ax), f(x+y)$ eta $f(x)+f(y)$. Eman $f(x) = f(ax)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ betetzen duten a-ren balio guztiak.

(ii) Izan bitez $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$ eta $g(x) = \begin{cases} -x, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$ funtzioak. Kalkula itzazu $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $f \circ g$ eta $g \circ f$.

1.5 ariketa. Funtzio hauetatik esan zein den bakoitia eta zein bikoitia:

(a) $f(x) = x^3$ (b) $f(x) = x^2$ (d) $f(x) = x(x^2+1)$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2}{1-|x|}$ (f) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ (g) $f(x) = ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

1.6 ariketa. Zer esan daiteke bi funtzio bakoitiren biderketari buruz? Eta biak bikoitiak badira? Eta bat bakoitia eta bestea bikoitia bada? Galdera berdinak konposaketarentzat.

1.7 ariketa. Eman $f \circ g$ eta $g \circ f$ honako kasu hauetan:

(a) $f(x) = 2x+5,\ g(x) = x^2$ $(b) f(x) = \dfrac{1}{x},\ g(x) = \dfrac{1}{x}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1},\ g(x) = (x^2+1)^2$ (e) $f(x) = x^2+x,\ g(x) = \sqrt{x}$

1.8 ariketa. Eman $f \circ g \circ h$, $g \circ f \circ h$ eta $h \circ f \circ g$:

(a) $f(x) = 4x$, $g(x) = x-1$, $h(x) = x^2$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{2x+1}$, $h(x) = x^2$.

(c) $f(x) = x-1$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 4x$.

1.9 ariketa. Eman $f \circ g = F$ betetzen duen f funtzio bat honako kasu hauetan:

(a) $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x},\ F(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ (b) $g(x) = -x^2,\ F(x) = \sqrt{a^2-x^2}$

1.10 ariketa. Eman $f \circ g = F$ betetzen duen g funtzio bat honako kasu hauetan:

(a) $f(x) = x^2$, $F(x) = \left(1 - \frac{1}{x^4}\right)^2$.

(b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $F(x) = a^2x^2 + \dfrac{1}{a^2x^2}$.

(c) $f(x) = x^2+1$, $F(x) = (2x^3-1)^2+1$.

1.11 ariketa. $f(x-1)=x^2$ bada, zenbat balio du $f(x+1)$ funtzioak?

1.12 ariketa. Eman, ahal bada, honako funtzio hauen alderantzizkoa:

(a) $f(x)=2x+5$ (b) $f(x)=\arctan 3x$ (d) $f(x)=\begin{cases} x, & x\leq 0 \\ x^2, & x>0 \end{cases}$

(e) $f(x)=3x-1$ (f) $f(x)=\ln(3x+1)$

1.13 ariketa. Askatu inekuazio hauek:

(a) $|x|<2$ (b) $|3x-5|<3$ (d) $|x^2-1|<1$

(e) $|x^2-16|>9$ (f) $0<|x-2|<8$ (g) $|x^2-4|\geq 3$

(h) $|x^2-4|<5$ (i) $0<|x-\frac{1}{2}|<2$ (j) $|x^2-4x+1|>1$

(k) $|x-1|<|x+1|$ (l) $|x+1|>2$ (m) $|x-1|+|x-2|>1$

1.14 ariketa. Eman funtzio hauen definizio-eremua:

(a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ (b) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

(d) $f(x)=\dfrac{1}{4-x^2}$ (e) $f(x)=\sqrt{1-x}-1$

(f) $f(x)=|\ln|x||$ (g) $f(x)=\ln\dfrac{2+x}{2-x}$

(h) $f(x)=\ln(|x^2-2x+1|-3)$ (i) $f(x)=e^{\frac{3x-5}{4x-7}}$

(j) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{|x-1|-3}{x^2-5}}$ (k) $f(x)=\ln\left(\dfrac{|x-1|}{|3x-5|-2}\right)$

(l) $f(x)=\ln(x^2-4)$ (m) $f(x)=\ln(x+2)+ln(x-2)$

(n) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(1-|x^2-x-1|)^3}}$ (o) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{5-|x^2-8|-1}\right)$

(p) $f(x)=\sqrt{x}-1$ (r) $f(x)=\sqrt{|x-2|-8}$

(s) $f(x)=\ln(|2x-1|+|2x-2|-1)$ (t) $f(x)=\dfrac{1}{x}+2^{\arcsin x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

(u) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$ (v) $f(x)=\sqrt{\dfrac{|x-1|-3}{x^2-5}}$

(x) $f(x)=\arcsin\left(\dfrac{x^2-2}{|x|}\right)$ $(z)f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{|x-1|-3}{x^2-5}}$

1.15 ariketa. Kalkulatu eragiketa hauen emaitzak:

$$(a)\ (\sqrt{2}-i)(-i(1-\sqrt{2}i)), \quad (b)\ (2-3i)(-2+i),$$

$$(c)\ (3+i)(3-i)(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}i), \quad (d)\ \frac{1+2i}{3-4i}+\frac{2-i}{5i},$$

$$(e)\ \frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)}, \qquad (f)\ (1-i)^4.$$

1.16 ariketa. Kalkulatu

$$(-1+i)^7 \qquad \text{eta} \qquad (1+\sqrt{3}i)^{10},$$

zenbakien adierazpen polarra erabiliz.

2

Limiteak eta jarraitutasuna

Infiniturantz eta harago

Buzz Lightyear

Fisikan eta ingeniaritzan naturalki agertzen diren funtzio guztiek propietate bat partekatzen dute: *jarraitutasuna*. Jarraitutasuna definitzeko, funtzio baten aldaketa infinitesimoez hitz egiteko gai izan behar gara, eta, hori egiteko, *limiteak* sartuko ditugu.

2.1. Limiteak

Izan bedi $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioa. Limiteei buruz aritzean, x_0 puntuaren inguruan f funtzioa nola portatzen den aztertzea interesatzen zaigu.

NOTAZIOA. Kurtso honetan, ε ikurraz kantitate positibo txiki-txikia adieraziko dugu, $\varepsilon \approx 0$ betetzen duena. Badago notazio hau formalki definitzeko modua, *infinitesimoak erabiliz* hain zuzen; baina kurtso honetan erabilera ≪intuitiboarekin≫ bakarrik arituko gara, eta notazio honen propietate nagusiak zerrendatuko ditugu segidan: $x \in \mathbb{R}$ emanda

(i) $x + \varepsilon \approx x$,
(ii) $x \cdot \varepsilon \approx 0$,
(iii) $x \neq 0$ bada, $\varepsilon/x \approx 0$,
(iv) $x/\varepsilon \approx +\infty$.

2.1. DEFINIZIOA. Izan bitez $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioa, $x_0 \in (a, b)$ eta $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ zenbaki erreala edo infinitua. Orduan, x_0 puntuan f funtzioaren *limitea* ℓ dela esango dugu, baldin eta $f(x_0 \pm \varepsilon) \approx \ell$ bada ε zenbaki positibo txiki-txiki guztietarako. Horrela bada, honako hau idatziko dugu:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

Beste alde batetik, x_0 puntuan f funtzioaren *ezkerreko limitea* ℓ dela esango dugu, baldin eta $f(x_0 + \varepsilon) \approx \ell$ bada ε zenbaki positibo txiki-txiki guztietarako. Horrela bada, honako hau idatziko dugu:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell.$$

Azkenik, x_0 puntuan f funtzioaren *eskuinaldeko limitea* ℓ dela esango dugu, baldin eta $f(x_0 - \varepsilon) \approx \ell$ bada ε zenbaki positibo txiki-txiki guztietarako. Horrela bada, hurrengoa idatziko dugu

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell.$$

Ezkerraldeko eta eskuinaldeko limiteei *alboko limite* ere deitzen zaie.

Definiziotik argi dago f-ren limitea ℓ dela, baldin eta soilik baldin f-ren eskuinaldeko *eta* ezkerraldeko limiteak ℓ badira.

2.2. ADIBIDEAK.

(i) Lehenik, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioa, $f(x) = x$ definituta, kontuan hartuko dugu. Ikus dezagun $\lim_{x \to a} x = a$ dela: ε txikia bada; orduan

$$f(a \pm \varepsilon) = a \pm \varepsilon \approx a,$$

nahi dugun bezala.

(ii) Ezkerraldeko eta eskuinaldeko limiteek ez dute zertan bat etorri: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontuan hartzen badugu, $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$ definituta, orduan

$$f(0+\varepsilon) = (0+\varepsilon) + 1 \approx +1 \quad \text{eta} \quad f(0-\varepsilon) = (0-\varepsilon) - 1 \approx -1.$$

Ohartu alboko limiteak desberdinak direla, $0 + \varepsilon > 0$ eta $0 - \varepsilon < 0$ direlako. Hori dela eta, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ eta $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +1$ dira.

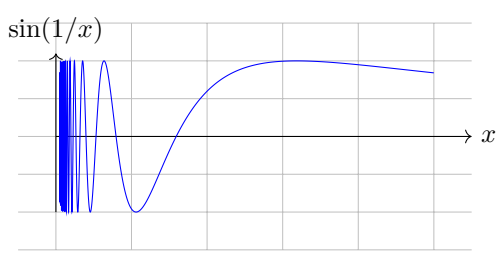
(iii) Orain, limite infinitu bat: $f(x) = 1/x$ hartuta, $\lim_{x \to 0^+} 1/x = +\infty$ dela adieraziko dugu. Izan ere,

$$\frac{1}{0+\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \approx +\infty.$$

2.3. ADIBIDEA. Batzuetan limiteak ez dira existitzen, definizioa ezin baita bete. Hartu $f(x) = \sin(1/x)$ funtzioa, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ multzoan definituta. Orduan, $\lim_{x \to 0} f(x)$ ez da existitzen. Izan ere, $\ell \in [-1, 1]$ tartean aukeratuz gero, $a_0(l) = \arcsin(l)$ jarriz $\sin(a_0(l)) = l$ dela dugu. Beraz, $n \in$ guztietarako

$$a_n(l) = \frac{1}{a_0(l) + 2\pi n}$$

definituz, argi dago $\lim_{n \to \infty} a_n(l) = 0$ eta $\sin(a_n(l)) = l$ direla. Hau da, $\sin(1/a_n(l)) \approx l$. Halaber, $l \neq l' \in [-1, 1]$ hartzen badugu, $\sin(1/a_n(l')) \approx l'$ eta $\lim_{x \to 0} \sin(1/x)$ ezin da existitu.



2.4. DEFINIZIOA. Izan bitez $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioa, non f $\mathbb{R}$ osoan definituta dagoen, eta $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ zenbaki erreala edo infinitua. Orduan, f funtzioaren $+\infty$-*ranzko limitea* ℓ dela esango dugu, baldin eta $f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \approx \ell$ bada ε zenbaki positibo txiki-txiki guztietarako. Horrela bada, honako hau idatziko dugu:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

Bestalde, f funtzioaren $-\infty$-*ranzko limitea* ℓ dela esango dugu, baldin eta $f\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) \approx \ell$ bada ε zenbaki positibo txiki-txiki guztietarako. Horrela bada, honako hau idatziko dugu:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell.$$

2.5. ADIBIDEAK.

(i) Har dezagun $f(x) = 1/x$ funtzioa. Orduan, $\lim_{x\to+\infty} 1/x = 0$. Izan ere,

$$\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon \approx 0.$$

(ii) Demagun $f(x) = x - 10000$ dela. Orduan, $\lim_{x\to\infty} x - 10000 = +\infty$. Hain zuzen,

$$f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon} - 10000 = \frac{1 - 10000\varepsilon}{\varepsilon} \approx \frac{1}{\varepsilon} \approx +\infty.$$

Limiteak definitu eta gero, limiteak kalkulatzeko tresna nagusia sartuko dugu, limiteen arteko eragiketak nola egin esaten diguna.

2.6. TEOREMA. *Izan bitez $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funtzioak eta $x_0 \in (a, b)$, non*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R} \quad \textit{eta} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) \in \mathbb{R} \textit{ finituak diren.}$$

Orduan:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x).$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x).$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ *bada,* $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}.$

Frogapena ikusi baino lehen, ohartu limiteak finituak izatea beharrezkoa dela teoremaren emaitza egia izateko, honako adibide honek erakusten digun bezala.

2.7. ADIBIDEA. Izan bitez $f(x) = 1/x$ eta $g(x) = x$ funtzioak. Orduan, $\lim_{x\to 0} 1/x$ ez da existitzen, baina $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot x = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$

FROGAPENA. Lehen puntuaren frogapena bakarrik emango dugu, besteak oso antzekoak direla eta. Badakigu, definizioarengatik, $f(x_0 + \varepsilon) \approx \ell$ eta $g(x_0 + \varepsilon) \approx m$, non $\ell, m \in \mathbb{R}$ diren. Horregatik,

$$(f + g)(x_0 + \varepsilon) = f(x_0 + \varepsilon) + g(x_0 + \varepsilon) \approx \ell + m.$$

Ohartu bi funtzioen batuketaren definizioa erabili dugula (cfr. 1.14 definizioa). □

Edonola ere, limiteak kalkulatzean gauza arraroak gerta daitezke; adibidez, zenbatekoak dira

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \quad \text{eta} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x ?$$

Horrelakoak forma indeterminatuak deitzen dira eta honako forma honetakoak izan daitezke:

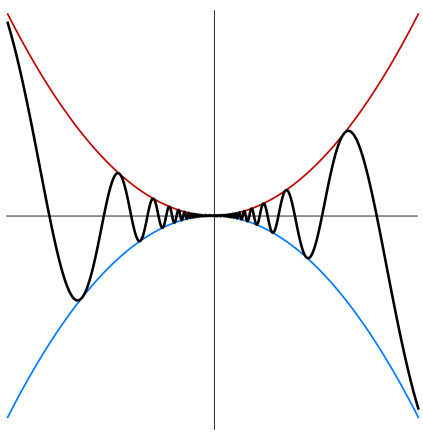
$$\frac{\infty}{\infty},\quad \frac{0}{0},\quad \infty-\infty,\quad 0\cdot\infty,\quad 1^\infty,\quad \infty^0,\quad 0^0$$

Zein terminok irabaziko duen argi ez dakusagunez, beste metodo bat asmatu behar dugu horrelako egoerak sinplifikatzeko. Horien arteko metodorik garrantzitsuenetako bat *ogitartekoaren teorema* da.

2.8. TEOREMA (Ogitartekoaren erregela). *Izan bitez $f, g, h : (a, b) \to \mathbb{R}$ funtzioak eta $x_0 \in (a, b)$. Demagun $f(x) \le h(x) \le g(x)$ betetzen dela x_0-ren inguru batean eta*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell \qquad \textit{dela.}$$

Orduan, $\lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$ *da.*



FROGAPENA. Badakigu $f(x_0+\varepsilon) \approx g(x_0+\varepsilon) \approx \ell$ direla. Beraz,

$$h(x_0+\varepsilon) - \ell \ge f(x_0+\varepsilon) - \ell \approx 0$$

eta, momentu berean,

$$h(x_0+\varepsilon) - \ell \le g(x_0+\varepsilon) - \ell \approx 0.$$

Orduan, $h(x_0+\varepsilon) - \ell \approx 0$ da, nahi dugun bezala. □

2.9. ADIBIDEA. Adibide honetan $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ dela adieraziko dugu. Har ditzagun $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2$ eta $h(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ funtzioak. Dakigunez, $-1 \le \sin(1/x) \le 1$ da, eta, ondorioz,

$$-x^2 \le x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2$$

dela dugu. Alde berean,

$$\lim_{x\to 0} -x^2 = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

denez, ogitartekoaren erregela aplika dezakegu nahi dugun emaitza ondorioztatzeko.

Orain, ogitartekoaren erregelaren beste aplikazio bat emango dugu, 1. ataleko emaitzak erabiliz.

2.10. ADIBIDEA. Froga dezagun $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ dela.

(i) Lehenik, $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$ dela frogatuko dugu. Izan ere, irudia begiratuz, $0 \leq \sin x \leq x$ dela argi dago, x txikia eta positiboa denean. Orduan, $\lim_{x\to 0} 0 = \lim_{x\to 0} x = 0$ direnez, ogitartekoaren erregelak emaitza ematen digu.

(ii) Bigarrenik, $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ eta $\sin\varepsilon \approx 0$ direnez, badakigu

$$\cos(\varepsilon) = \sqrt{1-\sin^2(\varepsilon)} \approx 1 \text{ dela,}$$

eta $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ da.

(iii) Azkenik, 1.6 ekuazioaren arabera, $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ da, x aldagaia 0-ren inguruan ibiltzen denean. Hori dela eta, $\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0} 1 = 1$ direnez, ogitartekoaren erregelak emaitza ematen digu.

Ohar bedi $\frac{\sin x}{x}$ funtzioa ez dagoela $x = 0$ puntuan definituta, baina funtzioaren 0-rantzko limiteari buruz hitz egin dezakegu.

Limiteak, funtzioen joera infinitesimala aztertzen laguntzeaz gain, funtzio berriak definitzeko ere erabil daitezke. Hain zuzen ere, laster *funtzio esponentziala* berriro definituko dugu.

2.11. ADIBIDEA. Adibide honen helburua da $e^{\sqrt{2}}$ bezalako adierazpenak definitzea. Argi dago, $n \in \mathbb{N}$ emanda,

$$e^m = \underbrace{e \cdots e}_{m \text{ aldiz}}$$

dela. Bestetik, $n \in \mathbb{N}$ bada, $e^{\frac{1}{n}}$ idazkera n-garren erroa baino ez da. Horregatik, $e^{\frac{m}{n}}$ balioa $(e^m)^{\frac{1}{n}}$ bitartez defini dezakegu.

Orduan, e^x definitu dugu, x zenbaki arrazionala denean. Dena den, zenbaki erreal guztiak zenbaki arrazionalen limiteak dira: $x = a_0, a_1a_2\ldots$ bada, orduan,

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{a_0a_1a_2\ldots a_n}{10^n}$$

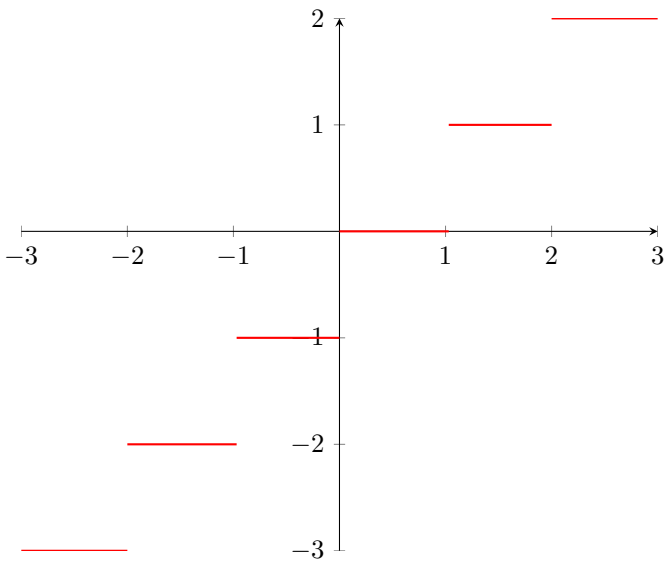
da, eta e^x honako modu honetan definituko dugu:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{a_0a_1a_2\ldots a_n}{10^n}}.$$

Bestalde, antzeko eran $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ berdintza betetzen dela egiazta dezakegu, 2.6 teorema erabiliz.

2.2. Jarraitutasuna

Denok buruan funtzio jarraitua zer den ideia izaten omen dugu. Adibidez, honako funtzio hau nabarmenki ez da jarraitua.



Hain zuzen, esaterako, 1 puntuaren inguruan funtzioak *saltoa* egiten du. Hala eta guztiz ere, matematikan definizioen bitartez baino ez da lan egin.

2.12. DEFINIZIOA. Izan bitez $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ funtzioa eta $x_0 \in (a, b)$ puntua. Orduan, f funtzioa x_0 puntuan *jarraitua* dela esango dugu, baldin eta

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{bada.}$$

Lehenik, funtzio jarraitu batzuen adibideak ikusiko ditugu.

2.13. ADIBIDEAK. Hemen funtzio jarraituen adibide batzuk batuko ditugu.

(i) Har dezagun $f(x) = x$ funtzioa. Orduan, $x_0 \in \mathbb{R}$ guztietarako, $f(x) = x$ funtzioa x_0 puntuan jarraitua dela erakutsiko dugu. Izan ere,

$$f(x_0 \pm \varepsilon) = x_0 \pm \varepsilon \approx x_0 \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} x = x_0.$$

(ii) Izan bedi $f(x) = e^x$ funtzio esponentziala. Orduan, sin eta cos funtzioen kasuan egin dugun bezala, $e^x \geq 1 + x$ dela froga genezake, $x \in \mathbb{R}$ guztietarako. Hori dela eta, $e^{-x} \geq 1 - x$ da. Beraz, $x < 1$ denean, $e^x \cdot e^{-x} = 1$ denez, $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ dela dugu. Horrenbestez, $x < 1$ denean honako hau idatz dezakegu:

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1 - x} \tag{2.1}$$

eta, ogitartekoaren erregela erabiliz, $\lim_{x \to 0} e^x = 1$ dela froga dezakegu. Azkenik, $x_0 \in \mathbb{R}$ guztietarako,

$$e^{x_0 \pm \varepsilon} = e^{x_0} \cdot e^{\pm \varepsilon} \approx e^{x_0}$$

eta e^x jarraitua da $\mathbb{R}$ osoa.

(iii) Bestalde, $\sin x$ eta $\cos x$ funtzioak jarraituak direla $\mathbb{R}$-n frogatuko dugu. Izan ere, 2.10 adibidetik,

$$\cos(x+\varepsilon) = \cos x \cos \varepsilon - \sin x \sin \varepsilon \approx \cos x \cdot 1 - \sin x \cdot 0 = \cos x$$

dela dugu. $\cos(x-\varepsilon)$ espresiorako frogapena antzekoa da. Azkenik, $\sin x$ funtziorako frogapena guztiz berdina da.

Gero, funtzio jarraituak emanda, funtzio jarraitu berriak sortzea ondo letorkiguke. Zorte ona dugu, funtzio jarraituen arteko ohiko eragiketek beti funtzio jarraituak ematen dizkigulako.

2.14. TEOREMA. *Izan bitez f eta g funtzioak, x_0 puntuan jarraituak. Orduan:*

(i) *$f+g$ funtzioa x_0 puntuan jarraitua da.*
(ii) *$f \cdot g$ funtzioa x_0 puntuan jarraitua da.*
(iii) *Baldin eta $g(x_0) \neq 0$ bada, orduan $\frac{f}{g}$ funtzioa x_0 puntuan jarraitua da.*

FROGAPENA. Aplika bekie 2.6 teorema f-ri eta g-ri, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ eta $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$ betetzen direla kontuan hartuta. □

Aurreko emaitza oso garrantzitsua da. Esaterako, polinomio guztiak jarraituak direla esaten digu, polinomioak konstanteen eta x-ren berreturen baturak eta biderkadurak baitira.

Atal hau bi funtzioen konposaketaren limitea aztertuz bukatuko dugu.

2.15. TEOREMA. *Izan bitez $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eta $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ funtzio errealak, $x_0 \in (c,d)$ eta $g(x_0) \in (a,b)$, non f funtzioa $g(x_0)$ puntuan jarraitua eta $\lim_{x\to x_0} g(x) = B \in (a,b)$ diren. Orduan,*

$$\lim_{x\to x_0} (f \circ g)(x) = f(B)$$

da.

2.3. Funtzio jarraituen teorema nagusiak

Honako teorema hau Analisi Matematikoaren euskarri garrantzitsua da, bertatik teorema ugari ondoriozta daitezkeelako.

2.16. TEOREMA (Bolzanoren teorema). *Izan bedi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funtzioa, $[a,b]$ tarte itxian jarraitua, eta demagun $f(a) \cdot f(b) < 0$ dela. Orduan, $c \in (a,b)$ existitzen da, non $f(c) = 0$ den.*

FROGAPENA. Frogapenaren ideia nagusia algoritmo bat deskribatuz emango dugu. Orokortasuna galdu gabe, $f(a) < 0$ eta $f(b) > 0$ direla suposa dezakegu.

ALGORITMOA. Hartu $a_1 = a$ eta $b_1 = b$ puntuak. Orain, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako a_n, b_n eta c_n hiru puntu berriak definituko ditugu.

Demagun a_n, b_n definituta daudela, non $f(a_n) < 0$ eta $f(b_n) > 0$ diren. Jarri $c_n = \frac{a_1+b_1}{2}$. Beraz, hiru aukera daude:

(i) $f(c_n) = 0$ bada, orduan $c = c_n$ aurkitu dugu, eta algoritmoa amaitu egingo da.
(ii) $f(c_n) < 0$ bada, $[c_n, b_n]$ tarteak Bolzanoren teoremaren hipotesiak betetzen ditu. Jarri $a_{n+1} = c_n$ eta $b_{n+1} = b_n$.
(iii) $f(c_n) > 0$ bada, $[a_n, c_n]$ tarteak Bolzanoren teoremaren hipotesiak betetzen ditu. Jarri $a_{n+1} = a_n$ eta $b_{n+1} = c_n$.

Beraz, n_0 baterako algoritmoa amaitzen bada, nahi genuen c puntua aurkitu dugu. Suposatu $f(c_n) \neq 0$ dela, n guztietarako. Lehenik, $a_n \leq a_{n+1}$ eta $b_{n+1} \leq b_n$ direla argi dago. Bestetik, $|a_{n+1} - b_{n+1}| = \frac{1}{2}|a_n - b_n| = 2^{-n}$ dela nabaria da. Hori dela eta,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$$

definituko dugu. Orduan, $f(c) \leq 0$ da, eta aldi berean $f(c) \geq 0$ da. Horrenbestez, $f(c) = 0$ izan behar dela ondoriozta dezakegu. □

2.17. TEOREMA (Tarteko balioen teorema). *Izan bedi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funtzioa, $[a, b]$ tarte itxian jarraitua. Demagun $f(a) < f(b)$ dela. Orduan, $y_0 \in [f(a), f(b)]$ tartean baldin badago, $c \in [a, b]$ existitzen da, non $f(c) = y_0$ den.*

FROGAPENA. Teorema frogatzeko, nahikoa da Bolzanoren teorema $g(x) = f(x) - y_0$ funtzioari aplikatzea. Hain zuzen, $g(a) = f(a) - y_0 < 0$ eta $g(b) = f(b) - y_0 > 0$ direnez eta g jarraitua denez (cfr. 2.14 teorema), g funtzioak Bolzanoren teoremaren hipotesiak betetzen ditu $[a, b]$ tartean. Hortaz, $c \in [a, b]$ existitzen da, non $g(c) = f(c) - y_0 = 0$ den, eta $f(c) = y_0$ dela jarraitu dezakegu. □

Aurreko bi teoremetan egin dugun bezala, funtzioaren balioak aztertzen jarraituko dugu; hain zuzen, funtzioaren balio maximoari eta minimoari begiratuko diegu.

2.18. DEFINIZIOA. Izan bedi $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ funtzioa.

Orduan, f funtzioak (a, b) tartean *maximo absolutua* daukala esango dugu, baldin eta $c \in (a, b)$ existitzen bada, non $f(x) \leq f(c)$ den $x \in (a, b)$ guztietarako.

Gainera, f funtzioak (a, b) tartean *minimo absolutua* daukala esango dugu, baldin eta $c \in (a, b)$ existitzen bada, non $f(x) \geq f(c)$ den $x \in (a, b)$ guztietarako.

Hori esanda, honako teorema garrantzitsu hau emango dugu, tarte itxian jarraitua den funtzioa *mugatua* dela esaten diguna.

2.19. TEOREMA. *Izan bedi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funtzio jarraitua. Orduan, $C \geq 0$ existitzen da, non*

$$-C \leq f(x) \leq C \quad \text{den,} \quad x \in [a, b] \text{ guztietarako.}$$

FROGAPENA. Kontraesanera iristeko, f ez-mugatua dela $[a, b]$ tartean suposatuko dugu, eta Bolzanoren teoremaren frogapenaren prozesua erabiliko dugu. Beraz, f ez-mugatua denez, gutxienez (a, b) tarteko puntu batean ez-mugatua izango da. Orain, $[a, b]$ tartea bi zatitan zatituko dugu: $[a, c]$ eta $[c, b]$, non $c = (a + b)/2$ den. Suposatu dugunagatik, f funtzioa $[a, c]$ tartean edo $[c, b]$ tartean ez-mugatua da (edo bietan), esaterako $[a, c]$ tartean. Jarri $[a_1, b_1] = [a, c]$ eta errepikatu prozesu hori Bolzanoren teoreman bezala. Horrela, $[a_n, b_n]$ tarteak izango ditugu, non $[a_n, b_n]$

bakoitzean f funtzioa mugatua ez den. Hartu $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$. Orduan, $\alpha \in [a,b]$ eta f α puntuan jarraitua da. Hori dela eta,

$$f(\alpha+\varepsilon) \approx f(\alpha),$$

eta δ zenbakia hain txikia aukeratu dezakegu, non $|f(\alpha+h)| < 1 + |f(\alpha)|$ baita, $|h| < \delta$ guztietarako. Hau da, f funtzioa $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$ tartean mugatua da. Baina, n baterako $[a_n, b_n] \subseteq (\alpha-\delta, \alpha+\delta)$ izango da, α aukeraketarengatik, eta kontraesan horrek amaituko du frogapena. □

Azkenik, funtzio jarraituei buruzko azken emaitza adieraziko dugu. Ez dugu teorema honen frogapena emango.

2.20. TEOREMA (Muturreko balioen teorema). *Izan bedi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funtzio jarraitua. Orduan, $x_m, x_M \in [a,b]$ existitzen dira, non x_m f-ren minimo eta x_M maximo absolutuak diren.*

2.4. Bolzanoren algoritmoa eta C++ programazio-lengoaian

Atal hau lehen ordenagailu-praktikaren gai nagusia izango da. Zure ordenagailuan C++ konpiladorea instalatuta ez badago, erabili https://www.tutorialspoint.com/compile_cpp_online.php

```
// Bolzano teoremaren algoritmoa

#include <iostream>
#include <cmath>

using namespace std;

// defini bedi Bolzano teorema aplikatzen zaion f funtzioa

long double f(long double a){
 return cos(a);
}

// errua kalkulatzeko "funtzio" errekurtsiboa

double root(long double a, long double b,
long double epsilon) {
        if (b - a <= epsilon) return a;
        long double c = (a + b)/2;
        if (f(a)*f(c) <= 0) return root(a,c,epsilon);
        else return root(c,b,epsilon);
}
```

```
int main() {

long double a, b, eps;

cout << "Program calculates zero of function f in the
interval [a,b] up to precision eps." << endl;
cout << "Enter a, b and eps separated by spaces:" << endl;

cin >> a;
cin >> b;
cin >> eps;

// Kontrolatu ea emandako f funtzioak eta [a,b] tarteak
hipotesiak betetzen dituzten

if (f(a)*f(b) >= 0) cout << "WARNING: function does not
satisfy the hypotheses of Bolzano's theorem in given
interval!!!" << endl;

else {long double r = root(a, b, eps);

cout.precision(17);

cout << "Approximate root is: " << r << endl;

cout << "f(root) = " << f(r) << endl;

}
}
```

2. ATALAREN ARIKETAK

2.1 ariketa. Limitearen definizioa soilik erabiliz, frogatu honako emaitza hau:

$$\lim_{x\to 3} 2x - 1 = 5.$$

2.2 ariketa. Izan bedi f honela definituta dagoen funtzioa:

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & x<1 \\ [x] & 1 \le x < 3 \\ x^2-6 & x \ge 3 \end{cases}$$

Kalkulatu honako limite hauetatik existitzen direnak:

$$(a)\ \lim_{x\to 1^-} f(x) \quad (b)\ \lim_{x\to 1^+} f(x) \quad (c)\ \lim_{x\to 1} f(x) \quad (d)\ \lim_{x\to 2^-} f(x)$$
$$(e)\ \lim_{x\to 2^+} f(x) \quad (f)\ \lim_{x\to 2} f(x) \quad (g)\ \lim_{x\to \frac{3}{2}^-} f(x) \quad (h)\ \lim_{x\to \frac{3}{2}^+} f(x)$$
$$(i)\ \lim_{x\to \frac{3}{2}} f(x) \quad (j)\ \lim_{x\to 3^-} f(x) \quad (k)\ \lim_{x\to 3^+} f(x) \quad (l)\ \lim_{x\to 3} f(x)$$

2.3 ariketa. Izan bedi $c \in \mathbb{R}$. Orduan, honako bi baldintza hauek betetzen dituen f funtziorik existi daiteke?

(a) $\lim_{x\to c^-} f(x)$ eta $\lim_{x\to c^+} f(x)$ existitu,

(b) $\lim_{x\to c} f(x)$ ez existitu

2.4 ariketa. Honako funtzio hauen $\lim_{x\to c} f(x)$ limitearen existentzia aztertu:

$$(a)\ f(x) = \begin{cases} x+1, & x<0 \\ \cos x, & x \ge 0 \end{cases}, \qquad (b)\ f(x) = [x], \qquad (c)\ f(x) = |x|^x$$

2.5 ariketa. Izan bedi f funtzio bat, non $e^x - |x| \le f(x) \le e^x + |x|$ den, $x \neq 0$ guztietarako. Orduan, $\lim_{x\to 0} f(x)$ existitzen da?

2.6 ariketa. Aztertu honako funtzio hauen jarraitutasuna:

$$(a)\ f(x) = \frac{x^2}{x-2} \quad (b)\ f(x) = \frac{1+x^3}{1+x} \quad (d)\ f(x) = \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4} \quad (e)\ f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$$

2.7 ariketa. Aztertu honako funtzio hauen jarraitutasuna $\mathbb{R}$-n:

$$(a)\ f(x) = \begin{cases} x^2+4, & x<2 \\ x^3, & x \ge 2 \end{cases} \qquad (b)\ \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x<0 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}$$

$$(c)\ f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \le 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases} \qquad (d)\ f(x) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2}x), & |x| \le 1 \\ |x-1|, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$(e)\ f(x) = \begin{cases} |x-1|, & x<2 \\ 0, & x=2 \\ x^2-3, & x>2 \end{cases} \qquad (f)\ f(x) = (-1)^{[x]}$$

$$(g)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1}, & x \neq -1 \\ -2, & x=-1 \end{cases} \qquad (h)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x}, & x \in (-\infty,0)\cup(0,1] \\ 3, & x=0 \\ (1+\tan(\pi x))^{\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}x}}, & x \in (1,\frac{3}{2}) \end{cases}$$

2.8 ariketa. Kalkulatu f funtzioa $\mathbb{R}$-n jarraitua izanarazten duten a-ren eta b-ren balioak.

$$(a)\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x<0\\ a\cos x+bx, & x\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ x, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}\qquad (b)\ f(x)=\begin{cases}-2\sin x, & x\le-\frac{\pi}{2}\\ a\sin x+b, & x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\\ \cos x, & x\ge\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$(d)\ f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le 0\\ ax+b, & x>0\end{cases}\qquad (e)\ f(x)=\begin{cases}|x-1|, & x<0\\ x^2+ax+b, & 0\le x<1\\ \left[\frac{1}{1+x}\right]+2, & x\ge 1\end{cases}$$

2.9 ariketa. Frogatu honako funtzio hauek erro bat behintzat badutela:

$$(a)\ f(x)=x^5-4x+1-\sqrt[3]{e}\qquad (b)\ f(x)=x^7+2x^2+x-100$$

2.10 ariketa. Izan bedi f funtzioa, non honako baldintza hauek betetzen diren:

- $f(0)=1$, $f(1)=-1$ eta
- $\forall x\in(0,1),\ f(x)\neq 0$.

Galdera: $[0,1]$ tartean f jarraitua al da?

2.11 ariketa. Eman $f(0)$-ren balioa, f funtzioa 0-n jarraitua izan dadin:

$$(a)\ f(x)=\frac{1}{x}((1+x)^n-1)\qquad (b)\ f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$(d)\ f(x)=\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}\qquad (e)\ f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{x}$$

$$(f)\ f(x)=x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right)\qquad (g)\ \frac{\sin 3x}{x}$$

2.12 ariketa. Froga ezazu honako ekuazio hauek gutxienez soluzio erreal bat dutela:

$$(a)\ x2^x=1,\qquad (b)\ \sin x=x-1,\qquad (c)\ x^{179}+\frac{163}{1+x^2+\sin^2 x}=119.$$

2.13 ariketa. Ikusitako irizpideak erabiliz, kalkulatu honako limite hauek:

(1) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-3x-10}{x^2-25}$ (2) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ (3) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

(4) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$ (5) $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$ (6) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

(7) $\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ (8) $\lim_{x\to 2} \frac{3-\sqrt{7+x}}{1-\sqrt{3-x}}$ (9) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x(x+a)}-x$

(10) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)}$ (11) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)}$ (12) $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

(13) $\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$ (14) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\tan(2x)\tan(\frac{\pi}{2}-x)}$ (15) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$

(16) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$ (17) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$ (18) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$

(19) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$ (20) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$ (21) $\lim_{x\to\infty} \ln(2x-1)-\ln(x+2)$

(22) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ (23) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ (24) $\lim_{h\to 0^-} \frac{1+\frac{1}{h}}{1+\frac{1}{h^2}}$

(25) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{|x^3-1|}$ (26) $\lim_{x\to 1} \sqrt{|x|-x}$ (27) $\lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x-3}$

(28) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x\right)^{\tan^2 x}$ (29) $\lim_{x\to 0} \left(1+\tan(2x)\right)^{\frac{3}{x}}$

2.14 ariketa. Izan bedi $z \in \mathbb{C}$ zenbaki konplexua. Orduan,

$$\arg(z) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \operatorname{Im}\left(\sqrt[n]{\frac{z}{|z|}}\right)$$

betetzen dela frogatu. Aurreko formula erabili $\arg\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ dela frogatzeko.

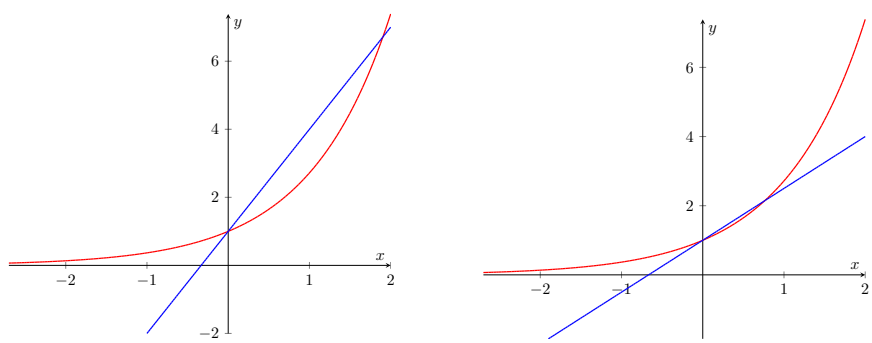
3

Deribatuak

> Infinituak litekeena saihetsezin bilakatzen du.
>
> N. Cousins

3.1. Deribatuak

Izan bedi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funtzioa. Demagun f funtzioa hurbildu nahi dugula. Bururatu dakigukeen lehen ideia da funtzioaren bi baloreetatik pasatzen den zuzena erabiltzea. Aukeratutako bi puntu oso urrun badaude, hurbilketa txarra izan litekeela imajinatu dezakegu. Baina, zenbat eta hurbilagoko puntuak aukeratu, orduan eta hurbilketa hobea izango da.



Ideia horretatik abiatuta, infinituki hurbil dauden bi puntu hartzen baditugu, pentsa genezake zuzenak funtzioa oso ongi hurbiltzen duela. Definizioa eman baino lehen, berrikusi planoko bi puntutatik pasatzen den zuzenaren (1.2) ekuazioa.

3.1. DEFINIZIOA. Izan bitez $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funtzioa eta $x_0 \in [a, b]$ puntua. Orduan, f funtzioa x_0 puntuan deribagarria dela esaten da, baldin eta honako limite hau finitua bada:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Horrela bada, limitearen balioa $f'(x_0)$ ikurraz adieraziko dugu.

3.2. OHARRA. Limitearen definizioa ikusita, definizioa beste era batean berridatz dezakegula azpimarratzen dugu: f funtzioa x_0 puntuan deribagarria da, baldin eta soilik baldin honako limite hau finitua bada:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Ohartu, esandakoarengatik, f funtzioaren x_0 puntuko zuzen ukitzailearen ekuazioa honako hau dela:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

Izan bedi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funtzioa. Funtzioa tarteko puntu guztietan deribagarria bada, orduan beste funtzio bat defini dezakegu: f funtzioaren f' *deribatua*

$$\begin{array}{rccc} f' : & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}.$$

3.3. ADIBIDEAK. Kalkula ditzagun funtzio ezagun batzuen deribatuak.

(i) Hartu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, non $f(x) = c$ den funtzio konstantea, eta $x_0 \in \mathbb{R}$ puntua. Orduan, f funtzioa x_0 puntuan deribagarria den erabakitzeko, honako limite hau kalkulatu behar da:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0.$$

Gogoratu $f(x) = c$ dela, edozein $x \in \mathbb{R}$ puntutarako, eta limiteak egitean h aldagaiaren balioa ezin dela 0 izan. Hori dela eta, $f'(x) = 0$; hots, funtzio konstante baten deribatua 0 konstantea da.

(ii) Hartu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, non $f(x) = ax + b$ den, funtzio lineala eta $x_0 \in R$ puntua. Orduan, arestian egin dugun bezala, honako limite hau kalkulatuko dugu:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a(x_0+h)+b)-(ax_0+b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = a.$$

Hau da, zuzen baten deribatua bere malda da.

(iii) Azkenik, hartu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, non $f(x) = x^n$ den polinomioa, eta $x_0 \in R$ puntua. Berriro:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x_0^i h^{n-i} - x_0^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{nhx_0^{n-1} + h^2(*)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{nhx_0^{n-1}}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{h^2(*)}{h} = nx_0^{n-1}. \end{aligned}$$

Horregatik, x^n funtzioaren deribatua nx^{n-1} funtzioa dela berreskuratu dugu*.

*Aurreko limitean *Newtonen binomioa* erabili dugu: a eta b zenbaki errealak badira, orduan

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

Hala eta guztiz ere, gerta daiteke deribatuaren definizioko limitea ez existitzea (kasu horretan esango dugu f ez dela deribagarria puntu horretan). Adibidez, $f(x) = |x|$ bada, orduan $f'(0)$ ez da existitzen:

$$\lim_{h\to 0} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & h > 0 \text{ bada} \\ -1 & h < 0 \text{ bada} \end{cases}.$$

Edonola ere, limiteen kasuan egin genuen bezala, funtzioaren *ezker* eta *eskuin* deribatuei buruz hitz egin dezakegu. Adibidez, $f(x) = |x|$ funtzioaren 0 puntuan ezkerderibatua -1 eta eskuinderibatua 1 dira.

Halaber, funtzio baten *bigarren deribatua* defini dezakegu, deribatuaren deribatu bezala, eta hori $f''(x)$ ikurraren bitartez adieraziko dugu. Orokorrean, f funtzioaren n. *deribatua* x_0 puntuan, $f^{(n)}(x_0)$ adieraziko duguna, $f^{(n-1)}$ funtzioaren deribatua da x_0 puntuan, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako.

Ezer egin baino lehen, deribagarritasunak jarraitutasuna dakarrela berekin frogatuko dugu.

3.4. TEOREMA. *Izan bedi $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ funtzio deribagarria. Orduan, f funtzioa (a, b) tartean jarraitua da.*

FROGAPENA. Har dezagun $x_0 \in (a, b)$. Orduan, f x_0 puntuan deribagarria denez,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ = f(x_0) + \lim_{x\to x_0} f'(x_0) \cdot (x - x_0) = f(x_0). \end{aligned}$$

□

Dakusagunez, funtzio bakoitzaren deribatua (printzipioz) kalkula daiteke. Dena den, deribatu ezagun batzuetatik beste deribatu batzuk ondorioztatzea lagungarria izan daiteke.

3.5. TEOREMA (Deribazio-erregelak). *Izan bitez $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funtzioak eta $x_0 \in [a, b]$ puntua. Demagun f-ren eta g-ren deribatuak existitzen direla x_0 puntuan. Orduan:*

(i) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

(ii) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

(iii) $g(x_0) \neq 0$ *bada,* $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

(iv) $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

Frogapena. Lehen emaitza:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)+g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=f'(x_0)+g'(x_0).$$

Bigarrena:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0+h)g(x_0)-f(x_0+h)g(x_0)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)(g(x_0+h)-g(x_0))+(f(x_0+h)-f(x_0))g(x_0)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}f(x_0+h)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}g(x_0)=$$
$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

Ohartu azken berdintzan 3.4 teorema aplikatu dugula.

Hirugarrena:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f/g)(x_0+h)-(f/g)(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0)-f(x_0)g(x_0+h)}{hg(x_0+h)g(x_0)}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(f(x_0+h)-f(x_0))g(x_0)-f(x_0)(g(x_0+h)-g(x_0))}{hg(x_0+h)g(x_0)}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(f(x_0+h)-f(x_0))}{h}g(x_0)\frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)}-$$
$$f(x_0)\frac{(g(x_0+h)-g(x_0))}{h}\frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)}=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Ohartu azken berdintzan 3.4 teorema aplikatu dugula.

Laugarrena:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(g\circ f)(x_0+h)-(g\circ f)(x_0)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{f(x_0+h)-f(x_0)}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Orain, $y=f(x_0)$ eta $\ell=f(x_0+h)-f(x_0)$ ordezkatuz gero, $h\to 0$ doanean $\ell\to 0$ ere badela azpimarratzen dugu (3.4 teoremaren ondorioz). Horrenbestez, aurreko limitea honako hau bihurtzen da:

$$\lim_{\ell\to 0}\frac{g(y+\ell)}{\ell}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=g'(f(x_0))f'(x_0).$$

□

3.6. KOROLARIOA. *Izan bitez $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funtzioa, $x_0 \in [a,b]$ puntua eta $\lambda \in \mathbb{R}$ konstantea. Demagun f-ren deribatua existitzen dela x_0 puntuan. Orduan, $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.*

FROGAPENA. 3.5 teoremaren bigarren atalaren arabera, $g(x) = \lambda$ funtzio konstantea definituz,

$$(\lambda f)'(x_0) = (g \cdot f)'(x_0) = g'(x_0)f(x_0) + g(x_0)f'(x_0) = 0 \cdot f(x_0) + \lambda f'(x_0).$$

□

3.7. KOROLARIOA. *Izan bitez $f : (a,b) \to (c,d)$ funtzio erreal alderantzikagarria eta deribagarria. Orduan,*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \quad x \in (c,d) \text{ guztietarako.}$$

FROGAPENA. Dakigunez, $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$ da. Horregatik, 3.5 teorema aplikatuz, $x \in (c,d)$ guztietarako,

$$1 = \mathrm{id}'(x) = (f \circ f^{-1})'(x) = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x).$$

□

3.8. ADIBIDEAK. (i) Dakigunez, $e^{x+y} = e^x e^y$ betetzen da. Beraz, $x_0 \in \mathbb{R}$ guztietarako,

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0};$$

hots, $(e^x)' = e^x$ dugu.

(ii) Beste alde batetik, $\ln x$ logaritmoa e^x funtzioaren alderantzizkoa dela dakigunez, 3.7 aplika dezakegu. Hori dela eta, $x \in (0, +\infty)$ guztietarako,

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log(x))} = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}.$$

(iii) cos eta sin funtzioen deribatuak kalkulatuko ditugu. Orain, 1.19 proposizioa eta 1.20 korolarioa erabiliz,

$$\begin{aligned}\sin'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h) - \sin(x_0)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)\,(\cos(h) - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0)\sin(h)}{h} = \cos(x_0).\end{aligned}$$

3.9. ERRONKA. *3.8 adibidea jarraituz, frogatu $\cos'(x_0) = -\sin(x_0)$ dela.*

Orain limiteak kalkulatzeko tresnarik baliagarrienetako bat adieraziko dugu: de l'Hopital-en teorema.

3.10. TEOREMA. *Izan bitez $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ funtzio errealak, (a,b) tartean deribagarriak, eta $x_0 \in (a,b)$. Demagun*

(i) *$x_0 \in (c,d) \subset (a,b)$ tartea existitzen dela, non $g'(x) \neq 0$ den $\forall x \in (c,d)$;*

(ii) $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *existitzen dela, eta*

(iii) *honako bi baldintza hauetatik bat betetzen dela:*

(a) $f(x_0) = g(x_0) = 0$,

(b) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$.

Orduan, $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *dela dugu.*

Frogapena ikusi baino lehen, (i) baldintzak $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ funtzioa x_0-ren inguru batean existitzen dela bermatzen duela azpimarratzen dugu.

Frogapena. (a) baldintza betetzean bakarrik emango dugu frogapena, erraztasunarengatik. Beraz, $f(x_0) = g(x_0) = 0$ bada, honako hau idatzi dezakegu:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} =$$

$$= \frac{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

frogatu nahi genuen bezalaxe. □

3.11. oharra. 3.10 teorema erabiltzean, hipotesi *guzti-guztiak* betetzen direla ziurtatu behar dugu.

Gainera, batzuetan 3.10 teorema aplikatzeak ez digu laguntzen.

3.12. adibidea. Kalkulatu $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$. 3.10 teoremaren hipotesiak betetzen direnez, de l'Hopitalen teorema aplikatuko dugu, $(e^{-x})' = -e^{-x}$ dela kontuan hartuta:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

Orain, de l'Hopitalen teorema berriro aplikatzen badugu,

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

hasierako limitea berriro izango dugu.

Kasu honetan, zerbait ezberdina egin behar dugu. Izendatzailean eta zatitzailean e^x komunean hartzen badugu, honako hau izango dugu:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = 1.$$

3.2. Muturrak, gorakortasuna eta beherakortasuna

Deribatuen aplikaziorik garrantzitsuenetako bat adieraziko dugu.

3.13. DEFINIZIOA. Izan bitez $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ funtzioa eta $c \in (a, b)$ puntua.

Orduan, f funtzioak c puntuan *maximo lokala* daukala esango dugu, baldin eta $\delta > 0$ existitzen bada non $f(c + h) \leq f(c)$ den, $h \leq \delta$ guztietarako.

Gainera, f funtzioak c puntuan *minimo lokala* daukala esango dugu, baldin eta $\delta > 0$ existitzen bada non $f(c + h) \geq f(c)$ den, $h \leq \delta$ guztietarako.

Minimo eta maximo lokalak *muturrak* deitzen dira.

3.14. OHARRA. 2.20 teoremarengatik, $[a, b]$ tartean f jarraitua denean, jada dakigu f-k maximoak eta minimoak izango dituela $[a, b]$ tartean. Hau da, tarte *itxietan* funtzio *jarraituek* beti maximo eta minimo absolutuak dituzte.

Orain, maximo eta minimo lokaletan deribatua nola portatzen den azalduko dugu.

3.15. PROPOSIZIOA. *Izan bitez $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ funtzio deribagarria eta $c \in (a, b)$ puntua. Demagun f funtzioak c puntuan muturra daukala. Orduan, $f'(c) = 0$.*

FROGAPENA. Demagun f-k maximo lokala duela c-n. Orduan, $\delta > 0$ existitzen da, non $f(c + h) \leq f(c)$ den, $h \leq \delta$ guztietarako. Horrenbestez,

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

espresioaren balioa $h < 0$ denean positiboa da, eta $h > 0$ denean, ordea, negatiboa. Beraz,

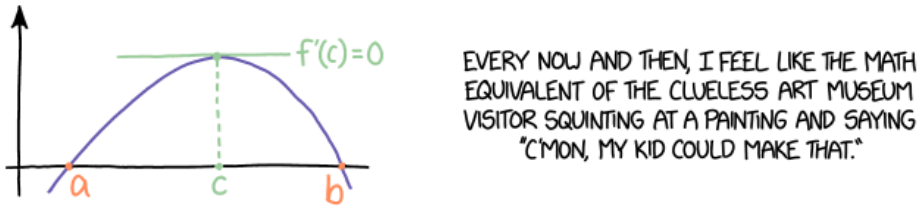
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geq 0 \quad \text{eta} \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

Hala ere, f deribagarria denez, aurreko bi limiteak bat datoz, eta $f'(c) = 0$ izan behar da.

Funtzioak c puntuan minimo lokala badu, frogapena berdin-berdin errepika daiteke. □

Aurreko proposizioaren alderantzizkoa ez da egia: $f(x) = x^3$ funtziorako, $f'(x) = 3x^2$ da deribatua, eta $f'(0) = 0$, baina $x = 0$ puntuan ez dago muturrik.

3.16. TEOREMA (Rolle-ren teorema). *Izan bedi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funtzioa, $[a, b]$ tartean jarraitua eta (a, b) tartean deribagarria. Demagun $f(a) = f(b)$ dela. Orduan, $c \in (a, b)$ existitzen da, non $f'(c) = 0$ den.*



`xkcd.com` web-orritik moldatua

Frogapena. Lehenik, f tartean $f(a) = f(b)$ konstantea bada, $f'(x) = 0$ da, $x \in [a, b]$ guztietarako. Bestetik, 2.20 teoremarengatik, f-k bere maximoa hartzen du (a, b) tartean c puntu baterako. 3.15 lematik $f'(c) = 0$ dela jarrai dezakegu. □

Geroago, Rolleren teoremaren ondorio bat beharko dugu.

3.17. teorema (Lagrange-ren batez besteko balioaren teorema). *Izan bedi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funtzioa, $[a, b]$ tartean jarraitua, eta (a, b) tartean deribagarria. Orduan, $c \in (a, b)$ existitzen da, non*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \textit{den.}$$

Frogapena. Frogapena erraz bukatu dezakegu, 3.16 teorema $h(x) = f(x)(b-a) - x(f(b) - f(a))$ funtzioari aplikatuz. Hain zuzen, h deribagarria da (a, b) tartean eta $h(a) = h(b) = bf(a) - af(b)$ dela dugu. Hori dela eta, $c \in (a, b)$ existitzen da, non $h'(c) = 0$ den. Baina

$$h'(x) = f'(x)(b - a) - (f(b) - f(a))$$

eta $h'(c) = 0$ ekuazioa berridatziz, teoremaren konklusioa dugu. □

Laster, deribatuen aplikazio nagusietako bat emango dugu: funtzioaren grafikoa marrazten laguntzen digute deribatuek.

3.18. definizioa. Izan bedi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funtzioa.

(i) f *gorakorra* dela diogu, baldin eta $x_1, x_2 \in [a, b]$ guztietarako, $x_1 < x_2$ izanik, $f(x_1) \leq f(x_2)$ bada.
(ii) f *beherakorra* dela diogu, baldin eta $x_1, x_2 \in [a, b]$ guztietarako, $x_1 < x_2$ izanik, $f(x_1) \geq f(x_2)$ bada.

3.19. teorema. *Izan bedi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funtzioa, (a, b) tartean deribagarria dena. Orduan:*

(i) *Baldin eta $f'(x) > 0$ bada $x \in (a, b)$ guztietarako, orduan f gorakorra da (a, b) tartean.*
(ii) *Baldin eta $f'(x) < 0$ bada $x \in (a, b)$ guztietarako, orduan f beherakorra da (a, b) tartean.*
(iii) *Baldin eta $f'(x) = 0$ bada $x \in (a, b)$ guztietarako, orduan f konstantea da (a, b) tartean.*

Frogapena. Bakarrik lehen partea frogatuko dugu, besteek frogapen berdina baitaukate. 3.17 teoremarengatik, (a, b) tarteko $x < y$ guztietarako $c \in (x, y)$ existitzen da, non $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ den. Ohartu $f'(c) > 0$ hipotesiarekin, beraz, $f(y) > f(x)$ frogatu nahi dugun bezala. □

Azkenean, aurreko teoremaren bi ondorio garrantzitsu emango ditugu.

3.20. korolarioa. *Izan bitez $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funtzioa, (a, b) tartean deribagarria dena, eta $c \in (a, b)$ puntua. Orduan:*

(a) *Baldin eta $f'(x) > 0$, $x < c$ guztietarako, eta $f'(x) < 0$, $x > c$ guztietarako, bada, orduan, f-k maximo lokala du c puntuan.*

(b) *Baldin eta $f'(x) < 0$, $x < c$ guztietarako, eta $f'(x) > 0$, $x > c$ guztietarako, bada, orduan, f-k minimo lokala du c puntuan.*

FROGAPENA. Aplikatu 3.19 teorema. □

3.21. KOROLARIOA. *Izan bitez $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funtzioa, (a, b) tartean bi aldiz deribagarria dena, eta $c \in (a, b)$ puntua. Demagun $f'(c) = 0$ dela. Orduan:*

(a) *Baldin eta $f''(x) < 0$, (a, b) tarteko puntu guztietarako, orduan f-k maximo lokala du c puntuan.*
(b) *Baldin eta $f''(x) > 0$, (a, b) tarteko puntu guztietarako, orduan f-k minimo lokala du c puntuan.*

FROGAPENA. (a) partea soilik frogatuko dugu. 3.19 teoremarengatik f' funtzioari aplikatuta, f' beherakorra da (a, b) tartean. Hala ere, $f'(c) = 0$ da eta, beraz, f'-ren zeinua aldatu egiten da, positibotik negatibora, c puntuan. 3.20 korolarioarengatik, f-k maximo lokala du c-n. □

3.3. Ahurtasuna eta ganbiltasuna. Inflexio-puntuak

3.22. DEFINIZIOA. Izan bedi f funtzioa D tartean definiturik.

(i) f funtzioa D tartean *ganbila* dela esango dugu, baldin eta D tarteko x_0 puntu guztietarako x_0 puntuko zuzen ukitzailea f-ren grafikoaren gainean geratzen bada x_0-ren inguru batean.
(ii) f funtzioa D tartean *ahurra* dela esango dugu, baldin eta D tarteko x_0 puntu guztietarako x_0 puntuko zuzen ukitzailea f-ren grafikoaren azpian geratzen bada x_0-ren inguru batean.
(iii) $a \in D$ puntua f funtzioaren *inflexio-puntua* dela diogu, baldin eta x_0 puntuko zuzen ukitzaileak grafikoaren ezkerreko zatia alde batean eta eskuineko zatia beste aldean uzten baditu.

3.23. TEOREMA. *Izan bedi f funtzioa, eta demagun $f''(x)$ existitzen dela (a, b) tartean. Orduan:*

(i) *Baldin eta $f''(x) > 0$ bada $x \in (a, b)$ guztietarako, orduan f ahurra da (a, b) tartean.*
(ii) *Baldin eta $f''(x) < 0$ bada $x \in (a, b)$ guztietarako, orduan f ganbila da (a, b) tartean.*
(iii) *$x_0 \in (a, b)$ f-ren inflexio-puntua bada, orduan $f''(x_0) = 0$ da.*

Alderantzizkoa ez da egia. Adibidez, $f(x) = x^4$ funtzioaren bigarren deribatua $f''(x) = 12x^2$ eta $f''(0) = 0$ dira, baina $x = 0$ ez da inflexio-puntua.

3.4. Funtzioen adierazpen grafikoa

Funtzioaren irudikapena egiteko honako puntu hauek aztertu behar ditugu:

(i) **Funtzioaren eremua atera.**
(ii) **Definizio-eremuaren muturretarako limiteak kalkulatu.**

(iii) **Simetriak aztertu.** Bi motatakoak izan daitezke: $f(x) = f(-x)$ bada, orduan f bikoitia izango da (eta funtzioaren grafikoa simetrikoa y ardatzarekiko); $f(-x) = -f(x)$ bada, f bakoitia izango da (eta funtzioaren grafikoa simetrikoa izango da jatorriarekiko).

(iv) **Ardatzekiko ebaki-puntuak.** x ardatzarekiko ebaki-puntuak $(x, f(x))$ motako puntuak dira, non $f(x) = 0$ den. y-ardatzarekiko ebaki-puntua (baldin badago) $(0, f(0))$ da.

(v) **Asintota bertikalak.** Baldin eta $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ bada, $x = a$ asintota bertikala da.

(vi) **Asintota zeiharrak.** $y = mx + b$ moduko zuzena bilatzen dugu ($m = 0$ bada, asintota horizontala deitzen da), eta m, b honela lortzen dira: $m = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ zenbaki erreala izan behar da (limitea infinitua bada, funtzioak ez du asintota zeiharrik). Gero, m finitua bada, orduan b lortzeko: $b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx$ zenbaki erreala izan behar da.

(vii) **Gorakortasun eta beherakortasun tarteak. Maximo eta minimo lokalak.**

(viii) **Ahurtasun eta ganbiltasun tarteak. Inflexio-puntuak.**

Orain, aurreko zerrenda erabiliko dugu adibide batean.

3.24. ADIBIDEA (Funtzioa aztertzea). Izan bedi $\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ funtzioa. Lor itzazu eremua, asintotak, ardatzekiko ebaki-puntuak, eta aztertu gorakortasun-beherakortasun tarteak (maximoak eta minimoak), ahurtasun-ganbiltasun tarteak (inflexio-puntuak). Ondoren, egin irudikapena.

Ebazpena.

(i) Definizio-eremua $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ da. Izan ere, izendatzailean $\ln x$ funtzioaren eremua $x > 0$ da, eta zatitzailean $\sqrt{x}$ funtzioaren eremua $x \geq 0$ da. Bestalde, zatitzailea zero izan ezin denez, $x \neq 0$ izan behar da. Dena elkarrekin, $x > 0$ da f-ren definizio-eremua.

(ii) **Limiteak** $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ eta $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(iii) Funtzioak ez du y ardatzekiko ebaki-punturik, $x > 0$ denean soilik existituko delako funtzioa. x ardatzekiko ebaki-puntuak bilatzeko, $f(x) = 0$ ekuazioa askatu behar da. Hau da, $\ln(x) = 0$. Beraz, $x = 1$ dela ondorioztatuko dugu. Orduan, x ardatzekiko ebaki-puntu bakarra $\boxed{(1, 0)}$ izango da.

(iv) **Beherakortasun-gorakortasuna.** Kalkulatu deribatua:

$$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{2}\ln(x)\right).$$

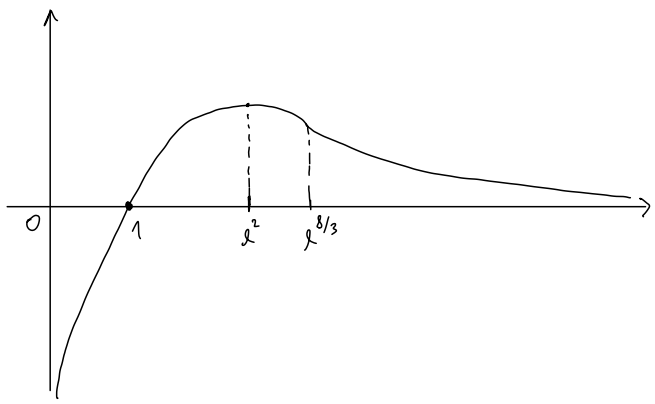
Deribatuaren lehen faktorea beti positiboa da (gogoratu $x > 0$ dela). Beraz, $f'(x) \geq 0$ aztertzean, askatu behar duguna $1 - 1/2\ln(x) \geq 0$. Eta $x \leq e^2$ dela dakusagu. Laburbilduz, $f(x)$ funtzioa $(0, e^2)$ tartean gorakorra da, eta $(e^2, +\infty)$ tartean, aldiz, beherakorra.

(v) **Ahurtasun-ganbiltasuna.** Kalkulatu bigarren deribatua:

$$f''(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x}}\left(-2 + \frac{3}{4}\ln(x)\right).$$

Arestian bezala, lehen faktorea beti positiboa da. Horrenbestez, bigarren deribatua positiboa da, baldin eta soilik baldin $x \geq e^{\frac{8}{3}}$ bada. Hau da, $f(x)$ funtzioa $(0, e^{8/3})$ tartean ganbila da, eta $(e^{8/3}, +\infty)$ tartean ahurra. Orduan, $x = e^2$ da maximo globala ($f(e^2) = 2/e$), eta f-k ez du minimorik. $x = e^{8/3}$ da inflexio-puntu bakarra.

(vi) Eskuratu dugun informazio guztia erabiliko dugu funtzioaren grafikoa marrazteko.



3.24 adibidearen grafikoa

3.25. ADIBIDEA. Izan bedi $f(x) = x^{-3}e^x$ funtzioa. Lortu definizio-eremua, asintotak, ardatzekiko ebaki-puntuak, eta aztertu gorakortasun-beherakortasun tarteak (maximo eta minimoak ematen), ahurtasun-ganbiltasun tarteak (inflexio-puntuak ematen). Ondoren, egin irudikapena.

Ebazpena.

(i) Definizio-eremua: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

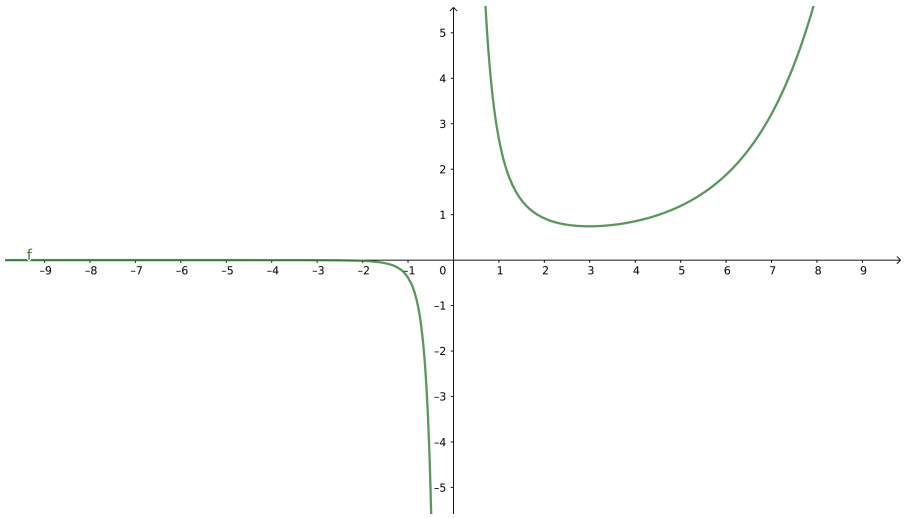
(ii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

(iii) Ardatzekiko ebaki-puntuak: $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(iv) Ez du asintota zeiharrik.

(v) $f'(x) = \frac{(x-3)e^x}{x^4}$. Beraz, f funtzioa $x < 3$ bada, beherakorra da, eta $x > 3$ bada, gorakorra. Orduan, $x = 3$ puntua minimo lokala (ez-globala) dela ondoriozta dezakegu.

(vi) $f''(x) = \frac{(x^2-6x+12)e^x}{x^5}$. Hori dela eta, $x^2-6x+12=0$ ekuazioaren soluzioak jakitea interesatzen zaigu, eta ekuazio horrek ez du soluzio errealik. Beraz, $x^2-6x+12>0$ x guztietarako eta $f(x)$ ganbila da, $x<0$ bada, eta bestela ahurra. Gainera, f funtzioak ez du inflexio-punturik.



3.25 adibidearen grafikoa

3.5. Funtzioak aztertzea eta inekuazioak

Limite aipagarrietan $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ dela ikusi dugu. Orain, limite aipagarri hori frogatzeko tresna guztiak dauzkagu.

Laster, honako inekuazio hauek betetzen direla erakutsiko dugu:

$$1-\frac{1}{x}\le \ln x\le x-1.$$

Hori egiteko, $f(x)=\ln x-1+\dfrac{1}{x}$ eta $g(x)=x-1-\ln x$ funtzioak definituko ditugu, eta funtzio horiek positiboak direla frogatuko dugu $x>0$ bada.

Hartu f-ren deribatua:

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right).$$

Beraz, $x>0$ dela suposatu dugunez, $f'(x)\ge 0$ izango da, baldin eta soilik baldin $1-\frac{1}{x}\ge 0$ bada; hau da, baldin eta soilik baldin $x\ge 1$ bada. Hori dela eta, $f(x)$ beherakorra da $(0,1)$ tartean eta gorakorra $(1,+\infty)$ tartean; ondorioz, f funtzioak minimo absolutua du 1 puntuan. Minimo absolutuaren definizioarengatik, $f(x)\ge f(1)$, $x>0$ guztietarako; hau da,

$$\ln x-1+\frac{1}{x}\ge 0-1+1=0\Longrightarrow \boxed{\ln x\ge 1-\frac{1}{x},\qquad \forall x>0.}$$

Halaber, g funtziorako:

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 1.$$

Hau da, g funtzioak minimo absolutua 1 puntuan dauka, eta, ondorioz:

$$g(x) = x - 1 - \ln x \geq 0 \Longrightarrow \boxed{\ln x \leq x - 1, \qquad \forall x > 0.}$$

Oinarrizko deribatuak erraz bilatzeko, honako zerrenda hau emango dugu:

Funtzioa	**Deribatua**
$x^\alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

3. ATALAREN ARIKETAK

3.1 ariketa. Idatzi $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$ polinomioaren deribatuak, non $a_i \in \mathbb{R}$ eta $n \in \mathbb{N}$ diren.

3.2 ariketa. Frogatu funtzio bikoitiaren deribatua (existitzen bada) funtzio bakoitia dela eta bakoitiarena bikoitia.

3.3 ariketa. Kalkula ezazu $f'(0)$, baldin eta $f(x) = \begin{cases} 3x^2+1, & x \leq 0 \text{ bada.} \\ x^3+1, & 0 < x < 1 \text{ bada.} \end{cases}$

3.4 ariketa. Definizioa soilik erabiliz, eman funtzio hauen deribatuak:

$$a)\ f(x) = (x-1)^2 \qquad b)\ f(x) = 3x+5 \qquad d)\ f(x) = 2x^3.$$

3.5 ariketa. Eman $f'(c)$, existitzen bada, honako funtzio hauetarako:

$$(a)\ f(x) = \begin{cases} 4x, & x < 1 \\ 2x^2+2, & x \geq 1 \end{cases},\ c = 1; \qquad (b)\ f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq -1 \\ (x+1)^2, & x > -1 \end{cases},\ c = -1;$$

$$(d)\ f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2, & x < 3 \\ -3x, & x \geq 3 \end{cases},\ c = 3.$$

3.6 ariketa. Eman zuzen ukitzailearen ekuazioa jarritako puntuetan:

$$(a)\ f(x) = x^3 - x,\ (-2,-6); \qquad (b)\ f(x) = \frac{x}{1+x^2},\ \left(1, \frac{1}{2}\right).$$

3.7 ariketa. Izan bedi $f(x)$ honako funtzio hau,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq x_0 \\ ax+b, & x > x_0 \end{cases}.$$

Zein a eta b zenbakitarako da f funtzioa jarraitua eta deribagarria x_0 puntuan?

3.8 ariketa. Izan bedi f honako funtzio hau:

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

- Zein n zenbakitarako izango da f funtzioa $x = 0$ puntuan jarraitua?
- Zein n zenbakitarako izango du f funtzioak $x = 0$ puntuan deribatu jarraitua?

3.9 ariketa. Izan bedi $y = Ax^2 + Bx + D$ kurba. Zein A,B eta D-ren baliotarako betetzen dira honako bi baldintza hauek?

- kurba $(1,3)$ puntutik pasatzea, eta
- $(2,0)$ puntuko kurbaren zuzen ukitzailearen ekuazioa $4x + y = 8$ izatea.

3.10 ariketa. de L'Hopitalen erregela erabiliz, kalkulatu honako limite hauek:

(1) $\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$ (2) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x}$ (3) $\lim_{x\to 1^-} (1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

(4) $\lim_{x\to 3^+} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2-x-6}\right)$ (5) $\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$ (6) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

(7) $\lim_{x\to 0} \frac{x+\sin\pi x}{x-\sin\pi x}$ (8) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left|\frac{1}{\cos x}\right|}{x^2}$ (9) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin nx)}$

(10) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 2\tan x}{1+\cos 4x}$ (11) $\lim_{x\to 1} \left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$ (12) $\lim_{x\to 0^+} x^x$

(13) $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$ (14) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{nx}-1}{1-\cos nx}$ (15) $\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$

(16) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x\right)^{\tan^2 x}$ (17) $\lim_{x\to 0} (1+\tan 2x)^{\frac{3}{x}}$ (18) $\lim_{x\ to 0^+} \ln x \tan x$

(19) $\lim_{x\to 0^+} (2x)^{\tan x}$ (20) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\ln(1+x)}$ (21) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$

(22) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x-\sin x}$ (23) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\tan 5x}$ (24) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{3}x - \sqrt{12-x}}{2x - 3\sqrt{19-5x}}$

3.11 ariketa. (i) Frogatu $e^x = 1+x$ ekuazioak zehazki erro erreal bat duela.
(ii) Frogatu $6x^4 - 7x + 1 = 0$ ekuazioak ez dituela bi erro erreal baino gehiago.
(iii) Frogatu $6x^5 + 13x + 1 = 0$ ekuazioak zehazki erro erreal bat duela.

3.12 ariketa. Eman 8 m-ko perimetroa duten laukizuzen guztietatik azalera maximoa duena.

3.13 ariketa. Eman $y = \frac{1}{8}x^2$ parabola osatzen duten puntu guztietatik, $(0,6)$ puntutik hurbilen daudenak.

3.14 ariketa. Eman funtzio hauen adierazpen grafikoa:

(i) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ (ii) $f(x) = \frac{3x}{x-2}$ (iii) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

(iv) $f(x) = \ln\frac{x^2-1}{x^2-4}$ (v) $f(x) = \sqrt{x^3-3x}$ (vi) $f(x) = \frac{5x+4}{x}e^x$

$(vii) f(x) = x^2 - 2|x| + 2$ $(viii)$ $f(x) = |x^2-1|$ (ix) $f(x) = \frac{x^2+9}{\sqrt{x^2+4}}$

(x) $f(x) = \ln(x^3 - 3x + 2)$ (xi) $f(x) = 2|x| - x^2$ (xii) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

$(xiii)$ $f(x) = x^3 e^{-4x}$ (xiv) $f(x) = e^{2x \ln x}$ (xv) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{-x} - 1}$

(xvi) $f(x) = \dfrac{x}{1 + \ln x}$ $(xvii)$ $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2}$

3.15 ariketa. Eman x-ardatzean oinarria eta goiko erpinak $x^2 + y^2 = 1$ zirkunferentzian dituzten laukizuzen guztietatik azalera maximoa duenaren neurriak.

3.16 ariketa. Lor itzazu 24 m-ko perimetroa duen azalera maximoko hiruki isoszelearen neurriak.

3.17 ariketa. Izan bitez S, x eta y zenbaki erreal positiboak, non $x + y = S$ den. Frogatu xy biderkadura maximoa dela $x = y = \frac{1}{2}S$ denean.

3.18 ariketa. Izan bitez P, x eta y zenbaki erreal positiboak, non $xy = P$ den. Frogatu $x + y$ batura maximoa dela $x = y = \sqrt{P}$ denean.

3.19 ariketa. Frogatu perimetro bera duten laukizuzenen artean azalera maximoa duena karratua dela.

3.20 ariketa. Frogatu zirkulu batean inskribatu daitezkeen laukizuzen guztien artean karratuak azalera handiena duela.

3.21 ariketa. S azalera duten lauki zuzenen artean, zein da perimetrorik laburrena duena?

3.22 ariketa. Zein da R erradioko esfera batean sar daitezkeen zilindroetatik (itxiak) bolumenik handiena duena?

Eta azalerarik handiena?

3.23 ariketa.
(i) Bilatu $M = (p, p)$ puntutik $y^2 = 2px$ parabolara dagoen distantziarik laburrena.
(ii) Bilatu $M = (2, 0)$ puntutik $x^2 + y^2 = 1$ zirkunferentziara dagoen distantziarik laburrena eta luzeena.

3.24 ariketa. A eta B puntuak aurrez aurre daude 300 metroko zabalera duen ibai zuzen baten alde bakoitzean. B puntutik, eta alde berean, 600 metrora D puntua dago. Euskaltelek A puntutik D punturainoko zuntz optikoa eraiki egin nahi du. Jakin badakite urpekoa lurgainekoa baino %25 garestiagoa dela. Nola egin behar dute ahalik eta merkeena izan dadin?

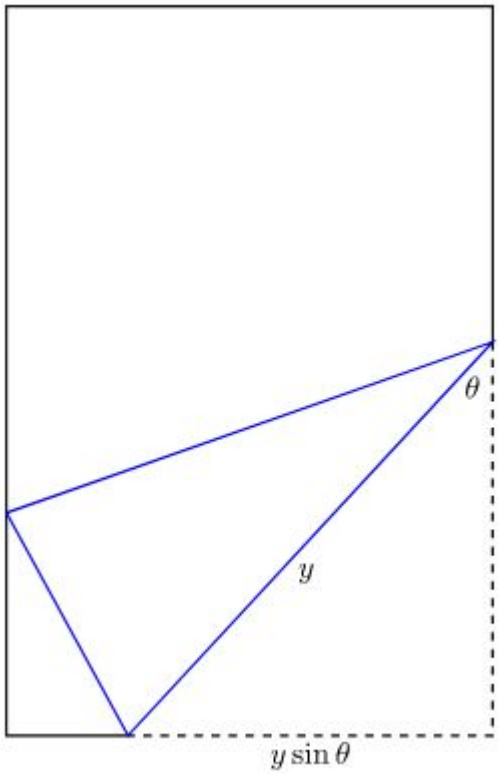
3.25 ariketa. Taparik gabeko kaxa kartoizko laukizuzen batetik eginda dago, kartoiko lau izkinetatik lau karratu berdinak kenduz eta geratzen diren aldeak gora

tolestuz. Kalkulatu bolumen handiena duen kaxaren neurriak, kartoizko laukizuzenak honako neurri hauek dituenean: (a) 10 eta 10; 12 eta 18.

3.26 ariketa. 100 cm luze den burdin hari bat moztu egiten da bi zatitan. Batekin lauki bat egiten da eta bestearekin borobil bat. Nola moztu egin behar da,

(i) perimetroen batura laburrena izan dadin;
(ii) azaleren batura handiena izan dadin.

3.27 ariketa. Orrialde baten beheko eskuinaldeko izkina tolestu, ezkerraldeko aldea ukitu arte (ikus irudia). Orrialdearen zabalera 15,24 cm dela suposatuz, topatu tolesaren luzera minimoa. Zein da toles minimoak eskuinaldeko aldearekin osatzen duen angelua? (Suposatu orrialdearen altuera nahiko luzea dela, tolesa goiko aldera irits ez dadin).



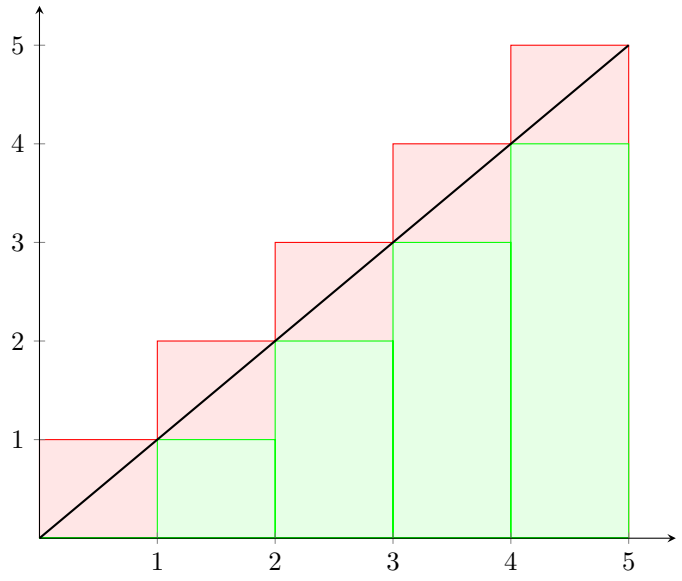
3.27 ariketaren irudia

4

Integralak

> Zientzia burmuinaren Kalkulu Diferentziala da. Artea, ordea, Kalkulu Integrala; izatez politak badira ere, elkarrekin dabiltzanean geldiezinak dira.
>
> R. Ross

Integralak azaleraren kontzeptuarekin lotuta daude. Esan dezagun $f(x) = x$ funtzioa daukagula $x = 0$ eta $x = 5$ puntuen artean, eta funtzioaren azpian dagoen eremuaren azalera kalkulatu nahi dugula. Argi dago, kasu honetan, azalera $\frac{25}{2}$ dela, triangelu zuzenaren azaleraren formula erabil dezakegulako. Bururatu dakigukeen ideia azalera poligono sinpleekin hurbiltzea da, eta poligonorik sinpleenetako bat laukizuzena da. Adibidez, $[0, 5]$ tartea 5 zatitan banatzen badugu, zati bakoitzean laukizuzen bat jar dezakegu, funtzioaren guztiz azpian dagoena (ikusi laukizuzen berdeak irudian).



Jakina, laukizuzen berdeen azaleren batura kalkulatu nahi dugun azalera baino txikiagoa da. Funtzioa goitik hurbildu dezakegu, laukizuzen berdeak eta gorriak kontuan hartuz. Hori dela eta, interesatzen zaigun azalera A ikurraz denotatzen badugu,

$$10 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \leq A \leq 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 15$$

ondoriozta dezakegu. Horrez gain, tartea zati gehiagotan banatuz eta prozesu bera errepikatuz, gero eta hurbilketa hobea eskuratu dezakegu. Hau da, $[0, 5]$ tartea luzera berdineko n zatitan banatzen badugu, partiketaren puntuak $k\frac{5}{n}$ egongo dira. Beraz,

$$0\frac{25}{n^2} + 1\frac{25}{n^2} + 2\frac{25}{n^2} + \ldots (n-1)\frac{25}{n^2} \leq A \leq 1\frac{25}{n^2} + 2\frac{25}{n^2} + \ldots (n-1)\frac{25}{n^2} + n\frac{25}{n^2}$$

dugu. Berridatziz,

$$\frac{25}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k \leq A \leq \frac{25}{n^2}\sum_{k=0}^{n} k.$$

Nahiz eta frogatzea erraza izan, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n+1)}{2}$ Karl Gauss matematikariak asmatutako formula ez dugu frogatuko. Formula hori aplikatuz,

$$\frac{25}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} \leq A \leq \frac{25}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}$$

dela dakusagu eta,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

direnez, $A = \frac{25}{2}$ izan behar dela jarraitu dezakegu.

4.1. ERRONKA. *Egin gauza bera $f(x) = x^2$ funtzioarekiko $[0, 3]$ tartean. ($\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ dela jakiteak lagundu diezazuke)*

Nahiz eta $f(x) = x$ funtziorako azalera kalkulatzeko beste modu bat egon, orokorrean, arestian bezala, azalera ≪behetik≫ eta ≪goitik≫ bakarrik hurbildu dezakegu. Hurbilketa horiek bat badatoz, azalera existitzen dela esan dezakegu. Orain, esandakoa matematikoki errepikatuko dugu.

4.1. Integralei buruzko teoremak eta propietateak

4.2. DEFINIZIOA. Izan bedi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funtzioa.

(i) Orduan, $\mathcal{P} = \{a = t_0, t_1, ..., t_{n-1}, b = t_n\}$ multzoa, non $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < b = t_n$ den, $[a, b]$ tartearen *partiketa* bat dela esango dugu.

(ii) Hartu $\mathcal{P} = \{a = t_0, t_1, ..., t_{n-1}, b = t_n\}$ $[a, b]$ tartearen partiketa. Jarri $m_i = \min_{x\in[t_i,t_{i+1}]} f$; hau da, m_i f-ren minimoa da $[t_{i-1}, t_i]$ tartean, $i = 1, \ldots, n$. Orduan, honako zenbaki hau *behe-batura* deitzen da:

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

(iii) Hartu $\mathcal{P} = \{a = t_0, t_1, ..., t_{n-1}, b = t_n\}$ $[a, b]$ tartearen partiketa. Jarri $M_i = \max_{x\in[t_i,t_{i+1}]} f$; hau da, m_i f-ren maximoa da $[t_{i-1}, t_i]$ tartean, $i = 1, \ldots, n$. Orduan, honako zenbaki hau *goi-batura* deitzen da:

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

(iv) Orduan, f funtzioa $[a, b]$ tartean *integragarria* dela esango dugu baldin eta honako baldintza hau betetzen bada:

$$I = \max\{s(f, \mathcal{P}) \,|\mathcal{P}\ [a, b]\text{-ren partiketa}\} = \min\{S(f, \mathcal{P}) \,|\mathcal{P}\ [a, b]\text{-ren partiketa}\}.$$

Hala bada, $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ idatziko dugu, eta I zenbakia *a eta b arteko f-ren integrala* dela esango dugu. Azkenik, $\int_a^a f(t)\ \mathrm{d}t = 0$ eta $\int_b^a f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ direla hitzartuko dugu.

Atalaren hasieran azaldu dugun moduan, a eta b arteko f-ren integrala $[a, b]$ tartean f funtzioak eta x ardatzak osatzen duten eremuaren azaleraren balioa baino ez da. Adibidez, $\displaystyle\int_0^5 t\ \mathrm{d}t = \frac{25}{2}$ dela frogatu dugu arestian. Dena den, $f(x) = x$ funtzioarekin egindako prozesua ezin da edozein funtziorekin errepikatu integrala (edo azalera) kalkulatzeko. Izan ere, integralak ez du zertan existitu behar, honako adibide honek erakusten digun bezala.

4.3. ADIBIDEA. Izan bedi $\chi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ honako funtzio erreal hau:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \text{ bada} \\ 0, & \text{bestela} \end{cases}.$$

Batzuetan, $\chi(x)$ *Dirichlet-en funtzioa* deitzen da. Edozein $\mathcal{P} = \{0 = t_0, t_1, ..., t_{n-1}, 1 = t_n\}$ partiketa hartuta, $[t_i, t_{i+1}]$ tartean beti zenbaki arrazional bat eta ez-arrazional bat topatu ditzakegu. Beraz, $m_i = 0$ eta $M_i = 1$ direla ondoriozta dezakegu i guztietarako, eta χ-ren behe-batura 0 eta goi-batura 1 izango dira.

Aitzitik, honako teorema honek ohiko funtzioak integragarriak direla erakutsiko digu.

4.4. TEOREMA. *Izan bedi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funtzio jarraitua. Orduan, f funtzioa $[a, b]$ tartean integragarria da.*

Aurreko teoremaren frogapena ≪aldaketa txikien teorema≫n datza. Funtsean, f jarraitua bada, edozein δ zenbaki positibo emanda ε hain txikia aukeratu dezakegu, non f-ren aldaketak δ baino txikiagoak diren ε luzerako tarte guztietan. Ildo beretik jarraituz, aldaketak tarte txikietan txikiak badira, orduan bai maximoa eta minimoa, bai behe-batura eta goi-batura hurbil egongo dira tarte horietan.

Integrala existitzen dela dakigunean, integral batzuk zati sinpleagoetan banatu ditzakegula erakutsiko dugu, eta integralen beste hainbat propietate honako teorema honek emango dizkigu.

4.5. TEOREMA (Integralen propietateak). *Izan bitez $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funtzio jarraituak. Orduan:*

(i) *$a < c < b$ bada,* $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x.$

(ii) $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$

(iii) *$\lambda \in \mathbb{R}$ bada,* $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(x))\ \mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$

(iv) *$f(x) \geq 0$ bada,* $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geq 0$ *da.*

(v) *$f(x) \geq g(x)$ bada,* $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$ *da.*

(vi) *m eta M f-ren minimoa eta maximoa badira $[a, b]$ tartean, orduan*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

Frogapena. Parte guztien frogapena laukizuzenetarako oso erraza da. Funtzio orokorretarako frogapena erraz ondorioztatzen da aurreko kasutik. □

Integralak kalkulatzeko metodo azkarragoa edukitzea ondo letorkiguke, eta hori da *Kalkulu Integralaren Oinarrizko Teorema*ren helburua. Hala ere, teorema honen garrantzia azalerak kalkulatzea baino harago doa, deribatuak integralei lotzen dizkielako. Teorema frogatu aurretik, zerbait azpimarratuko dugu: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funtzio jarraitua emanda, honako funtzio berri hau definitu dezakegu:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t, \quad x \in [a, b].$$

Adibidez, $f(x) = x$ bada $[0, 2]$ tartean, orduan $F(x) = x^2/2$, $x \in [0, 2]$ guztietarako.

Gainera, honako lema hau erabilgarria izango da.

4.6. lema (Integraletako batez besteko balioaren teorema). *Izan bedi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funtzio jarraitua. Orduan, $c \in (a, b)$ existitzen da, non*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \qquad \textit{den.}$$

Frogapena. Jarri $I = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$. Izan bitez m eta M f-ren balio minimoa eta maximoa $[a, b]$ tartean, hurrenez hurren. Beraz, $m \leq f(x) \leq M$ dela dugu $x \in [a, b]$ guztietarako, eta 4.5 teoremaren (v)-garren parteak $m(b-a) \leq I \leq M(b-a)$ dela esaten digu. Hori dela eta, $m \leq \frac{1}{b-a} I \leq M$ da, eta, 2.17 teoremarengatik, nahi dugun $c \in (a, b)$ zenbakia existitzen da. □

4.7. teorema (Kalkulu Integralaren Oinarrizko Teorema). *Izan bitez f funtzio jarraitua $[a, b]$ tartean eta $F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$, $x \in [a, b]$ denean. Orduan, honako propietate hauek betetzen dira:*

(i) *F jarraitua da $[a, b]$ tartean.*

(ii) *F deribagarria da $[a, b]$ tartean, eta $F'(x) = f(x)$ da $x \in [a, b]$ guztietarako.*

Frogapena. Lehenik eta behin, bigarren partea frogatuz gero, lehen partea ere frogatuta geratuko da, funtzio deribagarria jarraitua baita (ikusi 3.4 teorema).

Bigarrenik, $x \in [a,b]$ guztietarako $F'(x) = f(x)$ betetzen dela frogatuko bagenu, orduan f deribagarria dela jarraitu genezake, eta frogapena bukatu egingo litzateke. Hori dela eta, hori frogatuko dugu.

Izan bedi $x_0 \in [a,b]$ puntua eta $h > 0$ ($h < 0$ bada, frogapena ia-ia berdina da). F-ren deribatua kalkulatzeko, $F(x_0 + h) - F(x_0)$ espresioa kalkulatu behar dugu. Hau da,

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Ohartu 4.5(i) teorema erabili dugula. 4.6 lemaren arabera, $c \in (x_0, x_0+h)$ existitzen da, non $f(c) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{d}t$ den. Orain, h 0-ra badoa, c x_0-ra joango da, c-ren balioa x_0 eta $x_0 + h$-ren artean dagoelako, eta, f x_0 puntuan jarraitua denez,

$$\lim_{h\to 0} f(c) = f(x_0)$$

izango da. Bestetik,

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = F'(x_0) \qquad \text{da,}$$

F'-en definizioa dela eta. Horrenbestez, $F'(x_0) = f(x_0)$ eta F deribagarria da x_0 puntuan. □

Aurreko teoremak honako definizio hau iradokitzen digu.

4.8. DEFINIZIOA. Izan bedi $F, f : (a,b) \to \mathbb{R}$ funtzioa. Orduan, F funtzioa f-ren *jatorrizkoa* dela esaten da (a,b) tartean, baldin eta $F'(x) = f(x)$ betetzen bada $x \in (a,b)$ guztietarako. Jatorrizko bat adierazteko

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x$$

ikurra erabiliko da.

Aurreko notazioa justifikatzeko, honako teorema hau emango dugu.

4.9. TEOREMA. *Izan bedi $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ funtzio erreala. Demagun $F, G : (a,b) \to \mathbb{R}$ f-ren bi jatorrizko direla. Orduan, F eta G konstante batean baino ez dira desberdintzen. Hau da,*

$$F(x) - G(x) = K \qquad \textit{da.}$$

FROGAPENA. Frogapena oso erraza da. F eta G f-ren jatorrizkoak direnez, $F'(x) = G'(x) = f(x)$ da. Beraz, $F'(x) - G'(x) = 0$ izango da. Baina, 3.19(iii) teorema erabiliz, $F - G$ konstantea dela jarraitu dezakegu. □

Jatorrizkoak oso erabilgarriak dira integralak kalkulatzeko orduan.

4.10. TEOREMA (Barrow-ren erregela). *Izan bitez $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funtzio jarraitua eta G f-ren jatorrizko funtzio bat. Orduan:*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = G(b) - G(a).$$

FROGAPENA. 4.9 teorema erabiliz, badakigu K konstantea existitzen dela, non

$$G(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t + K$$

den, $\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ f-ren jatorrizkoa delako (ikusi 4.7 teorema). Beraz,

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = (G(b) + K) - (G(a) + K) = G(b) - G(a).$$

□

NOTAZIOA. Hainbat aldiz erabiltzen dugunez, aurreko teoreman agertzen diren G jatorrizko funtzioaren balioak adierazteko idazkera berezia sartuko dugu. Hain zuzen,

$$G(b) - G(a) = \big[G(x)\big]_a^b$$

idatziko dugu.

4.2. Integralen kalkulua

Kurtso honetan integral mota batzuk baino ez dugu ikasiko. Berehalako integralak ikusi ondoren, integralak ebazteko bi teknika adieraziko ditugu: zatikako integrazioa eta aldagai-aldaketa. Azkenik, bi integral mota bereziak ikertuko ditugu: funtzio arrazionalen integralak eta funtzio trigonometriko integralak. Integral mota ugari egon arren, adierazitako motak baino ez dugu kontuan hartuko.

4.2.1. Berehalako integralak. Zoritxarrez, deribatuak kalkulatzen ez bezala, integralak kalkulatzeko ez da metodo orokorrik existitzen. Hain zuzen, ezin da integral orokorra formula batekin ebatzi. Hala eta guztiz ere, integral batzen ebazpenak errazak dira egiaztatzeko.

4.11. ADIBIDEA. Honako integral hauek berehalakoak dira.

(1) $\displaystyle\int x^\alpha\ \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \ln(x)$.

(3) $\displaystyle\int e^x\ \mathrm{d}x = e^x$.

(4) $\displaystyle\int \sin x\ \mathrm{d}x = -\cos x$.

(5) $\displaystyle\int \cos x\ \mathrm{d}x = \sin x$.

(6) $\displaystyle\int \tan x\ \mathrm{d}x = -\ln(\cos x)$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \arctan x$.

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = \arcsin x$, $-1 < x < 1$ bada.

(9) $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = \arccos x$, $-1 < x < 1$ bada

Beste alde batetik, integralak kalkulatzeko metodo ugari adieraziko ditugu laster.

4.2.2. Zatikako integrazioa. Lehen formula $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ berdintzatik zuzen-zuzen ondoriozta daiteke.

4.12. LEMA (Zatikako integrazioa). *Izan bitez $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funtzio deribagarriak. Orduan,*

$$\int f(t)g'(t)\ \mathrm{d}t = f(x)g(x) - \int f'(t)g(t)\ \mathrm{d}t.$$

Lema hori oso onuragarria da, deribatzeko erraza den funtzioaren eta integratzeko erraza den funtzioaren biderkadura daukagunean.

4.13. ADIBIDEA.

$$\int xe^x\ \mathrm{d}x = xe^x - e^x \quad \text{eta} \quad \int x \ln x\ \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2.$$

4.2.3. Aldagai-aldaketa. Izan bedi F f-ren jatorrizkoa. Baldin eta $x = g(t)$ bada, orduan:

$$(F(g(t))'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t),$$

katea erregela dela eta. Ondorioz:

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int f(g(t))g'(t)\ \mathrm{d}t. \tag{4.1}$$

Normalean, aldrebes erabiltzen da formula hori, laster ikusiko dugun bezala. Orain, formula gogoratzeko metodoa aipatuko dugu: $x = g(t)$ bada, fisikan ohikoa da $x = \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$ idaztea, eta bi aldeetan $\mathrm{d}t$-z ≪biderkatuz≫, $x\mathrm{d}t = g(t)$ dela aterako litzaiguke. Dena den, hori metodo mnemonikoa baino ez da, eta matematikoki ez du zentzurik.

4.14. ADIBIDEA. Adibide honetan

$$\int \frac{2x}{x^2+3}\ \mathrm{d}x = \ln(x^2+3)$$

dela frogatuko dugu. Integralaren barruko zatitzailean $x^2 + 3$ daukagu, eta bere deribatua $2x$ da. Hori dela eta, $x^2 + 3 = g(t)$ eta $f(x) = \frac{1}{x}$ idatziz,

$$\frac{2x}{x^2+3} = (f \circ g)(t) \cdot g'(t)$$

dela daukagu. Baina f-ren integrala berehalakoa da, eta (4.1) erabiliz,

$$\int \frac{g'(t)}{g(t)}\ \mathrm{d}t = \ln(g(t)) = \ln(x^2+3).$$

Modu berean,

$$\int x^2 e^{x^3}\ \mathrm{d}x = \frac{e^{x^3}}{3}$$

dela dugu.

4.2.4. Integral arrazionalak. Integral arrazional batzuen integrazioa berehalakoa da:

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \ln(x-a)$.

(ii) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^m}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{m-1}\frac{1}{(x-a)^{m-1}}$.

4.15. ADIBIDEAK. (i) $\displaystyle\int \frac{10}{x-2}\,\mathrm{d}x = 10\ln(x-2)$.

(ii) $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x)^{10}}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{y^{10}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{9}\frac{1}{(1-x)^9}$. Ohartu $y = 1-x$ eta $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x$ aldaketak egin ditugula.

Laster integral arrazional guztiak nola ebatzi ikusiko dugu. Hori baino lehen, hainbat kasu berezirekin lan egin behar dugu.

Lehen kasu berezia $\boxed{\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x}$ motako integrala da, non izendatzailea 1 mailako polinomioa eta zatitzailea erro konplexu ez-errealak dituen bigarren mailako polinomioa diren. Kasu honetan, lehenik zatitzailearen deribatua izendatzailean lortu behar dugu: $C, D \in \mathbb{R}$ aukeratu ditzakegu, non

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \int \frac{C(2x+p)+D}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = C\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x + D\int \frac{1}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$$

den. Orain, lehen integrala berehalakoa da:

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+px+q).$$

Bigarren integrala ebazteko, zatitzailea honako modu honetan berridatziko dugu:

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q.$$

Orain, x^2+px+q polinomioak erro errealik ez duenez, badakigu bere diskriminatzaileak p^2-4q negatiboa izan behar duela. Horregatik, $-\frac{p^2}{4}+q \geq 0$ da, eta horren m erro karratua atera dezakegu. Hortaz,

$$x^2+px+q = m^2 + \left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

dela idatzi dezakegu, non m zenbaki *positiboa* den.

Azkenik, integralera bueltan,

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{m^2+\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

dugu. Bukatzeko, $t = x+\frac{p}{2}$ aldagai-aldaketa eginez (ohartu $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$ dela kasu honetan), honako hau dugu:

$$\int \frac{1}{m^2+\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{m^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{m^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{m}\right)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{m}\arctan\left(\frac{t}{m}\right) = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right).$$

Bigarren kasu berezia $\boxed{\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x}$ motakoa da, non izendatzailea 1 mailako polinomioa eta zatitzailea erro konplexu ez-errealak dituen bigarren mailako polinomioa diren. Lehen bezala, lehenik zatitzailearen deribatua izendatzailean lortu behar dugu: $C, D \in \mathbb{R}$ aukeratu ditzakegu, non

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{C(2x+p)+D}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = C\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x + \\ + D\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$$

den. Orain lehen integrala berehalakoa da:

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n-1}\left(x^2+px+q\right)^{-n+1}.$$

Orain, aurreko puntuaren pausoak errepikatuz, bigarren integrala honako modu honetan idatz dezakegu:

$$\int \frac{1}{(m^2+t^2)^n}\,\mathrm{d}t.$$

Lehen ez bezala, integral hau ebazteko komenigarria da *aldaketa trigonometrikoa* erabiltzea: $t = m\tan u$. Beraz,

$$\left(m^2+t^2\right)^n = m^{2n}\left(1+\tan^2 u\right)^n = m^{2n}\frac{1}{\cos^{2n} u} \quad \text{eta} \quad \mathrm{d}t = \frac{m}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u.$$

Horrenbestez,

$$\int \frac{1}{(m^2+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{m^{2n-1}}\int \cos^{2n-2} u\,\mathrm{d}u. \tag{4.2}$$

Ez dugu integral hori orain ebatziko, geroago integral trigonometrikoak orokorrean nola ebatzi ikusiko dugulako.

Azkenik, integral arrazional orokorrak landuko ditugu. Hau da, izan bedi $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, non $P(x)$ m mailako polinomioa eta $Q(x)$ n mailako polinomioa diren. Kasuak bereiziko ditugu:

(i) $m \geq n$ bada, orduan kasu honetan zatiketa egin behar dugu:

$$R(x) = M(x) + \frac{H(x)}{Q(x)}$$

izango da, H-ren maila Q-rena baino txikiagoa izanik. Orduan:

$$\int R(x)\,\mathrm{d}x = \int M(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{H(x)}{Q(x)}\,dx$$

eta hurrengo partean integral hori nola ebatzi adieraziko dugu.

(ii) $m < n$ bada, orduan $Q(x)$ polinomioa deskonposatuko dugu:

$$Q(x) = (x-a_1)^{n_1}\dots(x-a_s)^{n_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_mx+q_m)^{l_m},$$

non $(x-a_i)^{n_i}$ biderkagaiek Q-ren erro errealak (sinpleak eta anizkoitzak) adierazten dituzten eta $(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}$ biderkagaiek Q-ren erro konplexuak (sinpleak eta anizkoitzak) adierazten dituzten.

Bukatzeko, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ funtzio arrazionalak gutxienez honako mota honetako deskonposaketa bat onartzen duela ohartzen gara:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} =& \frac{A_1^{(1)}}{x-a_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{n_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{n_1}} + \ldots + \\ &+ \frac{A_1^{(s)}}{x-a_s} + \frac{A_2^{(s)}}{(x-a_s)^2} + \ldots + \frac{A_{n_s}^{(s)}}{(x-a_s)^{n_s}} + \\ &+ \frac{B_1^{(1)}x + D_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots + \frac{B_{l_1}^{(1)}x + D_{l_1}^{(1)}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}} + \ldots + \\ &+ \frac{B_1^{(m)}x + D_1^{(m)}}{x^2+p_mx+q_m} + \ldots + \frac{B_{l_m}^{(m)}x + D_{l_m}^{(m)}}{\left(x^2+p_mx+q_m\right)^{l_m}}.\end{aligned}$$

Nahiz eta luzea izan, aurreko formulak ez zintuzkete izutu beharko, horren adibide ugari emango baititugu. Beraz, koefizienteak lortu ondoren, $R(x)$-ren integrala kalkulatzeko funtzio arrazional sinpleen integralak kalkulatu baino ez dugu egin behar.

Hurrengo adibideetan funtzio arrazionalen integral asko ebatziko ditugu, aurreko paragrafoetako integral mota guztiak ikusiz.

4.16. ADIBIDEA. Kalkulatu honako integral hau:

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x.$$

Esan bezala, zatitzailearen deribatua izendatzailean agerraraziko dugu: hau da, A eta B zenbaki errealak topatuko ditugu, non $A(2x+2)+B = 3x+1$ den. Hortaz, bi polinomio horien koefizienteak berdinak izan behar dira:

$$\underbrace{2A}_{x\text{-ren koef.}}\; x + \underbrace{2A+B}_{\text{gai askea}} = 3x+1 \Longrightarrow \begin{cases} 2A = 3 \\ 2A+B = 1 \end{cases} \Longrightarrow A = \frac{3}{2} \quad \text{eta} \quad B = -2$$

Horregatik, honako deskonposaketa hau daukagu:

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x.$$

Lehen integralaren soluzioa $\ln\left(x^2+x+2\right)$ da.

Bigarrenerako, $m^2 = q - \frac{p^2}{4} = 3 - \frac{4}{4} = 2$ hartuz, $m = \sqrt{2}$ daukagu eta

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2+(x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Orain, $x+1 = t$ aldagai-aldaketa eginez:

$$\int \frac{1}{2+(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right).$$

Dena elkarrekin berriro idatziz, hasierako integralaren soluzioa honako hau da:

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left(x^2+x+2\right) - \frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right).$$

4.17. ADIBIDEA. Kalkulatu honako integral hau:

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Arestian bezala,

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

eta lehen integrala $-(x^2+x+1)^{-1}$ da.

Bigarren integrala askatzeko, $m^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ eta $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ditugunez eta $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan u$ eginez,

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\int \cos^2 u\,\mathrm{d}u.$$

Gutxi barru, integral hori nola ebatzi azalduko dugu.

4.18. ADIBIDEA. Kalkulatu honako integral hau:

$$\int \frac{1}{(x^2-x+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x.$$

Lehenik, x^2-x+1 polinomioak erru errealik ez duela azpimarratuko dugu. Beraz, ondoko deskonposaketa hau egiteko esaten digu metodoak:

$$\frac{1}{(x^2-x+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+D}{x^2-x+1}.$$

Eskuineko aldean kalkulu egin eta izendatzaileak begiratu eta gero, A, B eta D balioek honako ekuazio hau bete behar dutela jarraitu dezakegu:

$$1 = (A+B)x^2 + (-A-B+D)x + (A-D).$$

Ezkerraldean x^2 eta x agertzen ez direnez, dagozkien koefizienteak 0 izango dira, eta gai askea, aldiz, 1:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A-B+D=0 \\ A-D=1 \end{cases} \implies A=1,\ B=-1 \quad \text{eta} \quad D=0.$$

Horrenbestez,

$$\int \frac{1}{(x^2-x+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Lehen integrala berehalakoa da, eta bere soluzioa $\ln(x-1)$ da. Bigarren integrala 4.16 adibidearekin antzekoa da, eta, ikusitako pausoak errepikatuz, bere soluzioa

$$\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

da. Azkenik, soluzio osoa honako hau da:

$$\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right).$$

4.19. ERRONKA. *Kalkulatu honako integral hau:*

$$\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}\ \mathrm{d}x.$$

4.2.5. Integral trigonometrikoak. Hasteko, (4.2) ekuazioan ikusi dugun integrala ebatziko dugu; hau da,

$$\int \cos^{2n} x\ \mathrm{d}x.$$

Kasu berezi honetan, komenigarria da $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ erlazioa erabiltzea. Erlazio hori (1.5) ekuaziotik ondoriozta dezakegu, (1.5) ekuazioan $x = y$ hartuz eta (1.4) erlazioa erabiliz. Orduan,

$$\int \cos^{2n} x\ \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^n\ \mathrm{d}x.$$

Orain, Newtonen formula binomialaren arabera:

$$\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^k(2x)$$

eta, k bikoitia bada, berriro hasierako metodoa aplikatuko diogu $\cos^k(2x)$ funtzioari. Aitzitik, $k = 2\ell+1$ bakoitia bada, honako hau egingo dugu:

$$\int \cos^k(2x)\ \mathrm{d}x = \int \cos^{2\ell}(2x)\cdot\cos(2x)\ \mathrm{d}x = \int \left(1-\sin^2(2x)\right)^\ell \cos(2x)\ \mathrm{d}x.$$

Orain $t = \sin(2x)$ aldagai-aldaketa egiten badugu, $\mathrm{d}t = 2\cos(2x)\mathrm{d}x$ izango da eta

$$\int \left(1-\sin^2(2x)\right)^\ell \cos(2x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1-t^2)^\ell\ \mathrm{d}t$$

polinomio baten integrala bihurtu da, erraz ebatz dezakeguna. Azaldutako metodoa adibide batean errpikatuko dugu orain.

4.20. ADIBIDEA. Kalkulatu honako integral hau:

$$\int \cos^6 x\ \mathrm{d}x.$$

Esan bezala, lehenik $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ erlazioa erabiliko dugu:

$$\int \cos^6 x\ \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^3\ \mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{8}\int \left(1+3\cos(2x)+3\cos^2(2x)+\cos^3(2x)\right)\ \mathrm{d}x. \quad (4.3)$$

Lehen eta bigarren terminoen integralak berehalakoak dira: $\int 1\ \mathrm{d}x = x$ eta $\int \cos(2x)\ \mathrm{d}x = \dfrac{\sin(2x)}{2}$. Hirugarren terminorako, berriro hasierako erlazioa erabili dezakegu:

$$\int \cos^2(2x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos(4x)}{2}\ \mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin(4x)}{8}.$$

Azken terminoa integratzeko, idatzi

$$\int \cos^3(2x)\,\mathrm{d}x = \int (1-\sin^2(2x))\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1-t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\sin^3(2x)}{6}.$$

Bukatzeko, kalkulatu dugun guztia (4.3) ekuazioan jarriz, honako hau izango dugu:

$$\frac{1}{8}\left(x + 3\frac{\sin(2x)}{2} + 3\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin(4x)}{8}\right) + \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\sin^3(2x)}{6}\right).$$

Azpimarratzekoa da $\cos^{2n} x$ funtzioaren integrazioa berezi samarra dela, eta (ia-ia) beste funtzio trigonometriko guztietarako honako *aldaketa unibertsal* hau egin dezakegula:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right). \tag{4.4}$$

Beraz, $x = 2\arctan(t)$ da, eta $\mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$ idatz dezakegu. Bestetik, sin eta cos funtzioetarako:

$$\sin x = \sin\left(2\frac{x}{2}\right) = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

dela dugu. Orain, izendatzailean eta zatitzailean $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ komunean hartuz:

$$\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Prozesu bera $\cos x$ funtzioarekin eginez, honako hau dugu:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Beraz, honako hau *aldaketa unibertsala* dela esango dugu:

$$\boxed{t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.}$$

Aldaketa unibertsala egiten badugu, edozein integral trigonometriko integral arrazional bihurtzen da.

4.21. ADIBIDEA. Kalkulatu honako integral hau:

$$\int \frac{\sin x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Egin aldaketa unibertsala:

$$\int \frac{\sin x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 4\int \frac{t}{(1+t^2)(2t^2-t+3)}\,\mathrm{d}t.$$

Azken integral hori bi polinomioen arteko zatiketa bat da, eta hori ebatz dezakegu aurreko orrialdeetan ikusitako metodoa erabiliz.

4.2.6. Integral irrazional batzuk. Funtzio orokorrak integratzea biziki zaila izan daiteke. Hemen kasu berezi batzuk baino ez ditugu ikusiko.

Izan bitez p eta q zenbaki erreal positiboak eta R funtzio arrazionala. Orduan, honako hiru integral irrazional mota hauek kontuan hartuko ditugu, eta, bakoitzeko, zein aldaketa egin behar dugun azpimarratuko dugu:

(A) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{px^2+q}\right) \mathrm{d}x$ badugu, egin $x = \dfrac{\sqrt{q}\tan t}{\sqrt{p}}$ aldagai-aldaketa.

(B) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{px^2-q}\right) \mathrm{d}x$ badugu, egin $x = \dfrac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}\cos t}$ aldagai-aldaketa.

(D) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{q-px^2}\right) \mathrm{d}x$ badugu, egin $x = \dfrac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}\sin t}$ aldagai-aldaketa.

4.22. ADIBIDEA. Kalkulatu $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}x$. Esan bezala, egin $x = \tan t$ aldagai-aldaketa: $\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2 t}\ \mathrm{d}t$ eta

$$\int \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \int \sqrt{1+\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)^2}\frac{1}{\cos^2 t}\ \mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos^3 t}\ \mathrm{d}t = \int \frac{\cos t}{(1-\sin^2 t)}\ \mathrm{d}t$$

direla dugu. Beraz, $u = \sin t$ aldagai-aldaketa eginez,

$$\int \frac{\cos t}{(1-\sin^2 t)}\ \mathrm{d}t = \int \frac{1}{1-u^2}\ \mathrm{d}u$$

eta integral arrazional hori ebatzi eta gero, soluzioa honako hau dela jarraitu dezakegu:

$$-\frac{1}{2}\ln(1-u) + \frac{1}{2}\ln(1+u).$$

4.23. ADIBIDEA. Kalkulatu $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\ \mathrm{d}x$. (B) kasuan gaudenez, $t = \dfrac{1}{\cos t}$ aldaketa egingo dugu, eta $\mathrm{d}x = \frac{\sin t}{\cos^2 t}\ \mathrm{d}t$ izango da. Beraz,

$$\int \sqrt{x^2-1}\ \mathrm{d}x = \int \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}\frac{\sin t}{\cos^2 t}\ \mathrm{d}t = \int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}\ \mathrm{d}t$$

integral trigonometrikoa da, eta aldaketa unibertsala erabil dezakegu hori ebazteko.

4.24. ERRONKA. *Kalkulatu* $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x$.

4.3. Azalera eta bolumena kalkulatzea

4.3.1. Azalera. Aurreko ataletan, integralaren esanahia funtzio baten azpian dagoen azaleraren tamaina dela ikusi dugu. Horregatik, argi dago integralak erabili ditzakegula *bi* funtzioek mugatzen duten azalera kalkulatzeko.

Izan bitez $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funtzio jarraituak. Orduan, $[a,b]$ tartean f eta g funtzioek mugatzen duten eskualdearen azalera honako hau da:

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\ \mathrm{d}x.$$

Horixe aplikatuko dugu honako adibide honetan.

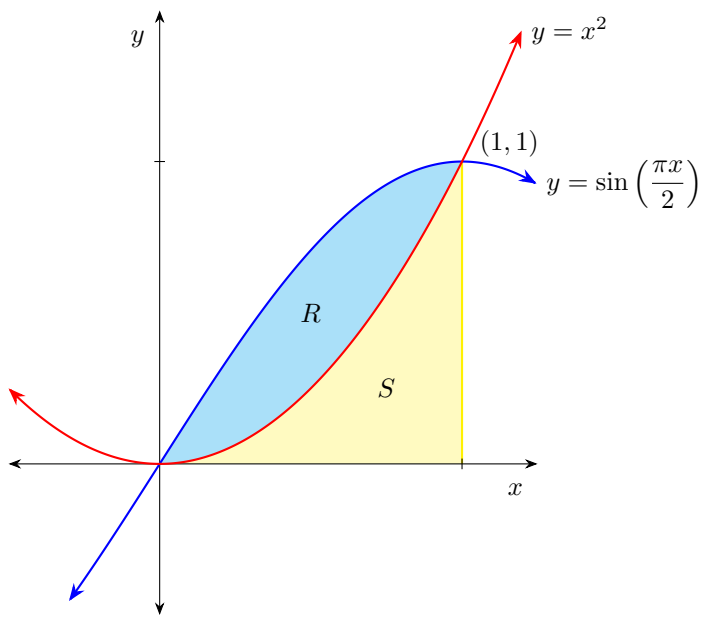
4.25. ADIBIDEA. Izan bitez $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ eta $g(x) = x^2$ funtzioak. f-ren eta g-ren arteko azalera $[0,1]$ tartean kalkulatu nahi dugu. Kasu honetan honako irudi honetan agertzen den R eskualdearen tamaina kalkulatu nahi dugu.

Lehenik eta behin, f-ren eta g-ren ebaki-puntuak kalkulatuko ditugu: hori egiteko, $f(x) = g(x)$ ekuazioa $[0,1]$ tartean ebatzi behar dugu.

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = x^2 \iff x = 0, 1.$$

Orduan, honako integral hau kalkulatu nahi dugu:

$$\int_0^1 \left|\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - x^2\right| \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \, \mathrm{d}y - \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{2}{\pi}\Big[\cos y\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{3}.$$



4.26. ADIBIDEA. Kalkulatu honako bi kurba hauek osatzen duten eskualdearen azalera:

$$y = \sqrt{|x|} + 1 \quad \text{eta} \quad y = |x| - 1$$

(Ohar bedi $\sqrt{|x|} + 1 = |x| - 1$ bada, orduan $|x| \geq 2$ izan behar dela. Gainera, $|-x| = |x|$ da.)

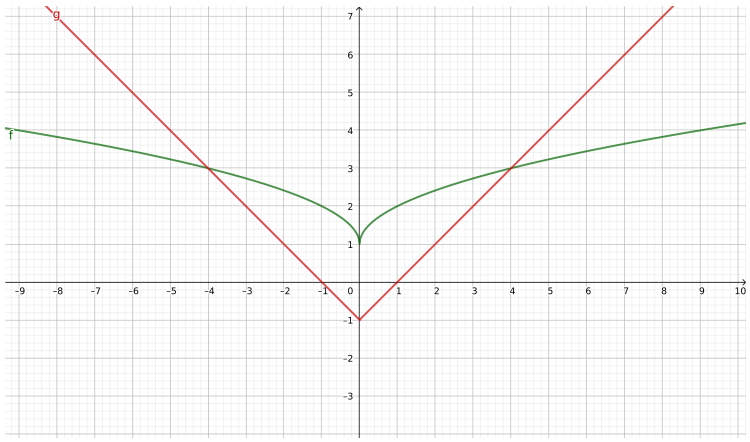
Lehenik, $|-x| = |x|$ denez, funtzio biak bikoitiak dira. Beraz, nahikoa da $x \geq 0$-ko kalkuluak egitea eta finean bikoiztea. Orain, $\sqrt{x}+1 = x-1$ bada, orduan $\sqrt{x} = x - 2$ da. Karratuak hartu ondoren, $x^2 - 3x + 2 = 0$ ekuazioa askatuko dugu. Erroak $x = 1$ eta $x = 2$ dira. Dena den, oharra gogoratuz, $x = 1$ ezin dela soluziotzat onartzen eta $x = 2$ soluzio bakarra dela ondoriozta dezakegu. Integrala

kalkulatzea falta zaigu:

$$\int_0^2 [\sqrt{x}+1-(x-1)]\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + 2\,[x]_0^2 = \frac{4}{3}\sqrt{2}+2.$$

Horrenbestez, A eskualde osoaren azalera bikoitza da: $A = \frac{8}{3}\sqrt{2}+4$.

Hona hemen irudia:



4.3.2. Biraketa-gorputzen bolumena. Atal honetan biraketa-gorputzak kontuan hartuko ditugu. Geometrian nonahikoak dira: esfera, zilindroa, konoa eta abar. Dena den, orain biraketa-gorputz orokorrak sartuko ditugu eta beraien bolumena kalkulatzeko formula orokorra emango dugu.

Izan bitez f eta g funtzio jarraituak $[a,b]$ tartean, non $f(x) \geq g(x)$ den. Kontuan hartu f-ren eta g-ren grafikoek, x ardatzak, $x=a$ eta $x=b$ zuzenek mugatzen duten planoko eremua. Eremu hori x ardatzarekiko biratzean, *biraketa-gorputza* sortzen da 3 dimentsioko espazioan. Gorputz horren bolumena honela kalkulatzen da:

$$B = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2]\ \mathrm{d}x.$$

4.27. ADIBIDEA. Aurreko adibidearen ideia $f(x)=r$ funtzio konstantearekin errepikatuz, zilindroaren bolumenaren formula berreskura dezakegu: berriro $f(x)=r$ funtzioa $[0,h]$ tartean x ardatzarekiko biratzean r erradioko eta h altuerako zilindroa lortzen da, eta bere bolumena

$$B = \pi \int_0^h r^2\ \mathrm{d}x = \pi r^2 \big[x\big]_0^h = \pi r^2 h$$

izango da, formula ospetsua dena.

4.28. ADIBIDEA. Izan bedi $x^2+(y-2)^2=1$ kurba. Kalkulatu kurbak x ardatzarekiko sortzen duen biraketa-gorputzaren bolumena. Lehenik eta behin, gure metodoa soilik funtzionatuko du, baldin eta bi funtzio badauzkagu. Hori dela eta, bi funtzio aterako ditugu:

$$x^2+(y-2)^2=1 \Longrightarrow \begin{cases} y = 2+\sqrt{1-x^2} \\ y = 2-\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

(Lehen funtzioa goiko zirkuluerdiari dagokio, eta bigarrena, aldiz, behekoari) Beste alde batetik, funtzio horien ebaki-puntuak kalkula ditzakegu:

$$2+\sqrt{1-x^2}=2-\sqrt{1-x^2}\iff x=\pm 1.$$

Beraz, $y=2+\sqrt{1-x^2}$ eta $y=2-\sqrt{1-x^2}$ funtzioak $[-1,1]$ tartean x ardatzarekiko biratzean *erroskila* bat lortuko dugu, eta bere bolumena honako hau izango da:

$$\begin{aligned}B&=\pi\int_{-1}^{1}\left[(2+\sqrt{1-x^2})^2-(2-\sqrt{1-x^2})^2\right]\,\mathrm{d}x=\\&=\pi\int_{-1}^{1}\left[(\cancel{4}+\cancel{1-x^2}+4\sqrt{1-x^2})-(\cancel{4}+\cancel{1-x^2}-4\sqrt{1-x^2})\right]\,\mathrm{d}x=\\&=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Orain integral irrazionala da, eta, ebatzi eta gero, bolumenaren balioa $4\pi^2$ izango da.

4.4. Bigarren ordenagailuko praktika: Taylorren polinomioa eta integral numerikoak

Funtzioak integratzeko metodo asko ikasi ditugu aurreko orrialdeetan. Hala ere, badaude lehenago adierazitako metodoekin ebatzi ezin ditugun funtzioak. Adibidez,

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

4.7 teoremarengatik, $F(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ funtzio jarraitua dela dakigu, baina nola kalkula dezakegu $F(1)$?

Ingeniaritzan (eta beste zientzia askotan) emaitza zehatzak ez zaizkigu interesatzen, hurbilketak baizik. Hori dela eta, funtzioaren hurbilketa kalkulatzeko metodo bat adieraziko dugu, *Taylorren polinomioa* erabiliz.

Izan bitez $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ funtzio n aldiz deribagarria eta $x_0\in(a,b)$. Orduan, deribatuaren definizioa eman dugunean, pentsa genezake x_0 puntuko f-ren *hurbilketa lineala* x_0 puntuan f ukitzen duen zuzena dela. Hau da, f honako modu honetan idatz dezakegu:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+R_1(x),$$

non $R_1(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$ hurbilketa linealaren *errorea* den.

Beraz,

$$\begin{aligned}R_1(x)&=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=\int_{x_0}^{x}(f'(t)-f'(x_0))\,\mathrm{d}t=\\&=\int_{x_0}^{x}(f'(t)-f'(x_0))\cdot\underbrace{(t-x)'}_{=1}\,\mathrm{d}t=\Big[(f'(t)-f'(x_0))\cdot(t-x)\Big]_{x_0}^{x}-\int_{x_0}^{x}f''(t)(t-x)\,\mathrm{d}t=\\&=\int_{x_0}^{x}f''(t)(x-t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

dela dugu.

Era berean, f-ren *hurbilketa koadratikoa* egiten saiatu gaitezke: hots, 2 mailako polinomio bat idatziko dugu, non f-ren deribatuak eta polinomioarenak bat datozen. Orduan, honako hau izango dugu:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + R_2(x),$$

non $R_2(x)$ hurbilketa koadratikoaren *errorea* den. Berriro pauso berak errepikatuz,

$$R_2(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x - t)^2 \, \mathrm{d}t$$

dela dugu. Halaber, orokorrean, f-ren n mailako *Taylorren polinomioa* eta *n-garren errorea* honako hauek dira:

$$T_{n,x_0}(f) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

eta

$$E_{n,x_0}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)(x - t)^n \, \mathrm{d}t.$$

Honako teorema hau daukagu.

4.29. TEOREMA. *Izan bitez $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funtzio $(n + 1)$ aldiz deribagarria eta $x_0 \in (a, b)$. Orduan,*

$$f(x) - T_{n,x_0}(x) = E_{n,x_0}(x).$$

Aurreko teoremak Taylorren polinomioa f funtzioaren hurbilketa ona dela bermatzen du, x_0 puntuaren inguruan behintzat.

Orain, esandakoa erabiliko dugu e balioaren hurbilketa idazteko. Beraz, $f(x) = e^x$ funtzioa eta $x_0 = 0$ puntua kontuan hartzen baditugu, erraz froga daiteke

$$T_{n,0}(e^x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$$

eta

$$E_{n,0}(x) = \frac{1}{n!}\int_{0}^{x} e^t(x - t)^n \, \mathrm{d}t$$

direla. 4.13 ariketaren ondorioz, $e < 3$ dela dakigu, eta $1 < e^t < 3$ da $0 < t < 1$ denean. Hori dela eta,

$$\frac{1}{(n + 1)!} \leq E_{n,0}(x) \leq \frac{3}{(n + 1)!}.$$

Orain, frogatu dugunarekin, e zenbakia hurbiltzeko programa idatziko dugu.

```
// e zenbakia hurbiltzeko programa

#include <iostream>
#include <cmath>

using namespace std;

double fact(int m) {
```

```
    double f=1;
    for (int i=1; i<=m; i++)
       {
        f=f*i;
       }
       return f;
      }

// errore aproposa kalkulatzeko funtzio errekurtsiboa,
//m zifra zuzenak nahi ditugunean

int err(int m) {
      int i =1;
      while(double(3.0/fact(i+1))>double(0.5*pow(10,-m))) {
      i = i+1;
      }
      return i;
    }

int main() {

long double e;
int m;

cout << "Programak e zenbakiren balioa kalkulatzen du,
m zifra zehatzekin." << endl;
cout << "Enter number of digits:" << endl;

cin >> m;

// Kontrolatu ea m zenbaki arrunta den

if (m <= 0) cout << "KONTUZ: m ez da zenbaki arrunta!!!"
<< endl;

else {

long double e = 1.0;

for (int i=1; i<=err(m); i++) {
    e = e + 1/fact(i);
```

```
    }

cout.precision(m+1);

cout << "e-ren hurbilketa hurrengoa da: " << e << endl;

cout << "Taylorren polinomioaren maila: " << err(m) << endl;

}
}
```

4. ATALAREN ARIKETAK

4.1 ariketa. Izan bedi $\mathcal{P}_n = \{1, 1+\frac{1}{n}, 1+\frac{2}{n}, \ldots, 1+\frac{n-1}{n}, 2\}$, $[1,2]$ tartearen partiketa, $n \in \mathbb{N}$ izanik. Eman $s(f, \mathcal{P}_n)$ eta $S(f, \mathcal{P}_n)$-ren balioak kasu hauetan:

$$a)\ f(x) = 2x, \qquad (b)\ f(x) = 1 - 2x, \quad (d)\ f(x) = 1 + 3x.$$

4.2 ariketa. Goi-baturak eta behe-baturak erabiliz frogatu honako desberdintza hau:

$$\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x \leq 1.$$

4.3 ariketa. Demagun

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = 6, \quad \int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 4, \quad \int_2^5 f(x)\ \mathrm{d}x = 1$$

direla. Kalkulatu honako integral hauek:

$$a)\ \int_0^5 f(x)\ \mathrm{d}x, \qquad (b)\ \int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x, \qquad (d)\ \int_1^5 f(x)\ \mathrm{d}x,$$

$$e)\ \int_0^0 f(x)\ \mathrm{d}x, \qquad (f)\ \int_2^0 f(x)\ \mathrm{d}x, \qquad (g)\ \int_5^1 f(x)\ \mathrm{d}x.$$

4.4 ariketa. Eman honako funtzio hauen deribatua:

(1) $F(x) = \int_1^x \sin u \, \mathrm{d}u$ (2) $F(x) = \int_x^0 u^2 \, \mathrm{d}u$

(3) $F(x) = \int_0^{\sin x} u^3 \, \mathrm{d}u$ (4) $F(x) = \int_{x^2}^{4x} \cos u \, \mathrm{d}u$

(5) $F(x) = \int_x^{\cos x} \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$ (6) $F(x) = \int_x^2 \ln(t^2+1) \, \mathrm{d}t$

(7) $F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ (8) $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2) \, \mathrm{d}t, \ (x > 0)$

(9) $F(x) = \int_0^{\cos x} \sin(2t) \, \mathrm{d}t$ (10) $F(x) = \int_{x^2}^4 t^2 \, \mathrm{d}t$

4.5 ariketa. Eman f funtzioaren $[0, 2]$ tarteko minimo absolutua, funtzioaren hauxe bada:

$$f(x) = \int_0^x \frac{t-1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t.$$

4.6 ariketa.

a) Frogatu, f jarraitua eta bikoitia bada, orduan honako hau betetzen dela:

$$\int_{-a}^a f(x) \, \mathrm{d}x = 2 \int_0^a f(x) \, \mathrm{d}x.$$

- b) Frogatu, f jarraitua eta bakoitia bada, orduan honako hau betetzen dela:

$$\int_{-a}^a f(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

4.7 ariketa. Esan honako integral hauetatik, kalkulatu gabe, zein den handiena:

(1) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} \, \mathrm{d}x$ edo $\int_0^1 x \, \mathrm{d}x$; (2) $\int_0^1 x^2 \sin 2x \, \mathrm{d}x$ edo $\int_0^1 x \sin 2x \, \mathrm{d}x$;

(3) $\int_1^2 e^{x^2} \, \mathrm{d}x$ edo $\int_1^2 e^x \, \mathrm{d}x$;

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, \mathrm{d}x$ edo $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2 x} \, \mathrm{d}x$ edo $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}x$.

4.8 ariketa. Kalkulatu honako integral hauek:

(1) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$ (3) $\displaystyle\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$ (5) $\displaystyle\int \frac{e^x}{2+e^x}\,\mathrm{d}x$ (6) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x$

(7) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x$ (8) $\displaystyle\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$ (9) $\displaystyle\int \sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$

(10) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}\,\mathrm{d}x$ (11) $\displaystyle\int \frac{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$ (12) $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$

(13) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ (14) $\displaystyle\int x^2e^{-2x}\,\mathrm{d}x$ (15) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

(16) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ (17) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{9-e^{2x}}}\,\mathrm{d}x$ (18) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+2}\,\mathrm{d}x$

(19) $\displaystyle\int \frac{1}{2-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ (20) $\displaystyle\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x$ (21) $\displaystyle\int \frac{x^5+3x+1}{x-1}\,\mathrm{d}x$

(22) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x$ (23) $\displaystyle\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$ (24) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$

(25) $\displaystyle\int \sin mx\sin nx\,\mathrm{d}x\ (m\neq n)$ (26) $\displaystyle\int \frac{1-e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ (27) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$

(28) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$ (29) $\displaystyle\int x\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ (30) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$

(31) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x+a)\sin(x+b)}\,\mathrm{d}x$ (32) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$ (33) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

(34) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4-16}\,\mathrm{d}x$ (35) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$ (36) $\displaystyle\int 2x^2(4x-1)^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x$ (*zat. int.*)

(37) $\displaystyle\int \frac{(x+2)(x^2+5)}{(x^2+2x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ (38) $\displaystyle\int \frac{\tan^2 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$ (39) $\displaystyle\int \sin(2x)\cos(3x)\,\mathrm{d}x$

(40) $\displaystyle\int \frac{2\sqrt[3]{1+e^{2x}}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,\mathrm{d}x\ (1+e^{2x}=t)$ (41) $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,\mathrm{d}x$ (42) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+a}-b}{\sqrt{x+a}+b}\,\mathrm{d}x$

(43) $\displaystyle\int \sin^4 x \cos^5 x \, \mathrm{d}x$ (44) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x \cos^4 x} \, \mathrm{d}x$ (45) $\displaystyle\int \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}} \, \mathrm{d}x$

(46) $\displaystyle\int \frac{1}{3+5\cos x} \, \mathrm{d}x$ (47) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{3+x} \, \mathrm{d}x$ (48) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\cos x} \, \mathrm{d}x$

4.9 ariketa. Eman honako funtzio hauek mugatzen duten eskualdearen azalera:

a) $y = 8 + 2x - x^2$ parabolak, x ardatzak, $x = -1$ eta $x = 3$ zuzenek.
b) $y = x^2 - 7x + 6$ parabolak, x ardatzak, $x = 2$ eta $x = 6$ zuzenek.
d) $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ eta x ardatzak ($x^3 - 6x^2 + 8x$ polinomioaren erroak $x = 0, 2, 4$ dira).
e) $y^2 = 4x$ parabolak eta $y = 2x - 4$ zuzenak.
f) $y = 6x - x^2$ eta $y = x^2 - 2x$ parabolek.
g) $x = -2y^2$ eta $x = 1 - 3y^2$ parabolek.
h) $y^2 = 2px$ eta $x^2 = 2py$ parabolek.
i) $x^2 + y^2 = 4$ eta $x^2 + y^2 = 4x$ zirkunferentziek (*argibidea*: $\displaystyle\int \sqrt{4-y^2} \, \mathrm{d}y = \frac{y\sqrt{4-y^2}}{2} + 2\arcsin\frac{y}{2}$).
j) $x^2 + y^2 = 25$ eta $x = 3$ mugatzen duten eskualde txikienaren azalera (*argibidea*: $\displaystyle\int \sqrt{25-t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{t\sqrt{25-t^2}}{2} + \frac{25}{2}\arcsin\frac{t}{5}$).
k) $y \geq x^2 - 9$, $x^2 + (y-3)^2 \geq 9$ eta $y \leq -x + 3$.

4.10 ariketa. Har dezagun $y = \sqrt{3}x - 1$ zuzenak eta $(-1, 1)$ jatorria eta 2 erradioko zirkunferentziak mugatzen duten eskualdea:

a) Eman azaleraren balioa.
b) Eman eskualde horrek x ardatzaren inguruan sortzen duen biraketa-gorputzaren bolumena.

4.11 ariketa. Aurreko ariketa bera errepikatu honako funtzio hauekin:

a) $y = e^x$, $x = 0$ eta $y = e$ denean.
b) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \sin\frac{\pi}{2}x$, $x = 0$ eta $y = e$ denean.
d) $y = x^3$ eta $y = sin\frac{\pi}{2}x$ denean.
e) $y^2 = 8x$ eta $x = 2$ denean.
f) $y = -x^2 - 3x + 6$ eta $x + y - 3 = 0$ denean.
g) $y = x^2$ eta $y = 4x - x^2$ denean.

4.12 ariketa. Kalkulatu honako eskualde hauek x ardatzaren inguruan sortzen duten biraketa-gorputzaren azalera:

a) $y = 3$ zuzenak, $x = 0$ eta $x = 5$ zuzenek mugatzen duten eskualdea.
b) $y^2 = 12x$ funtzioak, $x = 0$ eta $x = 3$ zuzenek mugatzen dutena.

4.13 ariketa. Zatikako integrazioa erabiliz, frogatu honako bi berdintza hauek betetzen direla:

$$\int_1^e (\ln t)^2 \, \mathrm{d}t = e - 2 \qquad \text{eta} \qquad \int_1^e (\ln t)^3 \, \mathrm{d}t = 6 - 2e.$$

Beraz, $\ln x > 1$ denez $x > 1$ denean, honako hau ondoriozta dezakegu:

$$e - 2 > 0 \qquad \text{eta} \qquad 6 - 2e > 0 \Longrightarrow 2 < e < 3.$$

5

Aljebra lineala

> [...] gauzak pikutara joaten direnean, bulegoko atea ixten dugu eta matrizeekin jo eta ke kalkulatzen dugu.
>
> I. Kaplansky

Aljebra lineala ezinbesteko tresna da zientzako atal askotan, bai mundu fisikoa modelatzeko, bai problemak ebazteko.

Aljebra linealeko ideia nagusia *espazio bektorialak* ikertzea da. Hala ere, denboraren falta dela eta, kurtso honetan ikuspuntu praktikoagoa hartuko dugu: matrize eta sistema linealekin hasiko gara, eta A eranskinean espazio bektorialak sartuko ditugu.

5.1. Matrizeak

5.1. DEFINIZIOA. Izan bitez $n, m \in \mathbb{N}$. Orduan, $m \times n$ ordenako matrize bat honako hau da:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

non a_{ij} zenbaki errelak diren, i, j guztietarako. Laburtzeko, $A = (a_{ij})$ ikurra idatziko dugu. Bestalde, $(a_{i1}, \dots, a_{in})$ n-kote horizontalak A-ren *lerroak* deitzen dira, eta $(a_{1j}, \dots, a_{mj})$ m-kote bertikalak A-ren *zutabeak* deitzen dira.

Beste era batean esanda, matrizea $m \times n$ dimentsioko zenbaki erreal batzuen taula baino ez da. Horrenbestez, bi matrize berdin izango dira, baldin eta soilik baldin lehen matrizeko (i, j) koordenatua bigarren matrizeko (i, j) koordenatuarekin berdina bada, (i, j) guztietarako.

Beste alde batetik, $m \times 1$ dimentsioko matrizeak *bektoreak* deitu ohi dira.

Orain, bi matrize eta zenbaki erreal bat emanda, hiru matrize berri definituko ditugu, matrizeen arteko *batuketa*, *kanpoko biderketa* eta *biderketa* definituz.

5.2. DEFINIZIOA. Honako eragiketa hauek definituko ditugu:

(i) **Batuketa:** izan bitez A eta B bi $m \times n$-matrize. Orduan,

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Hau da, koordenatuz koordenatu gehitzen ditugu elementuak.

(ii) **Kanpoko biderketa:** izan bitez A $m \times n$-matrizea eta $\lambda \in \mathbb{R}$. Orduan,

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

Hau da, koordenatu guztiak λ-z biderkatzen ditugu.

(iii) **Biderketa:** izan bitez A $m \times n$-matrizea eta B $n \times k$ matrizea. Orduan,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \dots a_{1n}b_{n1} & \dots & a_{11}b_{1k} + \dots a_{1n}b_{nk} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \dots a_{mn}b_{n1} & \dots & a_{m1}b_{1k} + \dots a_{mn}b_{nk} \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \right).$$

Beraz, $A \cdot B$ matrizea $m \times k$ dela azpimarratzen dugu.

5.3. ADIBIDEAK. (i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ badira, orduan

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 5 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{izango da.}$$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ eta $\lambda = \dfrac{1}{2}$ badira, orduan $\lambda A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ izango da.

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ badira, orduan $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ izango da.

5.2. Ekuazio linealen sistemak

Ekuazio linealen sistemak oinarrizkoak dira zientzietan. Atal honetan, sistemak matrizeei lotuko dizkiegu, eta sistema lineal guztiak ebazteko metodo bat emango dugu: *Gaussen algoritmoa*.

5.4. DEFINIZIOA. Izan bitez $m, n \in \mathbb{N}$. Orduan, *ekuazio linealen sistema* bat, m ekuazio eta n ezezagun dituena, honako hau da:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

non $a_{ij}, b_j \in R$ diren, $1 \leq i \leq m$ eta $1 \leq j \leq n$ direnean.

Orain, aurreko sistema lineala matrize-forman idatziko dugu. Definitu $A = (a_{ij})$ (*sistemaren matrizea*), $B = (b_j)$ (*gai askeen bektorea*) eta $X = (x_i)$ (*ezezagunen bektorea*). Ohartu A matrizea $m \times n$, B $m \times 1$ eta X $n \times 1$ direla. Hori dela eta, A eta X biderka ditzakegu, eta

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

izango dugu. Ondorioz, sistema lineala *matrizialki* adieraz dezakegu honako modu honetan:

$$AX = B.$$

Azkenean, sistema bat emanda, sistemari beste matrize bat esleitzen diogu:

$$(A|B);$$

hots, idatzi A matrizea eta jarri B matrizea A-ren azken zutabearen eskuinaldean. $(A|B)$ sistemaren *matrize hedatua* deitzen da.

5.5. ADIBIDEA. Kontuan hartu honako sistema lineal hau: $\begin{cases} x + y = 2 \\ \quad\;\; y = 3 \end{cases}$. Argi dago sistemaren adierazpen matriziala honako hau dela:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestalde, sistemaren matrize hedatua honako hau da:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.6. DEFINIZIOA. Izan bedi $AX = B$ ekuazio linealen sistema. Orduan, $\alpha = (\alpha_i)$ matrizea *sistemaren soluzioa* dela esaten da, baldin eta

$$A \cdot \alpha = B$$

betetzen bada. Gainera, $AX = B$ soluziorik ez badu *bateraezina* deitzen da, eta beste kasuan *bateragarria*. Sistema bateragarria bada, orduan honako hau esango dugu:

1. *Bateragarri determinatua* da, sistemak soluzio bakarra badu.
2. Bestela, *bateragarri indeterminatua* da.

5.7. ADIBIDEAK. (i) 5.5 adibidearen sistemak $\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ soluzioa du. Beraz, sistema hau bateragarri determinatua da.

(ii) Kontuan har dezagun $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$ sistema lineala. Orduan, $x + y$ zenbakia ezin da momentu berean 2-rekin eta 0-rekin berdina izan eta sistema bateraezina da.

(iii) Azkenean, hartu ekuazio bakarreko $\{x = 0$ sistema lineala. Argi dago $\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ matrizea sistemaren soluzioa dela, $a \in \mathbb{R}$ guztietarako. Hori dela eta, sistema hau bateragarri indeterminatua da.

Hala ere, orokorrean, sistema batek soluzioa daukan ala ez erabakitzea zaila izan daiteke. Adibidez, honako sistema hau hartuta,

$$\begin{cases} x + \ \ y - \ \ z = 2 \\ 2x - \ \ y + \ \ z = 5 \\ -x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \tag{5.1}$$

ez dago argi soluziorik duen edo soluzioa zein den. Jarraian, edozein sistema lineala ebazteko metodo bat azalduko dugu.

5.2.1. Gaussen algoritmoa. Demagun $AX = B$ sistema lineala daukagula eta sistemaren bateragarritasuna ikertu nahi dugula. Gaussen algoritmoak hiru oinarrizko eragiketa dauzka:

(G1) Bi lerro trukatzea.
(G2) Lerro bat zenbaki batez biderkatzea.
(G3) Lerro baten multiploa beste lerro bati gehitzea.

Bistan dago eragiketek ez dituztela ekuazioen soluzioak aldatzen (idatzi adibide batzuk horretaz konbentzitzeko). Algoritmoa emateko prest gaude.

GAUSSEN ALGORITMOA: lehen partea, matrizea eskaileran jartzea.

INPUT: $(A|B)$ sistemaren matrize hedatua.

(A1) Topatu ezkerretik zero ez den lehen Z zutabea.
(A2) Z-ren lehen elementua zero bada, erabili (G1) eragiketa zero ez den p zenbakia agerrarazteko.
(A3) (G2) eragiketa erabiliz, $p = 1$ izanarazi. Elementu hori **pibota** deituko da.
(A4) Erabili (G3) eragiketa behin eta berriro, pibotaren azpian dauden elementu guztiak zero bihurtzeko.
(A5) Kontuan hartu pibotetik eskuinerantz eta beherantz hasten den A' matrizea. Itzuli (1) pausora. Algoritmoa egikaritu eta gero, A' matrizea hutsa edo zeroz betea bada, orduan algoritmoa amaitu.

Orain, pibot batzuk dauzkagu, eta matrizea *eskaileran* dago.

OUTPUT: $\tilde{A}$ matrizea eskaileran.

GAUSSEN ALGORITMOA: bigarren partea, sistema ebaztea.

Aurreko algoritmotik ateratzen den $\tilde{A}$ matrizerako bi aukera dauzkagu:

(a) azken pibota azken zutabean dago;
(b) azken pibota beste zutabe batean dago.

(a) kasuan sistema bateraezina da. Hain zuzen, azken pibota dagoen lerroak $0 = 1$ ekuazioa ematen du, eta hori argi eta garbi bateraezina da.

(b) kasuan bagaude, berriro bi aukera izango ditugu:

($b1$) ezezagunen kopurua eta piboten kopurua berdinak dira;
($b2$) piboten kopurua ezezagunen kopurua baino txikiagoa da.

($b1$) kasuan, sistema bateragarri determinatua izango da, eta, ($b2$) kasuan, aldiz, bateragarri indeterminatua. Gainera, ($b2$) kasuan esango dugu honako zenbaki hau

$$(\text{ezezagunen kopurua}) - (\text{piboten kopurua})$$

soluzioaren *dimentsioa* dela.

5.8. OHARRA. ($b2$) kasuan, soluzioen kopurua beti da infinitua. Hala ere, soluzioaren dimentsioa soluzioaren ≪tamaina≫ deskribatzeko sartu dugu. Horrek interpretazio geometrikoa du, espazio bektorialean dimentsioa bezala (ikusi A eranskina).

5.9. OHARRA. Gaussen metodoaren ezaugarririk garrantzitsuenetako bat da *beti* amaitzen dela. Gainera, piboten bitartez soluzioa idazteko modu bat emango digu Gaussen algoritmoak (ikusi 5.12 adibidea).

5.10. ADIBIDEA (Sistema bateragarri determinatua - Gaussen algoritmoaren egikaritzea). Gaussen algoritmoa 5.1 sistemari aplikatuko diogu. Sistemaren matrizea da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lehen zutabearen lehen elementua zero ez denez, hau hartu dezakegu pibot ($(1,1)$ koordenatuan dagoen 1 zenbakia). (A2) eta (A3) pausoetan ez dugu ezer egin behar kasu honetan.

(A4) pausoan, zeroak $(1,1)$ koordenatuaren azpian ikusi nahi ditugu. Horregatik, bigarren lerroari 2 aldiz lehen lerroa kenduko diogu, eta honako hau izango dugu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zero lehen zutabeko azken koordenatuan ere ikusi nahi dugunez, hirugarren lerroari lehen lerroa gehituko diogu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Orain, amaitu da algoritmoaren lehen egikaritzea, eta, (A5) pausoaren arabera, honako matrize honetan zentratuko gara:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berriro matrize horren $(1,1)$ koordenatua hartu dezakegu pibot. (A3) pausoan, (G2) eragiketa erabiliko dugu, pibota 1 izan dadin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(A4) pausoan, pibotaren azpiko koordenatuan zero ikusi nahi dugunez, bigarren lerroari 3 aldiz lehen lerroa kenduko diogu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berriro, (A5) pausoak honako matrize honi begiratzeko esaten digu:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix}$$

eta, (A2) eta (A3) egin ondoren, honako hau dugu:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Algoritmoa amaitzen da, orain pibotaren azpian ezer ez dagoelako. Horrenbestez, gure matrizea honako hau bihurtu da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

eta adierazpen matrizialetik sistemara itzultzen bagara,

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ \qquad y + z = -\frac{1}{3} \\ \qquad\quad z = -2 \end{cases}$$

azken ekuazioa erraza da. Hori dela eta, $y = \frac{5}{2}$ dela ondorioztatzen dugu, eta, ondorioz, $x = -\frac{5}{2}$ dela. Hau da, hasierako sistemaren soluzio bakarra honako hau da:

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ -2 \end{pmatrix}.$$

5.11. ADIBIDEA (Sistema bateraezina). Har dezagun $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=0 \end{cases}$ sistema. Orduan, Gaussen algoritmoa aplikatuz,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Azken -2-a pibot bat da eta azken zutabean dago. Beraz, sistema hau bateraezina da, 5.7 adibidean ikusi dugun moduan.

5.12. ADIBIDEA (Sistema bateragarri indeterminatua). Hartu $\begin{cases} x+y+\ \ z=1 \\ x+y+2z=3 \\ x+y+\ \ z=1 \end{cases}$ sistema. Gaussen algoritmoak hau ematen digu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$(2,3)$ koordenatuan dagoen pibota da azkena. Beraz, bi pibot eta hiru ezezagun dauzkagu, eta soluzioaren dimentsioa $3-2=1$ da. Bestalde, pibotak x-ren eta z-ren zutabeetan daude, eta y aldagaia *askea* da. Kasu honetan, x eta z ezezagunak y-ren menpe idatziko ditugu: azken matrizea sistemara eramanez,

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ \qquad\quad z=2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=-y+1 \\ z=2 \end{cases} \longrightarrow \alpha = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix};$$

hots, soluzio guztiak y parametroaren menpe idatzi ditzakegu. Ohartu soluzioa deskribatzeko parametroen kopurua bat datorrela soluzioaren dimentsioarekin.

Azkenik, honako teorema garrantzitsu hau erraz frogatu dezakegu. Sistema homogeneoa dela esango dugu, ezagunen bektorea zero-bektorea bada.

5.13. TEOREMA. *Izan bedi $AX=0$ sistema homogeneoa, non A $m\times n$ matrizea den. Demagun $n>m$ dela. Orduan, sistemak zero ez den soluzio bat dauka. Bereziki, sistema bateragarri indeterminatua da.*

FROGAPENA. Piboten kopurua beti lerroen kopurua baino txikiagoa da. Beraz, piboten kopurua m baino txikiagoa da. Ezezagunen kopurua n da. Orduan, soluzioaren dimentsioa $n-m>0$ baino handiagoa da. □

5.14. DEFINIZIOA. Izan bedi A $m\times n$ matrizea. Gaussen algoritmoa egikaritu eta gero eskuratzen den $\tilde{A}$ matrizearen piboten kopuruari A matrizearen *heina* deritzogu.

Honako oinarrizko teorema hau A eranskinean frogatuko dugu (ikusi A.19 proposizioa).

5.15. TEOREMA. *Matrize baten piboten kopurua eta heina inbarianteak dira. Beste era batean esanda: A-rekin hasita, Gaussen algoritmoa beste modu batean aplikatzen badugu, piboten kopurua ez da aldatuko.*

5.3. Determinantea

Hasi baino lehen, matrizearen determinantea definituta dagoela bakarrik matrizea karratua denean; hau da, matrizea $n \times n$ bada.

Izan bedi A matrize karratua. Ohartu A-ren dimentsioa 1 bada, orduan $A = (a)$ zenbaki erreal bakarra izango dela. Horrela bada, $\det(A) = a$ definituko dugu. Matrizea handiagoa bada, bere determinantea induktiboki definituko dugu, azpimatrize txikiagoen determinantea erabiliz.

5.16. DEFINIZIOA. Izan bedi A matrize karratua, $n \times n$ dimentsiokoa. Orduan,

(i) (i, j) koordenatuarekiko *adjuntua* honako hau da:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ohartu aurreko matrizea A matrizeari i. herrenkada eta j. zutabea kenduz lortzen dela; a_{ij} elementua dagoen lerroa eta zutabea kenduz, hain zuzen.

(ii) Orduan, A-ren determinantea honako hau da:

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Espresio hau i. *lerroarekiko determinantearen garapena* deitzen da.

(iii) Halaber, A-ren determinantea honako modu honetan ere adieraz daiteke:

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

Espresio hau j. *zutabearekiko determinantearen garapena* deitzen da.

5.17. TEOREMA. *Determinantearen definizioa ez dago aukeratzen dugun lerro edo zutabearen menpe. Beraz, aurreko definizioak zentzua du.*

5.18. ADIBIDEA (2×2 determinantea). $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ bada, orduan

$$A_{11} = a_{22},\ A_{12} = -a_{21},\ A_{21} = -a_{12} \text{ eta } A_{22} = a_{11}.$$

Beraz, esateko lehen lerroarekiko garapena eginez,

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

5.19. ADIBIDEA (3×3 determinantea). $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ bada, orduan, aurreko adibidea erabiliz,

$$A_{11} = \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ A_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ eta } A_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Beraz, berriro lehen lerroarekiko garapena eginez,

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}) + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Arestian ikusi ditugu adibideak oso ezagunak dira. Dena den, matrize handiagoen determinantea kalkula dezakegu, eta, matrizea zeroz beteta badago, kalkulatzea erraza izan daiteke.

5.20. ADIBIDEA. Kalkulatu honako matrize honen determinantea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinantea kalkulatzean, egokia den lerroa aukera dezakegu. Adibidez, kasu honetan, bigarren lerroarekiko garapena aukeratzen badugu, termino guztiak zero izango dira, $a_{22}A_{22}$ salbu. Beraz,

$$\det(A) = a_{22}A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Orain, oraingo bigarren eta hirugarren lerroekiko garapena eginez, honako hau ondoriozta dezakegu:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2.$$

Determinantea kalkulatzeko tresna baliagarria emango dugu, frogapenik gabe.

5.21. TEOREMA ((G1), (G2) eta (G3) eragiketen eragina determinantean). *Izan bedi A matrize karratua. Orduan,*

- *(G1) eragiketa: A-ren bi lerro trukatuz gero, determinantearen sinua aldatzen da.*
- *(G2) eragiketa: A λ-z biderkatuz gero, determinante berria $\lambda \det(A)$ da.*
- *(G3) eragiketa eginez gero, determinantea ez da aldatzen.*

Azkenik, geroago beharko dugun emaitza emango dugu. A matrizea emanda, A alderanzgarria dela esango dugu baldin eta A^{-1} existitzen bada, non $A \cdot A^{-1} = I_n$ eta

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

diren.

5.22. TEOREMA. *Izan bedi A matrize karratua. Orduan, A alderanzgarria da, baldin eta soilik baldin* $\det(A) \neq 0$ *bada.*

Matrizearen alderanzgarritasunak sistema baten soluzioa eragiten du. Izan bedi $(A|B)$ sistema baten matrize hedatua. Orduan, A alderanzgarria bada, $AX = B$ ekuazioa bi aldeetan A^{-1}-ez biderkatu eta honako hau lor dezakegu:

$$X = A^{-1} \cdot B;$$

hau da, sistemak soluzio bakarra du (bateragarri determinatua da!).

5.4. Balio eta bektore propioak

Aurreko ataletan, matrizearen heinak matrizearen egituraz zerbait esaten digula adierazi dugu. Hala ere, mundu konkretuko adibideekin lan egitean, informazio zehatzagoa behar izaten dugu. Esaterako, beharbada matrizeak zein ≪noranzkotan≫ ≪luzatzen≫ duen espazioa jakin nahiko genuke. Informazio hori matrizearen balio eta bektore propioetan dago.

5.23. DEFINIZIOA. Izan bitez A matrize karratua, $n \times n$ dimentsiokoa, eta $\lambda \in \mathbb{R}$ zenbaki erreala. Orduan, A-ren *balio propioa* dela esaten da, baldin eta $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ bektore ez-nulua existitzen bada, non honako baldintza hau betetzen den:

$$A \cdot v = \lambda v.$$

Kasu honetan, v bektorea λ-ri elkartutako *bektore propioa* dela esaten da.

5.24. DEFINIZIOA. Izan bitez A matrize karratua, $n \times n$ dimentsiokoa, eta $\lambda \in \mathbb{R}$ A-ren balio propioa. Orduan, λ-ri elkartutako *azpiespazio propioa* (edo autoespazioa) honako hau da:

$$V(\lambda) = \left\{ v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \;\middle|\; Av = \lambda v \right\}.$$

Ez dugu azpiespazio bektorialaren definizioa sakondu. Dena den, bistakoa da $V(\lambda)$ sistema lineal baten bitartez definituta dagoela.

5.25. ADIBIDEA. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ matrizea. Kalkula ditzagun A-ren balio propioak. Definizioarengatik, $\lambda \in \mathbb{R}$ A-ren balio propioa izateko $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ bektore ez-nulua existitu behar da, non honako hau betetzen den:

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Horrenbestez, honako sistema hau lortzen dugu:

$$\begin{cases} (\lambda - 1)a_1 - 3a_2 = 0 \\ -2a_1 + (\lambda - 2)a_2 = 0 \end{cases}$$

Hortaz, $V(\lambda)$-ren elementuak aurreko sistemaren soluzioak dira.

Baina, gutxienez v ez-nulu bat existitzeak sistema bateragarri indeterminatua izan behar dela dakar berekin, bektore nulua beti aurreko sistemaren soluzioa baita. 5.22 teoremaren arabera, sistemaren matrizearen determinantea zero izan behar da:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -2 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Determinantea garatuz, λ A-ren balio propio izan daiteke baldin eta soilik baldin λ honako ekuazio honen erroa bada:

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Beraz, $V(\lambda)$ sistema baten bitartez definituta dagoenez, $V(\lambda)$-ren *dimentsioa* bere soluzioaren dimentsioaren bidez definituko dugu, eta $\dim V(\lambda)$ idatziko dugu.

Lehenengo adibideak definizio hau iradokitzen digu.

5.26. DEFINIZIOA. Izan bedi A matrize karratua. Orduan, A-ren *polinomio karakteristikoa* $\chi_A(x)$ honako determinante hau da:

$$\det(xI_n - A).$$

5.27. TEOREMA. *Izan bitez A matrize karratua eta $\lambda \in \mathbb{R}$. Orduan, λ A-ren balio propioa da baldin eta soilik baldin λ $\chi_A(x)$ polinomioaren erroa bada.*

FROGAPENA. λ A-ren balio propioa bada, orduan λ-ri elkartutako $v \neq 0$ bektore propioa existitzen da, eta $Av = \lambda v$ betetzen da. Hori dela eta, $\lambda I_n - A$ matrizeari elkartutako sistema linealak soluzio bat baino gehiago izango ditu. Horrenbestez, $\lambda I_n - A$ ezin da alderanzgarria izan, eta $\det(\lambda I_n - A) = 0$ da.

Beste aldetik, aurreko pausoei buelta eman diezaiekegu kontrako inplikazioa lortzeko. □

5.28. DEFINIZIOA. Izan bitez A matrize karratua eta $\lambda \in \mathbb{R}$ A-ren balio propioa. Orduan, λ balio propioaren anizkoiztasuna $\chi_A(x)$ polinomioaren erro moduan $m(\lambda)$ adieraziko dugu, eta *anizkoiztasun aljebraikoa* deituko diogu.

5.29. ADIBIDEA. 5.25 adibidean, $\chi_A(x) = \det(xI_2 - A) = \det\begin{pmatrix} x-1 & -3 \\ -2 & x-2 \end{pmatrix} = (x-1)(x-2) - 6 = x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$ da. Orduan, A-k bi balio propio ditu, -1 eta 4, eta bien anizkoiztasun aljebraikoa 1 da.

5.30. ADIBIDEA. 5.20 adibideko A matrizerako,

$$\det(xI_5 - A) = \det\begin{pmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & x-1 \end{pmatrix} =$$
$$= (x-1)^3[(x-1)^2 - 3] = (x-1)^3(x-(1+\sqrt{3}))(x-(1-\sqrt{3})).$$

Hots, A-k hiru balio propio ditu, 1, $1+\sqrt{3}$ eta $1-\sqrt{3}$. Bestalde, 1 autobalioak 3ko anizkoiztasun aljebraikoa dauka; $1+\sqrt{3}$-k eta $1-\sqrt{3}$-k, ordea, 1eko anizkoiztasuna.

Adibideetatik, honako hau ikus dezakegu.

5.31. TEOREMA. *Izan bedi λ A-ren balio propioa. Orduan:*

$$\dim V(\lambda) \leq m(\lambda).$$

Azkenenean, matrizea bere balio propioekin deskribatu nahi dugu. Hori egiteko, matrizea ≪deskonposatu≫ nahi dugu, baina, zoritxarrez, ez da beti posiblea. Lehenik, interesatzen zaigun deskonposaketa emango dugu.

5.32. DEFINIZIOA. Izan bedi A matrize karratua. Orduan, A *diagonalgarria* dela esaten da P matrize alderanzgarri bat existitzen bada, non $P^{-1}AP$ matrize diagonala den.

Zorionez, matrizea diagonala noiz den zehazki esan dezakegu.

5.33. TEOREMA. *Izan bedi A matrize karratua. Orduan, A diagonalgarria da baldin eta soilik baldin honako bi baldintza hauek betetzen badira:*

- *$\chi_A(x)$ polinomioaren erro guztiak errealak dira.*
- *λ A-ren balio propio bakoitzeko, $\dim V(\lambda) = m(\lambda)$ da.*

Gainera, P matrize $V(\lambda)$-ri elkartutako sistemaren soluzioak hartu ditzakegu.

5.34. ADIBIDEA. Kontuan hartu $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrizea. Orduan, $\chi_C(x) = x^2+1$ da polinomio karakteristikoak ez du erro errealik. Beraz, C ez da diagonalgarria.

5.35. ADIBIDEA. Kontuan hartu $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea. Orduan, $\chi_J(x) = (x-1)^2$ da eta $m(1) = 2$. Beste aldetik, $\dim V(1)$ kalkulatzeko, honako sistema hau ebatzi behar dugu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{y = 0 \Longrightarrow \alpha = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

hau da, $\dim V(1) = 1$. Beraz, J ez da diagonalgarria. Izan ere, P matrize alderanzgarria izango balitz, non $P^{-1}AP$ diagonala den, orduan

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} ad + c(d-b) & d^2 \\ -c^2 & -bc + d(-c+a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = d = 0$$

Baina $c = d = 0$ badira, P ezin da alderanzgarria izan, kontraesana.

5.36. ADIBIDEA. 5.25 adibidea bukatzeko, $\dim V(-1)$ eta $\dim V(4)$ kalkulatuko ditugu. $V(-1)$ definitzen duen ekuazioa ikusiz, honako sistema hau ebatzi behar dugu:

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \alpha = y\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix};$$

hau da, $\dim V(-1) = 1$ eta $v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ hartuko ditugu.

Gauza bera egiten dugu $V(4)$-rekin; berriro $\dim V(4) = 1$ dela eta $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hartu dezakegula ondoriozta dezakegu. 5.33 teoremaren ondorioz, A diagonalgarria da, eta

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hartu dezakegu. Egiazta ezazu $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ betetzen dela.

5.37. ADIBIDEA. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea. A matrize diagonalgarria al da? Alde batetik, polinomio karakteristikoa kalkulatuko dugu:

$$\chi_A(x) = \det\begin{pmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ -1 & x-1 & 0 \\ -3 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-2)(x-1)^2.$$

Orduan, erroak 2, 1 zenbaki errealak direnez, 5.33 teoremaren lehen baldintza betetzen da. Bestetik, azpiespazio propioak kalkulatuko ditugu:

$$\text{V(1)-en soluzioa} = x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eta

$$\text{V}(2)\text{-ren soluzioa} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Beraz, $\dim V(1) = 2 = m(1)$ eta $\dim V(2) = 1 = m(2)$ berdintzak ditugunez, 5.33 teoremaren bigarren baldintza ere bete egiten da. Ondorioz, A matrize diagonalgarria da, eta

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

matrize alderanzgarriarekin,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

matrize diagonala da.

5.38. ADIBIDEA. Izan bedi A_a honako matrize hau $a \in \mathbb{R}$ parametroaren menpe,

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Erantzun honako galdera hauek:

(i) Zenbatekoa da A_a matrizearen heina a-ren menpe?
(ii) Adierazi, a-ren menpe, A_a diagonalgarria den, eta, existitzen badira, eman D_a matrize diagonala eta P_a matrize alderantzikagarria, non $P_a^{-1}A_aP_a = D_a$ den.

Lehen galdera erantzuteko, Gaussen ebazpena eginez, $a \neq 1$ bada, A-ren heina 5 dela dugu. Horrez gain, $a = 1$ bada, A-ren heina 4 dela dakusagu.

Bigarrenerako,

$$\chi_{A_a}(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & x-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & x-1 \end{pmatrix}.$$

Orduan, 3., 4. eta 5. zutabeak erabiliz, garapena egin eta gero, polinomio karakteristikoa

$$(x-1)^3 \det \begin{pmatrix} x-1 & -a \\ -1 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^3 \left[(x-1)^2 - a\right] = (x-1)^3(x^2 - 2x + 1 - a)$$

da. Kalkulatu bi mailako faktorearen soluzioa: $x = 1 \pm \sqrt{a}$ dira.

Beraz, $a < 0$ bada, orduan A_a ez da diagonalgarria, polinomio karakteristikoak soluzio ez-errealak baititu; $a \geq 0$ bada, ordea, espazio propioen dimentsioak aztertu behar ditugu.

Suposatu $a > 0$ dela, orduan:

$$V(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \alpha =$$

$$= y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eta

$$V(1 \pm \sqrt{a}) = \begin{pmatrix} \mp\sqrt{a} & 0 & 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & \mp\sqrt{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp\sqrt{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp\sqrt{a} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \mp\sqrt{a} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mp\sqrt{a} & 0 & 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & \mp\sqrt{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp\sqrt{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp\sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \alpha = \begin{pmatrix} \mp\sqrt{a} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beraz, $a > 0$ bada, $\dim V(1) = 3 = m(1)$ eta $V(1 \pm \sqrt{a}) = 1 = m(1 \pm \sqrt{a})$ direnez, A_a diagonalgarria da eta

$$D_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\sqrt{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\sqrt{a} \end{pmatrix}, P_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sqrt{a} & \sqrt{a} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Haatik, $a = 0$ bada, berriz, $\chi_{A_0}(x) = (x-1)^5$ da, eta 1 balio propioari elkartutako espazio propioa honako hau bihurtzen da:

$$V(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \alpha = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eta $\dim V(1) = 4 < 5 = m(1)$ dela dakusagu. Horrenbestez, A_0 ez da diagonalgarria, anizkoiztasun aljebraikoa eta geometrikoa bat ez datozelako.

Laburbilduz, $a \leq 0$ bada, A_a ez da diagonalgarria. Bestalde, $a > 0$ bada, A_a diagonalgarria da (D_a, P_a arestian aipatutakoekin).

5. ATALAREN ARIKETAK

5.1 ariketa. Kontuan hartu honako matrize hauek:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Aurkitu, ahal denean, AB, AC, BC eta CA biderkadurak.
b) Kalkulatu ABC eta ACB.

5.2 ariketa. Kalkulatu honako ekuazio hauen dimentsioa eta soluzioen oinarriak:

$$(a) \begin{cases} 2x - 6y + 3z = 0 \\ 3x + \ \ y + \ \ z = 0 \end{cases} \qquad (b)\ x + y + z + t = 0$$

$$(c) \begin{cases} x \qquad + 2z - \ \ t = 0 \\ -x + 4y \qquad + 3t = 0 \\ -3x + 4y - 8z + \ \ t = 0 \end{cases}$$

5.3 ariketa. Aztertu honako sistema hauek bateragarriak direnetz, eta ebatzi. Adierazi soluzioa soluzio berezi baten eta sistema homogeneoaren soluzio orokorraren batura moduan.

$$(i)\ \begin{cases} 2x+7y+3z+\ \ t=6 \\ 3x+5y+2z+2t=4 \\ 9x+4y+\ \ z+7t=2 \end{cases} \qquad (ii)\ \begin{cases} 3x+\ \ 4y+\ \ z+\ \ 2t=3 \\ 6x+\ \ 8y+2z+\ \ 5t=7 \\ 9x+12y+3z+10t=13 \end{cases}$$

$$(iii)\ \begin{cases} 3x-5y+2z+4t=2 \\ 7x-4y+\ \ z+3t=5 \\ 5x+7y-4z-6t=3 \end{cases} \qquad (iv)\ \begin{cases} 2x+5y-8z\ \ \ \ =6 \\ 4x+3y-9z\ \ \ \ =9 \\ 2x+3y-5z\ \ \ \ =7 \\ \ \ x+8y-7z\ \ \ \ =12 \end{cases}$$

5.4 ariketa. Eztabaidatu, eta ebatzi ahal denean, honako ekuazio lineal hauetako sistemak:

$$(a)\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} ax+by+2z=1 \\ ax+(2b-1)y+3z=1 \\ ax+by+(b+3)z=1 \end{cases} \quad (c)\begin{cases} x+ay+z=a+2 \\ x+y+az=-2(a+1) \\ ax+y+z=a. \end{cases}$$

5.5 ariketa. Ebatzi honako $AX=B$ sistema hauek, non sistema horien $(A|B)$ matrize hedatuak hauek baitira:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 1 \\ 2 & 4 & -2 & | & 4 \\ 3 & -2 & 2 & | & 5 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & -2 & | & 2 \\ 2 & -1 & -1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ -2 & 1 & -1 & | & -4 \\ 3 & -2 & 1 & | & -4 \end{pmatrix}$$

5.6 ariketa. Kalkulatu ondorengo matrizeen heina:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.7 ariketa. Lortu transformazio elementalen bidez honako matrize hauen alderantzizkoa.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

5.8 ariketa. Frogatu honako berdintza hau:

$$\det\begin{pmatrix}1&6&9\\1&8&2\\0&4&1\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}1&1&1\\5&6&8\\4&9&2\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&6&9\\1&8&2\\1&9&5\end{pmatrix}.$$

5.9 ariketa. Kalkulatu x ekuazio honetan:

$$\det\begin{pmatrix}a&b&c\\a&x&c\\a&b&x\end{pmatrix}=0.$$

5.10 ariketa. Frogatu berdintza hauek determinanteen propietateak erabiliz:

$$a)\ \det\begin{pmatrix}\sin^2 x&1&\cos^2 x\\\sin^2 y&1&\cos^2 y\\\sin^2 z&1&\cos^2 z\end{pmatrix}=0,\quad b)\ \det\begin{pmatrix}-1&x&x&x\\x&-1&x&x\\x&x&-1&x\\x&x&x&-1\end{pmatrix}=(1-3x)(1+x)^3,$$

$$c)\ \det\begin{pmatrix}a+x&x&x\\x&b+x&x\\x&x&c+x\end{pmatrix}=abc+(ab+bc+ac)x,\quad d)\ \det\begin{pmatrix}1&a&b+c\\1&b&c+a\\1&c&a+b\end{pmatrix}=0,$$

$$e)\ \det\begin{pmatrix}3&15&1\\5&25&0\\1&5&7\end{pmatrix}=0,\qquad f)\ \begin{pmatrix}a^2&ab&b^2\\2a&a+b&2b\\1&1&1\end{pmatrix}=(a-b)^3.$$

5.11 ariketa. Kalkulatu determinante hauek beren propietateak erabiliz:

$$a)\ \begin{pmatrix}x+a&b&c\\a&x+b&c\\a&b&x+c\end{pmatrix},\quad b)\ \begin{pmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+x&1\\1&1&1&1-x\end{pmatrix},$$

$$c)\ \begin{pmatrix}a&b&b&\dots&b&b\\b&a&b&\dots&b&b\\b&b&a&\dots&b&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\b&b&b&\dots&b&a\end{pmatrix}.$$

5.12 ariketa. Kalkulatu matrize hauen alderantzizkoa:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b)\ A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$c)\ A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad d)\ A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

5.13 ariketa. Aurkitu AB-ren alderantzizkoa, honako hau badugu:

$$A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad B = \begin{pmatrix} \cos y & 0 & \sin y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin y & 0 & \cos y \end{pmatrix}.$$

5.14 ariketa. Aztertu

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ eta } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 4 \\ 4 & 3 & -4 & 8 \\ -4 & -2 & 5 & -8 \\ -4 & -2 & 6 & -9 \end{pmatrix}$$

matrizeak diagonalgarriak direnetz.

5.15 ariketa. Aztertu honako matrize hauek

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ eta } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

diagonalgarriak direnetz. Ahal denean, aurkitu forma diagonala, D, eta eman P matrize alderantzikagarria, non $P^{-1}AP = D$ den, eta kalkulatu A matrizearen n-garren berretura, edozein $n \in \mathbb{N}$-tarako.

5.16 ariketa. Izan bitez

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$a, b \in \mathbb{R}$ izanik. Aztertu matrize bakoitzeko honako puntu hauek:

(a) Zer baldintzak bete behar dituzte a-k eta b-k matrizea diagonalgarria izan dadin?

(b) Diagonalgarria denean, eman bere forma diagonala D eta aldaketa matrizea P. Egiaztatu $P^{-1}AP = D$ erlazioa.

A

Espazio bektorial errealak

Eranskin labur honetan, Aljebra Linealeko teoria orokorra sartuko dugu. Irakurtzea derrigorrezkoa ez bada ere, lagungarria izan daiteke aurreko atalean landutako gaiak hobeto ulertzeko.

A.1. OHARRA. Tokia aurreztearren, bektoreak lerroetan idatziko ditugu, nahiz eta zutabeak izan beharko ziratekeen.

A.1. Espazio bektorialak

A.2. DEFINIZIOA. Izan bedi n zenbaki arrunta. Orduan, $\mathbb{R}^n$ *espazio bektoriala* $\mathbb{R}$-ko elementuz osatutako n-koteen multzoa baino ez da:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}.$$

Bestalde, $\mathbb{R}^n$-ko elementuak *bektoreak* deitzen dira. Horretaz gain, $\mathbb{R}^n$ bi eragiketa definituta daudela ohartzen gara:

- **Batuketa:** $(x_1, \ldots, x_n)$ eta $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ guztietarako,
$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$
- **Kanpoko biderketa:** $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ eta $\lambda \in \mathbb{R}$ guztietarako,
$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Gainera, honako batuketa hauekiko propietateak

(B1) (propietate elkarkorra) $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$, $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ guztietarako

$$((x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)) + (z_1, \ldots, z_n) = \\ ((x_1, \ldots, x_n) + ((y_1, \ldots, y_n) + (z_1, \ldots, z_n)).$$

(B2) (elementu neutroa du) $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ guztietarako
$$(0, \ldots, 0) + (x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n) + (0, \ldots, 0).$$

(B3) (alderantzizkoak daude) $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ guztietarako
$$(x_1, \ldots, x_n) + (-x_1, \ldots, -x_n) = (0, \ldots, 0) = (-x_1, \ldots, -x_n) + (x_1, \ldots, x_n).$$

(B4) (propietate trukakorra) $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ guztietarako
$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (y_1, \ldots, y_n) + (x_1, \ldots, x_n).$$

kanpoko biderkadurarekiko propietateak

(KB1) $(\lambda_1\lambda_2)(x_1,\dots,x_n) = \lambda_1(\lambda_2(x_1,\dots,x_n))$, $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$ eta $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ guztietarako.

(KB2) $1(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_n)$, $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ guztietarako.

eta propietate banakorrak

(D1) $(\lambda_1 + \lambda_2)(x_1,\dots,x_n) = \lambda_1(x_1,\dots,x_n) + \lambda_2(x_1,\dots,x_n)$, $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ eta $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ guztietarako.

(D2) $\lambda((x_1,\dots,x_n) + (y_1,\dots,y_n)) = \lambda(x_1,\dots,x_n) + \lambda(y_1,\dots,y_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ eta $(x_1,\dots,x_n)$, $(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ guztietarako.

betetzen dira.

Badaude $\mathbb{R}^n$ ez diren hainbat multzo, (B1)-(B4), (KB1)-(KB2) eta (D1)-(D2) propietateak betetzen dituztenak. Horrela bada, multzo hori $\mathbb{R}$-espazio bektoriala dela esaten dugu. Adibidez, 1.14 definizioan funtzio errealen arteko batuketa eta biderketa definituta daudela eta $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ funtzioa}\}$ multzoa $\mathbb{R}$-espazio bektoriala dela esan daiteke. Dena den, kurtso honetan ikusten dugun $\mathbb{R}$-espazio bektorial bakarra $\mathbb{R}^n$ bera izango da.

A.2. Azpiespazio bektorialak

Espazio bektorialetan azpimultzo bereziak interesatzen zaizkigu. Esaterako, har dezagun kontuan $\mathbb{R}^2$ planoko $y = 2x$ zuzena: zuzenaren puntu bakoitzak $(x, 2x)$ koordenatuak ditu; hau da, $x(1,2)$, non $x \in \mathbb{R}$ eta $(1,2)$ bektorea diren. Beraz, zuzen horretako bi bektore hartuz gero, beraien batuketa zuzenean geratzen da.

Adibide hau orokortuko dugu.

A.3. DEFINIZIOA. Izan bedi W $\mathbb{R}^n$-ko azpimultzo ez-hutsa. Orduan, W $\mathbb{R}^n$-ren azpiespazioa dela esaten da, eta idatzi $W \leq \mathbb{R}^n$, honako baldintza hauek betetzen badira:

(i) $w_1 + w_2 \in W$, $w_1, w_2 \in W$ guztietarako.

(ii) $\lambda w \in W$, $\lambda \in \mathbb{R}$ eta $w \in W$ guztietarako.

A.4. ADIBIDEA. Kontuan hartu $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ azpimultzoa. Orain, W azpiespazioa dela erakutsiko dugu. Bi baldintza egiaztatu behar ditugu. Lehenik, $w_1 = (x_1, y_1, z_1)$ eta $w_2 = (x_2, y_2, z_2)$ W-ko elementuak badira, orduan

$$w_1 + w_2 = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

dugu, eta

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) = 0 + 0 = 0$$

betetzeak $w_1 + w_2 \in W$ dela dakar berekin. Bigarrenik, $w = (x,y,z) \in W$ eta $\lambda \in \mathbb{R}$ badira, $\lambda w = \lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ eta $\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda(x + y + z) = \lambda \cdot 0 = 0$. Beraz, $\lambda w \in W$ eta W azpiespazioa da.

Ohartu aurreko adibidea edozein sistema linealekin errepika daitekeela. Horrenbestez, edozein sistema lineal *homogeneo*k azpiespazioa definitzen duela (ikusi A.18 adibidea alderantzizko norabiderako).

A.3. Oinarriak eta dimentsioa

A.5. DEFINIZIOA. Izan bitez $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ bektoreak. Orduan, $\{v_1, \ldots, v_m\}$ multzoa sistema *askea* dela esaten da, baldin eta honako inplikazio hau betetzen badu:

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = (0, \ldots, 0) \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

A.6. ADIBIDEA. Izan bedi $\{v_1 = (1,1), v_2 = (1,-1)\}$ bektore multzoa. Bektore multzo hori askea dela erakutsiko dugu. Har ditzagun $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ eta idatz dezagun esplizituki $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ ekuazioa:

$$\lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,-1) = (0,0) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Beraz, $\{v_1, v_2\}$ askea da.

A.7. ADIBIDEA. Izan bedi $\{(1,1),(2,2)\}$ bektore multzoa. Orduan, multzo hori ez da askea. Izan ere,

$$\lambda_1(1,1) + \lambda_2(2,2) = (0,0) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1 = -2\lambda_2$$

eta $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ zero ez den soluzioa da. Beraz, $\{(1,1),(2,2)\}$ ez da askea.

A.8. DEFINIZIOA. Izan bitez $v, v_1, \ldots, v_n$ bektoreak. Orduan, v bektorea $v_1, \ldots, v_n$ bektoreen *konbinazio lineala* da, baldin eta $\lambda_1, \ldots, \lambda \in \mathbb{R}$ existitzen badira, non

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \quad \text{betezen den.}$$

Horrela bada, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ $v_1, \ldots, v_n$-ekiko v-ren *koefizienteak* direla esango dugu.

Orain, $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bektoreen multzoa bada, *S-k sortzen duen azpiespazioa*, $\langle S \rangle$ ikurraz adieraziko duguna, S-ko bektoreen konbinazio lineal guztien multzoa da: hots,

$$\langle S \rangle = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}.$$

Bektore multzo batek sortzen duen azpiespazioa benetan azpiespazioa dela egiaztatzea hobe genuke.

A.9. LEMA. *Izan bedi $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bektoreen multzoa. Orduan, $\langle S \rangle$ azpiespazioa da.*

FROGAPENA. Lehenik, w_1, $w_2 \in \langle S \rangle$ badira, orduan $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ existitzen dira, non

$$w_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \quad \text{eta} \quad w_1 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$$

diren. Beraz, $w_1 + w_2 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) v_i$ da eta $w_1 + w_2 \in \langle S \rangle$ dela dugu. Bigarrenik, $w \in \langle S \rangle$ eta $\lambda \in \mathbb{R}$ badira, orduan, lehenago bezala, $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, λ_i batzuetarako, eta $\lambda w = \sum_{i=1}^{n} \lambda \lambda_i v_i$. Horrenbestez, $\lambda w \in \langle S \rangle$. $\square$

A.10. DEFINIZIOA. Izan bitez W azpiespazioa eta $v_1, \ldots, v_m \in W$ bektoreak. Orduan, $\{v_1, \ldots, v_m\}$ multzoa W-ren *sistema sortzailea* dela esaten da, baldin eta $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle = W$ bada. Hau da, W-ko edozein bektore $v_1, \ldots, v_m$ bektoreen konbinazio lineal modura adieraz badaiteke.

A.11. ADIBIDEA. Kontuan hartu $\begin{cases} x + y + \ \ z + \ \ t = 0 \\ x + y + 2z + 2t = 0 \end{cases}$ sistema. Badakigu sistemak azpiespazioa definitzen duela; deitu W azpiespazio hori. Sistema honen edozein soluzio honako modu honetan idatz daiteke:

$$\lambda(-1, 1, 0, 0) + \mu(0, 0, -1, 1).$$

Hau da, W azpiespazioaren sistema sortzailea $\{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)\}$ da, eta $W = \langle (-1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1) \rangle$ idatz dezakegu.

Azpimarratzekoa da A.11 adibidearen prozesua edozein sistema linealekin errepika daitekeela. Hau da, edozein sistema linealetarako gutxienez sistema sortzaile bat aurkitu dezakegu.

Beste alde batetik, A.7 adibidean $\{(1, 1), (2, 2)\}$ multzoa ez dela askea ikusi dugu. Izan ere, $W = \langle (1, 1), (2, 2) \rangle = \langle (1, 1) \rangle$ da. Beste era batean esanda, ez dugu $(2, 2)$ bektorea behar W azpiespazioa sortzeko. Orduan, sistema sortzaileak ez du zertan askea izan.

Sistema sortzaile ahalik eta txikienak interesatzen zaizkigu, eta hurrengo definizioan ideia hori zehaztuko dugu.

A.12. DEFINIZIOA. Izan bitez W azpiespazioa eta $v_1, \ldots, v_m \in W$ bektoreak. $\{v_1, \ldots v_m\}$ W-ren *oinarria* dela esaten da, baldin eta sistema askea eta sortzailea bada.

A.13. TEOREMA. *Izan bitez W azpiespazioa, $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eta $T = \{w_1, \ldots, w_m\}$ W-ren bi oinarri. Orduan, $n = m$ da.*

FROGAPENA. Kontraesan batera iristeko, suposatu $n > m$ dela. Orduan, $W = \langle T \rangle$ eta $v_i \in W$ direnez, $v_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} w_j$ da, λ_{ij} batzuetarako. Har ditzagun $x_1, \ldots, x_n$ zenbaki errealak, eta idatz dezagun honako ekuazio hau:

$$x_1 v_1 + \ldots x_n v_n = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} x_i w_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} x_i \right) w_j = 0.$$

Alde batetik, x_i zenbakiak zero izan beharko lirateke, S askea delako. Beste alde batetik, T askea denez, w_i-ekiko koefiziente guztiak zero izan beharko lirateke; hau da,

$$\begin{cases} \lambda_{11} x_1 + \ldots \lambda_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{m1} x_1 + \ldots \lambda_{mn} x_n = 0 \end{cases}$$

Horrenbestez, 5.13 teoremaren arabera, zero ez den $(x_1, \ldots, x_n)$ soluzioa du sistemak, kontraesana dena. □

Frogapen berbera errepika daiteke honako korolario hau frogatzeko.

A.14. KOROLARIOA. *Izan bedi W azpiespazioa. Demagun* $\dim W = m$ *dela. Orduan, $S \subset W$ bektore multzo askea bada, $|S| \leq m$.*

Horrenbestez, W azpiespazioaren oinarri baten bektoreen kopurua inbariantea da, eta W-ren *dimentsioa* dela esaten da. Horrela, bada, $\dim W$ ikurraz W-ren dimentsioa adieraziko dugu.

A.1 ariketa. Izan bitez $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ eta $e_3 = (0, 0, 1)$ $\mathbb{R}^3$-ko bektoreak. Orduan, $\{e_1, e_2, e_3\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarria da.

Aurreko adibidea edozein $\mathbb{R}^n$-tarako orokortu daiteke. Arestian aipatutako $\{e_1, \ldots, e_n\}$ $\mathbb{R}^n$-ren oinarria *oinarri kanonikoa* deitzen da.

Horrez gain, edozein azpiespazio sistema lineal baten soluzioen multzo gisa idatz daiteke. Beraz, bat datoz aurreko atalean emandako dimentsioaren definizioa eta oraingoa.

Oinarriak oso baliagarriak dira azpiespazioaren bektoreak idazteko.

A.15. TEOREMA. *Izan bedi $\{v_1, \ldots, v_m\}$ W azpiespazioaren oinarria. Orduan, W-ko edozein bektore $v_1, \ldots, v_m$ bektoreen konbinazio lineal moduan era bakar batean adieraz daiteke.*

FROGAPENA. Hasteko, $v \in W$ bada, orduan $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ existitzen dira, non $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ den, $\{v_1, \ldots, v_m\}$ W-ren sistema sortzailea delako.

Jarraitzeko, $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ v-rako $v_1, \ldots, v_m$-ekiko beste koefiziente batzuk izango balira, hurrengoa izango genuke:

$$0 = v - v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^n \mu_i v_i = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) v_i.$$

Orain, $\{v_1, \ldots, v_m\}$ multzo askea dela gogoratuz, $\lambda_i - \mu_i = 0$ dela jarraitu dezakegu, i guztietarako, eta koefizienteak bakarrak direla erakutsi dugu. □

Aurreko teoremaren arabera, oinarriak oso baliagarriak dira. Hala ere, oraindik ez dakigu edozein azpiespaziok oinarri bat duen ala ez. Laster frogatuko dugu hori. Lehenik, lema bat behar dugu.

A.16. LEMA. *Izan bitez $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bektore multzo askea eta $v \notin \langle S \rangle$. Orduan, $S \cup \{v\}$ askea da.*

FROGAPENA. $S \cup \{v\}$ askea izango ez balitz, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda \in \mathbb{R}$ existituko lirateke, non $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda) \neq 0$ eta

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n + \lambda v = 0$$

betetzen diren. Baina λ ezin da 0 izan; bestela, λ_i guztiak zero direla ondorioztatu genezake, S askea delako. Beraz, $\lambda \neq 0$ denez,

$$v = -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

izango genuke eta $v \in \langle S \rangle$ dela jarraituko genuke, kontraesana izango litzatekeena. □

A.17. TEOREMA. *Izan bedi W $\mathbb{R}^n$-ko azpiespazio ez-hutsa. Orduan, W-k oinarri bat dauka.*

FROGAPENA. Ez-hutsa denez, $0 \neq v_1 \in W$ existitzen da. Suposatu $S_k = \{v_1, \dots, v_k\}$ multzo askea topatu dugula, non $v_i \in W$ diren. Orain, W-ko edozein bektore S_k-ren bektoreen konbinazio lineala bada, orduan $W = \langle S_k \rangle$ dela dugu, eta S_k W-ren oinarria da.

Bestela, $v_{k+1} \in W \smallsetminus \langle S_k \rangle$ bada, A.16 lemaren ondorioz, $S_{k+1} = S_k \cup \{v_{k+1}\}$ askea da.

Bukatzeko, A.14 korolarioaren arabera, aurreko algoritmoa $k \leq m = \dim W$ baterako bukatu behar da, eta W-ren oinarria topatu dugu. Izan ere, algoritmoa bukatuko ez balitz, S_{m+1} $m+1$ bektore dituen W-ko azpimultzo askea izango litzateke, kontraesana izango litzatekeena. □

Orduan, W azpiespazioaren oinarri baten bektoreen kopurua azpiespazioaren *dimentsioa* dela esango dugu, $\dim W$ idatziz.

A.4. Sistema linealak eta azpiespazioak

Frogatu dugunez, edozein sistema lineal homogeneok azpiespazio bat definitzen du. Gainera, edozein azpiespaziok oinarri bat du. Orain, edozein W azpiespaziotatik abiatuta W soluzioa duen sistema lineal homogeneo bat idatz dezakegula adieraziko dugu. Gehiegi ez konplikatzeko, adibide bat soilik hartuko dugu, baina argi dago azpiespazio orotarako nola orokortu.

A.18. ADIBIDEA. Izan bitez $S = \{(1,-1,0,1),(-1,0,3,0)\}$ bektore multzoa eta $W = \langle S \rangle$ azpiespazioa. Adibide honetan, W definitzen duten ekuazioak kalkulatuko ditugu. Hau da, ekuazio batzuk aurkitu nahi ditugu, non ekuazioen soluzioa zehazki honako hau den:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda(1,-1,0,1) + \mu(-1,0,3,0) \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Sistemara eramanez:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda - \mu \\ x_2 = -\lambda \\ x_3 = 3\mu \\ x_4 = \lambda \end{cases}$$

Orain, $\lambda = x_4$ eta $\mu = \frac{1}{3}x_3$ berdintzak erabiliz, honako sistema hau dugu:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Hori dela eta, 5. atalean ez dugu orokortasunik galdu sistema linealekin eta beraien soluzioekin bakarrik lan egiteagatik: azpiespazio eta sistema linealaren soluzioaren kontzeptuak bat datoz.

Horrez gain, ea azpiespazio baten dimentsioa eta horri dagokion sistema linealaren dimentsioa bat datozen ala ez galde dezakegu. Erantzuna baiezkoa da.

A.19. PROPOSIZIOA. *Izan bitez W azpiespazioa eta $AX = 0$ W-ri esleitutako sistema lineal homogenoa. Orduan, honako hauek berdinak dira:*

(i) *W-ren dimentsioa,*
(ii) *$AX = 0$ sistemaren soluzioaren dimentsioa eta*
(iii) *$h(A)$ (A matrizearen heina).*

A.5. Matrizeak eta aplikazio linealak

Atal honetan matrizeak ikusteko beste ikuspuntu bat sartuko dugu. Demagun $\mathbb{R}^n$ eta $\mathbb{R}^m$ espazio bektorialak dauzkagula eta $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funtzioa definitu nahi dugula. Espazio bektorialen gaineko egitura babestu nahi izanez gero, f ezin da edozein aplikazio izan. Horrek honako definizio hau motibatzen du.

A.20. DEFINIZIOA. Izan bitez $\mathbb{R}^n$ eta $\mathbb{R}^m$ espazio bektorialak eta $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aplikazioa. Orduan, f *aplikazio lineala* dela esango dugu, baldin eta honako bi baldintza hauek betetzen badira:

(i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ guztietarako;
(ii) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$, $v \in \mathbb{R}^n$ eta $\lambda \in \mathbb{R}$ guztietarako.

Bukatzeko, honako teorema hau soilik aipatuko dugu.

A.21. TEOREMA. *Izan bitez $\mathbb{R}^n$ eta $\mathbb{R}^m$ espazio bektorialak eta $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aplikazioa. Orduan, f aplikatzio lineala da, baldin eta soilik baldin $m \times n$ dimentsioko A matrizea existitzen bada, non $f(v) = A \cdot v$ den.*

Matematika I (Geologia eta Ing. Kimikoa, 32. taldea)

Ohiko deialdiko azterketa - 2022ko urtarrilaren 12a.

1. (1 puntu) Izan bitez $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioa eta $x_0 \in [a, b]$ puntua. Eman ezazu f funtzioak bete behar duen baldintza, x_0 puntuan deribagarria izateko (definizioa).

2. (1 puntu) Izan bedi f honako funtzio hau, non $a, b \in \mathbb{R}$ diren. Eman itzazu a eta b baloreak, f funtzioa $\mathbb{R}$ osoan jarraitua eta deribagarria izan dadin.

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)e^{-x} + bx & x \leq 0 \text{ bada,} \\ \dfrac{\ln^2(1+x)}{x} & \text{bestela.} \end{cases}$$

3. (3 puntu) (a) Kalkulatu $\displaystyle\int \frac{9}{(x - 2\sqrt{x} + 1)(x+2)}\, \mathrm{d}x$.

   (b) Kalkulatu honako bi kurba hauek osatzen duten eskualdearen azalera:

$$y = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \qquad \text{eta} \qquad y = -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

   (c) Kalkulatu $x^2 + (y-2)^2 = 1$ kurbak OX ardatzekiko osatzen duen biraketa-gorputzaren bolumena.

4. (2 puntu) Izan bedi $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$ funtzioa. Lortu definizio-eremua, asintotak, ardatzekiko ebaki-puntuak, eta aztertu gorakortasun-beherakortasun tarteak (maximo eta minimoak emanez), ahurtasun-ganbiltasun tarteak (inflexio-puntuak emanez). Ondoren, egin irudikapena.

5. (3 ½ puntu) Izan bedi A honako matrize hau.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Zenbatekoa da A matrizearen heina?

   (b) Adierazi A diagonalgarria den, eta, existitzen badira, eman D matrize diagonala, P matrize alderantzikagarria, non $P^{-1}AP = D$ den.

Matematika I (Geologia eta Ing. Kimikoa, 32. taldea)

Ez-ohiko deialdiko azterketa - 2022ko ekainaren 27a.

Izen-abizenak: _____

1. (1 puntu) Aurkitu ezazu $f(x) = \arcsin(|1 + x^2|)$ funtzioaren definizio-eremua.

2. (1 puntu) Idatz itzazu honako zenbaki konplexu hauek $a + ib$ moduan:

$$(1+i)^2, \quad e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{eta} \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-1}.$$

3. (3 puntu) (a) Kalkulatu $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x$.

   (b) Kalkulatu $y = x + 1$, $y = -x + 1$ eta $y = 0$ zuzenek osatzen duten eskualdearen azalera.

   (c) Kalkulatu $x^2 + y^2 - 4y + 4 = 1$ kurbak OX ardatzekiko osatzen duen biraketa-gorputzaren bolumena. *(Laguntza: $y^2 - 4y + 4 = ?$)*

4. (2 puntu) Izan bedi $f(x) = \ln(1 + x^2)$ funtzioa. Lortu definizio-eremua, asintotak, ardatzekiko ebaki-puntuak, eta aztertu gorakortasun-beherakortasun tarteak, ahurtasun-ganbiltasun tarteak. Ondoren, egin irudikapena.

5. (3 ½ puntu) (a) Izan bitez $W \leq \mathbb{R}^n$ azpiespazioa eta $S = \{w_1, \ldots, w_m\} \in W$ bektore multzoa. Eman S multzoak bete behar dituen baldintzak W azpiespazioaren oinarri bat izan dadin.

   (b) Izan bedi A_a honako matrize hau $a \in \mathbb{R}$ parametroaren menpe,

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

   Adierazi, a-ren menpe, A diagonalgarria den, eta, existitzen badira, eman D_a matrize diagonala, P_a matrize alderantzikagarria, non $P_a^{-1} A_a P_a = D_a$ den.

Matematika I (Geologia eta Ing. Kimikoa, 32. taldea)

Ohiko deialdiko azterketa - 2023ko urtarrilaren 11a.

1. (½ puntu) Aurkitu $f(x) = \dfrac{\ln(x^2-4)}{\sqrt{3-x^2}}$ funtzioaren definizio-eremua (*Lag.:* $\sqrt{3} < 2$).

2. (1½ puntu) (a) Enuntziatu funtzioa puntu batean jarraitua izatearen definizioa.

   (b) Izan bedi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ honako funtzio hau:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2} & x < 0 \text{ bada,} \\ \\ ax^2 + b & x \geq 0 \text{ bada.} \end{cases}$$

   Zein a eta b baliotarako da f jarraitua eta deribagarria $\mathbb{R}$ osoan? Argudiatu zure erantzuna. (*Laguntza:* $(\sqrt{1+x^2}-1)^2 = \ldots$)

3. (3 puntu) (a) Kalkulatu $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

   (b) Kalkulatu honako bi kurba hauek eta x ardatzak osatzen duten eskualdearen azalera:

$$y = |x| \qquad \text{eta} \qquad y = x^2 - 8.$$

   (c) Kalkulatu $f(x) = x$ funtzioak $[0,1]$ tartean osatzen duen x ardatzekiko biraketa-gorputzaren bolumena.

4. (2 puntu) Izan bedi $f(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2}$ funtzioa. Lortu definizio-eremua, asintotak, ardatzekiko ebaki-puntuak, eta aztertu gorakortasun-beherakortasun tarteak (maximo eta minimoak emanez), ahurtasun-ganbiltasun tarteak (inflexio-puntuak emanez). Ondoren, egin irudikapena.

5. (3 ½ puntu) Izan bedi A honako matrize hau.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Zenbatekoa da A matrizearen heina?

   (b) Adierazi A diagonalgarria den, eta, existitzen badira, eman D matrize diagonala eta P matrize alderantzikagarria, non $P^{-1}AP = D$ den.

Si capisce che ci vuole ben altro:
siate felici.

C. Casolo