eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

MATEMATIKA I

Raúl Medina Galarza
Oihana Aristondo Etxeberria

EUSKARA ETA ELEANIZTASUNEKO ERREKTOREORDETZAREN SARE ARGITALPENA

Liburu honek UPV/EHUko Euskara eta Eleaniztasuneko Errektoreordetzaren diru laguntza jaso du

AURKIBIDEA:

1. GAIA. EGITURA ALJEBRAIKOAK……..……1

1.1. Multzoak……...….2

1.2. Multzoen arteko eragiketak…….…..……6

1.3. Taldeak eta Gorputzak……..9

1.4. Ariketak……...….11

2. GAIA. ESPAZIO BEKTORIALAK……....12

2.1. Definizioa eta propietateak……..13

2.2. Azpiespazio bektorialak…….….17

2.3. Konbinaketa linealak…….……..17

2.4. Menpekotasun eta independentzia lineala……...…..…..18

2.5. Espazio bektorial baten oinarria eta dimentsioa……....….19

2.6. Osatugabeko oinarriaren teorema……...….20

2.7. Azpiespazioen arteko bildura, ebakidura eta baturak……..…...….20

2.8. Batura zuzenak……..……..…22

2.9. Bektore baten koordenatuak……..……..24

2.10. Ariketak……..…25

3. GAIA. MATRIZEAK ETA DETERMINANTEAK……..32

3.1. Matrizearen definizioa……...….33

3.2. Matrize motak……..33

3.3. Matrizeen arteko eragiketak……..…...…...36

3.4. Matrize karratu baten determinantea…….....….38

3.5. Matrize Iraulia. Propietateak……...…43

3.6. Matrize karratu baten alderantzizkoa…….….44

3.7. Matrize baten heina…….……....46

3.8. Matrize karratuen berreketak eta erroak……..…49

3.9. Blokekako matrizeak…….……...…50

3.10. Zenbaki konplexuen gainean definituriko matrizeak……..…..54

3.11. Matrize sakabanatuak……..……..55

3.12. Zenbakizko metodoak……56

3.13. Oinarri aldaketako matrizea……...58

3.14. Matrizeen ariketak…….…60

4.GAIA. EKUAZIO-SISTEMA LINEALAK…….....65

4.1. Sarrera……..……....66

4.2. Rouche Frobenius-en teorema……..…...68

4.3. Cramer-en erregela……..69

4.4. Ekuazio-sistema linealen baliokidetasunak…….71

4.5. Ekuazio linealen sistema homogeneoak…….....76

4.6. Ekuazio-sistema linealen ebazpenerako metodo orokorra…….…78

4.7. Zenbakizko metodoen aplikazioa……81

4.8. Ekuazio sistema linealen ariketak……...85

5.GAIA. APLIKAZIO LINEALAK……...…..88

5.1. Aplikazio linealaren definizioa……....89

5.2. Aplikazio motak…….....89

5.3. Aplikazio lineal baten Irudia……...90

5.4. Aplikazio lineal baten Matrizea……...91

5.5. Aplikazio linealen arteko batura……..92

5.6. Aplikazio lineal baten eta eskalar baten arteko biderkadura……..93

5.7. Aplikazio linealen arteko biderkadura(konposaketa)……..93

5.8. Aplikazio lineal baten nukleoa……94

5.9. Aplikazio linealen ariketak…….96

6. ENDOMORFISMO BATEN DIAGONALIZAZIOA……98

6.1. Balio eta bektore propioak …….....99

6.2. Balio eta bektore propioen kalkulua…….....101

6.3. Autobalio baten anizkoiztasun aljebraikoa eta geometrikoa ……106

6.4. Endomorfismo diagonalgarriak …….....107

6.5. Jordan-en Forma Kanonikoa ……115

6.6. Ariketak…….……118

BIBLIOGRAFIA

TEORIA

Euskaraz

1. “Oinarrizko Aljebra”. ZURUTUZA, I. Elhuyar.

Gaztelaniaz

2. “Algebra Lineal y Teoría de Matrices”. BARBOLLA, R, y otros.

3. “Algebra Lineal” BURGOS, J. McGraw-Hill. Madrid, 1993.

4. “Curso de Algebra y Geometría”. BURGOS, J.

5. “Algebra Lineal y Geometría”. GARCIA G., J. LOPEZ PELLICER, M. Marfil. Valencia.

6. “Algebra Lineal y algunas de sus aplicaciones”. GOLOVINA L. Y. Mir. Moscu, 1983.

7. “Algebra y Geometría Analítica”. GRANERO, F. McGraw-Hill. Madrid, 1191.

Ingelesez

8. “Linear Algebra and its aplications”. GRIFFEL, D.H. Ellis Horwood Ltd. Chichester, 1989.

9. “Applied Numerical Linear Algebra”. HAGER, W. Prentice Hall., U.S.A., 1995.

PROBLEMAK

Euskaraz

1. "Aljebra lineala. Azterketarako Problema Ebatziak". BOnostia, Elkar

Gastelaniaz

2. "Problemas de Algebra Lineal y Geometría". BLANCO, F. y otros.

3. "Problemas de Algebra Lineal". COLECCIO NR.A.E.C.

4. "Problemas de Algebra Lineal". DIEGO, B. y otros. Demos. Madrid, 1986.

5. "Algebra Lineal". LANG, S.

6. "Lecciones Básicas de Algebra Lineal". MALAINA, J.L. y otros.

7. "Análisis Numérico". MERAYO GARCIA, F. NEVOT CUNA, A. Editorial Paraninfo, S.A.

8. "Algebra Lineal Aplicada". NOBLE, B. DANIEL, J.W. Prentice Hall, México, 1989.

9. "Algebra Lineal". ROJO, J.

10. "Algebra Matricial y Lineal" (Teoría y 179 Problemas resueltos). SERIE SCHAUM

11. "Matrices SERIE SCHAUM.

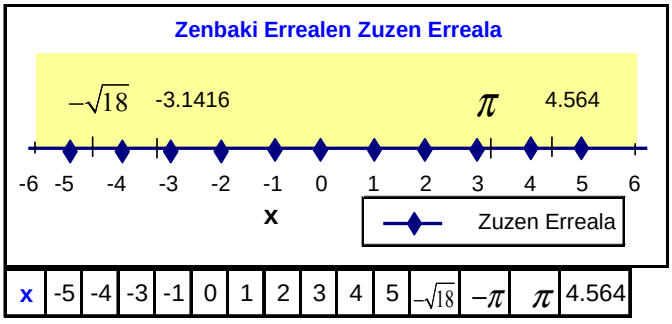
12. "Algebra Lineal y sus Aplicaciones". STRENG, G. Addison Wesley Iberoamericana, 1988.

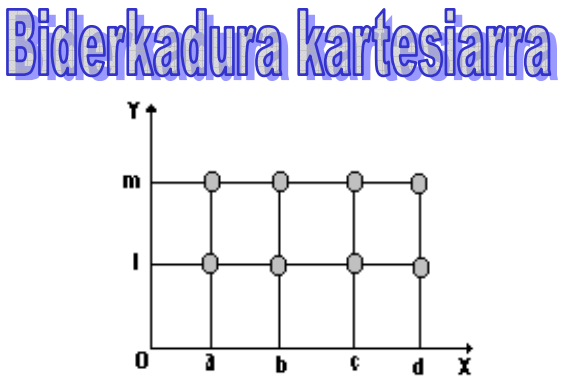
13. "Problemas de Algebra Lineal". TEBAR, F.

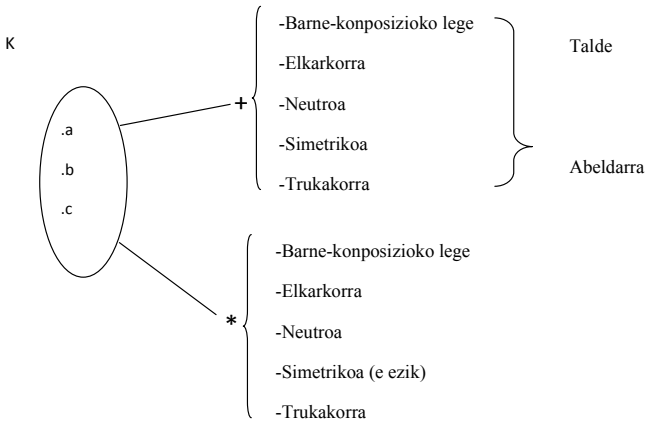
Ingelesez

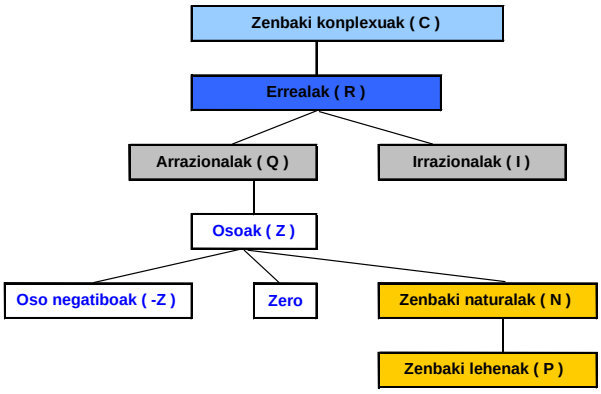
14. "Numerical Methods for Mathematics, Science & Engineering". MATHEWS, J.H.

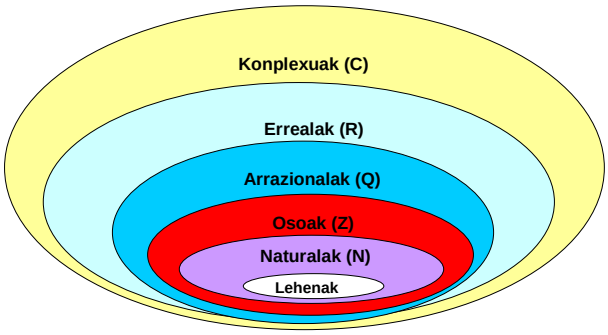
EGITURA ALJEBRAIKOAK











1. GAIA. EGITURA ALJEBRAIKOAK

1.1. Multzoak

Definizioa: Intuitiboki, multzo bat, ondo definituriko zerrenda edo bilduma bat da. Multzoa osatzen duten objektuei ***elementu*** deitzen zaie.

Multzo bat definitzeko bi era daude:

HEDADURAZ:

Multzoko elementu guztiak zerrendatuz.

Adibidea: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

EZAUPIDEZ:

Multzoko elementuen propietateen bidez.

Adibidea: $A = \{x / x \text{ bikoitia}\}$ $\quad \mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / p \in Z \text{ eta } q \in Z \right\}$

Oharra: Multzoak izendatzeko letra larriak erabiltzen dira: A, B, C… Elementuak adierazteko, aldiz, letra xeheak erabiltzen dira: x, y, a, b…

Barnekotasuna

x elementua A multzoari dagokiola adierazteko, $x \in A$ (x barne A) notazioa erabiltzen da. Alderantziz, x elementua A multzoari ez badagokio, orduan $x \notin A$.

Adibidea: $\frac{7}{3} \in \mathbb{Q}$

Zenbatzaile unibertsala

$\forall$ sinboloa multzo bateko elementu baten aurrean jarriz, propietate hau elementu guztiek (guztietarako) betetzen dutela adieraziko du.

Existentzia

$\exists$ sinboloa elementu baten aurrean jarriz, propietate hau elementuren batek (gutxienez batek) betetzen duela adieraziko da.

Partekotasuna

A eta B bi multzo izanik, B-ren elementu guztiak A-ren elementuak badira, B multzoa A-ren azpimultzoa dela esaten da, eta honela izendatu: $B \subseteq A$ (B parte A).

Multzo hutsa: Elementu bat ere ez duena da, eta $\varnothing$ ikurraz adierazten da.

ZENBAKI NATURALEN MULTZOA:

Zenbaki naturalak zenbaki oso positiboak dira, eta $\mathbb{N}$ letraz adierazten dira:

$$\mathbb{N}=\{x / x \text{ zenbaki oso positiboak}\}=\{1, 2, 3, 4,...\}$$

ZENBAKI OSOEN MULTZOA:

Zenbaki osoak hauek dira: zenbaki naturalak, zeroa eta zenbaki natural negatiboak. $\mathbb{Z}$ letraz adierazten dira.

$$\mathbb{Z}=\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...\}$$

Oharra: Bi zenbaki osoren batura, kendura eta biderkadura beste zenbaki oso bat da. Zatidura, aldiz, ez da beti zenbaki oso bat izaten.

Adibideak:

2+5=7, non 7 zenbaki osoa baita ; 3*6=18, non $18 \in Z$

10-5=5, non 5 zenbaki osoa baita; 7/3=2,33, non $2,33 \notin Z$

ZENBAKI ARRAZIONALEN MULTZOA:

Zenbaki arrazionalak bi zenbaki osoren zatidura gisa idazten diren zenbakiak dira, eta $\mathbb{Q}$ letraren bitartez adierazten dira.

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q} \ / \ p \in Z \text{ eta } q \in Z, q \neq 0\right\}$$

Oharra: Zenbaki osoak arrazionalak ere izango dira, q=1 eginez. Beraz, $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$-ren azpimultzo bat izango da. Hau da, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

ZENBAKI IRRAZIONALEN MULTZOA:

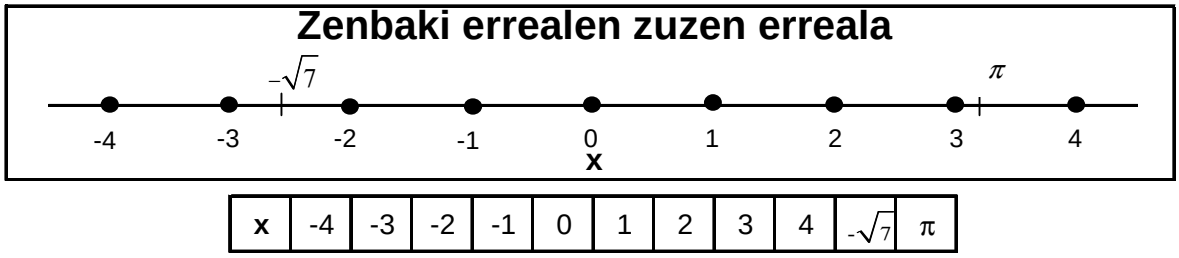
Zenbaki irrazionalen multzoa arrazionalak ez diren zenbaki errealez osaturik dago, eta I bitartez adierazten da.

Oharra: Zenbaki irrazionalen multzoa zenbaki arrazionalen multzo osagarri bat da.

Adibidea: $S=\left\{-\sqrt{7}, e=2.718, \pi=3.1416, \sqrt{13}\right\}$. Orduan, $S \subset \mathbb{Q}' = I$

ZENBAKI ERREALEN MULTZOA:

Zenbaki errealen propietate garrantzitsuenetariko bat zera da: marra zuzen batean puntuen bitartez adieraz daitezkeela.



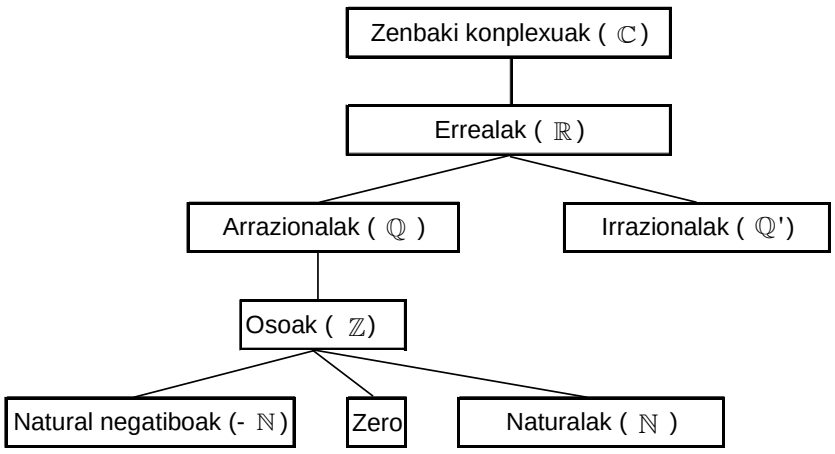
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$-\sqrt{7}$	π

Oharra: Orain arte ikusitako multzo guztiak barnean ditu zenbaki errealen multzoak.
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ eta $\mathbb{Q}' \subset \mathbb{R}$

ZENBAKI KONPLEXUEN MULTZOA:

Zenbaki konplexuak forma hau duten zenbakiak dira: $a \pm bi$, non a, b $\in \mathbb{R}$ eta $i = \sqrt{-1}$ zenbaki irudikaria.

Oharra: Zenbaki errealak zenbaki konplexuen barne egongo dira, b=0 ordezkatuz.
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.



1.2. Multzoen arteko eragiketak

Bildura

Izan bitez A eta B bi multzo. Bi multzo horien ***bildura*** beste multzo bat da. Multzo horretako elementuak A-ko elementuak edo B-ko elementuak izango dira. $A \cup B$ idatziko dugu.

$$A \cup B = \{x / x \in A \ \ edo \ \ x \in B\}$$

Adibidea: $A = \{g, o, m, a\} \quad B = \{g, a, t, o\} \quad \Rightarrow \quad A \cup B = \{g, o, a, m, t\}$

Propietatea: $A \subset A \cup B \quad eta \quad B \subset A \cup B$

Ebakidura

Izan bitez A eta B bi multzo. Bi multzo horien **ebakidura** beste multzo bat da. Multzo horretako elementuak A-ko elementuak eta B-ko elementuak izango dira. $A \cap B$ idatziko dugu.

$$A \cap B = \{x / x \in A \ \ eta \ \ x \in B\}$$

Adibidea: $A = \{g, o, m, a\} \quad B = \{g, a, t, o\} \quad \Rightarrow \quad A \cap B = \{g, o, a\}$

Propietateak:

- $A \cap B \subset A \quad eta \quad A \cap B \subset B$
- $A \subset B \ \Rightarrow \ A \cap B = A$

Definizioa: bi multzoen ebakidura multzo nulu bat bada $(A \cap B = \varnothing)$, A eta B **disjuntuak** direla esango dugu.

Diferentzia

A-ren eta B-ren diferentzia beste multzo bat da. A-koak diren eta B-koak ez diren elementuek osatzen dute multzo hori. $A-B=\{x\in A \ / \ x\notin B\}$

Multzo osagarriak

Izan bedi A multzo bat, non $A\subseteq E$. A-n ez dauden E-ko elementuek osaturiko multzoari **E-rekiko A-ren osagarria** deritzo.

A' edo A^c izendatuko dugu:

$$A^c=\{x:\ x\in E \text{ eta } x\notin A\}$$

Bi multzoen arteko biderkadura kartesiarra:

Izan bitez A eta B bi multzo. Orduan, $A\times B$ biderkadura kartesiarra A eta B multzoetako pare ordenatuek sortzen duten elementuen multzoa da.

$A\times B=\{(a,b) / a\in A, b\in B\}$ (Normalean $A\times B\neq B\times A$)

Adibidea:

Izan bitez $A=\{a, b, c, d\}$ eta $B=\{l, m\}$.

Orduan, $A\times B=\{(a,l), (a,m), (b,l), (b,m), (c,l), (c,m), (d,l), (d,m)\}$

Konposizio-legeak:

Konposizio-legea aplikazio bat da, $A\times B$ biderkadura kartesiar batetik C multzo batera doana.

Barne-konposizioko legeak:

Barne-konposizioko lege bat aplikazio bat da, $A\times A$ -tik A-ra doana.

Adibideak:

$\mathbb{N}$ zenbaki naturalen arteko batuketa (+)

$\mathbb{Z}$ zenbaki osoen arteko kendura (-)

$\mathbb{Q}$ zenbaki arrazionalen arteko biderkadura

Propietateak:

Propietate hauek barne-konposizioko legeek bete ditzaketenak dira, baina ez dituzte nahitaez bete behar.

1. Elkarkorra

Barne-konposizioko lege bat *elkarkorra* izango da, baldin eta hau betetzen bada:

$(a * b) * c = a * (b * c) \qquad \forall a, b, c \in A$

2. Trukakorra

Barne-konposizioko lege bat *trukakorra* izango da, baldin eta hau betetzen bada:

$a * b = b * a \qquad \forall a, b \in A$

3. Elementu idenpotentea

$a \in A$ idenpotentea dela esango dugu, baldin hau betetzen bada: $a*a = a$.

4. Elementu neutroa

$e \in A$ elementu neutroa dela esango dugu, baldin eta hau betetzen bada:

$a * e = a = e * a \qquad \forall a \in A$

5. Elementu simetrikoa edo alderantzizko elementua

Izan bedi $a \in A$ elementu bat, orduan $a^{-1} \in A$ a-ren alderantzizkoa dela esango dugu, baldin:

$a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$, non e elementu neutroa baita.

6. $\perp$ barne-konposizioa, * barne-konposizioarekiko banakorra

$a \perp (b*c) = (a \perp b)*(a \perp c) \quad \forall a, b, c \in A$ betetzen bada, $\perp$ *-rekiko banakorra dela esango dugu.

Kanpo-konposizioko legeak:

Kanpo-konposizioko lege bat $A \times B$-tik B-ra doan aplikazio bat da.

$\alpha \in A, b \in B$, orduan (α,b) bikoteari $c \in B$ elementu bat dagokio, eta $c=\alpha \circ b$ idazten da.

Eskuarki, $\circ$ sinboloa erabiliko dugu, kanpo-konposizioko lege bat adierazteko.

Adibidea:

$A = \mathbb{Z}$ eta $B=\{ax^2+bx+c / a, b, c \in \mathbb{Z}\}$

Aplikazioa oso baten eta polinomio baten arteko biderkadura izango da.

$$\alpha \circ (ax^2+bx+c) = (\alpha a)x^2+(\alpha b)x+(\alpha c)$$

Argi dago biderkadura B multzoko elementu bat izango dela. Beraz, kanpo-konposizioko lege bat da.

1.3. Taldeak eta gorputzak

Taldeak:

Izan bitez A multzo bat eta '*' A-n definituriko barne-konposizioko lege bat. Orduan, A ***talde*** bat izango da, baldin:

1) '*' elkarkorra bada $(a*b)*c = a*(b*c) \quad \forall a, b, c \in A$
2) elementu neutroa badu $a*e = a = e*a \quad \forall a \in A$
3) A-ko elementu guztiek alderantzizkoa badute

   $\forall a \in A \ \exists a^{-1} \in A$ non $a*a^{-1} = e = a^{-1}*a$

Oharra: Talde bat trukakorra bada, orduan ***talde abeldarra*** edo ***trukakorra*** dela esango dugu.

Gorputzak:

Izan bitez K multzo bat eta '+' eta ' $\circ$ ' barne-konposioko bi lege. Orduan, $(K,+,\circ)$ hirukotea ***gorputza*** izango da, baldin:

1) $(K,+)$ talde abeldarra
2) $(K-\{e\},\circ)$ talde abeldarra
3) '+' banakorra ' $\circ$ ' eragiketarekiko $a\circ(b+c) = (a\circ b)+(a\circ c)$

Adibideak:

$(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ gorputzak dira

1.4. Ariketak

Zenbakien multzoei buruzko galderak

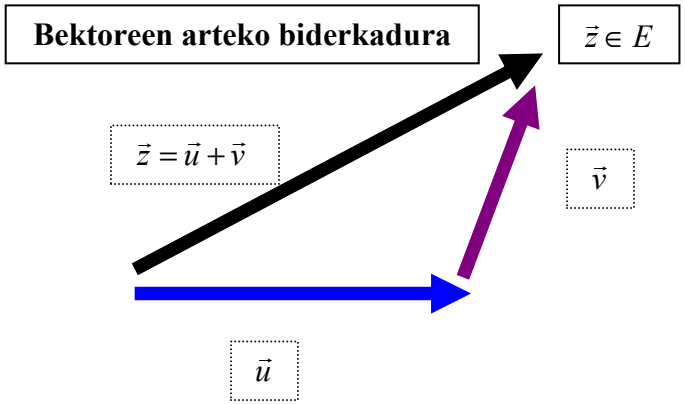
Esan problema hauek egia edo gezurra diren, eta arrazoitu erantzuna.

	ERANTZUNA
a) $-7 \in \mathbb{N}$	
b) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$	
c) $4 \in \mathbb{Z}$	
d) $9 \in \mathbb{C}$	
e) $3\pi \in \mathbb{Q}$	
f) $-6 \in \mathbb{Q}$	
g) $\sqrt{-7} \in \mathbb{R}$	
h) $\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$	
i) $\sqrt{-5} \in \mathbb{Q}'$	
j) $1 \in \mathbb{R}$	
k) $\sqrt[3]{8} \in \mathbb{N}$	
l) $\sqrt{\frac{9}{4}} \in \mathbb{Q}'$	
m) $-2 \in \mathbb{Z}$	
n) $\pi^2 \in \mathbb{R}$	
o) $\sqrt{-4} \in \mathbb{R}$	

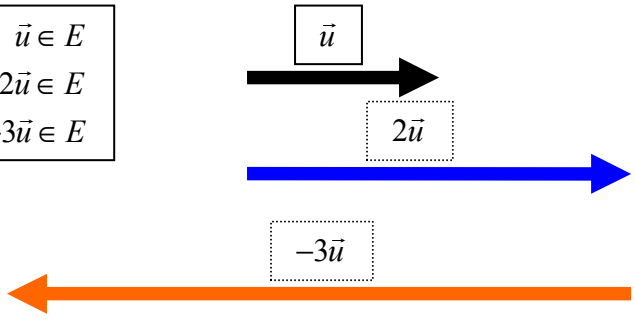
E

BEKTORE-ESPAZIOA

Bektoreen arteko biderkadura



$\vec{u} \in E$
$2\vec{u} \in E$
$-3\vec{u} \in E$



Eskalar baten eta bektore baten arteko biderkadura

2. GAIA. BEKTORE-ESPAZIOAK

2.1. Definizioa eta propietateak

Bektore-espazioak

Definizioa: Izan bedi V multzo bat eta $(K,+,\cdot)$ gorputz bat. Orduan, ***V K gainean bektore-espazioa*** edo ***V K bektore-espazioa*** da, baldintza hauek betetzen badira:

i) V-n barne-konposizioko lege bat definiturik dago '*' eta (V,*) talde abeldarra da.

$(*: V\times V \to V)$

ii) V-n kanpo-konposizioko lege bat definiturik dago '$\circ$' eta hurrengo propietateak betetzen ditu $(\circ: K\times V \to V)$:

1) Eskalarren arteko baturarekiko banakortasuna

$$(\alpha_1+\alpha_2)\circ v = \alpha_1\circ v * \alpha_2\circ v$$

2) Bektoreen arteko baturarekiko banakortasuna

$$\alpha\circ(v_1 * v_2) = \alpha\circ v_1 * \alpha\circ v_2 \qquad \forall\alpha_1,\alpha_2,\alpha\in K \quad v_1, v_2, v\in V$$

3) Elkarkortasuna

$$\alpha_1\circ(\alpha_2\circ v) = (\alpha_1\times\alpha_2)\circ v$$

4) K-ko elementu neutroa

$$1\circ v = v$$

Oharrak:

1) V-ko elementuak bektoreak dira, eta honela adierazten dira: $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\ldots$
2) V-ko barne-konposizioko legeari '*', bektoreen arteko batura deritzo. Bektore neutroa bektore nulua da eta $\vec{0}$ adierazten da; eta $\vec{x}\in V$ bektorearen elementu simetrikoa $\vec{x}$-ren aurkako bektorea deritzo, eta $-\vec{x}$ adierazten da.

3) K-ko elementuak eskalarrak dira, eta α, β, δ... letrez adierazten dira. + eta $\cdot$ legeak eskalarren arteko batura eta biderkadura izango dira. Batura eta biderkadurarekiko elementu neutroak 0 eta 1 dira hurrenez hurren, eta baturarekiko α eskalar baten simetrikoa $-\alpha$ da.
4) Bektore-espazioaren adierazpena hau da: $\left[(V,*),(K,+,\cdot),\circ\right]$
5) Gehienetan K gorputza $\mathbb{R}$ izango da, batura eta biderkadura nabariduna.

$\mathbb{R}^2$ bektore-espazioa:

- $\mathbb{R}^2$ multzoko + barne-konposizioko legea hau da:

  $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$ Talde abeldarra da.

- $\mathbb{R}^2$-ko $\mathbb{R}$ gaineko kanpo-konposizioko legea hai da:

  $\alpha \circ (x_1, x_2) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2)$

$\left[(\mathbb{R}^2,+),(\mathbb{R},+,\cdot),\circ\right]$ bektore-espazioa da, propietate guztiak betetzen baititu.

$\mathbb{R}^3$ bektore-espazioa:

- $\mathbb{R}^3$ multzoko + barne-konposizioko legea hau da:

  $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$ Talde abeldarra da.

- $\mathbb{R}^3$-ko $\mathbb{R}$ gaineko kanpo-konposizioko legea hau da:

  $\alpha \circ (x_1, x_2, x_3) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \alpha \cdot x_3)$

$\left[(\mathbb{R}^3,+),(\mathbb{R},+,\cdot),\circ\right]$ bektore-espazioa da, propietate guztiak betetzen baititu.

$\mathbb{R}^n$ bektore-espazioa:

- $\mathbb{R}^n$ multzoko + barne-konposizioko legea hau da:

  $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1+y_1, ..., x_n+y_n)$ Talde abeldarra da.

- $\mathbb{R}^n$ -ko $\mathbb{R}$ gaineko kanpo-konposizioko legea hau da:

  $\alpha \circ (x_1, ...,x_n) = (\alpha \cdot x_1, ..., \alpha \cdot x_n)$

$\left[\left(\mathbb{R}^n,+\right),\left(\mathbb{R}, +,\cdot\right), \circ\right]$ bektore-espazioa da, propietate guztiak betetzen baititu.

Bektore-espazioen adibideak:

1) A(m,n) da m errenkada eta n zutabe dituzten matrize guztien multzoa. Eragiketak honako hauek dira: matrizeen arteko batuketa eta matrizeen eta K multzoko eskalar baten arteko biderketa, non K zenbaki errealak edo irudikariak baitira.

2) $P_n(x)$ da n mailako polinomio guztien multzoa, non koefizienteak K gorputzekoak baitira. Eragiketak honako hauek dira: polinomioen arteko batuketa eta polinomio eta $K = \mathbb{R}$ -ko elementu baten arteko biderketa.

3) K gorputzeko F(x) x-ren funtzio guztien multzoa. Eragiketak honako hauek dira: funtzioen arteko batuketa, eta funtzioen eta $K = \mathbb{R}$ multzoko eskalar baten arteko biderketa.

Adibidea:

$\mathbb{R}^2$ -n barne-konposizioko lege hau definitzen dugu:

$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$

$\mathbb{R}^2$-ren $(\mathbb{R},+,\cdot)$ gaineko kanpo-konposizioko legea hau da:

$$\alpha \circ (x_1, x_2) = (\alpha^2 \cdot x_1, \alpha^2 \cdot x_2)$$

Bektore-espazioa den ikusiko dugu. Lehenengo kanpo-konposizioko legearen propietateak ikusiko ditugu.

1.Eskalarren arteko baturarekiko banakortasuna: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$

• $(\alpha+\beta) \circ (x_1,y_1) = \alpha \circ (x_1,y_1) + \beta \circ (x_1,y_1)$ bete behar da

$$(\alpha+\beta) \circ (x_1,y_1) = ((\alpha+\beta)^2 x_1, (\alpha+\beta)^2 y_1) = ((\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta) x_1, (\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta) y_1)$$

$$\alpha \circ (x_1,y_1) + \beta \circ (x_1,y_1) = ((\alpha^2+\beta^2) x_1, (\alpha^2+\beta^2) y_1)$$

Lehenengo propietatea ez da betetzen; beraz, ez da bektore-espazioa.

<u>Bektore-espazioen propietateak:</u>

Izan bedi $[V,+,\circ]$ bektore-espazioa:

1) $\alpha \circ (\vec{x} - \vec{y}) = \alpha \circ \vec{x} - \alpha \vec{y}$ $\forall \alpha \in K$ eta $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$
2) $(\alpha - \beta) \circ \vec{x} = \alpha \circ \vec{x} - \beta \vec{x}$ $\forall \alpha, \beta \in K$ eta $\forall \vec{x} \in V$
3) $\alpha \circ \vec{0} = \vec{0}$ $\forall \alpha \in K$
4) $0 \circ \vec{x} = \vec{0}$ $\forall \vec{x} \in V$
5) $\alpha \circ (-\vec{x}) = -(\alpha \circ \vec{x})$ $\forall \vec{x} \in V$ $\forall \alpha \in K$
6) $\alpha \circ \vec{x} = \vec{0}$ baldin eta soilik baldin $\alpha = 0$ edo $\vec{x} = \vec{0}$ $\forall \vec{x} \in V$ $\forall \alpha \in K$
7) $\alpha \circ \vec{x} = \beta \circ \vec{x}$ baldin eta soilik baldin $\alpha = \beta$ $\forall \vec{x} \in V - \{\vec{0}\}$
8) $\alpha \circ \vec{x} = \alpha \circ \vec{y}$ baldin eta soilik baldin $\vec{x} = \vec{y}$ $\forall \alpha \in K - \{0\}$

2.2. Azpibektore-espazioak

Definizioa: Izan bitez $(V,+,\circ)$ K gaineko bektore-espazioa eta $F \neq \varnothing$ V-ren azpimultzo bat ($F \subseteq V$). Orduan, F V-ren ***azpibektore-espazio*** bat izango da, $(F,+,\circ)$ K gainean bektore-espazioa bada.

Teorema: Hauek dira F V-ren azpibektore-espazio bat izateko baldintza beharrezko eta nahikoak:

$$\left.\begin{array}{c} \forall \vec{x},\vec{y} \in F \Rightarrow \vec{x}+\vec{y} \in F \\ \forall \alpha \in K \text{ eta } \forall \vec{x} \in F \Rightarrow \alpha \circ \vec{x} \in F \end{array}\right\} \text{biak batuz} \left\{\begin{array}{l} \forall \alpha,\beta \in K \text{ eta } \forall \vec{x},\vec{y} \in F \\ \alpha \circ \vec{x} + \beta \circ \vec{y} \in F \end{array}\right.$$

Oharrak:

1. $\vec{0}$ bektore nulua V-ren azpibektore-espazio guztien barne dago.

2. V bektore-espazio guztiek azpiespazio hauek dituzte: $0 = \{\vec{0}\}$ multzo nulua eta V espazio osoa.

2.3. Konbinazio linealak

Izan bedi $[V,+,\circ]$ K bektore-espazioa. $\vec{x} \in V$ bektore bat beste n bektoreren $\{\vec{x}_1,...\vec{x}_n\}$ konbinazio lineala dela esango dugu baldin:

$\alpha_1,...,\alpha_n \in K$ existitzen badira, non: $\vec{x} = \alpha_1\vec{x}_1 + ... + \alpha_n\vec{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\vec{x}_i$

Proposizioa: $\vec{x} \in V$, $S=\{\vec{x}_1,...,\vec{x}_n\}$ bektore-sistemako bektoreen konbinazio lineala bada eta $\vec{x}_i$ bektore bakoitza $G=\{\vec{y}_1,...,\vec{y}_m\}$ bektore-sistemako bektoreen konbinazio lineala bada, orduan $\vec{x}$ G bektore-sistemako bektoreen konbinazioa lineala da.

Sistema sortzaileak

Izan bedi V K gaineko bektore-espazio bat, eta har dezagun S=$\{\vec{x}_1,...,\vec{x}_n\}$ V-ren azpimultzo ez-nulu bat.

S-ren konbinazio lineal guztien multzoa L(S) izendatuko dugu:

L(S)=$\{\alpha_1\vec{x}_1+....+\alpha_n\vec{x}_n \ / \ \alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbb{R}\}$

V-ren azpibektore-espazioa da, eta S multzoa barne izango du.

Oharra: S=$\{\vec{x}_1,...,\vec{x}_n\}$ multzoa L(S)-ren sistema sortzailea dela esango dugu.

2.4. Menpekotasun eta independentzia lineala

Izan bedi K gaineko V bektore-espazio baten $P=\{\vec{x}_1,...,\vec{x}_n\}$ bektoreen sistema finitu bat.

Definizioa: $\vec{x}_1,...,\vec{x}_n$ bektoreak ***linealki independenteak/askeak*** edo $\{\vec{x}_1,...,\vec{x}_n\}$ ***sistema askea*** dela esango dugu, honako hau betetzen bada:

$\alpha_1\vec{x}_1+...+\alpha_n\vec{x}_n=\vec{0}$ bada, orduan $\alpha_1=...=\alpha_n=0$ betetzen bada

Definizioa: $\vec{x}_1,...,\vec{x}_n$ bektoreak ***linealki menpekoak*** edo $\{\vec{x}_1,...,\vec{x}_n\}$ ***sistema lotua*** dela esango dugu, honako hau betetzen bada:

$\alpha_1\vec{x}_1+...+\alpha_n\vec{x}_n=\vec{0}$ bada, orduan $\exists\alpha_i\neq 0$

Ondorioak:

a) Sistema aske bateko bektore guztiak bektore nuluaren desberdinak dira.
b) Sistema lotu bati bektore berriak gehitzen badizkiogu, lorturiko sistema ere lotua izango da.
c) Sistema aske bateko edozein azpimultzo sistema aske bat izango da.

2.5. Bektore-espazio baten oinarria eta dimentsioa

Izan bedi E K gorputzaren gainean definituriko bektore-espazio bat. Har dezagun $V=\{v_1,...,v_n\} \subset E$ bektore-sistema bat.

Definizioa: V sistema E bektore-espazioaren ***oinarri*** bat dela esango dugu, V E-ren *sistema sortzaile aske* bat bada, hau da, $\vec{x} \in E$ edozein bektore era bakar batean V-ren konbinazio lineal gisa adieraz badaiteke.

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + ... + \alpha_n \vec{v}_n \quad \forall v_i \in V \quad 1 \le i \le n$$

$$\begin{pmatrix} 1. \{v_1,...v_n\} \text{ E-ren sistema sortzailea} \\ 2.\ v_1,...v_n \text{ linealki independenteak} \end{pmatrix}$$

Oharrak:

1) $[E,+,\circ]$ K gaineko bektore-espazio finitu batean beti izango da gutxienez oinarri bat.
2) Oinarri guztiek bektore kopuru bera izango dute.

Bektore-espazio baten dimentsioa

E K gaineko bektore-espazio baten ***dimentsioa*** bere *edozein oinarritako bektore kopurua* izango da. Eta dim(E) izendatuko dugu.

- Izan bedi S, $[E,+,\circ]$ K gaineko bektore-espazio baten azpibektore-espazioa, eta har dezagun bektore-sistema bat: $F = \{\vec{u}_1,...,\vec{u}_n\} \subset S$

F S-ren oinarri bat izango da, F S-ren sistema sortzailea bada eta sistema askea bada.

2.6. Osatugabeko oinarriaren teorema

Demagun n dimentsioko E bektore-espazio batean $\{t_1,...,t_p\}$ ($p \le n$) p bektore linealki independente ditugula. Orduan, $\{t_{p+1},t_{p+2},...,t_n\}$ n-p bektore existitzen dira, non $\{t_1,...,t_p,t_{p+1},...,t_n\}$ E-ren oinarri bat baita.

Oharra: S E-ren azpibektore-espazioa bada eta $\{t_1,...,t_p\}$ S-ren oinarri bat bada, orduan $\{t_1,...,t_p\}$ bektoreak dituen E-ren oinarri bat aurki dezakegu. Argi dago oinarri hau ez dela bakarra izango.

2.7. Azpiespazioen arteko bildura, ebakidura eta baturak

Izan bitez F_1 eta F_2 E-ko bi azpibektore-espazio. Orduan, ebakidura eta batura honela definitzen dira:

$$F_1 \cup F_2 = \{\vec{x} \in E \text{ non } \vec{x} \in F_1 \text{ edo } \vec{x} \in F_2\}$$

$$F_1 \cap F_2 = \{\vec{x} \in E \text{ non } \vec{x} \in F_1 \text{ eta } \vec{x} \in F_2\}$$

$$F_1 + F_2 = \{\vec{x} + \vec{y} \in E \text{ non } \vec{x} \in F_1 \text{ eta } \vec{y} \in F_2\}$$

Oharra: $F_1 \cap F_2$ eta $F_1 + F_2$ azpibektore-espazioak dira, baina $F_1 \cup F_2$ azpibektore-espazioa izan daiteke edo ez.

Adibidea: Izan bitez $W_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \ / \ x_1 + x_2 = 0\}$ eta $W_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \ / \ x_2 - x_3 = 0\}$ azpibektore-espazioak. Kalkulatu: $W_1 \cap W_2$ eta $W_1 + W_2$. $W_1 \cup W_2$ azpibektore-espazioa da?

Ebazpena:

• W_1 -en oinarria

$$(x_1,x_2,x_3)=(x_1,-x_1,x_3)=x_1(1,-1,0)+x_1(0,0,1) \quad \Rightarrow \quad B_{W_1}=\{(1,-1,0),(0,0,1)\}$$

• W_2 -ren oinarria

$$(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_2)=x_1(1,0,0)+x_2(0,1,1) \quad \Rightarrow \quad B_{W_2}=\{(1,0,0),(0,1,1)\}$$

• W_1+W_2 -ren oinarria

$\forall \vec{x}\in W_1+W_2 \,/\, \vec{x}=\vec{u}+\vec{v}$ non $\vec{u}\in W_1$ eta $\vec{v}\in W_2$

$$(x_1,x_2,x_3)=\overbrace{\alpha_1(1,-1,0)+\alpha_2(0,0,1)}^{u\in W_1} + \overbrace{\alpha_3(1,0,0)+\alpha_4(0,1,1)}^{u\in W_2}$$

Beraz, W_1+W_2 bektore-espazioaren sistema sortzailea

$\{(1,-1,0),(0,0,1),(1,0,0),(0,1,1)\}$ da.

R^3-n ezin direnez 4 bektore aske egon, bat kenduko dugu, eta besteak linealki askeak direla frogatuko dugu.

Beraz, oinarria $B_{W_1+W_2}=\{(1,-1,0),(0,0,1),(1,0,0)\}$ da.

• $W_1\cap W_2$ -ren oinarria

$\forall \vec{x}\in W_1\cap W_2 \,/\, \vec{x}\in W_1$ eta $\vec{x}\in W_2$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{x}\in W_1 \Rightarrow (x_1,x_2,x_3) \text{ non } x_1+x_2=0\\ \vec{x}\in W_2 \Rightarrow (x_1,x_2,x_3) \text{ non } x_2-x_3=0\end{array}\right\} \Rightarrow (x_1,x_2,x_3) \text{ non } \left|\begin{array}{l}x_1+x_2=0\\ x_2-x_3=0\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow (x_1,-x_1,-x_1)=x_1(1,-1,-1) \Rightarrow B_{W_1\cap W_2}=\{(1,-1,-1)\}$$

• $W_1 \cup W_2$ bektore-espazioa da?

$\forall \vec{x} \in W_1 \cup W_2 \,/\, \vec{x} \in W_1$ edo $\vec{x} \in W_2$

Demagun $\vec{x} \in W_1 \subset W_1 \cup W_2$ eta $\vec{y} \in W_2 \subset W_1 \cup W_2$ dugula.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x} \in W_1 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) \text{ non } x_1 + x_2 = 0 \\ \vec{y} \in W_2 \Rightarrow (y_1, y_2, y_3) \text{ non } y_2 - y_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 (x_1, x_2, x_3) + \alpha_2 (y_1, y_2, y_3) \in W_1 \cup W_2 \,?$$

$$\alpha_1 (x_1, x_2, x_3) + \alpha_2 (y_1, y_2, y_3) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1, \alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2, \alpha_1 x_3 + \alpha_2 y_3) \in W_1 \cup W_2 \,?$$

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1) + (\alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 \overbrace{(x_1 + x_2)}^{=0} + \alpha_2 \overbrace{(y_1 + y_2)}^{??????} = ???? \Rightarrow \notin W_1$$

$$(\alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2) - (\alpha_1 x_3 + \alpha_2 y_3) = \alpha_1 \overbrace{(x_2 - x_3)}^{??????} + \alpha_2 \overbrace{(y_2 - y_3)}^{=0} = ???? \Rightarrow \notin W_2$$

Beraz, $W_1 \cup W_2$ ez da azpibektore-espazioa.

2.8. Batura zuzenak

Definizioa: $\vec{x} \in E$ edozein bektoreren deskonposizioa F_1-eko eta F_2-ko elementuen batuketa gisa *bakarra* bada, orduan E F_1 eta F_2-ren ***batura zuzena*** izango da. Hau da:

$$E = F_1 \oplus F_2$$

E bektore-espazioa F_1-en eta F_2-ren ***batura zuzena*** bada, eta $W = \{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_p\}$ eta $U = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_q\}$ F_1-en eta F_2-en oinarriak badira, orduan $W \cup U$ da E-ren oinarria.

Teorema: Izan bitez F_1 eta F_2 E bektore-espazioko bi azpibektore-espazio.

Orduan: $$E = F_1 \oplus F_2 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} E = F_1 + F_2 \\ F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\} \end{cases}$$

Beraz, $$E = F_1 \oplus F_2 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \dim E = \dim F_1 + \dim F_2 \\ \dim F_1 \cap F_2 = 0 \end{cases}$$

$\left(\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2)\right)$ beti betetzen da.

Adibidea: Izan bitez $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \ / \ x_1 + x_2 = 0\}$ eta $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \ / \ x_2 - x_3 = 0\}$ azpibektore-espazioak. $W_1 \oplus W_2 = R^3$ betetzen da?

Ebazpena:

Badakigu hau: $\dim(W_1 + W_2) = 3$, $\dim(W_1) = 2 = \dim(W_2)$ eta $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$

$(\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2))$ propietatea erabil dezakegu.

Kasu horretan, $\begin{cases} \dim R^3 = 3 \neq \dim W_1 + \dim W_2 = 4 \\ \dim W_1 \cap W_2 = 1 \neq 0 \end{cases}$ denez $R^3 \neq W_1 \oplus W_2$

Ariketak:

1) Izan bitez $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \ / \ x_1 - x_2 = 0\}$ eta $W_2 = \{(a, a, a) \ / \ a \in R\}$ azpibektore-espazioak. Kalkulatu: $W_1 \cap W_2$ eta $W_1 + W_2$. $W_1 \cup W_2$ azpibektore-espazioa da? $W_1 \oplus W_2 = R^3$ betetzen da?

2) Izan bitez $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \ / \ x_1 + x_2 = 0 \ eta \ x_1 + x_3 = 0\}$ eta $W_2 = \{(2b, b, c) \ / \ b, c \in R\}$ azpibektore-espazioak. Kalkulatu: $W_1 \cap W_2$ eta $W_1 + W_2$. $W_1 \cup W_2$ azpibektore-espazioa da? $W_1 \oplus W_2 = R^3$ betetzen da?

3) Izan bitez $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \ / \ x_1 + x_2 = 0 \ eta \ x_2 - x_3 = 0\}$ eta $W_2 = \{(4b, b, -2b) \ / \ b \in R\}$ azpibektore-espazioak. Kalkulatu: $W_1 \cap W_2$ eta $W_1 + W_2$. $W_1 \cup W_2$ azpibektore-espazioa da? $W_1 \oplus W_2 = R^3$ betetzen da?

4) Izan bitez $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \ / \ x_3 - x_2 = 0\}$ eta $W_2 = \{(a, a, c) \ / \ a, c \in R\}$ azpibektore-espazioak. Kalkulatu: $W_1 \cap W_2$ eta $W_1 + W_2$. $W_1 \cup W_2$ azpibektore-espazioa da? $W_1 \oplus W_2 = R^3$ betetzen da?

5) Izan bitez $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ / \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \ eta \ x_1 + x_4 = 0\}$ eta

$W_2 = \{(a, a, c, 2c) \ / \ a, c \in R\}$ azpibektore-espazioak. Kalkulatu: $W_1 \cap W_2$ eta $W_1 + W_2$.

$W_1 \cup W_2$ azpibektore-espazioa da? $W_1 \oplus W_2 = R^4$ betetzen da?

6) Izan bitez $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ / \ x_1 = x_2 \ eta \ x_3 = x_4\}$ eta

$W_2 = \left\{\left(\frac{b}{3}, b, \frac{d}{4}, d\right) \ / \ b, d \in R\right\}$ azpibektore-espazioak. Kalkulatu: $W_1 \cap W_2$ eta $W_1 + W_2$.

$W_1 \cup W_2$ azpibektore-espazioa da? $W_1 \oplus W_2 = R^3$ betetzen da?

2.9. Bektore baten koordenatuak

Izan bitez $[E, +, \circ]$ dimentsio finitua duen K gainean definituriko bektore-espazioa eta $V = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\} \subset E$ E-ren oinarri bat. Orduan:

$\forall \vec{x} \in E, \ \exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ *bakarrak* non $\vec{x} = \alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + ... + \alpha_n \cdot \vec{v}_n$

$\alpha_1, ..., \alpha_n$ n eskalarrak $\vec{x}$ bektorearen V oinarriko ***koordenatuak*** izango dira.

2.10. Ariketak

1) Esan azpimultzo hauetatik zein diren $\left[\left(\mathbb{R}^4,+\right),\left(\mathbb{R},+,\cdot\right),\circ\right]$-ko azpibektore-espazioak.

a) $E_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,/\,x_1+x_2=1\}$

b) $E_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,/\,x_1+x_2=x_3+x_4\}$

c) $E_3=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,/\,x_2\cdot x_3=0\}$

d) $E_4=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,/\,x_1-x_2+x_3-x_4=0\}$

e) $E_5=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,/\,x_1=x_2=x_3\}$

f) $E_6=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,/\,x_1\in\mathbb{Q}\}$

g) $E_7=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,/\,x_1\in\mathbb{R}\}$

h) $E_8=\{(x_1,x_2,0,0)\,/\,x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$

Emaitzak: a, c, f→Ez b, d, e, g,h→Bai

2)Har dezagun $\mathbb{R}^3$ bektore-espazioko azpimultzo hau:

$B=\{(x_1,x_2,x_3)\,/\,x_1-x_2=0\,;\,x_1-2x_2+x_3=0\}$

Frogatu B azpibektore-espazioa dela.

3)Har dezagun $\mathbb{R}^4$ bektore-espazioko azpimultzo hau:

$A=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,/\,3x_1+x_3-x_4=1\,;\,x_1+x_2+2x_3=2\}$

Frogatu ez dela $\mathbb{R}^4$-ko azpibektore-espazioa.

4)Har ditzagun bektore hauek:

$v_1=(1,-1,0,2,0)\,;\,v_2=(0,0,-1,0,1)\,;\,v_3=(1,-1,1,1,0)\,;\,v_4=(0,0,1,1,1)$

eta ikus dezagun linealki independenteak diren.

Erantzuna: Bai, badira.

5)Har ditzagun bektore hauek:

$v_1 = (1,3,2,-1)\,;\, v_2 = (0,1,-2,1)\,;\, v_3 = (-1,7,2,-4)\,;\, v_4 = (1,0,0,1)$

eta ikus dezagun linealki independenteak diren. Lotuak badira, aurkitu menpekotasun-erlazioa.

<u>Erantzuna:</u> Ez dira L.I. Menpekotasun-erlazioa: $v_2 = -2v_1 + v_3 + 3v_4$

6) Aurkitu hauek $\mathbb{R}^4$ -n:

a) $v_1 = (1,2,1,1)$ bektorea duen oinarri bat

b) $v_1 = (1,1,0,2)$ eta $v_2 = (1,-1,2,0)$ bektoreak dituen oinarri bat

c) $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,0,2,2)$ eta $v_3 = (0,2,3,0)$ bektoreak dituen oinarri bat bektore kanonikoak erabili gabe.

7) $\mathbb{R}^3$ bektore-espazioan, W_1 eta W_2 azpiespazioak ditugu:

a) $\begin{cases} W_1 = \{(a,b,0) / a,b \in \mathbb{R}\} \\ W_2 = \{(0,b,c) / b,c \in \mathbb{R}\} \end{cases}$

b) $\begin{cases} W_1 = \{(a,b,0) / a,b \in \mathbb{R}\} \\ W_2 = \{(0,0,c) / c \in \mathbb{R}\} \end{cases}$

c) $\begin{cases} W_1 = \{(a,b,c) / a=b=c \in \mathbb{R}\} \\ W_2 = \{(0,b,c) / b,c \in \mathbb{R}\} \end{cases}$

d) $\begin{cases} W_1 = \{(a,b,0) / a+b+c=0\} \\ W_2 = \{(d,2d,3d) / d \in \mathbb{R}\} \end{cases}$

Aztertu zein kasutan $\mathbb{R}^3$ den W_1 eta W_2 azpibektore-espazioen batura zuzena.

<u>Erantzuna:</u> a) →Ez b), c), d) →Bai

8)Izan bedi E x aldagai bateko eta $\mathbb{R}$ -ko koefizienteak dituzten polinomioen multzo bat, non maila ≤ 3 $\mathbb{R}$ gaineko bektore-espazioa baita. Har ditzagun polinomio hauek:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad \forall a \neq 0$

a) Frogatu $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x)$ polinomioek E-ko oinarri bat osatzen dutela.

b) Izan bedi $f(x) = 5x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ polinomioa, eta aurkitu

$g(x) = 15x^3 - 21x^2 - 18x + 37$ bektorearen koordenatuak

$B = \{f(x), f'(x), f''(x), f'''(x)\}$ oinarriarekiko.

<u>Erantzuna:</u> g(x)-en koordenatuak B oinarrian (3,-2,0,1) dira

9) $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ bektorearen koordenatuak $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ oinarrian $\vec{x} = (1,2,3)_B$ dira. Aurkitu $\vec{x}$ bektorearen koordenatuak $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ oinarrian, jakinik

$\vec{u}_1 = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3$; $\vec{u}_2 = 4\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$; $\vec{u}_3 = 2\vec{v}_1 - 5\vec{v}_2 + \vec{v}_3$;

<u>Erantzuna:</u> $\vec{x}$ **bektorearen** $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ **oinarrian** $\left(\frac{-190}{63}, \frac{35}{18}, \frac{-13}{18}\right)_{B'}$ **dira.**

10) $B = \{(x, x+1) / \ x \in \mathbb{R}\}$ $\mathbb{R}^2$ -ko azpibektore-espazioa da?

11) Frogatu $B = \{(1,1,-1), (0,1,2), (-2,1,0)\}$ multzoa $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri bat dela. Kalkulatu B oinarriarekiko $\vec{x} = (4,0,-4)$ bektorearen koordenatuak.

12) $B = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$ $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri bat da? Eta B $V = \{(x, y, 0) / \ x, y \in \mathbb{R}\}$ bektore-espazioaren oinarri bat da?

13) $B = \{(1,1,1), (2,1,-1), (1,0,-2)\}$ multzoa $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri bat da?

14) $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\}$ multzoa $\mathbb{R}^3$ -ko oinarri bat da?

15) Frogatu $B=\{(2,1,-1,1),(1,0,-2,1),(0,0,0,1)\}$ dela $V=\{(2x+y,x,-x-2y,x+y+z)\,/\,x,y,z\in\mathbb{R}\}$ $\mathbb{R}^4$-ko bektore-espazioaren oinarri bat.

16) Frogatu $V=\left\{\begin{pmatrix} a+2b & 2a \\ -b & 5a+4b \end{pmatrix}/\,a,b\in\mathbb{R}\right\}$ $M_{2\times2}$-ko azpibektore-espazioa dela, eta lortu oinarri bat.

17) Izan bedi $B=\{(1+x+x^3),(-x-x^2-x^3)\}$ P_3-ko bektore multzo bat (P_3, x aldagai bateko polinomioen multzoa, non maila ≤ 3)

a) P_3-ko oinarri bat da?

b) Frogatu $V=\{(a+bx+cx^2+dx^3)/\,b=d,\,c=b-a\}$ multzoa P_3-ko azpibektore-espazioa dela.

c) B V bektore-espazioko oinarri bat da?

d) Kalkulatu B-rekiko $\vec{x}=3+5x+2x^2+5x^3$ bektorearen koordenatuak.

18) Izan bitez $\mathbb{R}^4$-ko $V_1=(1,-1,m,3),V_2=(1,n,2,0),V_3=(2,-1,3m,-6)$ bektoreak, kalkulatu m-ren eta n-ren balioak, aurreko bektoreak linealki menpekoak izan daitezen. Kalkulatu erlazioa.

<u>Erantzuna:</u> planteatu $\alpha V_1+\beta V_2+\delta V_3=\vec{0}$ konbinazio lineala, bektoreak linealki menpekoak izatera behartuz.

19) Izan bedi $V=\{(6,-2,0,-1),(-1,0,0,-2)\}\in\mathbb{R}^4$ multzoa. Zer balio hartu behar du 'k' parametroak, $\vec{x}=(2,2,0,k)$ bektorea V-ren konbinazio lineala izan dadin.

20) $M_{2\times 2}$ matrizeen bektore-espazioan frogatu bektore hauek askeak direla:

$$\vec{M}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{M}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{M}_3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \vec{M}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kalkulatu $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ bektorearen koordenatuak oinarri horrekiko.

Kalkulatu bektore-espazio horrekiko oinarri kanonikoa.

21) Aztertu ≤ 4 maila duten polinomioen bektore-espazioan $B = \{(3+x^4), (5-x-x^2), (2x^3), (x+2x^4)\}$ sistema lotua den ala ez. Zein da bektore-espazio horren oinarri kanonikoa?

22) Aztertu $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + 2x_3 - x_4 = 0\}$ $\mathbb{R}^4$ -ko azpibektore-espazioa den.

Berdin: $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / 3x_1 + x_3 - x_4 = 1, x_1 + x_2 + 2x_3 = 2\}$

Berdin: $C = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 - x_2 = 0, x_1 - 2x_2 + x_3 = 2\} \in \mathbb{R}^3$

23) $\mathbb{R}^4$ -n har dezagun multzo hau: $F = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) / \begin{vmatrix} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{vmatrix} \right\}$.

Frogatu $\mathbb{R}^4$ -ko azpibektore-espazioa dela, eta aurkitu bi oinarri eta $\vec{x} = (3, -2, 1, 1)$ bektorearen koordenatuak oinarri horrekiko.

Bektore-espazioei buruzko galderak

1) (G,+) bektoreen talde abeldarra da. Zein motatako konposizio-legea da '+', eta zer adierazten du?

2) Adierazi zer propietate bete behar dituen (G,+)-k talde abeldarra izateko.

3) Bektore-espazio hau emanik, $\left[\left(\mathbb{R}^2,+\right),\left(\mathbb{R},+,\cdot\right),\circ\right]$, zein motatako konposizio-legea da ' $\circ$ ' eta zer adierazten du?

4) $\mathbb{R}^4$ -n, "3" bektore askez osaturiko multzo batek zer eratzen du?

5) $\mathbb{R}^3$ bektore-espazioan 4 bektore linealki independente izan al daitezke?

6) $\left[\left(\mathbb{R}^n,+\right),\left(\mathbb{R},+,\cdot\right),\circ\right]$ bektore-espazioa emanik, zer adierazten du 'n'-k?

7) Nola definituko zenuke bektore-espazio baten dimentsioa?

8) Zein dira bete beharreko propietatek, $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ izan dadin?

9) 2 dimentsioa duen $\mathbb{R}^4$ -ko azpibektore-espazio baten oinarria erabiliz $\mathbb{R}^4$ -ko oinarri bat aurki dezakegu?

10) V bektore-espazio batek "n" bektore dituen oinarri bat badu, V-ren oinarri guztiek "n" bektore izango dituzte?

11) $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ E bektore-espazio baten oinarria bada, orduan $\forall \vec{x} \in E$ era bakar batean idatz daiteke oinarriko bektoreen konbinazio lineal gisa?

12) Izan bedi E "n" dimentsioko bektore-espazioa. Esan esaldiok egia edo gezurra diren.

a) $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ E-ko bektoreak linealki askeak badira, orduan *B* E-ko oinarri bat da.

b) $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ E-ko sistema sortzaile bat bada, orduan *B* E-ko oinarri bat da.

13) E bektore-espazio batek "n" dimentsioa badu, "n" bektore baino gehiago dituen edozein sistema lotua izango da.

14) E bektore-espazio batek "n" dimentsioa badu, E-ren edozein sistema sortzailek gutxienez "n" bektore izango ditu.

15) E bektore-espazio bat izanik, gutxienez bi azpibektore-espazio izango ditu, $\{\vec{0}\}$ eta E.

16) Bi bektore-espazioren, U_1 eta U_2, ebakidura, $U_1 \cap U_2$, azpibektore-espazio bat da.

17) Bi bektore-espazioren, U_1 eta U_2, bildurak, $U_1 \cup U_2$, ez du zertan bektore-espazioa izan.

18) Esan esaldi hauek egia edo gezurra diren.

a) Elementu ez-nulu bat duen multzoa bat askea izango da.

b) $\vec{0}$ bektorea ez da inoiz sistema aske baten barne egongo.

c) Edozein sistema askeren azpimultzo bat askea izango da.

d) Sistema aske batek izan dezakeen bektore maximoa bektore horiek dituzten koordenatu kopurua da.

MATRIZEAK
Simetrikoa
Zuzena
errenkada
Alderantzizkoa
Diagonala
Batu
Heina
Identitatea
Triangeluarra
Singularra
Iraulia
Iraulia
Adjuntua
Simetrikoa
Hutsa
Determinantea

3. GAIA. MATRIZEAK ETA DETERMINANTEAK

3.1. Matrizearen definizioa

Definizioa: n×p mailako A K gaineko ***matrize*** bat n×p elementu dituen multzo bat izango da. Elementu horiek n errenkadatan eta p zutabetan ordenaturik daude, eta elementu bakoitzak bi ezaupide izango ditu: lehenengo azpindizeak zein errenkadatan dagoen esango digu, eta bigarren azpindizeak, zein zutabetan dagoen.

$$(M)_{n\times p}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2p} \\ . & . & \ldots\ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{np} \end{pmatrix}$$

3.2. Matrize motak

Errenkada-matrizea: $(M)_{1\times p}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1p} \end{pmatrix}$

Zutabe-matrizea: $(M)_{n\times 1}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ a_{n1} \end{pmatrix}$

Matrize nulua: $(M)_{n\times p}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ . & . & \ldots\ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \end{pmatrix}$

Aurkako matrizea: $(-M)_{n\times p}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \ldots\ldots & -a_{1p} \\ -a_{21} & -a_{22} & \ldots\ldots & -a_{2p} \\ . & . & \ldots\ldots & . \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots\ldots & -a_{np} \end{pmatrix}$

Matrize iraulia: $(M^t)_{p\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ..... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & ..... & a_{n2} \\ . & . & ..... & . \\ a_{1p} & a_{2p} & ..... & a_{np} \end{pmatrix}$

Matrize karratua: errenkada eta zutabe kopuru berdina duen matrizea da.

$$(M)_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ . & . & ..... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Oharra: Matrize karratuetan $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elementuek diagonal nagusia osatzen dute.

Matrize triangeluarra: diagonal nagusitik gora edo behera dauden elementuak nuluak dituen matrize karratu berezi bat da

Goi-triangeluarra

$$(M)_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ . & . & ..... & . \\ 0 & 0 & ..... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Behe-triangeluarra

$$(M)_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ..... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ..... & 0 \\ . & . & ..... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrize diagoanala: diagonal nagusikoak ez diren elementu guztiak nuluak dituen matrize karratu bat da.

$$(M)_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ..... & 0 \\ 0 & a_{22} & ..... & 0 \\ . & . & ..... & . \\ 0 & 0 & ..... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Identitate-matrizea: diagonal nagusiko elementuak batekoak dituen matrize diagonal bat da.

$$(M)_{n\times n}=\begin{pmatrix}1 & 0 & ..... & 0\\ 0 & 1 & ..... & 0\\ . & . & ..... & .\\ 0 & 0 & ..... & 1\end{pmatrix}$$

Oharra: Matrizeetako elementuek ez dute zertan zenbakiak izan, funtzioak izan daitezke.

Bektore-funtzioa: elementutzat funtzioak dituen n elementuko bektore bat da.

$$v(x)=\begin{pmatrix} f_1(x)\\ f_2(x)\\ .\\ f_n(x)\end{pmatrix}$$

Matrize-funtzioa: elementutzat funtzioak dituen matrize bat da.

$$A_{n\times p}(x)=\begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & ..... & f_{1p}(x)\\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & ..... & f_{2p}(x)\\ . & . & ..... & .\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & ..... & f_{np}(x)\end{pmatrix}$$

3.3. Matrizeen arteko eragiketak

BATUKETA

Izan bitez $A=(a_{ij})$ eta $B=(b_{ij})$ ordena bereko bi matrize. Orduan, A eta B matrizeen batuketa $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$ matrizea izango da.

$$(A)_{n\times p}+(B)_{n\times p}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots.. & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots.. & a_{2p} \\ . & . & \ldots.. & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots.. & a_{np} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots.. & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots.. & b_{2p} \\ . & . & \ldots.. & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots.. & b_{np} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots.. & a_{1p}+b_{1p} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \ldots.. & a_{2p}+b_{2p} \\ . & . & \ldots.. & . \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \ldots.. & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix}$$

Propietateak:

Izan bitez n×p dimentsioko A, B eta C hiru matrize:

- Elkarkorra: (A+B)+C = A+(B+C)
- Elementu neutroa: A+0 = 0+A = A
- Aurkako elementua: A+(-A) = (-A)+A = 0
- Trukakorra: A+B= B+A

ESKALAR BATEN ETA MATRIZE BATEN ARTEKO BIDERKADURA

Izan bitez $A=(a_{ij})$ matrize bat eta $\alpha\in K$ eskalar bat. Orduan, α eskalarraren eta A matrizearen arteko biderkadura $\alpha\cdot A=(\alpha\cdot a_{ij})$ matrizea izango da, A-ko elementu guztiak α-z biderkatzea lortzen duena.

$$\alpha\cdot A=\begin{pmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12} & \ldots.. & \alpha\cdot a_{1p} \\ \alpha\cdot a_{21} & \alpha\cdot a_{22} & \ldots.. & \alpha\cdot a_{2p} \\ . & . & \ldots.. & . \\ \alpha\cdot a_{n1} & \alpha\cdot a_{n2} & \ldots.. & \alpha\cdot a_{np} \end{pmatrix}$$

Propietateak:

Izan bitez n×p dimentsioko A eta B bi matrize eta α eta β bi eskalar:

- Matrizeen batuketarekiko banakortasuna: $\alpha \cdot (A+B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
- Eskalarren batuketarekiko banakortasuna: $(\alpha+\beta)\cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
- Elkarkorra: $(\alpha \cdot \beta)\cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$
- Elementu neutroa: $1 \cdot A = A$

Oharra: $\left[(M_{n\times p},+),(K,+,\cdot),\circ\right]$ n×p dimentsioko matrizeen multzoa bektore-espazio bat da K gorputzaren gainean. '+' matrizeen arteko batuketa eta '$\circ$' matrize baten eta eskalar baten arteko biderketa izanik.

MATRIZEEN ARTEKO BIDERKADURA

Izan bitez $A \in M_{n\times p}$ eta $A \in M_{p\times m}$ bi matrize. A eta B matrizeen arteko biderkadura $C \in M_{n\times m}$ matrize bat izango da, non c_{ij} lortzen baita A matrizeko i errenkadako elementuen eta B matrizeko j zutabeko elementuen biderkaduraren batuketa eginez.

$$(A)_{n\times p}\cdot(B)_{p\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ . & . & \ldots & . \\ b_{p1} & b_{p2} & \ldots & b_{pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{p} a_{1i}\cdot b_{i1} & \sum_{i=1}^{p} a_{1i}\cdot b_{i2} & \ldots & \sum_{i=1}^{p} a_{1i}\cdot b_{im} \\ \sum_{i=1}^{p} a_{2i}\cdot b_{i1} & \sum_{i=1}^{p} a_{2i}\cdot b_{i2} & \ldots & \sum_{i=1}^{p} a_{2i}\cdot b_{im} \\ . & . & \ldots & . \\ \sum_{i=1}^{p} a_{ni}\cdot b_{i1} & \sum_{i=1}^{p} a_{ni}\cdot b_{i2} & \ldots & \sum_{i=1}^{p} a_{ni}\cdot b_{im} \end{pmatrix}$$

Adibidea: Izan bitez $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ eta $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrizeak. Kalkulatu biderketa hauek:

$A \cdot B$ eta $B \cdot A$.

$A \cdot B$ ezinezkoa da, A-ren zutabe kopurua eta B-ren errenkada kopurua desberdinak direlako.

$B \cdot A$ egin dezakegu:

$$B_{2\times2} \cdot A_{2\times3}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot2+0\cdot8 & 1\cdot1+0\cdot1 & 1\cdot7+0\cdot0 \\ 1\cdot2+1\cdot8 & 1\cdot1+1\cdot1 & 1\cdot7+1\cdot0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 10 & 2 & 7 \end{pmatrix}=C_{2\times3}$$

Propietateak:

Izan bitez A, B eta C hiru matrize:

- Elkarkorra: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- Batuketarekiko banakorra: $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$; $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$
- Elementu neutroa (matrize karratuetarako): $A \cdot I = I \cdot A = A$
- Ez dago simetrikorik: A^{-1} matrize batzuetarako bakarrik existitzen da
- Ez da trukakorra: $A \cdot B \neq B \cdot A$ (kasu batzuetan berdintza izan dezakegu)

3.4. Matrize karratu baten determinantea

A n mailako matrize karratu batek zenbaki bat elkarturik badu, A-ren ***determinante*** deritzo, eta honela izendatzen da: $\text{Det}(A) = |A|$.

$$\text{Det}(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots\ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinantearen balioa: matrizeko n elementuren biderkaduren baturak. Biderketa horietan, errenkada eta zutabe bakoitzetik elementu bakar bat hartuko da, zeinu positibo nahiz negatibokoa.

2. ordenako matrizeak

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3. ordenako matrizeak

Sarrus-en erregela

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Determinanteen propietateak:

1.Matrize baten determinantea eta matrize irauliarena berdinak dira. $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^t|$

Adibidea:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

2.Matrizearen bi lerro (errenkada edo zutabe) paralelo elkarrekin trukatuz gero, determinantea zeinuz aldatzen da.

Adibidea:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

3.Matrizearen lerro (errenkada edo zutabe) bateko elementu guztiak zenbaki berberaz biderkatzen badira, determinantea zenbaki horretaz biderkatuta geratzen da.

Adibidea:

$$2|A| = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 0 & 1 \\ 2\cdot 2 & 3 & 2 \\ 2\cdot 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 3 & 2\cdot 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 = 6$$

4.Matrizearen lerro bat (errenkada edo zutabe) beste lerro paralelo batzuen konbinazio lineala bada, determinantea nulua da. Beraz, $|A| \neq 0$ bada, errenkada eta zutabe guztiak linealki independenteak izango dira.

5. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x+y & z+q & r+s \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & z & r \\ d & e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ y & q & s \\ d & e & f \end{vmatrix}$

6.Matrizearen lerro (errenkada edo zutabe) bati beste lerro paralelo batzuen konbinazio lineala batzen badiogu, determinantearen balioa ez da aldatzen.

Adibidea: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1+6+3-(1+9+2) = -2$. Bigarren errenkadari lehenengoaren hirukoitza batuz $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4+15+6-(4+18+5) = -2$

7.Matrize triangeluar eta diagonaletan determinantearen balioa diagonal nagusiko elementuen biderkadura izango da.

8. $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$

Definizioa: Izan bedi A matrize bat. a_{ij} elementuaren **minor osagarria** α_{ij} izendatuko dugu, eta i. errenkada eta j. zutabea ezabatuz lortzen den matrizearen determinantea izango da.

Adibidea: Izan bedi $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$. Kalkula ditzagun minor osagarri batzuk:

$$\alpha_{12}=\begin{vmatrix}7 & 9\\ 1 & 3\end{vmatrix}=21-9=12\,,\ \alpha_{21}=\begin{vmatrix}5 & 6\\ 2 & 3\end{vmatrix}=15-12=3\,,\ \alpha_{32}=\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & 9\end{vmatrix}=36-42=-6$$

Definizioa: Izan bedi A matrize bat, a_{ij} elementuaren **minor adjuntua** edo **adjuntua** $A_{ij}=(-1)^{i+j}\alpha_{ij}$ da.

Adibidea: Izan bedi $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 7\\ 0 & 1 & 4\\ 5 & 0 & 2\end{pmatrix}$. Kalkula ditzagun adjuntu batzuk:

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 4\\ 5 & 2\end{vmatrix}=-(0-20)=20\,,\ A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 7\\ 1 & 4\end{vmatrix}=+(4-7)=-3$$

Orain, determinanteen azkeneko propietate bat enuntziatuko dugu:

9.Matrizearen lerro (errenkada edo zutabe) baten elementuen eta beste lerro paralelo baten elementuen adjuntuaren biderkaduren batura zero izango da.

Adibidea: Izan bedi $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$. Kalkula ditzagun hirugarren errenkadako adjuntuak: $A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1$, $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5$, $A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3$

Orain, lehenengo errenkadako elementuak eta hirugarren errenkadako adjuntuak biderkatuz:

$$a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=1\cdot(-1)+2\cdot 5+3\cdot(-3)=0$$

Orain, hiru baino maila handiagoko matrizeen determinanteak kalkulatuko ditugu. Horretarako, hiru metodo ikusiko ditugu:

1) **Adjuntuak erabiliz:** matrize baten determinantea lerro baten elementuen eta haren adjuntuen biderkaduraren batura da.

Adibidea:

Garatu determinantea lehenengo errenkadan:

$$\begin{vmatrix}1 & 4 & 5 & 1\\ 3 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}+4\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}+5\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=$$
$$=1\cdot(+1)\cdot(-2)+4\cdot(-1)\cdot 0+5\cdot(+1)\cdot 6+1\cdot(-1)\cdot 4=24$$

2) **Chio-ren erregela:** Hainbeste adjuntu ez kalkulatzeko, matrizean 1 den elementu bat bilatuko dugu. Elementu hori erabiliz, errenkadako edo zutabeko elementuak zero egingo ditugu (determinanteen 6. propietatea erabiliz). Ondoren, determinantea errenkada edo zutabe hori erabiliz garatuko dugu.

Adibidea:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 7 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -20 & 15 & 10 & -26 \\ -11 & 10 & 9 & -29 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} \\ \\ \\ \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} \\ \\ \\ \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -5 & 7 & -7 \\ -20 & 15 & -26 \\ -11 & 10 & -29 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} \\ \\ \\ \end{vmatrix} = -(-938) = 938$$

Oharra: Matrizean 1ekorik ez badago, errenkada bat errenkada horretako elementu batez zatituko dugu 1eko bat lortzeko. Kontuan hartu Chio-ren erregela aplikatu aurretik 3. propietatea aintzat hartu behar dela.

3) **Matrizea triangelatuz:** Matrizea triangeluar bihurtuko dugu 6. propietatea erabiliz. Beraz, determinantea diagonal nagusiko elementuen biderkadura izango da.

Adibidea:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 \cdot 8 = -16$$

3.5. Matrize iraulia. Propietateak

Definizioa: A matrize baten matrize ***iraulia*** A-ren zutabeak errenkadekin aldatuz lortzen den matrizea da. A^t gisa adieraziko dugu.

$$(A)_{n\times p} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2p} \\ . & . & ..... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{np} \end{pmatrix} \qquad (A^t)_{p\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ..... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & ..... & a_{n2} \\ . & . & ..... & . \\ a_{1p} & a_{2p} & ..... & a_{np} \end{pmatrix}$$

Propietateak:

- $\left(A^t\right)^t = A$
- $\left(A+B\right)^t = A^t + B^t$
- $\left(A\cdot B\right)^t = B^t \cdot A^t$
- $\left(\lambda\cdot A\right)^t = \lambda\cdot A^t$
- $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$

3.6. Matrize karratu baten alderantzizkoa

Definizioa: A matrize karratu bat **erregularra** dela esango dugu, alderantzizkoa badu, hau da, $\exists A^{-1} / A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$. Bestela, A **singularra** dela esango dugu.

Teorema: A *erregularra* da $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

Alderantzizkoaren kalkulua: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}\left(A^t\right)$

Izan bedi $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots.. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots.. & a_{2n} \\ . & . & \ldots.. & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots.. & a_{nn} \end{pmatrix}$ matrizea. Haren iraulia: $A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots.. & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots.. & a_{n2} \\ . & . & \ldots.. & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots.. & a_{nn} \end{pmatrix}$

Irauliaren adjuntua: $\mathrm{Adj}(A^t)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots.. & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots.. & A_{n2} \\ . & . & \ldots.. & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots.. & A_{nn} \end{pmatrix}$

Adibidea: Kalkulatu $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&0\\3&5&3\end{pmatrix}$ matrizearen alderantzizkoa.

Lehenengo matrizea erregularra dela frogatuko dugu: $A=\begin{vmatrix}2&3&1\\1&2&0\\3&5&3\end{vmatrix}=2\neq 0$

Orain, haren iraulia kalkulatuko dugu: $A^t=\begin{pmatrix}2&1&3\\3&2&5\\1&0&3\end{pmatrix}$

Ondoren, irauliaren adjuntua: $\text{Adj}(A^t)=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&5\\0&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&5\\1&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&2\\1&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&3\\0&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&3\\1&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&3\\2&5\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&3\\3&5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-4&-2\\-3&3&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$

Beraz, A-ren alderantzizkoa: $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6&-4&-2\\-3&3&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2&-1\\-3/2&3/2&1/2\\-1/2&-1/2&1/2\end{pmatrix}$

Frogatu dezagun A-ren alderantzizkoa dela:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&0\\3&5&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-2&-1\\-3/2&3/2&1/2\\-1/2&-1/2&1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Propietateak:

- A^{-1} existitzen bada, bakarra da.
- $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$
- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $\left(A^{-1}\right)^{t} = \left(A^{t}\right)^{-1}$

Definizioa: Izan bedi A matrize erregular bat, orduan A ***ortogonala*** dela esango dugu, $A^t = A^{-1}$ betetzen bada.

3.7. Matrize baten heina

Definizioa: Izan bedi A $n \times n$ matrize bat. 'm' mailako **minor** bat $m \times m$ ordenako A-ren azpimatrize baten determinantea da.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1m} & \ldots\ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2m} & \ldots\ldots & a_{2p} \\ . & . & \ldots\ldots & . & \ldots\ldots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mm} & \ldots\ldots & a_{mp} \\ . & . & \ldots\ldots & . & \ldots\ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nm} & \ldots\ldots & a_{np} \end{pmatrix} \qquad \text{Minor bat} \quad |B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2m} \\ . & . & \ldots\ldots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

'm' mailako minor bat desberdin 0 bada, determinante hori sortzen duten m zutabeak eta errenkadak linealki askeak izango dira.

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2m} \\ . & . & ..... & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ bada, } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ a_{m1} \\ . \\ a_{n1} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ . \\ a_{m2} \\ . \\ a_{n2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ . \\ a_{mm} \\ . \\ a_{nm} \end{pmatrix} \text{ bektoreak linealki}$$

independenteak dira. Halaber, m errenkada-bektoreak linealki independenteak dira.

Definizioa: Matrize baten ***heina*** bere errenkadekin (zutabeekin) lor daitekeen minor ez-nulu handienaren ordena da.

Adibidea: Ikus dezagun adibide baten bitartez nola kalkulatzen den.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 5 & 8 & 16 \\ 4 & 2 & 6 & 12 \\ 5 & 6 & 12 & 23 \end{pmatrix}.$$

Has gaitezen 2. mailako minor bat hartuz $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \vec{c}_1$ eta $\vec{c}_2$ zutabe-bektoreak askeak direla. Beraz, heina(A) ≥ 2. Ondoren, orlatu dezagun minor hori, hirugarren zutabea erabiliz:

3. errenkadarekin $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ oraingoz $\vec{c}_3 \in \langle \vec{c}_1, \vec{c}_2 \rangle$

4. errenkadarekin $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ oraingoz $\vec{c}_3 \in \langle \vec{c}_1, \vec{c}_2 \rangle$

5. errenkadarekin $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 12 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \vec{c}_3 \notin \langle \vec{c}_1, \vec{c}_2 \rangle$; beraz, $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$ sistema aske bat da, eta heina(A)≥ 3 da.

Orain, lorturiko 3. mailako minor ez-nulua, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 12 \end{vmatrix}$, laugarren zutabea erabiliz orlatuko dugu.

Falta diren bi errenkadak gehituko ditugu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ 5 & 6 & 12 & 23 \\ 3 & 5 & 8 & 16 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{ oraingoz } \vec{c}_4 \in \langle \vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3 \rangle$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ 5 & 6 & 12 & 23 \\ 4 & 2 & 6 & 12 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{ oraingoz } \vec{c}_4 \in \langle \vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3 \rangle$$

Errenkada guztiak erabili ditugunez, $\vec{c}_4 \in \langle \vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3 \rangle$ betetzen dela baiezta dezakegu. Beraz, $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4\}$ sistema lotua da, eta heina(A)<4.

Ondorioz, A-ren heina hiru da: heina(A)=3. Gainera, $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4\}$ bektoreak sortzen duen azpiespazioaren dimentsioa 3 dela esan dezakegu, eta haren oinarri bat $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$ dela.

Teorema: Izan bedi $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2p} \\ . & . & ..... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{np} \end{pmatrix}$ matrize bat. Orduan, haren heina

matrizearen zutabeek (errenkadek) sortzen duten azpiespazioaren dimentsioa da.

Propietateak:

Izan bedi matrize hau: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2p} \\ . & . & ..... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{np} \end{pmatrix}$

- A matrizearen 'i' zutabe(errenkada)-bektore hartuta, linealki independenteak dira, baldin eta soilik baldin i mailako minor ez-nulu bat existitzen bada.
- 'p' zutabe-bektoreek sorturiko azpiespazioaren dimentsioa, eta 'n' errenkada-bektoreek sorturiko azpiespazioren dimentsioa berdinak dira, hau da, heinaren berdinak.
- Beste zutabeen (errenkaden) konbinazio lineal den zutabe (errenkada) bat ezabatuz gero, matrizearen heina ez da aldatzen.
- Matrize baten heina ez da aldatzen, zutabe (errenkada) bati besteen konbinazio lineal bat batuz gero.
- Matrize baten heina ez da aldatzen, zutabe (errenkada) bat eskalar batez biderkatuz gero.

3.8. Matrize karratuen berreketak eta erroketak

Definizioa: Izan bedi A matrizea. Haren **p. berreketa** A bere buruarekin p aldiz biderkatuz lortzen da: $A^p = A \cdot A \cdot ... \cdot A \quad (p \in \mathbb{N})$ **.**

Definizioa: Izan bedi A matrizea. Haren **p. erroketa** $(p \in \mathbb{N})$ maila bereko beste matrize bat da $A^{1/p}$, non $\left(A^{1/p}\right)^p = A \quad (p \in \mathbb{N})$.

Propietateak:

- $\forall p,q \in \mathbb{N} : A^p A^q = A^{p+q}$
- $\forall p,q \in \mathbb{N} : \left(A^p\right)^q = A^{p \cdot q}$
- A erregularra bada: $\forall p \in \mathbb{N} : \left(A^{-1}\right)^p = \left(A^p\right)^{-1}$
- A erregularra bada: $\forall p,q \in \mathbb{N} : A^{-p} A^{-q} = A^{-(p+q)}$
- A erregularra bada: $\forall p,q \in \mathbb{N} : \left(A^{-p}\right)^{-q} = A^{p \cdot q}$

Oharra: Kontua izan behar dugu berreketetan, matrizeen arteko biderkadura trukakorra ez delako.

Adibidea: $\left(A \cdot B\right)^2 = \left(A \cdot B\right) \cdot \left(A \cdot B\right) = A \cdot B \cdot A \cdot B \neq A^2 B^2$

3.9. Blokekako matrizeak

Kasu batzuetan, hainbat kalkulu egiteko komenigarria da, A matrize bateko elementuak azpimatrize errazagotan, bloketan (A_i), banatzea. Kasu horretan, blokekako matrize bat izango dugu, non haren elementuak matrizeak baitira.

Adibidea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc:cc:c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hdashline -1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \end{pmatrix}$

non $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$,..., $A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Matrize horien arteko eragiketak:

a) Eskalar bat bider matrizea

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot A_1 & \lambda \cdot A_2 & \lambda \cdot A_3 \\ \lambda \cdot A_4 & \lambda \cdot A_5 & \lambda \cdot A_6 \end{pmatrix}$$

b) Blokeka dauden matrizeak batzeko, bi matrizeek blokeka era berean zatituta egon behar dute.

$$A_{5\times 6} + B_{5\times 6} = \begin{pmatrix} A_{2\times 2} & A_{2\times 4} \\ A_{3\times 2} & A_{3\times 4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{2\times 2} & B_{2\times 4} \\ B_{3\times 2} & B_{3\times 4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{2\times 2} + B_{2\times 2} & A_{2\times 4} + B_{2\times 4} \\ A_{3\times 2} + B_{3\times 2} & A_{3\times 4} + B_{3\times 4} \end{pmatrix}$$

c) Izan bitez $m\times p$ eta $p\times n$ dimentsioetako A eta B bi matrize. A-ren eta B-ren arteko biderketa egiteko, zentzua izan behar dute biderketek blokeka:

1) A-ren zutabe kopuruak eta B-ren errenkada kopuruak berdinak izan behar dute:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_1 & \vdots & \\ B_2 & \vdots & \\ B_3 & \vdots & \end{pmatrix}$$

2) Zatitutako A matrizearen K-garren zutabeko zutabe kopuruak eta zatitutako B matrizearen K-garren errenkadako errenkada kopuruak berdinak izan behar dute.

$$A_{4\times 6} \cdot B_{6\times 3} = \begin{pmatrix} \bullet & \vdots & \bullet & \bullet & \bullet & \vdots & \bullet & \bullet \\ \bullet & \vdots & \bullet & \bullet & \bullet & \vdots & \bullet & \bullet \\ \bullet & \vdots & \bullet & \bullet & \bullet & \vdots & \bullet & \bullet \\ \bullet & \vdots & \bullet & \bullet & \bullet & \vdots & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

Blokekako matrize baten alderantzizkoa:

Gomendagarria da oso maila handia duen matrize baten alderantzizkoa kalkulatzeko hura blokeka banatzea.

$M = \begin{pmatrix} A_{r\times r} & B_{r\times s} \\ C_{s\times r} & D_{s\times s} \end{pmatrix}$ non n = r + s

Izenda dezagun $M^{-1} = \begin{pmatrix} X_{r\times r} & Y_{r\times s} \\ Z_{s\times r} & T_{s\times s} \end{pmatrix}$ M matrizearen alderantzizkoa. Beraz,

$$M \times M^{-1} = I_n \Rightarrow \begin{pmatrix} A_{r\times r} & B_{r\times s} \\ C_{s\times r} & D_{s\times s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_{r\times r} & Y_{r\times s} \\ Z_{s\times r} & T_{s\times s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0_{r\times s} \\ 0_{s\times r} & I_{s\times s} \end{pmatrix}$$

eragiketak eginez, $\begin{cases} AX + BZ = I \\ AY + BT = 0 \\ CX + DZ = 0 \\ CY + DT = I \end{cases}$, X, Y, Z eta T matrizeak kalkulatzen ditugu.

<u>Adibidea:</u>

Kalkulatu matrize honen alderantzizkoa:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Partiketa hau egingo dugu:

$$M = \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} I_{3\times 3} & A_{3\times 2} \\ 0_{2\times 3} & B_{2\times 2} \end{pmatrix}$$

Alderantzizkoa kalkulatzeko:

$$\begin{pmatrix} I_{3\times3} & A_{3\times2} \\ 0_{2\times3} & B_{2\times2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_{3\times3} & Y_{3\times2} \\ Z_{2\times3} & T_{2\times2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{3\times3} & 0_{3\times2} \\ 0_{2\times3} & I_{2\times2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X + AZ = I & (1) \\ Y + AT = 0 & (2) \\ BZ = 0 & (3) \\ BT = I & (4) \end{cases}$$

(4) ekuaziotik, $BT = I \Rightarrow T = B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) ekuaziotik, $|B| \neq 0$ denez, $BZ = 0 \Rightarrow Z = 0_{2\times3}$

(1) ekuaziotik, Z=0 denez, orduan $X = I_{3\times3}$

(2) ekuaziotik, $Y = -AT = -\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 & 2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Beraz, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

3.10. Zenbaki konplexuen gainean definituriko matrizeak

Orain, zenbaki konplexuen gainean definituriko matrizeak aztertuko ditugu.

Definizioa: Izan bedi A matrize bat zenbaki konplexuen gorputzaren gainean definitua. Haren konjokatua $\overline{\mathrm{A}}$ beste matrize bat da, non elementuak A matrizeko elementuen konjokatuak baitira.

Adibidea: $A=\begin{pmatrix} 3+4i & 0 & 1 \\ -i & 2i & 7-i \end{pmatrix}$ matrizearen konjokatua $A=\begin{pmatrix} 3-4i & 0 & 1 \\ i & -2i & 7+i \end{pmatrix}$ da.

Definizioa: Izan bedi A matrize bat zenbaki konplexuen gorputzaren gainean definitua, haren matrize **elkartua** $\mathrm{A}^{*}=\overline{\left(\mathrm{A}^{\mathrm{t}}\right)}$ beste matrize bat da, hau da, haren irauliaren konjokatua (era berean, $\mathrm{A}^{*}=\left(\overline{\mathrm{A}}\right)^{t}$ konjokatuaren iraulia).

Adibidea: $A=\begin{pmatrix} 1+i & 0 & 2i \\ 4 & 1 & 1-3i \end{pmatrix}$; haren iraulia: $A^{t}=\begin{pmatrix} 1+i & 4 \\ 0 & 1 \\ 2i & 1-3i \end{pmatrix}$; haren elkartua:

$A^{*}=\begin{pmatrix} 1-i & 4 \\ 0 & 1 \\ -2i & 1+3i \end{pmatrix}$.

Definizioa: Izan bedi A matrize karratu bat zenbaki konplexuen gorputzaren gainean definitua. **Hermitikoa** dela esango dugu, $\mathrm{A}^{*}=\mathrm{A}$ betetzen bada.

Diagonal nagusiko elementuak errealak izango dira.

Adibidea: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1-i & 2+i \\ 1+i & 4 & -i \\ 2-i & i & 6 \end{pmatrix}$ hermitikoa da. Iraulia: $A^t=\begin{pmatrix} 0 & 1+i & 2+i \\ 1-i & 4 & i \\ 2+i & -i & 6 \end{pmatrix}$; eta haren elkartua: $\overline{\left(A^t\right)}=\begin{pmatrix} 0 & 1-i & 2+i \\ 1+i & 4 & -i \\ 2-i & i & 6 \end{pmatrix}=A$

Definizioa: Izan bedi A matrize karratu bat zenbaki konplexuen gorputzaren gainean definitua. **Antihermitikoa** dela esango dugu, $A^*=-A$ betetzen bada.

Diagonal nagusiko elementuak zenbaki konplexu zehatzak dira.

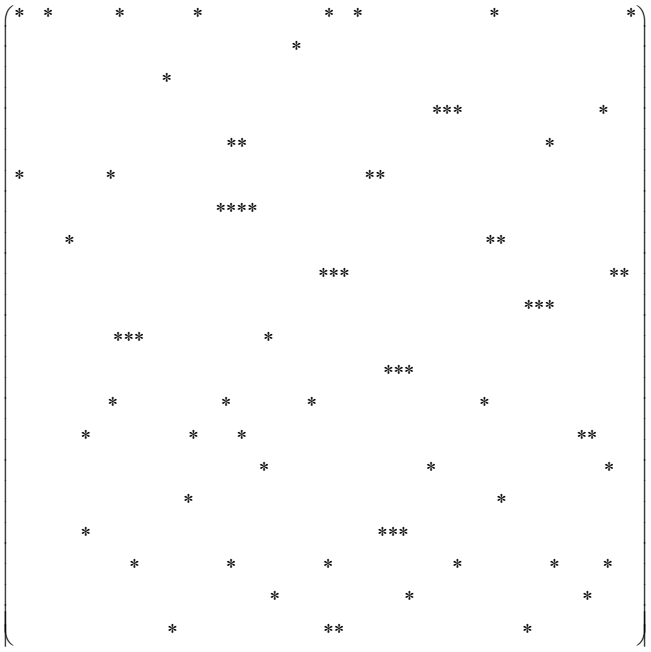
3.11. Matrize sakabanatuak

Definizioa: A n×n dimentsioko matrize karratu bat **sakabanatua** dela esango dugu, elementu nuluak ez-nuluak baino gehiago direnean.

Matrize sakabanatuen adierazpen grafikoa errazteko, haien egitura-matrizea erabiliko da: $A_{egit}=\begin{cases} a_{ij}=1, \text{ A matrizean } a_{ij}\neq 0 \\ a_{ij}=0, \text{ A matrizean } a_{ij}=0 \end{cases}$

Beste kasu batzuetan, adierazpena gehiago errazteko, elementu ez-nuluen tokian '*' edo '·' jartzen da, eta nuluak nuluik uzten dira.

Adibidea: 20×20 dimentsioko matrize sakabanatu baten egitura:



Nuluune guztiak zeroak dira, eta izarñoak balio ez-nuluak.

3.12. Zenbakizko metodoak

Matrize erregular baten alderantzizkoa kalkulatzeko. Gauss-en metodoa aztertuko dugu.

Gauss-en murrizketa-metodoa erabiltzeko, $\left(\mathrm{A}\middle|\mathrm{I}\right)$ matrize hedatua eraikiko dugu, I dimentsio bereko identitate-matrizea izanik. Ondoren, errenkadekin eragiketak egingo ditugu: i) edozein bi errenkada truka daitezke, ii) edozein errenkada 0 ez den zenbaki batez biderkatu daiteke, iii) edozein errenkadatako multiplo bat beste bati batu diezaiokegu, ezkerraldean identitate-matrizea lortu arte. Kasu horretan, eskuinaldeko matrizea A^{-1} izango da.

$$\left(A\middle|I\right) \xrightarrow{\text{Errenkadekin eragiketak}} \left(I\middle|A^{-1}\right)$$

Ezinezkoa bada $\left(I\middle|A^{-1}\right)$ forma lortzea, A matrizeak ez du alderantzizkorik izango.

Adibidea: Izan bedi $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 8\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -5\end{pmatrix}$.

Matrize hedatua: $\left(A\middle|I\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 3 & 8 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$

1. eta 3. errenkadak trukatuz: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 8 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)$

2. errenkada + (-1)×1. errenkada: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 5 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 8 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)$

2. errenkada×(1/2): $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 5/2 & 0 & 1/2 & -1/2\\ 0 & 3 & 8 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)$

3. errenkada + (-3) × 2. errenkada: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 5/2 & 0 & 1/2 & -1/2\\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & -3/2 & 3/2\end{array}\right)$

3. errenkada×2: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 5/2 & 0 & 1/2 & -1/2\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 3\end{array}\right)$

3. errenkada × 5 + 1. errenkada eta 3. errenkada ×(-5/2) + 2. errenkada:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 10 & -15 & 16\\ 0 & 1 & 0 & -5 & 8 & -8\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 3\end{array}\right)=\left(I\middle|A^{-1}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}10 & -15 & 16\\ -5 & 8 & -8\\ 2 & -3 & 3\end{pmatrix}$$

Horrenbestez, lortu dugu A-ren alderantzizkoa.

3.13. Oinarri-aldaketako matrizea

Demagun $U=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ eta $V=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n\}$ E bektore-espazioko oinarriak direla.

$\vec{x}\in E$ edozein bektore U-ko edo V-ko bektoreen konbinazio lineal gisa idatz daiteke:

$$\vec{x}=x_1\vec{u}_1+x_2\vec{u}_2+...+x_n\vec{u}_n=\begin{pmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & ... & \vec{u}_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\.\\.\\x_n\end{pmatrix}$$

edo

$$\vec{x}=x_1\vec{v}_1+x_2\vec{v}_2+...+x_n\vec{v}_n=\begin{pmatrix}\vec{v}_1 & \vec{v}_2 & ... & \vec{v}_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\.\\.\\x'_n\end{pmatrix}.$$

Beraz,

$$\vec{x}=\vec{x}\text{ denez: }\underbrace{\begin{pmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & ... & \vec{u}_n\end{pmatrix}}_{\text{U oinarrian}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\.\\.\\x_n\end{pmatrix}}_{\vec{x}\text{ bektorea}}=\underbrace{\begin{pmatrix}\vec{v}_1 & \vec{v}_2 & ... & \vec{v}_n\end{pmatrix}}_{\text{V oinarrian}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\.\\.\\x'_n\end{pmatrix}}_{\vec{x}\text{ bektorea}}$$

Demagun gure erreferentzia-oinarria U dela; hau da, bektore guztiak U-ren oinarrian idatzita daudela. $\vec{x}$ bektorea ere U oinarrian idatzita dago, eta gure helburua V oinarrian idaztea izango da. Egin dezagun, beraz, oinarri-aldaketa.

Bestalde, V oinarriko bektoreak U oinarrian idatz ditzakegu:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = v_{11}\vec{u}_1 + v_{21}\vec{u}_2 + \ldots + v_{n1}\vec{u}_n \\ \vec{v}_2 = v_{12}\vec{u}_1 + v_{22}\vec{u}_2 + \ldots + v_{n2}\vec{u}_n \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{v}_n = v_{1n}\vec{u}_1 + v_{2n}\vec{u}_2 + \ldots + v_{nn}\vec{u}_n \end{cases}$$

Adierazpen honetan, bektore horiek zutabeka erabiliko ditugu:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ .. & .. & \ldots & .. \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}}_{\text{U-ko bektoreak U oinarrian idatzita}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{x} \text{ bektorea U oinarrian idatzita}} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{V-ko bektoreak U oinarrian idatzita}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}}_{\vec{x} \text{ bektorea V oinarrian idatzita}}$$

V oinarrian idatzitako $\vec{x}$ bektorea ebaztea falta zaigu:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}}_{\vec{x} \text{ bektorea V oinarrian idatzita}} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{nn} \end{pmatrix}^{-1}}_{(V^{-1})} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ .. & .. & \ldots & .. \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{x} \text{ bektorea U oinarrian idatzita}}$$

Horrenbestez, lortu dugu oinarri-aldaketako adierazpena.

3.14. Matrizeen ariketak

1) Murriztu matrize-adierazpen hauek:

a) $\left(A+B\right)^2 - A\cdot\left(A+B\right)-\left(B+A\right)\cdot B$

b) $-2A^t\cdot B-\left(B^t\cdot A\right)^t+\left[B^t\cdot A+\left(A^t\cdot B\right)^t\right]^t$

c) $\left(B\cdot A\right)^t+2A^t\cdot B-\left(B\cdot A^t\right)^t-A\cdot B$ non A simetrikoa den $\left(A=A^t\right)$

Emaitza: *a*) $B\cdot A-A\cdot B$ *b*) $-A^t\cdot B$ *c*) $A\cdot B$

2) Askatu matrize-sistema hau:

$$\left.\begin{array}{l}2X-3Y=A\\4X+5Y=-B\end{array}\right\}\ non\ A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&0&3\end{pmatrix}\ eta\ B=\begin{pmatrix}0&1&-3\\-2&-1&-4\end{pmatrix}$$

Emaitza: $X=\frac{1}{22}\begin{pmatrix}5&-8&19\\16&3&27\end{pmatrix} eta \quad Y=-\frac{1}{11}\begin{pmatrix}2&-1&1\\2&-1&2\end{pmatrix}$

3) A eta B matrizeak alderantzikagarriak direla joz, frogatu berdintza betetzen dela:

$\left(A^t\cdot B^t\right)^{-1}=\left(A^{-1}\cdot B^{-1}\right)^t$

4) Aurkitu matrize honen heina:

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&5&0&2&\frac{1}{2}\\-2&6&-10&0&-4&-1\\-2&6&0&1&4&-3\\0&0&10&1&8&-2\\-1&3&0&\frac{1}{2}&2&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

Emaitza: Heina(A) = 2

5) Askatu ekuazio-sistema hau:

$$\left.\begin{array}{l} X-Y=M \\ X+X^t=N \\ Y-Y^t=P \end{array}\right\} non\ M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

6) Aurkitu matrize honen heina, eta adierazi zutabe-bektoreek sortzen duten azpiespazioaren dimentsioa:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & m \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Emaitza: m=-2 → heina(A)=3; m≠-2 → heina(A)=4

7) Sinplifikatu $\left[\left[M^t+\left(A\cdot N\right)^{-1}\right]^2\right]^t$ matrize-adierazpena, jakinik $N^t\cdot A^t=M$ betetzen dela

8) Kalkulatu matrize honen heina ‘a’ eta ‘b’ balioen arabera:

$$A=\begin{pmatrix} 2a & b & 1 \\ 2 & ab & 1 \\ 2 & b & a \end{pmatrix}$$

9) Kalkulatu matrize honen heina ‘a’ eta ‘b’ balioen arabera:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & a & b \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Emaitza: b≠a → heina(A)=3; b=a → heina(A)=2

10) Izan bedi $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 2\\ 4 & 5 & 0\end{pmatrix}$. Kalkulatu A^{-1} matrize adjuntuaren metodoa, Gauss-en metodoa erabiliz.

11) Kalkulatu matrize honen heina: $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 3 & 0 & 4\\ 3 & 3 & 9 & 1 & 2\\ 0 & 10 & 0 & 2 & -1\\ 5 & 11 & 15 & 1 & 10\\ -2 & 0 & -6 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Emaitza: Heina(A) = 4

12) Kalkulatu 'm'-ren eta 'n'-ren balioak, A matrizeak ekuazio hau bete dezan: $\left(A^2\right)+m\cdot A+n\cdot I=0$, **non** $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$**. Emaitza: m=-4 eta n=3**

13) Kalkula itzazu matrize hauen heinak:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 4 & 10 & 1\\ 4 & 8 & 18 & 7\\ 10 & 18 & 40 & 17\\ 1 & 7 & 17 & 3\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2\\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2\\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1\\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5\\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Erantzuna: $\begin{cases}heina(A)=2\\ heina(B)=3\\ heina(C)=5\\ heina(D)=3\end{cases}$

14) Kalkulatu matrize hauen alderantzizkoak:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5 & 7\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 17 & -1 & 0\\ 2 & -1 & -5 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 12 & 1 & 3\\ 4 & 0 & 2 & 4 & 12\\ 5 & 1 & 3 & -2 & 7\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Erantzunak: $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 11 & -38\\ 0 & 1 & -2 & 7\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\nexists B^{-1}$, $C^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ -2 & 3 & -2 & 3\end{pmatrix}$

15) Kalkulatu determinanteon balioak:

$$a)\ \begin{vmatrix}-1 & 0 & 3/4\\ 2 & -1/2 & -2/5\\ 4 & -3 & 2\end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix}-3 & 2 & 1 & 6\\ 5 & 4 & -3 & 2\\ 0 & 7 & 1 & 5\\ 1 & 3 & 4 & 0\end{vmatrix} \qquad c)\ \begin{vmatrix}-1 & 0 & 5 & 0 & 4\\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1\\ -4 & 7 & 1 & -5 & 1\\ 1/2 & 3 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3/2 & 1 & 5\end{vmatrix}$$

Erantzuna: a) -4/5 b)-510 c)728

16) Izan bedi $V=\{(1,0,2),(1,1,1),(0,0,3)\}$ $\mathbb{R}^3$–ko oinarri bat. Oinarri-aldaketaren metodoa erabiliz, kalkulatu $\vec{x}(2,1,0)$ bektorearen koordenatuak V oinarrian.

Erantzuna: $\vec{x}(2,1,0)=\vec{x}(1,1,-1)_V$

17) Izan bitez $V=\{(1,2,0),(2,1,1),(1,1,3)\}$ eta $W=\{(2,1,1),(1,1,0),(0,1,2)\}$ $\mathbb{R}^3$-ko bi oinarri.

Frogatu V eta W sistema askeak direla.

Kalkulatu $\vec{x}(5,2,4)$ bektorearen koordenatuak V eta W oinarriekiko.

Kalkulatu $\vec{y}(3,1,1)_V$ bektorearen koordenatuak W oinarriekiko.

18) Izan bedi $V=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ $\mathbb{R}^3$-ko oinarri bat eta $\vec{x}(1,2,3)_V$ bektore bat. Oinarri-aldaketaren metodoa erabiliz, kalkulatu $\vec{x}$ bektorearen koordenatuak $V=\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\}$ oinarrian non:

$\vec{b}_1=3\vec{v}_1+2\vec{v}_2-\vec{v}_3$, $\vec{b}_2=4\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3$ **eta** $\vec{b}_3=2\vec{v}_1-5\vec{v}_2+\vec{v}_3$

Erantzuna: $\vec{x}(1,2,3)_V=\vec{x}\left(-\frac{16}{9},\frac{35}{18},-\frac{13}{18}\right)_B$

19) Izan bitez $V=\{(1,1,1),(1,0,-2),(1,0,1)\}$ eta $U=\{(1,1,0),(1,0,0),(0,-1,-1)\}$ $\mathbb{R}^3$-ko bi oinarri eta $\vec{x}(0,1,2)_V$ bektorea.

Oinarri-aldaketaren metodoa erabiliz, kalkulatu $\vec{x}$ bektorearen koordenatuak U oinarriarekiko.

Erantzuna: $\vec{x}(0,1,2)=\vec{x}(0,3,0)_B$

SISTEMAK
Homogeneoa
Gauss
Bateragarria
Ez-homogeneoa
Sistema
Lineala
Nabaria
Bateraezina
Bateraezina
Indeterminatua
Determinatua
Cramer

4. GAIA. EKUAZIO-SISTEMA LINEALAK

4.1. Sarrera

Izan bitez n berdintza hauek:

$$\begin{aligned} &f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + ... + f_{1p}x_p = b_1 \\ &f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + ... + f_{2p}x_p = b_2 \\ &..... \\ &f_{n1}x_1 + f_{n2}x_2 + ... + f_{np}x_p = b_n \end{aligned} \qquad (1)$$

non f_{ij} *koefizienteak* eta b_i *gai askeak* K gorputzeko elementuak baitira. Sistema horri ***p ezezaguneko ekuazio-sistema lineala*** deritzo. Ezezagunak $x_1, x_2, ..., x_p$ dira.

(1) sistemaren soluzio guztiak lortzea K-n sistema ebaztea izango da.

Ekuazio-sistema linealak ***homogeneoak*** dira, $\forall b_i = 0$ betetzen bada, eta **ez-*homogeneoak***, $\exists b_i \neq 0$.

Soluzioa duten ekuazio-sistema linealak sistema ***bateragarriak*** direla esango dugu. Soluzioa bakarra bada, sistema ***bateragarri determinatua*** izango da, eta soluzio bat baino gehiago badira, sistema ***bateragarri indeterminatua*** izango da.

Soluzioa ez duten ekuazio-sistema linealak sistema ***bateraezinak*** izango dira.

Sistema homogeneoek beti izango dute ***soluzio nabari*** bat.

$$x_1 = x_2 = ...x_p = 0$$

Nahiz eta soluzio nabaria soluzioa izan, interesgarria izaten da nabariaren desberdinak diren soluzioak aurkitzea. Beraz, sistema homogeneoen kasuan, sistema bateragarria dela esango dugu soluzio nabariaz gainera beste soluzio batzuk existitzen direnean.

(1) sistema honela idatz dezakegu:

$$x_1\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ .... \\ f_{n1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \\ .... \\ f_{n2} \end{pmatrix} + ... + x_p\begin{pmatrix} f_{1p} \\ f_{2p} \\ .... \\ f_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

(2)-ko zutabe-bektoreak $\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_p$ eta $\vec{b}$ izendatuz, (1) sistema hau da:

$$x_1\vec{f}_1 + x_2\vec{f}_2 + ... + x_p\vec{f}_p = \vec{b} \qquad (3)$$

Matrize eran ere idatz daiteke:

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{1p} \\ f_{21} & f_{22} & f_{2p} \\ ..... & & \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{np} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Beraz, matrizeen biderketak erabiliz (4) berdintza laburtu dezakegu:

$$\left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_p\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_p \end{pmatrix} = \vec{b} \qquad (5)$$

Beraz, ezezagunen koefizienteen matrizea honako hau izango da:

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{1p} \\ f_{21} & f_{22} & f_{2p} \\ ..... & & \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{np} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Matrize hedatua, aldiz, gai askeak gehituz lortzen da:

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{1p} & b_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{2p} & b_2 \\ ..... & & & \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{np} & b_n \end{pmatrix} \qquad (7)$$

4.2. Rouche Frobenius-en teorema

(3) sistemaren arabera, (1) sistemak soluzioa izateko baldintza beharrezkoa eta nahikoa da $\vec{b}$, $\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_p$ bektoreen konbinazioa lineala izatea.

Baldintza hori honela idatz dezakegu:

(1) ekuazio-sistema lineala bateragarria da, baldin eta soilik baldin koefizienteen matrizearen heina eta matrize hedatuaren heina berdinak badira.

Bi kasu egon daitezke:

1) Heina ezezagun kopuruaren berdina izatea. Orduan, sistema ***bateragarri determinatua*** izango da.
2) Heina ezezagun kopurua baino txikiagoa izatea. Orduan, sistema ***bateragarri indeterminatua*** izango da. Indeterminazio-maila, aldiz, ezezagun kopurua ken heina izango da.

Sistema ***homogeneoen*** kasuan:

$$\begin{aligned} &f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + ... + f_{1p}x_p = 0 \\ &f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + ... + f_{2p}x_p = 0 \\ &..... \\ &f_{n1}x_1 + f_{n2}x_2 + ... + f_{np}x_p = 0 \end{aligned}$$

Beti izango dugu soluzio nabari bat: $x_1 = x_2 = ...x_p = 0$. Beraz, sistema homogeneo batek nabariaz gainera beste soluzio batzuk izango ditu, baldin eta soilik baldin *koefizienteen matrizearen heina ezezagun kopurua baino txikiagoa bada*.

4.3. Cramer-en erregela

Izan bedi n ezezagunen n ekuazio-sistema:

$$\begin{aligned} &f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + \ldots + f_{1n}x_n = b_1 \\ &f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + \ldots + f_{2n}x_n = b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_{n1}x_1 + f_{n2}x_2 + \ldots + f_{nn}x_n = b_n \end{aligned} \qquad (8)$$

Jo dezagun koefizienteen matrizearen determinantea ez-nulua dela, hau da:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (9)$$

Orduan: **Koefizienteen matrizearen heina = matrize hedatuaren heina = Ezezagun kopurua**

Rouche Frobenius-en teoremaren arabera, (8) sistema bateragarri determinatua da. Beraz, aurki dezagun haren soluzio bakarra.

(8) sistema matrize eran idatziz:

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (10)$$

(9)-tik $\left(f_{ij}\right)$ matrizea erregularra dela ondoriozta dezakegu; beraz, (10) ekuazioaren atal bakoitza $\left(f_{ij}\right)^{-1}$ -ez biderkatuz:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix} = \left(f_{ij}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det\left(f_{ij}\right)} \begin{pmatrix} F_{11} & F_{21} & F_{n1} \\ F_{12} & F_{22} & F_{n2} \\ ..... & & \\ F_{1n} & F_{2n} & F_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Non F_{ij} f_{ij} elementuaren adjuntua baita. (11)-n eragiketak eginez, (8) sistemaren soluzioa lortzen da.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1F_{11} + b_2F_{21} + ... + b_nF_{n1}}{\det(f_{ij})} \\ x_2 &= \frac{b_1F_{12} + b_2F_{22} + ... + b_nF_{n2}}{\det(f_{ij})} \\ &..... \\ x_n &= \frac{b_1F_{1n} + b_2F_{2n} + ... + b_nF_{nn}}{\det(f_{ij})} \end{aligned} \qquad (12)$$

Ondorioz,

$$\begin{vmatrix} b_1 & f_{12} & f_{1n} \\ b_2 & f_{22} & f_{2n} \\ ..... & & \\ b_n & f_{n2} & f_{nn} \end{vmatrix} = b_1F_{11} + b_2F_{21} + ... + b_nF_{n1}$$

Beraz, berdintza hori erabiliz, (12) ekuazioa berridatz dezakegu:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & f_{12} & f_{1n} \\ b_2 & f_{22} & f_{2n} \\ ..... & & \\ b_n & f_{n2} & f_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{2n} \\ ..... & & \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{nn} \end{vmatrix}} \quad ; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} f_{11} & b_1 & f_{1n} \\ f_{21} & b_2 & f_{2n} \\ ..... & & \\ f_{n1} & b_n & f_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{2n} \\ ..... & & \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{nn} \end{vmatrix}} \quad ;...; \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & b_1 \\ f_{21} & f_{22} & b_2 \\ ..... & & \\ f_{n1} & f_{n2} & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{2n} \\ ..... & & \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{nn} \end{vmatrix}}$$

Adibidea:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

Koefizienteek sorturiko determinantea zeroren desberdina da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = 1 \quad ; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = 2 \quad ; \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{-6} = 3 \quad ;$$

4.4. Ekuazio-sistema linealen baliokidetasunak

Bi ekuazio-sistema lineal baliokideak direla esango dugu, soluzio berdinak badituzte.

Hiru metodo ikusiko ditugu, sistema batekiko baliokideak diren beste sistema batzuk aurkitzeko:

Lehenengo metodoa: Ekuazio-sistema lineal batean ekuazio bati beste ekuazioen konbinazio lineal bat ebazten edo gehitzen badiogu, lortzen dugun sistema lehenengoaren baliokidea izango da.

Adibidez, bi ekuazio-sistema linealok:

$$\begin{aligned} &f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + \ldots + f_{1p}x_p = b_1 \\ &f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + \ldots + f_{2p}x_p = b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_{n1}x_1 + f_{n2}x_2 + \ldots + f_{np}x_p = b_n \end{aligned} \qquad (13)$$

$$
\begin{aligned}
&f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + \ldots + f_{1p}x_p = b_1 \\
&f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + \ldots + f_{2p}x_p = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&(a_1 f_{11} + \ldots + a_{n-1} f_{(n-1)1} + f_{n1})x_1 + \ldots + (a_1 f_{1p} + \ldots + a_{n-1} f_{(n-1)p} + f_{np})x_p = a_1 b_1 + \ldots + a_{n-1} b_{n-1} + b_n
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

Bereziki, ekuazio-sistema batean ekuazio bati gai biak eskalar ez-nulu batez biderkatuz sistema baliokide bat lortuko dugu.

Bigarren metodoa: Ekuazio-sistema lineal batean, lehenengo ataleko ezezagun bat edo gehiago bigarren atalera pasatzen badira, sistema baliokide bat lortzen da.

$$
\begin{aligned}
&f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + \ldots + f_{1p-1}x_{p-1} = b_1 - f_{1p}x_p \\
&f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + \ldots + f_{2p-1}x_{p-1} = b_2 - f_{2p}x_p \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&f_{n1}x_1 + f_{n2}x_2 + \ldots + f_{np-1}x_{p-1} = b_n - f_{np}x_p
\end{aligned}
$$

Hirugarren metodoa: *Gauss-en metodoaren aplikazioa*. Izan bedi sistema hau:

$$
\begin{aligned}
&f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + \ldots + f_{1p}x_p = b_1 \\
&f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + \ldots + f_{2p}x_p = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&f_{n1}x_1 + f_{n2}x_2 + \ldots + f_{np}x_p = b_n
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

Jo dezagun $f_{11} \neq 0$ dela. Orduan, bigarren ekuazioari lehenengo ekuazioa bider $(-f_{21})/f_{11}$ gehituko diogu; hirugarren ekuazioari lehenengoa bider $(-f_{31})/f_{11}$; …; eta n-garren ekuazioari lehenengoa bider $(-f_{n1})/f_{11}$ gehituko diogu. Eragiketa horiekin sistema baliokide bat lortzen dugu, baina ekuazio berri horretan x_1 ezezaguna lehenengo ekuazioan bakarrik azalduko da. Beraz, lortzen den sistemak forma hau izango du:

$$\begin{aligned} f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + \ldots + f_{1p}x_p &= b_1 \\ f_{22}x_2 + \ldots + f_{2p}x_p &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ f_{n2}x_2 + \ldots + f_{np}x_p &= b_n \end{aligned} \qquad (16)$$

Sistema berri horri prozesu berdina aplikatzen badiogu, bigarren, hirugarren,… , eta (n-1)-garren ekuazio erabiliz, sistema hau lortuko dugu:

1. kasua:

$$\begin{aligned} f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + \ldots + f_{1n}x_n &= b_1 \\ f_{22}x_2 + \ldots + f_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ f_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \qquad (17)$$

- $f_{11} \neq 0, f_{22} \neq 0, ..., f_{nn} \neq 0$ bada. Kasu horretan, azkeneko ekuazioa erabiliz x_n kalkulatuko dugu. Ondoren, x_n-ren balioa (n-1) ekuazioan ordezkatuz x_{n-1}-en balioa kalkulatuko dugu, eta era berean beste ezezagunen balioak x_1-eraino. Sistema, kasu honetan, **BATERAGARRI DETERMINATUA** da.

Adibidea: Ebatzi sistema hau Gauss-en metodoa erabiliz:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

lehenengo ekuazioa bider $(-f_{21})/f_{11}$, hau da $-1/1$, eginda bigarren ekuazioari gehituko diogu, eta bider $(-f_{31})/f_{11}$, hots $-2/1$, eginda hirugarren ekuazioari.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ -2x_3 &= -6 \\ -3x_2 - x_3 &= -9 \end{aligned}$$

Ez dugu Gauss-en metodoa berriro aplikatu behar; bigarren ekuaziotik x_3 aska dezakegu. Orduan, $x_3 = 3$. Orain, hirugarren ekuazioan ordezkatuz, $-3x_2 - 3 = -9$, $x_2 = 2$. Azkenekoz, x_2 eta x_3 balioak lehenengo ekuazioan ordezkatuz $x_1 = 1$ lortzen dugu.

Beraz, sistema bateragarri determinatua da.

- $f_{11}, f_{22}, ..., f_{nn}$ koefizienteren bat nulua bada, koefiziente nulua duen ekuaziora heltzean bi gauza gerta daitezke, **identitate** bat lortzea edo **kontraesan** bat lortzea. Identitatearen kasuan, sistema bateragarri indeterminatua da, zero egiten den koefizientearen ezezagunak edozein balio har dezake eta. Kontraesanaren kasuan, sistema bateraezina da.

Adibidea: Ebatzi sistema hau Gauss-en metodoa erabiliz:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 2 \\ -x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 4 \\ x_1 + 7x_2 - 7x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Lehenengo ekuazioa bider $1/2$ eginez, bigarren ekuazioari gehituko diogu; eta bider $-1/2$ eginez, hirugarren ekuazioari gehituko diogu.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 2 \\ -6x_2 - \frac{11}{2}x_3 &= 5 \\ -6x_2 - \frac{11}{2}x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Bigarren ekuazioa bider -1 eginez, hirugarren ekuazioari gehituko diogu.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 2 \\ -6x_2 - \frac{11}{2}x_3 &= 5 \\ 0 &= -1 \end{aligned}$$

$0 = -1$ kontraesan bat dugu; beraz, *sistema bateraezina* da.

2. kasua: Gauss-en metodoa (15) sistemari aplikatzean ekuazioak sobran egon daitezke. Orduan, (17) motako azpisistema bat lortuko dugu, eta lehenengo kasua aplikatuko dugu. Baina, kasu horietan, azpisistemaren soluzioak sobran dauden beste ekuazioek betetzen dituztela frogatu behar da.

3. kasua: Gauss-en metodoa aplikatzean ekuazioak falta badira, (17) motako azpisistema bat lortuko dugu, baina azkeneko ekuazioak ezezagun bat baino gehiago izango ditu. Aldagai bat besteen menpe askatuko dugu, eta 1. kasuko metodoa aplikatu. Kasu horretan, sistema bateragarri indeterminatua edo bateraezina izango da.

Adibidea: Ebatzi sistema hau Gauss-en metodoa erabiliz:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 11x_4 &= -7 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Lehenengo ekuazioa, -2z biderkaturik, bigarren ekuazioari gehituko diogu:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 &= 6 \\ 5x_2 - 3x_3 - 19x_4 &= -19 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Bigarren eta hirugarren ekuazioak trukatuko ditugu:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 &= 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 5x_2 - 3x_3 - 19x_4 &= -19 \end{aligned}$$

Bigarren ekuazioa, -5ez biderkaturik, hirugarren ekuazioari gehituko diogu:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 &= 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ -8x_3 - 24x_4 &= -24 \end{aligned}$$

Azkeneko ekuazioak bi ezezagun ditu: x_3 eta x_4. Argi dago ezezagun horietako batek λ edozein balio har dezakeela; beraz, $x_4 = \lambda$ eginez, orduan $x_3 = 3 - 3\lambda$. Bigarren ekuazioan, balio horiek ordezkatuz, $x_2 = -2 + 2\lambda$, eta lehenengo ekuazioan ordezkatuz, $x_3 = 1 + \lambda$.

Beraz, emandako sistemak infinitu soluzio izango ditu, eta bektorialki adieraziko dugu:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Sistema hori bateragarri indeterminatua da, haren maila bat izanik. Haren soluzioen multzoa zera izango da: soluzio partikular bat $(1,-2,3,0)$ gehi bat dimentsioa duen azpibektore-espazio bateko $\left(\{\lambda \cdot (1,2,-3,1), \forall \lambda \in \mathbb{R}\}\right)$ bektore arbitrario bat.

4.5. Ekuazio linealezko sistema homogeneoak

Ekuazio linealezko sistema homogeneoak ekuazio-sistema linealen kasu partikular bat dira.

Izan bedi ekuazio linealezko sistema homogeneo bateragarri bat:

$$\begin{aligned} f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + f_{13}x_3 &= 0 \\ f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + f_{23}x_3 &= 0 \\ f_{31}x_1 + f_{32}x_2 + f_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(bateragarria, nabariak ez diren soluzioak ditu; beraz, koefizienteek sortutako determinanteak nulua izan behar du). Lehenengo bi ekuazioak linealki askeak direla joz, soluzioak hauek dira:

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} f_{12} & f_{13} \\ f_{22} & f_{23} \end{vmatrix}} = \frac{x_2}{\begin{vmatrix} f_{13} & f_{11} \\ f_{23} & f_{21} \end{vmatrix}} = \frac{x_3}{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}} = \lambda \qquad \forall \lambda \in K$$

Eta zenbakitzailea zero izango da, izendatzailea zero den kasuetan.

Adibidea: Kalkulatu a-ren zein baliotarako bateragarria den ekuazio-sistema lineal homogeneo hau:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 \quad + ax_3 &= 0 \end{aligned}$$

Koefizienteek sortutako determinantea $2(2-a)$ da.

$a \neq 2$ bada, sistemaren soluzioa soluzio nabaria izango da: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

$a = 2$ bada, lehenengo bi ekuazioak linealki askeak dira, beraz:

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x_2}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x_3}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \lambda \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{0} = \frac{x_3}{-2} = \lambda$$

Beraz, sistemaren soluzioa $a = 2$ denean hau da:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

4.6. Ekuazio-sistema linealak ebazteko metodo orokorra

Izan bedi n ekuazio eta p ezezagun dituen ekuazio-sistema bat:

$$\begin{aligned} &f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + \ldots + f_{1p}x_p = b_1 \\ &f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + \ldots + f_{2p}x_p = b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_{n1}x_1 + f_{n2}x_2 + \ldots + f_{np}x_p = b_n \end{aligned} \qquad (18)$$

Badakigu sistema bateragarria dela koefizienteen matrizearen heina eta matrize hedatuaren heina berdinak direnean, hau da:

$$heina\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1p} \\ f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{np} \end{pmatrix} = heina\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1p} & b_1 \\ f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2p} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{np} & b_n \end{pmatrix}$$

Jo dezagun:

1) Bi matrizeen heina r dela

2) Koefizienteen matrizean, lehenengo r errenkadak linealki askeak direla

Beraz, matrize hedatuaren lehenengo r errenkadak linealki askeak dira, eta beste n-r errenkadak lehenengo r errenkaden menpekoak dira. Hala, sistema baliokide hau lortzen dugu:

$$
\begin{aligned}
&f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + f_{1p}x_p = b_1\\
&f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + f_{2p}x_p = b_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f_{r1}x_1 + f_{r2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + f_{rp}x_p = b_r\\
&f_{(r+1)1}x_1 + f_{(r+1)2}x_2 + \ldots + f_{(r+1)p}x_p = b_{(r+1)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f_{n1}x_1 + f_{n2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + f_{np}x_p = b_n
\end{aligned}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{aligned}
&f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + f_{1p}x_p = b_1\\
&f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + f_{2p}x_p = b_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f_{r1}x_1 + f_{r2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + f_{rp}x_p = b_r
\end{aligned}
$$

3) Gainera, koefizienteekin sortutako r mailako determinante hau ez-nulua bada:

$$
\begin{vmatrix}
f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1r}\\
f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2r}\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\
f_{r1} & f_{r2} & \ldots & f_{rr}
\end{vmatrix} \neq 0 \qquad (19)
$$

Beraz, kontuan har ditzagun sistema baliokideok:

$$
\begin{aligned}
&f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + \ldots\ldots + f_{1r}x_r + f_{1(r+1)}x_{(r+1)} + \ldots\ldots + f_{1p}x_p = b_1\\
&f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + \ldots\ldots + f_{2r}x_r + f_{2(r+1)}x_{(r+1)} + \ldots\ldots + f_{2p}x_p = b_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f_{r1}x_1 + f_{r2}x_2 + \ldots\ldots + f_{rr}x_r + f_{r(r+1)}x_{(r+1)} + \ldots\ldots + f_{rp}x_p = b_r
\end{aligned}
$$

$$
\Updownarrow
$$

$$
\begin{aligned}
&f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + \ldots\ldots + f_{1r}x_r = b_1 - f_{1(r+1)}x_{(r+1)} - \ldots\ldots - f_{1p}x_p\\
&f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + \ldots\ldots + f_{2r}x_r = b_2 - f_{2(r+1)}x_{(r+1)} - \ldots\ldots - f_{2p}x_p\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f_{r1}x_1 + f_{r2}x_2 + \ldots\ldots + f_{rr}x_r = b_r - f_{r(r+1)}x_{(r+1)} - \ldots\ldots - f_{rp}x_p
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

Sistema baliokide hori $x_{r+1},\ldots x_p$ aldagaiak bigarren atalera pasatuz lortu dugu. $x_{r+1},\ldots x_p$ aldagaien koefizienteek ez dute parte hartzen kontuan hartu dugun r mailako (19) determinante ez-nuluan.

(20) sistema $x_{r+1},...x_p$ aldagaiei balio arbitrarioak emanez askatzen dugu, hau da: $x_{r+1}=\lambda_1, x_{r+2}=\lambda_2,..., x_p=\lambda_{p-r}$; eta beste aldagaiak honako sistema honetan Cramer-en edo Gauss-en metodoak erabiliz ebatziko dira:

$$\begin{aligned}
&f_{11}x_1+f_{12}x_2+.....+f_{1r}x_r=b_1-f_{1(r+1)}\lambda_1-.....-f_{1p}\lambda_{p-r}\\
&f_{21}x_1+f_{22}x_2+.....+f_{2r}x_r=b_2-f_{2(r+1)}\lambda_1-.....-f_{2p}\lambda_{p-r}\\
&.....\\
&f_{r1}x_1+f_{r2}x_2+.....+f_{rr}x_r=b_r-f_{r(r+1)}\lambda_1-.....-f_{rp}\lambda_{p-r}
\end{aligned}$$

$\lambda_1,...,\lambda_{p-r}$ parametroek balio arbitrarioak har ditzaketenez, parametro independenteak direla esango dugu.

<u>Adibidea:</u> Ebatzi sistema:

$$\begin{aligned}
x_1-x_2+\ x_3+4x_4&=6\\
2x_1+3x_2-x_3-11x_4&=-7\\
x_2+\ x_3+\ x_4&=1
\end{aligned}$$

Determinantea:

$$\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&3&-1\\0&1&1\end{vmatrix}=8$$

Beraz, koefizienteen matrizearen heina = matrize hedatuaren heina = 3. Bestalde, 3 < aldagai kopurua = 4; beraz, sistema bateragarri indeterminatu sinplea da.

$x_4=\lambda$ eginez, eta bigarren atalera pasatuz, honako hau dugu:

$$\begin{aligned}
x_1-x_2+\ x_3&=6-4\lambda\\
2x_1+3x_2-x_3&=-7+11\lambda\\
x_2+\ x_3&=1-\lambda\\
x_4&=\lambda\qquad\forall\lambda\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Cramer-en erregela aplikatuz:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6-4\lambda & -1 & 1 \\ -7+11\lambda & 3 & -1 \\ 1-\lambda & 1 & 1 \end{vmatrix}}{8} = 1+\lambda,\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6-4\lambda & 1 \\ 2 & -7+11\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \end{vmatrix}}{8} = -2+2\lambda, x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6-4\lambda \\ 2 & 3 & -7+11\lambda \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}}{8} = 3-3\lambda$$

Sistemaren soluzio orokorra hau da:

$x_1 = 1+\lambda$
$x_2 = -2+2\lambda$
$x_3 = 3-3\lambda$ edo matrize eran adierazita: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\lambda \in \mathbb{R}$
$x_4 = \lambda$
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

4.7. Zenbakizko metodoen aplikazioa

Gauss-Jordan metodoa

Gauss-en metodoaren aldaera bat da. Metodo berri honetan, aldagai bat ezabatzen dugunean, ez dugu hurrengo ekuazioetan bakarrik ezabatzen, baizik eta ekuazio guztietan. Horrela, ezabapen-prozesu horrek matrize diagonal bat sortuko du matrize triangeluar baten ordez. Beraz, ez da beharrezkoa izango atzeranzko ordezkapen-soluzioa lortzeko.

Adibidea: Ebatzi sistema hau Gauss-Jordan metodoa erabiliz:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \\ 3x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

a_{11} elementuaren azpitik dauden elementuak 0 egiten ditugu:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ -3x_2 - 2x_3 &= -12 \\ 3x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

a_{22} elementuaren azpitik eta gainetik dauden elementuak 0 egiten ditugu:

$$\begin{aligned} x_1 \quad & - \tfrac{5}{3} x_3 = 2 \\ -3x_2 & - 2x_3 = -12 \\ & -4x_3 = -12 \end{aligned}$$

Azkenik, a_{33} elementuaren gainetik dauden elementuak 0 egiten ditugu:

$$\begin{aligned} x_1 & = 1 \\ -3x_2 & = -6 \\ -4x_3 & = -12 \end{aligned}$$

Horrenbestez, soluzioak lortzen ditugu: $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3$.

Gauss-Seidel metodoa

Metodo hau eta aurreko metodoak (Gauss eta Gauss-Jordan) oso desberdinak dira (haiek metodo zuzenekoak dira). Hau metodo iteratibo bat da. Alegia, hasierako balio bat hartuz, iterazioen bitartez soluzioaren hurbilketa bat lortzen du. Oso erabilgarria da, sistema handiak ditugunean: metodo zuzenekoetan, biribiltze-erroreak izan baititugu, eta metodo iteratuetan, aldiz, biribiltze-erroreak iterazioen bitartez kontrolatzen ahal baititugu.

Metodoaren deskribapena:

Izan bedi n ekuazio eta n ezezagun dituen sistema hau:

$$\begin{aligned} & f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + \ldots + f_{1p}x_p = b_1 \\ & f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + \ldots + f_{2p}x_p = b_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & f_{n1}x_1 + f_{n2}x_2 + \ldots + f_{np}x_p = b_n \end{aligned}$$

Diagonaleko elementuak zeroren desberdinak badira; lehenengo ekuazioan lehenengo aldagaia aska dezakegu; bigarrenean, bigarrena, eta abar:

$$x_1 = \frac{b_1 - f_{12}x_2 - ... - f_{1p}x_p}{f_{11}}$$
$$x_2 = \frac{b_2 - f_{21}x_1 - ... - f_{2p}x_p}{f_{22}}$$
.....
$$x_n = \frac{b_n - f_{n1}x_1 - ... - f_{n,p-1}x_{p-1}}{f_{nn}}$$

Orain, $x_1, x_2, ..., x_n$ aldagaiei hasierako balio bat emanez, prozesua has dezakegu. Soluzio nabaria hasierako soluziotzat har dezakegu. Lehenengo ekuazioan, zeroak sartuz, $x_1 = \frac{b_1}{f_{11}}$ balioa lortzen dugu. Ondoren, bigarren ekuazioa ebatziko dugu $x_3 = ... = x_n = 0$, eta lortutako soluzioa ordezkatuko. Beraz, $x_2 = \frac{b_2 - f_{21}x_1}{f_{22}}$. Prozesu berdina errepikatzen da, azkeneko aldagaira heldu arte. Gero, lehenengo ekuaziora itzul gaitezke, eta prozesu berdina errepika dezakegu, aldagaiak soluziora konbergitu arte. Konbergentzia metodo hau erabiliz baiezta daiteke:

$$\varepsilon_{a,i} = \left| \frac{x_i^{j-1} - x_i^j}{x_i^j} \right| .100\% < \varepsilon_S$$

Edozein i-rentzat, non j eta j-1 oraingo eta hurrengo iterazioak baitira.

<u>Adibidea:</u> Ebatzi sistema hau, Gauss-Seidel metodoa erabiliz, errorea 0,2 baino txikiagoa izanik:

$$3x_1 - 0,1x_2 - 0,2x_3 = 7,85$$
$$0,1x_1 + 7x_2 - 0,3x_3 = -19,3$$
$$0,3x_1 - 0,2x_2 + 10x_3 = 71,4$$

Oharra: Sistema horren soluzio erreala: $x_1 = 3, \quad x_2 = -2'5, \quad x_3 = 7$ da.

Lehenengo aldagai bakoitza askatuko dugu:

$$x_1 = \frac{7,85 + 0,1x_2 + 0,2x_3}{3}$$
$$x_2 = \frac{-19,3 - 0,1x_1 + 0,3x_3}{7}$$
$$x_3 = \frac{71,4 - 0,3x_1 + 0,2x_2}{10}$$

$x_2 = 0$ eta $x_3 = 0$ direla joz:

$$x_1 = \frac{7,85}{3} = 2.616666667$$

$x_1 = 2.616666667$ balio berri hori eta $x_3 = 0$ ordezkatuz x_2 askatuko dugu bigarren ekuaziotik:

$$x_2 = \frac{-19,3 - 0,1(2.616666667)}{7} = -2.794523810$$

Azkenengoz, x_1 eta x_2 aldagaien balioak hirugarren ekuazioan ordezkatuz:

$$x_3 = \frac{71,4 - 0,3(2.616666667) + 0,2(-2.794523810)}{10} = 7,005609524$$

Beste iterazio bat:

$$x_1 = \frac{7,85 + 0,1(-2.794523810) + 0,2(7,005609524)}{3} = 2.99056$$
$$x_2 = \frac{-19,3 - 0,1(2.99056) + 0,3(7,005609524)}{7} = -2.49962$$
$$x_3 = \frac{71,4 - 0,3(2.99056) + 0,2(-2.49962)}{10} = 7.00029$$

Erroreak:

$$e_1 = \left| \frac{2.99056 - 2.616666667}{2.99056} \right| = 0.125023$$
$$x_2 = \left| \frac{-2.49962 - (-2.794523810)}{-2.49962} \right| = 0.117977$$
$$x_3 = \left| \frac{7.00029 - 7,005609524}{7.00029} \right| = 0.000759785$$

Errore guztiak 0,2 baino txikiagoak dira. Beraz, lortu dugu soluzio hurbildu bat.

4.8. Ekuazio-sistema linealen ariketak

1) Ebatzi ekuazio-sistema hau, a-ren balioen arabera:

$$\begin{aligned} 2y - z &= a \\ 3x - 2z &= 11 \\ y + z &= 6 \\ 2x + y - 4z &= a \end{aligned}$$

2) Ebatzi ekuazio-sistema hau, a-ren balioen arabera:

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \\ x + y + az &= 1 \end{aligned}$$

3) Ebatzi ekuazio-sistema hau, a, b eta c parametroen arabera:

$$\begin{aligned} 2x + ay + bz &= c \\ -2x &= -2 \\ -2x - y - z &= -1 \end{aligned}$$

4) Ebatzi ekuazio-sistema hau, a eta b parametroen arabera:

$$\begin{aligned} 2x + ay + z &= 7 \\ x + ay + z + t &= b \\ x + 2ay + t &= -1 \\ bx + ay &= b \end{aligned}$$

5) Sistema homogeneoa izan dadin, lortu a-ren balioa:

$$\begin{aligned} ax + y - z &= 0 \\ x + 3y + z &= 0 \\ 3x + 10y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

Hau da, soluzio nabari ez diren soluzioak ditu. Eman soluzioak.

6) Sistema ebatzi soluzioa duen kasuetan:

$$\begin{aligned} 2x + y + z + t &= 0 \\ ax - 2y + 3z + 4t &= 0 \\ 3x - y - z + 4t &= 0 \\ -2x + 4y - z - 9t &= 0 \end{aligned}$$

7) Izan bedi sistema hau:

$$\begin{aligned} x - 2y - 3z - t &= 0 \\ 5x - 4y + 7z + 3t &= 0 \\ 2x - y + 5z + 2t &= 0 \end{aligned}$$

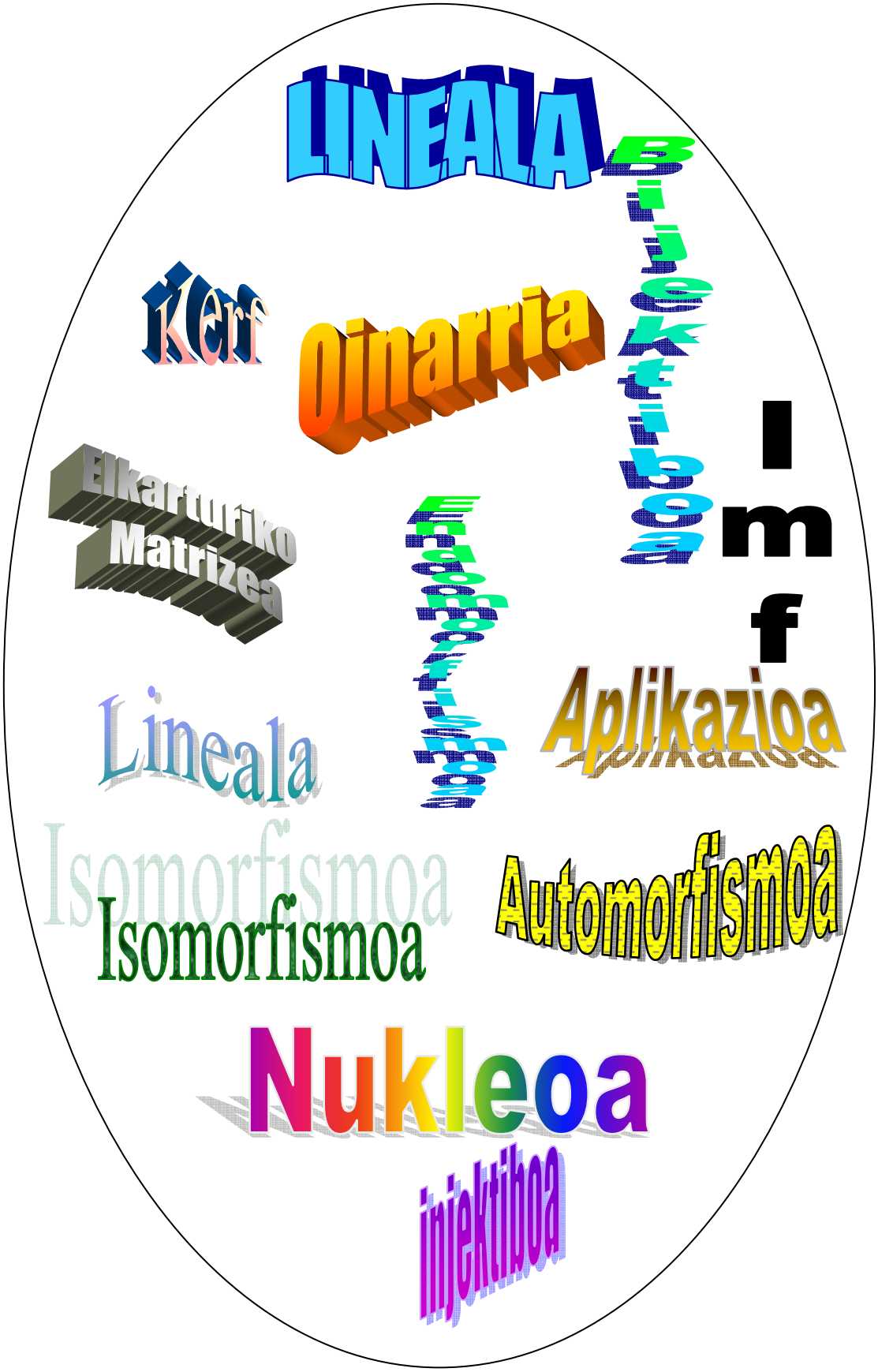
Frogatu sistema hau bateragarri indeterminatu bikoitza dela. Aurkitu soluzioa, eta frogatu lortutako bektoreek $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineal honen nukleoaren oinarri bat osatzen dutela: $f(x, y, z, t) = (x - 2y - 3z - t, 5x - 4y + 7z + 3t, 2x - y + 5z + 2t)$.

8) Ebatzi ekuazio-sistema hau, a-ren balioen arabera:

$$\begin{aligned} x + y + az &= a \\ x + y + 2az &= 2 \\ ax + y + z &= a^2 \end{aligned}$$

9) Ebatzi sistema hau, a eta b parametroen arabera:

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 1 \\ x + 2y + z &= b \\ 2x - 5y + az &= -2 \end{aligned}$$


LINEALA
Bilineala
Ker
Oinarria
Elkarturiko Matrizea
Endomorfismoa
Im f
Lineala
Aplikazioa
Isomorfismoa
Automorfismoa
Nukleoa
injektiboa

5. GAIA. APLIKAZIO LINEALAK

5.1. Aplikazio linealaren definizioa

Izan bitez $\left[(E,+),(K,+,\cdot),\circ\right]$ eta $\left[(F,+),(K,+,\cdot),\circ\right]$ K gorputzaren gainean definituriko bi bektore-espazio.

E-tik F-rako ***f aplikazio bat lineala*** dela esango dugu, baldin eta:

$$f\left(\alpha\circ\vec{x}+\beta\circ\vec{y}\right)=\alpha\circ f\left(\vec{x}\right)+\beta\circ f\left(\vec{y}\right)\quad\forall\vec{x},\vec{y}\in E\quad\forall\alpha,\beta\in K$$

Baldintza hori honako honen baliokidea da:

1. $f\left(\vec{x}+\vec{y}\right)=f\left(\vec{x}\right)+f\left(\vec{y}\right)\quad\forall\vec{x},\vec{y}\in E$
2. $f\left(\alpha\circ\vec{x}\right)=\alpha\circ f\left(\vec{x}\right)\quad\forall\vec{x}\in E\quad\forall\alpha\in K$

5.2. Aplikazio motak

Definizioa: Izan bedi $f:A\to B$ aplikazio bat. f aplikazioa ***injektiboa*** dela esango dugu, baldin:

$$f(x)=f(y)\ \Rightarrow\quad x=y$$

Definizioa: Izan bedi $f:A\to B$ aplikazio bat. f aplikazioa ***suprajektiboa*** dela esango dugu, baldin:

$$\forall y\in B\quad\exists x\in A\ \ non\ \ f(x)=y$$

Definizioa: Izan bedi $f:A\to B$ aplikazio bat. f aplikazioa ***bijektiboa*** dela esango dugu, *injektiboa* eta *suprajektiboa* bada.

$$\forall y\in B\quad\exists!x\in A\ \ non\ \ f(x)=y$$

Aplikazio linealen motak

-Aplikazio lineal bat bektore-espazioen arteko ***homomorfismoa*** da.

- $E \neq F$ eta f *injektiboa* bada, MONOMORFISMOA da.
- $E \neq F$ eta f suprajektiboa bada, EPIMORFISMOA da.
- $E \neq F$ eta f *bijektiboa* bada, ISOMORFISMOA da.
- $E = F$ eta f *injektiboa* edo *suprajektiboa* bada, ENDOMORFISMOA da.
- $E = F$ eta f *bijektiboa* bada, AUTOMORFISMOA da.

5.3. Aplikazio lineal baten irudia

Izan bedi f E-ren eta F-ren arteko aplikazio lineala. Orduan, f ***aplikazio lineal baten irudia*** E-ko bektoreen irudiek osatzen duten F-ko azpimultzo bat da, eta ***Imf*** gisa izendatzen da.

$$\text{Im} f = \left\{ f\left(\vec{x}\right) / x \in E \right\}$$

Imf , F-ren azpimultzo izateaz gainera, F-ren azpibektore-espazioa da. *Imf*-ren dimentsioa E-ko oinarri baten irudiekin sortzen den sistemaren heina da.

Izan bitez B_E E-ren oinarri bat, non $B_E = \left\{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_p \right\}$, eta $\vec{x} \in E$ E-ko edozein elementu, B_E oinarriarekiko koordenatuak $\left(x_1, x_2, ...x_p \right)_{B_E}$ izanik.

Orduan,
$$\text{Im} f = \left\{ f\left(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + ... + x_p\vec{u}_p\right) = x_1 f\left(\vec{u}_1\right) + x_2 f\left(\vec{u}_2\right) + ... + x_p f\left(\vec{u}_p\right) \right\} =$$
$$= \left\langle f\left(\vec{u}_1\right), f\left(\vec{u}_2\right), ..., f\left(\vec{u}_p\right) \right\rangle$$

Beraz, aplikazioa zehaztua egongo da, $f\left(\vec{u}_1\right), f\left(\vec{u}_2\right), ..., f\left(\vec{u}_p\right)$ ezagutzen direnean.

Eta:

$\forall \vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + ... + x_p\vec{u}_p$ haren irudia: $y = f\left(x\right) = x_1 f\left(\vec{u}_1\right) + x_2 f\left(\vec{u}_2\right) + ... + x_p f\left(\vec{u}_p\right)$

5.4. Aplikazio lineal baten matrizea

Izan bitez E eta F *p* eta *n* dimentsioa duten bi bektore-espazio eta U eta V E eta F-ko bi oinarri, urrunez hurren. U oinarriko bektoreen irudiak kalkulatzen baditugu eta irudi hauek V oinarriarekiko idatzi. Ondoren irudi hauen V oinarriarekiko koordenatuekin matrize bat osatzen badugu, ***U eta V oinarriekiko f aplikazio linealaren matrizea*** lortuko dugu.

Hau da, izan bitez $U=\left\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_p\right\}$ E-ko oinarri bat eta $V=\left\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_p\right\}$ F-ko oinarri bat. Orduan, U eta V oinarriekiko f aplikazio linealaren matrizea honako hau da:

$\left(f\left(\vec{u}_1\right),f\left(\vec{u}_2\right),...,f\left(\vec{u}_p\right)\right)_{U,V}$ non

$$f\left(\vec{u}_1\right)=\begin{pmatrix}f_{11}\\f_{21}\\.....\\f_{n1}\end{pmatrix}\ ,\ f\left(\vec{u}_1\right)=\begin{pmatrix}f_{12}\\f_{22}\\.....\\f_{n2}\end{pmatrix}\ ,\ \ldots\ldots\ldots,\ f\left(\vec{u}_1\right)=\begin{pmatrix}f_{1p}\\f_{2p}\\.....\\f_{np}\end{pmatrix}$$

Eta matrizea: $\begin{pmatrix}f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1p}\\f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2p}\\.... & .... & .... & ....\\f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{np}\end{pmatrix}$

Oharra: Laburturiko notazioan U eta V bektore-espazioen *f* aplikazio linealaren matrizea $\left(f\right)_{U,V}$ idatziko dugu.

Matrize baten heinaren definiziotik, *"Aplikazio lineal baten irudi multzoaren bektore-espazioaren dimentsioa eta f aplikazioaren matrizearen heina berdinak dira"*. Balio hori ez da erabilitako oinarrien menpe egongo.

Berridatziz:

$y = f(x) = x_1 f(\vec{u}_1) + x_2 f(\vec{u}_2) + ... + x_p f(\vec{u}_p)$ matrize eran:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ..... \\ y_n \end{pmatrix}_V = x_1 \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ ..... \\ f_{n1} \end{pmatrix}_V + x_2 \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \\ ..... \\ f_{n2} \end{pmatrix}_V + ... + x_p \begin{pmatrix} f_{1p} \\ f_{2p} \\ ..... \\ f_{np} \end{pmatrix}_V = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & ... & f_{1p} \\ f_{21} & f_{22} & ... & f_{2p} \\ .... & .... & .... & .... \\ f_{n1} & f_{n2} & ... & f_{np} \end{pmatrix}_{U,V} \begin{pmatrix} x_p \\ x_p \\ .... \\ x_p \end{pmatrix}_U$$

5.5. Aplikazio linealen arteko batura

Izan bitez *f* eta *g* E eta F bektore-espazioen arteko bi aplikazio lineal. Definizioz ***bi aplikazio linealen arteko batura*** $(f+g)$ E-tik F-rako beste aplikazio lineal bat da.

$$(f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \qquad \forall \vec{x} \in E$$

$$(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{\alpha}\,\vec{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\beta}\,\vec{\boldsymbol{y}}) = f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) + g(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y}) + \alpha g(\vec{x}) + \beta g(\vec{y}) =$$
$$= \alpha\big(f(\vec{x}) + g(\vec{x})\big) + \beta\big(f(\vec{y}) + g(\vec{y})\big) = \boldsymbol{\alpha}\big((\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\vec{\boldsymbol{x}})\big) + \boldsymbol{\beta}\big((\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\vec{\boldsymbol{y}})\big)$$

Izan bitez U eta V, hurrenez hurren, E-ko eta F-ko oinarriak eta $(f)_{U,V}$ eta $(g)_{U,V}$ U eta V oinarriekiko f eta *g* aplikazioaren matrizeak:

$$(f)_{U,V} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & ... & f_{1p} \\ f_{21} & f_{22} & ... & f_{2p} \\ .... & .... & .... & .... \\ f_{n1} & f_{n2} & ... & f_{np} \end{pmatrix} \qquad (g)_{U,V} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & ... & g_{1p} \\ g_{21} & g_{22} & ... & g_{2p} \\ .... & .... & .... & .... \\ g_{n1} & g_{n2} & ... & g_{np} \end{pmatrix}$$

Orduan, U eta V oinarriekiko $(f+g)$ aplikazioaren matrizea honako hau da:

$$(f+g)_{U,V} = \begin{pmatrix} f_{11}+g_{11} & f_{12}+g_{12} & ... & f_{1p}+g_{1p} \\ f_{21}+g_{21} & f_{22}+g_{22} & ... & f_{2p}+g_{2p} \\ .... & .... & ... & .... \\ f_{n1}+g_{n1} & f_{n2}+g_{n2} & ... & f_{np}+g_{np} \end{pmatrix}$$

5.6. Aplikazio lineal baten eta eskalar baten arteko biderkadura

Izan bitez f E eta F bektore-espazioen arteko aplikazio lineala eta $\alpha \in K$ eskalar bat. Definizioz, ***aplikazio lineal baten eta eskalar baten arteko biderkadura*** (αf) E-tik F-rako beste aplikazio lineal bat da.

$$(\alpha f)(\vec{x}) = \alpha f(\vec{x}) \qquad \forall \vec{x} \in E$$

$$(\alpha \boldsymbol{f})(\boldsymbol{a}\,\vec{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}\,\vec{\boldsymbol{y}}) = \alpha f(a\vec{x} + b\vec{y}) = \alpha\big(a f(\vec{x}) + b f(\vec{y})\big) =$$
$$= a\alpha f(\vec{x}) + b\alpha f(\vec{y}) = \boldsymbol{a}(\alpha \boldsymbol{f})(\vec{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{b}(\alpha \boldsymbol{f})(\vec{\boldsymbol{y}})$$

Izan bitez U eta V, hurrenez hurren, E-ko eta F-ko oinarriak eta $(f)_{U,V}$ U eta V oinarriekiko f aplikazioaren matrizea:

$$(f)_{U,V} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1p} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{np} \end{pmatrix}$$

Orduan, U eta V oinarriekiko (αf) aplikazioaren matrizea honako hau da:

$$(\alpha f)_{U,V} = \begin{pmatrix} \alpha f_{11} & \alpha f_{12} & \dots & \alpha f_{1p} \\ \alpha f_{21} & \alpha f_{22} & \dots & \alpha f_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha f_{n1} & \alpha f_{n2} & \dots & \alpha f_{np} \end{pmatrix}$$

5.7. Aplikazio linealen arteko biderkadura (konposizioa)

Izan bitez E, F eta H K gorputzaren gainean definituriko hiru bektore-espazio, *p*, *n* eta *q* dimentsiodunak, hurrenez hurren. Definizioz, ***bi aplikazio linealen arteko biderkadura edo konposizioa*** $(g \cdot f)$ E-tik H-rako beste aplikazio lineal bat da.

$$(g \cdot f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x})) \qquad \forall \vec{x} \in E$$

$$(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{f})(\boldsymbol{\alpha}\,\vec{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{\beta}\,\vec{\boldsymbol{y}})=g\left(f\left(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\right)\right)=g\left(\alpha f\left(\vec{x}\right)+\beta f\left(\vec{y}\right)\right)=$$
$$=\alpha g\left(f\left(\vec{x}\right)\right)+\beta g\left(f\left(\vec{y}\right)\right)=\boldsymbol{\alpha}\left((\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{f})(\vec{\boldsymbol{x}})\right)+\boldsymbol{\beta}\left((\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{f})(\vec{\boldsymbol{y}})\right)$$

Izan bitez U, V eta T E-ko, F-ko eta H-ko oinarriak eta $(f)_{U,V}$ U eta V oinarriekiko f aplikazioaren matrizea eta $(g)_{V,T}$ V eta T oinarriekiko g aplikazioaren matrizea:

$$(f)_{U,V}=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1p} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{np} \end{pmatrix} \qquad (g)_{V,T}=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{q1} & g_{q2} & \cdots & g_{qn} \end{pmatrix}$$

Orduan, U eta V oinarriekiko $(g\cdot f)$ aplikazioaren matrizea honako hau da:

$$(g\cdot f)_{U,T}=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{q1} & g_{q2} & \cdots & g_{qn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1p} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{np} \end{pmatrix}$$

5.8. Aplikazio lineal baten nukleoa

Izan bitez E eta F K gorputzaren gainean definituriko bi bektore-espazio, *p* eta *n* dimentsiodunak, eta f E-ren eta F-ren arteko aplikazio lineal bat. Orduan, ***f aplikazio lineal baten nukleoa*** $\vec{0}$ irudia duten E-ko bektoreen azpimultzoa da. ***N(f)*** edo ***Ker(f)*** gisa izendatzen da.

1. propietatea: *Ker(f)* E-ren azpibektore-espazioa da

Frogapena: $\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{\alpha}\,\vec{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{\beta}\,\vec{\boldsymbol{y}}\right)=\alpha f\left(\vec{x}\right)+\beta f\left(\vec{y}\right)=\alpha\,\vec{0}+\beta\vec{0}=\vec{\boldsymbol{0}}$

2. propietatea: *dim Ker(f) + dim Im(f) = dim E = p*

Frogapena:

Izan bedi $N=\{\vec{n}_1,\vec{n}_2,...,\vec{n}_i\}$ nukleoaren oinarri bat. Orduan, N-ko bektoreak dituen E-ko oinarri bat aurki dezakegu: $\{\vec{n}_1,\vec{n}_2,...,\vec{n}_i,\vec{n}_{i+1},...,\vec{n}_p\}$.

Beraz, $\text{Im } f=\langle f(\vec{n}_1),f(\vec{n}_2),...,f(\vec{n}_i),f(\vec{n}_{i+1}),...,f(\vec{n}_p)\rangle=\langle f(\vec{n}_{i+1}),...,f(\vec{n}_p)\rangle$,

$f(\vec{n}_1)=f(\vec{n}_2)=...=f(\vec{n}_i)=\vec{0}$ betetzen da eta.

Orduan:

a) -$\{f(\vec{n}_{i+1}),...,f(\vec{n}_p)\}$ sistema askea bada, orduan:

dim Im(f) = dim E - dim Ker(f)

b) -$\{f(\vec{n}_{i+1}),...,f(\vec{n}_p)\}$ sistema lotua bada, orduan:

$\alpha_{i+1}f(\vec{n}_{i+1})+...+\alpha_p f(\vec{n}_p)=\vec{0}\quad \exists\alpha_j\neq 0\ \ j=i+1,...,p$ eta $f(\alpha_{i+1}n_{i+1}+...+\alpha_p n_p)=\vec{0}$

Beraz, $\alpha_{i+1}\vec{n}_{i+1}+...+\alpha_p\vec{n}_p\in Ker(f)$, eta orduan $\alpha_{i+1}=...=\alpha_p=0$, nukleoko bektoreak $\vec{n}_1,\vec{n}_2,...,\vec{n}_p$ bektoreen konbinazio lineala direlako. Beraz, $f(\vec{n}_{i+1}),...,f(\vec{n}_p)$ askeak dira, eta *dim Ker(f) + dim Im(f) = dim E = p*

5.9. Aplikazio linealen ariketak

1) Izan bedi $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(-x_2+x_3,2x_1-2x_3,-x_1+x_2)$$

a. Aplikazio lineal bat dela frogatu.

b. $\mathbb{R}^3$-ko oinarri kanonikoekiko *f*-ren matrizea lortu.

c. Aplikazioaren *Kerf* eta *Imf* lortu, oinarri bat eta dimentsioa emanez.

d. *f* aplikazioaren matrizea lortu oinarri kanoniko eta B oinarriarekiko, $(f)_{B_k,B}$, jakinik $B=\{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$.

2) Izan bedi $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio lineala:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2,x_1-x_2)$$

a. Oinarri kanonikoekiko *f*-ren matrizea lortu.

b. $\vec{x}(3,7,2)$ bektorearen irudia kalkulatu.

c. Aplikazioaren *Kerf* eta *Imf* lortu, oinarri bat eta dimentsioa emanez.

d. *f* aplikazioaren matrizea U eta V oinarriekiko, $(f)_{U,V}$, jakinik

$U=\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ eta $V=\{(0,1),(1,1)\}$

3) Izan bitez $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ endomorfismoa eta $\mathbb{R}^3$-ko oinarri batekiko aplikazioaren matrize hau: $\begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ k & 1 & k \end{pmatrix}$. Endomorfismoa sailkatu *k* parametroaren arabera.

4) Izan bitez V eta W bi bektore-espazio, non dimV=3 eta dimW=4. Izan bitez $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ eta $B'=\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3,\vec{w}_4\}$ V eta W espazioetako oinarriak. f aplikazio lineal honela definitzen da:

$f(\vec{v}_1)=2\vec{w}_1-\vec{w}_2+\vec{w}_3+\vec{w}_4$, $f(\vec{v}_2)=\vec{w}_2-2\vec{w}_3+\vec{w}_4$, $f(\vec{v}_3)=4\vec{w}_1-\vec{w}_2+3\vec{w}_4$

Homomorfismoaren ekuazioak lortu. Aplikazioa sailkatu, eta *Kerf* eta *Imf* lortu, oinarriak eta dimentsioa.

5) $P_2(x)$ eta $P_1(x)$ bektore-espazioen artean $f\left(a_1x^2+a_2x+a_3\right)=2a_1x+a_2$ aplikazioa definitzen da. Orduan:

a. Aplikazio lineal bat dela frogatu.

b. $P_2(x)$ eta $P_1(x)$ oinarri kanonikoekiko *f*-ren matrizea lortu.

c. $\vec{x}=x^2-7x+9$ bektorearen irudia kalkulatu.

d. *f* aplikazioaren matrizea lortu oinarri $U=\left\{x^2-x+1,x+3,x-7\right\}$ eta $U'=\{1+x,2-3x\}$ oinarriekiko.

e. $\vec{x}=x^2-7x+9$ bektorearen irudia kalkulatu, e) ataleko matrizea erabiliz.

f. Aplikazioa sailkatu.

6) Izan bitez aplikazio lineal hauek:

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left(x_1+x_2,x_3+x_4\right)$, $g(x_1,x_2)=\left(2x_1,2x_2,x_1+x_2\right)$, $h(x_1,x_2,x_3)=\left(-x_1,0,x_3\right)$

a. Aplikazioaren oinarri kanonikoekiko matrizea lortu.

b. Aplikazioaren *Kerf* eta *Imf* lortu, oinarri bat eta dimentsioa.

c. $\vec{x}\left(1,1,2\right)_B$ bektorearen irudia kalkulatu, jakinik $B=\left\{\left(2,1,1\right),\left(0,1,1\right),\left(0,0,1\right)\right\}$.

d. Aplikazioa sailkatu.

Polinomio karakteristikoa
Jordan-en forma kanonikoa
Anizkoiztasun geometrikoa
Balio propioak
Antzekotasunezko diagonalizazioa
ENDOMORFISMOEN DIAGONALIZAZIOA
ENDOMORFISMOEN DIAGONALIZAZIOA
Azpiespazio propioa
Aldaketako matrizea
Matrize diagonala
BEKTORE PROPIOAK
Matrize ortogonala

6. ENDOMORFISMO BATEN DIAGONALIZAZIOA

6.1. Balio eta bektore propioak

Izan bedi E K gorputzaren gaineko bektore-espazioa, eta izan bedi "f" E-n definituriko f: E $\rightarrow$ E aplikazio lineala.

Definizioa: $\vec{x} \in E$ bektore ez-nulu bat f-ren **autobektore** edo **bektore propio** bat da, baldin $\lambda \in K$ eskalar bat existitzen bada non

$$f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$$

Hau da, $\vec{x}$ bektorearen irudia, λ aldiz $\vec{x}$ bektorea izango da.

λ eskalarrari "f-ren balio propio" deituko diogu.

λ bada f-ren autobalioa (edo balio propioa), $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ betetzen duten $\vec{x} \in E$ bektoreak λ-ri elkartutako f-ren "autobektore" izendatuko ditugu. Autobektore horiek E espazioaren azpiespazio bat osatuko dute, hau da, E_λ azpiespazioa:

$$E_\lambda = \{\vec{x} \in E / f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}\}, \quad \text{hau da } E_\lambda = N(f - \lambda i)$$

E_λ-ri λ autobalioari elkartuta f endomorfismoaren azpiespazio propio deritzo.

R^2 *eta* R^3 espazioetan f endomorfismo batek $\vec{x}$ bektore propio bat norabide bera duen beste bektore bat bihurtzen du, $\lambda \neq 0$ betetzen bada, eta haren nulu, $\vec{0}$, baldin $\lambda = 0$.

f-ren nukleoko bektore ez-nulu guztiak bektore propioak dira, haien balio propioa $\lambda = 0$ izanik.

Adibidea: Izan bedi E $\varphi(x)$ funtzio erreal eta deribagarriek sortzen duten bektore-espazioa.

Izan bedi $f: E \to E$ aplikazioa "funtzioaren deribatua".

$$f\left[\varphi(x)\right] = \frac{d}{dx}\varphi(x)$$

Aplikazio lineal bat da; beraz, endomorfismoa.

e^x funtzioa E espazioko bektore bat da, eta $\lambda = 1$ balio propioa duen bektore propioa da. Ikus dezagun:

$$f(\vec{x}) = \lambda\,\vec{x} \Rightarrow\ f(e^x) = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

e^{2x} bektorea (funtzioa) bektore propioa da, eta kasu horretan dagokion balio propioa $\lambda = 2$ da, non:

$$f(\vec{x}) = \lambda\,\vec{x}\ \Rightarrow f(e^{2x}) = \frac{d}{dx}(e^{2x}) = 2e^{2x}$$

Bestalde, sen x bektorea (funtzioa) ez da bektore propio bat.

$$f(\text{sen } x) = \frac{d}{dx}(\text{sen } x) = \cos x,\ \text{ y }\ \cos x \neq \lambda \cdot \text{sen } x$$

<u>Propietateak:</u>

<u>1)</u> $\vec{x}$ bektore propio batek ezin ditu bi balio propio, λ eta μ, desberdin izan, baldin $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ eta $f(\vec{x}) = \mu\vec{x}$, non $\lambda \neq \mu$, orduan $\lambda\vec{x} = \mu\vec{x}$, beraz $\lambda = \mu$

<u>2)</u> Izan bedi $\vec{x}$ λ balio propioa dagokion f endomorfismoaren bektore propioa. Orduan, $\delta\,\vec{x}, / \delta \in K$ forma duen edozein bektore propioa da, eta dagokion balio propioa λ da. Hau da:

$$f(\vec{x}) = \lambda\,\vec{x}\ \ bada\ \ \ f(\delta\,\vec{x}) = \delta\, f(\vec{x}) = \delta\,\lambda\,\vec{x} = \lambda(\delta\,\vec{x})$$

<u>3)</u> Izan bedi F E-ren 1 dimentsioko azpibektore-espazioa. F azpiespazioa f endomorfismoaren bitartez inbariantea bada, orduan F-ko edozein bektore ez-nulu propioa da.

Baldin $\vec{x} \in F - (\vec{0})$, orduan $\vec{x}$ F-ren oinarri bat da, eta orobat $f(\vec{x}) \in F$, $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ betetzen baita. Laburtuz, zera esan dezakegu: f endomorfismoko bektore propioak bat dimentsioa duten azpiespazio inbarianteetako bektoreak dira.

6.2. Balio eta bektore propioen kalkulua

Izan bitez $U = \{\vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_n\}$ E-ren oinarri bat eta $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}, \forall \vec{x} \neq \vec{0}$ bektore propioa. Orduan:

$$(f)_{UU} \cdot (\vec{x})_U = \lambda (\vec{x})_U$$

Hau da:

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Berdintza hori ekuazio-sistema gisa idatz dezakegu:

$$\begin{aligned} (f_{11} - \lambda)x_1 + \quad & f_{12}x_2 + \ldots + \quad f_{1n}x_n = 0 \\ f_{21}x_1 + (f_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + \quad & f_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\

Determinante hori kalkulatzean, " f endomorfismoaren polinomio karakteristikoa" deitzen den polinimio bat lortuko dugu, eta era honetan adierazten da: $P_f(\lambda)$.

$P_f(\lambda)$ polinomioaren erroak, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$, f endomorfismoaren balio propioak dira. Orain, λ_i balio propio bakoitza (1) ekuazioan ordezkatuz, λ_i balio propioei dagozkien bektore propioak lortuko ditugu.

Adibidea: Izan bedi $f: R^3 \to R^3$ endomorfismoa, non:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 2x_2 + 3x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 - x_3)$$

Lortu, existitzen bada, R^3-ko oinarri bat, non endomorfismoari elkartutako matrizea diagonala baita.

Endomorfismoaren oinarri kanonikoari elkartutako matrizea kalkulatzen dugu:

$$\left.\begin{array}{l} f(e_1) = f(1,0,0) = (2,1,1) \\ f(e_2) = f(0,1,0) = (-2,1,3) \\ f(e_3) = f(0,0,1) = (3,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow (f)_{k,k} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Kalkulatu balio propioak:

$$\det(f - \lambda_i) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Eragiketak eginez:

$$(2 + \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0$$

Erroak f-ren balio propioak izango dira:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3$$

Orain, bektore propioak kalkulatuko ditugu; λ_i balioak (1) sisteman ordezkatuko ditugu.

Beraz, $\lambda_1 = -2$, denean:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} (2+2)x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & (1+2)x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & (-1+2)x_3 & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

Cramer-en metodo laburtua erabiliz:

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x_2}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x_3}{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \alpha$$

Beraz, $\lambda_1 = -2$ balio propioari dagokion bektore propioa:

$$\alpha \begin{Bmatrix} -11 \\ -1 \\ 14 \end{Bmatrix} = \alpha \vec{v}_1 \quad \text{non } \alpha \neq 0 \text{ beraz } \vec{v}_1 = -11\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 14\vec{e}_3$$

Gauza bera eginez $\lambda_2 = 1$ balio propioarekin:

$$\alpha \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \alpha \vec{v}_2 \quad \text{non } \alpha \neq 0 \text{ beraz } \vec{v}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

Azkenengoz, $\lambda_3 = 3$ balio propioarekin:

$$\alpha \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \alpha \vec{v}_3 \quad \text{non } \alpha \neq 0 \text{ beraz } \vec{v}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

$V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ bektore multzoak R^3 bektore-espazioko oinarri bat sortzen du (frogatu: askeak eta sortzaileak direla).

Bektore propio horiek sorturiko oinarria kontuan hartuz, elkartutako f matrizeak forma hau du:

$$(f)_{VV} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$f(\vec{v}_1) = -2\vec{v}_1$, $f(\vec{v}_2) = \vec{v}_2$, $f(\vec{v}_3) = 3\vec{v}_3$ betetzen baita.

Frogatuko dugu bektore propioek osatzen duten oinarriarekiko endomorfismoaren matrizeak forma diagonala duela:

Konturatu $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ bektore propioen koordenatuak R^3-ko oinarri kanonikoarekiko adierazita daudela. Beraz, f aplikazioaren bitartez bektore horiek transformatuz R^3-ko oinarri kanonikoarekiko adierazita egongo dira:

$$f(\vec{v}_1) = f(-11,-1,14) = (22,2,-28)$$
$$f(\vec{v}_2) = f(-1,1,1) = (-1,1,1)$$
$$f(\vec{v}_3) = f(1,1,1) = (3,3,3)$$

$V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ R^3-ko oinarri bat ere denez, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ bektoreen irudiak V oinarriarekiko adierazten ahal ditugu:

$$(22,2,-28) = \alpha(-11,-1,14) + \beta(-1,1,1) + \delta(1,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} -11\alpha & - & \beta & + & \delta & = & 22 \\ -\alpha & + & \beta & + & \delta & = & 2 \\ 14\alpha & + & \beta & + & \delta & = & -28 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} ;\Rightarrow \begin{pmatrix} 22 \\ 2 \\ -28 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_V$$

$$(-1,1,1) = \alpha\,(-11,-1,14) + \beta\,(-1,1,1) + \delta\,(1,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{rcrcl} -11\alpha & - & \beta & + & \delta = -1 \\ -\alpha & + & \beta & + & \delta = 1 \\ 14\alpha & + & \beta & + & \delta = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \\ \delta = 0 \end{cases} ;\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_V$$

$$(3,3,3) = \alpha\,(-11,-1,14) + \beta\,(-1,1,1) + \delta\,(1,1,1)$$

eta

$$\left.\begin{array}{rcrcl} -11\alpha & - & \beta & + & \delta = 3 \\ -\alpha & + & \beta & + & \delta = 3 \\ 14\alpha & + & \beta & + & \delta = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \delta = 3 \end{cases} ;\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}_V$$

Beraz, V oinarriko bektoreen f funtzioaren bitarteko irudiak kanonikoarekiko eta V -rekiko hauek dira:

$$\begin{pmatrix} 22 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -28 & 1 & 3 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_V$$

Orduan, $D = P^{-1}AP$ betetzen da, non P bektore propioen matrizean baita.

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -28 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 22 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -28 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

6.3. Autobalio baten anizkoiztasun aljebraikoa eta geometrikoa

Izan bedi $f:V \to V$ n dimentsio finitua duen V K eskalarren gorputzaren gaineko bektore-espazioko endomorfismoa. Izan bedi A m x n ordenako matrize karratua, non haren elementuak K-n baitaude. Baldin $\lambda_0 \in K$ f-ren edo A-ren autobalio bat bada:

λ_0 -ren **anizkoiztasun aljebraikoa**: λ_0-k f-ren edo A-ren ekuazio karakteristikoan erro gisa duen "m" anizkoiztasunari deituko diogu.

λ_0 -ren **anizkoiztasun geometrikoa**: λ_0 balio propioari elkartutako f-ren edo A-ren azpiespazio propioaren "d" dimentsioa da.

Demagun A f-ren matrizea dela (V oinarri batean). Orduan, A-ren eta f-ren autobalioak berdinak dira, eta horietako bakoitzak A-n eta f-n anizkoiztasun aljebraiko eta geometriko berdina dauka.

Adibidea: Demagun A matrize hau dugula:

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad (c \in R)$$

Ekuazio karakteristikoa ebatziz, autobalioak honako hauek dira:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & c \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 (bakuna) \\ \lambda_2 = 1 (bikoitza) \end{cases}$$

Beraz, $\lambda_1 = 3$ autobalioari dagokion azpiespazio propioa hau da:

$$\left.\begin{array}{rrr} -2x + & 2y + & cz = 0 \\ & -2y & = 0 \\ & 4y & = 0 \end{array}\right\}; \Rightarrow \quad V_{\lambda=3} = \begin{pmatrix} c\alpha \\ 0 \\ 2\alpha \end{pmatrix} \quad / \quad \alpha \in R$$

$\lambda_1 = 3$ autobalioaren anizkoiztasun aljebraikoa eta geometrikoa hauek dira:

$$m = 1 \ eta \ d = 1$$

$\lambda_2 = 1$ autobalioari dagokion azpiespazio propioa hau da:

$$\left.\begin{array}{l} 2y+cz=0 \\ 4y+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} Baldin\ c=1, V_{\lambda=1}=\{(\alpha,\beta,-2\beta)/\alpha,\beta\in R\} \\ Baldin\ c\neq 1, V_{\lambda=1}=\{(\alpha,0,0)/\alpha,\in R\} \end{cases}$$

$\lambda_2 = 1$-en anizkoiztasun aljebraikoa $m=2$ $(\forall c)$ da

$\lambda_2 = 1$-en anizkoiztasun geometrikoa:

$$d=2 \ \ o\ d=1 \ \ baldin \quad c=1\ edo\ c\neq 1$$

6.4. Endomorfismo diagonalgarriak

Antzekotasun bidezko diagonalizazioa

"Endomorfismo bat diagonalgarria dela esango dugu, oinarriren bat existitzen bada, non elkartutako matrizea diagonala baita. Oinarri hori osatzen duten bektoreak endomorfismoaren bektore propioak izango dira".

Izan bedi $f:V\to V$ n dimentsioa duen V bektore-espazioko endomorfismo bat. Izan bedi K eskalarren gorputza.

f diagonalgarria dela esango dugu, V-ko oinarri bat existitzen bada, non f-ri elkartutako matrizea diagonala baita. Beraz, f diagonalizatzea V oinarria eta elkartutako D matrizea aurkitzea izango da.

Izan bedi A n dimentsioa duen matrize karratua, non haren elementuak K gorputzekoak baitira.

"A antzekotasunaren bidez diagonalgarria" dela esango dugu, A-ren antzeko matrize diagonal bat existitzen bada. Hau da, P deituko dugun matrize erregular bat existitzen bada, matrize diagonalari D deituz, non:

$$D=P^{-1}A\cdot P$$

A matrizea antzekotasunaren bidez diagonalizatzea P eta D matrizeak aurkitzean datza.

Laburtuz:

1º) f endomorfismoa diagonalgarria da, baldin eta soilik baldin f-ren bektore propioek osatzen duten V oinarri bat existitzen bada.

2º) F-ren balio propioak $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_p \in K$ badira, anizkoiztasun aljebraikoak $m_1, m_2, \ldots\ldots m_p$ eta anizkoiztasun geometrikoak $d_1, d_2, \ldots d_p$, orduan f diagonalgarria izango da, baldin eta soilik baldin hau betetzen bada:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n$$
$$d_i = m_i \; non \; i = 1,2,\ldots, p$$

Partikularki, f-k n autobalio baditu (n erro desberdin polinomio karakteristikoan) K-n, orduan, n bektore propio linealki aske izango ditu, eta, beraz, f diagonalgarria izango da; hau da, forma diagonala izango du (ikusi 1. adibidea).

Oharrak:

1) Matrize guztiek ez dute forma diagonala.
2) Matrize batek balio propio anizkoitzak baditu, forma diagonalik ez izatea gerta daiteke.
3) Matrize guztiek blokeka forma diagonal bat dute, Jordan-en forma izendatua.

Adibidea: Izan bedi $f: R^3 \to R^3$ endomorfismoa:

$$f(x,y,z) = (x + 2y + 10z, 2x + y + 10z, -x - y - 6z)$$

Diagonalizatu egingo dugu, antzeko matrizea aurkituz.

Oinarri kanonikoarekiko f aplikazioaren matrizea kalkulatuko dugu:

$$\left.\begin{array}{l} f(e_1)=f(1,0,0)=(1,2,-1) \\ f(e_2)=f(0,1,0)=(2,1,-1) \\ f(e_3)=f(0,0,1)=(10,10,-6) \end{array}\right\} \Rightarrow (f)_{c,c}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & 10 \\ -1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

Polinomio karakteristikoa lortzen dugu: $|f-\lambda I|=0$, eta

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 10 \\ 2 & 1-\lambda & 10 \\ -1 & -1 & -6-\lambda \end{vmatrix}=0; \quad \Rightarrow -\lambda^3-4\lambda^2-5\lambda-2=0$$

f-ren balio propioak. Ekuazioaren soluzioak honako hauek dira:

$$-\lambda^3-4\lambda^2-5\lambda-2=0 \textit{son:} \begin{cases} \lambda_1=-1 \textit{ bikoitza } (m_1=2) \\ \lambda_2=-2 \textit{ bakuna } (m_2=1) \end{cases}$$

Orain, f-ren azpiespazio propioak lortuko ditugu, $V_{\lambda=-1}$ *eta* $V_{\lambda=-2}$:

$$V_{\lambda=-1}:(A-\lambda I)X=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 2 & 2 & 10 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{\lambda=-1}=\{(x,y,z)\in R^3 / x+y+5z=0\}=\langle (1,-1,0),(5,0,-1)\rangle \qquad Dim V_{\lambda=-1}=2$$

$V_{\lambda=-2}$ azpiespazio propioa:

$$V_{\lambda=-2} = \{(x,y,z) \in R^3 \,/\, 3x+2y+10z=0,\ 2x+3y+10z=0\} = \langle (2,2,-1) \rangle$$

$$Dim V_{\lambda=-2} = 1$$

$m_1 + m_2 = 2+1 = \dim R^3$ betetzen denez eta $d_1 = 2 = m_1$ y $d_2 = 1 = m_2$, orduan f endomorfismoa diagonalgarria izango da.

F-ren diagonalizazioa $\{(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)\}$ oinarrian lortuko dugu, non:

$$\vec{u}_1 = (1,-1,0) \quad , \quad \vec{u}_2 = (5,0,-1) \quad , \quad \vec{u}_3 = (2,2,-1)$$

Beraz, oinarri horretako f-ren matrizea hau da:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Frogatu dezakegu $D = P^{-1} A \cdot P$ betetzen dela, non P matrizea $\{(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)\}$ bektoreak zutabeka dituen matrizea baita; hau da, f-ren bektore propioak hauek dira:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>Diagonalizazio ortogonala</u>

Diagonalizazio kasu berezi bat ikusiko dugu, hain zuzen f endomorfismo simetriko bat denekoa (aplikazioari elkartutako matrize asimetrikoa da).

Frogatuko dugu kasu horretan f endomorfismoa beti dela diagonalgarria, eta, gainera, diagonalizazio hori oinarri ortogonal batekin lor daitekeela. Horregatik, diagonalizazio ortogonal deituko diogu.

Oinarri ortonormalak erabiltzen diren oinarri-aldaketa horietan (bektore ortogonalekin osatuak, eta norma=1dutenak), P koordenatu-aldaketaren matrizea ortogonala da, eta edozein matrize ortogonalek $P^t = P^{-1}$ betetzen du.

Oinarri ortonormalak bakarrik hartzen baditugu, A eta $A^{'}$ matrizeak antzekoak direla esatea eta $(A^{'} = P^{-1}AP)$ kongruenteak direla esatea berdina izango da $(A^{'} = P^{t}AP)$.

Beraz, berdin da matrize bat (simetrikoa) ortogonalki antzekotasunaren bidez diagonalizatzea eta ortogonalki kongruentzia bitartez diagonalizatzea.

Endomorfismo simetrikoak

Izan bedi $f:V \to V$ endomorfismo bat $V \neq 0$ bektore-espazio euklidearrean. f endomorfismo simetriko bat dela esango dugu, baldin:

$$\vec{x} \cdot f(\vec{y}) = f(\vec{x}) \cdot \vec{y} \quad edozein \quad \vec{x}, \vec{y} \in V$$

V-k dimentsio finitua badu eta A f endomorfismoaren matrizea V-ren oinarri ortonormal bati badagokio, orduan f endomorfismoa simetrikoa da, baldin eta soilik baldin A matrizea simetrikoa bada.

Propietateak:

1) Balio errealak dituen matrize simetriko batek balio propio errealak ditu.

2) Matrizea erreala eta simetrikoa bada eta balio propioak desberdinak badira, orduan bektore propioak binaka ortogonalak dira.

Ondorioa :

A matrize erreal simetrikoa bada eta haren balio propioak bakunak badira (anizkoiztasun aljebraikoa= 1), A diagonalgarria da.

A matrizeari elkartutako bektore propioek oinarri ortogonal bat osatzen dute f endomorfismoa definiturik dagoen bektore-espazioan.

Gainera, bektore propioek osaturiko matrizea edo P matrizea ortogonala da. D matrize diagonala izanik, non $D = P^{-1}AP$ *, P matrize ortogonala denez hau beteko da:*

$$D = P^{t}AP .$$

Oharra: bektore propioen P oinarria oinarri "ortogonala" da; hau da, bektoreak beren artean ortogonalak dira, elkarzutak: edozein bi bektore hartuta biderkadura eskalarra "zero" da.

Oinarri "ortonormala" lortzeko, bektore propioak normalizatu behar ditugu, bektore bakoitza bere normaz zatituz.

Adibidea: Kalkulatu A matrizeari elkarturik dagoen oinarri ortonormal batekiko matrize diagonala. Edo gauza bera dena: A matrizea diagonalizatu:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Erantzuna: Ekuazio karakteristikoa $|A - \lambda I| = 0$ da:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 7-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4-\lambda)(\lambda^2 - 14\lambda + 40) = 0$$

erroak : $\lambda_1 = 10 (bakuna)$
$\lambda_2 = 4 (bikoitza)$

Orain, bektore propioak kalkulatzen ditugu:

$$\bullet\ \lambda_1 = 10 \Rightarrow (A - 10I)\cdot \vec{x} = 0\,; \Rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Orduan: $\left.\begin{array}{rrrl} -6x_1 & & = & 0 \\ & -3x_2 + 3x_3 & = & 0 \\ & 3x_2 - 3x_3 & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$

$\lambda_1 = 10$ -en bektore propioak $\{(0, x_2, x_2)\}$ dira

Edo nukleoa $(f - 10I) = \{(0, x_2, x_2)\}$

Bektore bat, adibidez, (0,1,1) da

$$\bullet\ \lambda_2 = 4 \Rightarrow (A - 4I)\cdot \vec{x} = 0\,; \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Orduan: $\left.\begin{array}{rcrl} 3x_2 & + & 3x_3 & = 0 \\ 3x_2 & + & 3x_3 & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \forall x_1 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$

$\lambda_2 = 4$ -ren bektore propioak $\{(x_1, x_2, -x_2)\}$ dira

Edo nukleoa: $(f - 4I) = \{(x_1, x_2, -x_2)\}$.

$\lambda_2 = 4$ -ren bektore propioen multzoa $\{(x_1, x_2, -x_2)\}$ denez, oinarri ortogonal bat lortzea x_1 eta x_2 balioen menpe egongo da. Horretarako, bi bektore linealki aske lortu behar ditugu, beren artean ortogonalak direnak. Horrela egingo dugu:

Lehenengo x_1 eta x_2 balioei 1 balioa emango diegu, eta hala (1,1,-1) bektorea lortuko dugu. Bestea lortzeko, biderketa eskalarra era honetan planteatuko dugu:

$$(1,1,-1)\cdot(-1,x_2,-x_2)=0$$
$$-1+x_2+x_2=0\Rightarrow 2x_2=1\Rightarrow x_2=\frac{1}{2}$$

Beraz, bigarren bektorea (-1,1/2,-1/2) edo (-2,1,-1) izango da.

Bektoreak normalizatuz:

$$\vec{v}_1=\frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}}=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\quad;\quad \vec{v}_2=\frac{(1,1,-1)}{\sqrt{3}}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\vec{v}_3=\frac{(-2,1,-1)}{\sqrt{6}}=\left(\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$$

Orduan, A matrizea diagonalizatzen duen oinarri ortonormala hau da:

$$B=\{(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)\}=\left\{\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)\right\}$$

Eta "aldaketako P matrizea" ortonormala da: $P=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

$D=P^{-1}AP$ betetzen da, non D = $\begin{pmatrix}10 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$ matrize diagonala baita.

Eta, P ortogonala denez, $\Rightarrow P^t=P^{-1}$, orduan $D=P^tAP$ betetzen da:

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

6.5.Jordan-en forma kanonikoa

Izan bedi $f:V \to V$ endomorfismo bat. Endomorfismo hori ez da beti diagonalgarria izango; hau da, batzuetan ez dira existitzen oinarri bat sortzeko beharrezkoak diren "n" bektore propioak eta elkarturiko matrize diagonala.

Kasu horietan, endomorfismoa karakterizatzen duen matrizerik sinpleena bilatuko dugu (ahal den eta zero gehien dituena).

Hori lortzeko gehien erabiltzen den metodoa Jordan-en metodoa da. Metodo horrekin Jordan-en matrizea, oso matrize sinplea, lortuko dugu, eta J izendatuko dugu.

Garrantzitsua: Metodo hau oso erabilgarria izango da ekuazio diferentzial lineal eta koefiziente konstantedun sistemak askatzeko orduan.

Jordan-en metodoaren deskribapena:

Demagun n ordenako A matrize batek karakterizatzen duen f endomorfismo bat dugula, k balio propio desberdin existitzen direla, non (k < n), eta ezinezkoa dela k balio horiekin A matrizea diagonalizatzeko beharrezkoak diren n bektore propioak aurkitzea. Kasu horretan, aurkitu nahi dugun matrizeak forma hau izango du:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & J_2 & \cdots & (0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (0) & (0) & \cdots & J_k \end{pmatrix}$$

Konturatu J matrize horretako elementuak matrizeak direla. Matrize horren ordena ekuazio karakteristikoak lortutako (k) erro desberdin izango da. $|A - \lambda I| = 0$.

λ_i *balio propio desberdin bakoitzari J matrizeko* J_i *azpimatrize bat dagokio.*

Jo dezagun λ_i anizkoiztasuna lau dela, eta balio propio horri dagokion bektore propioak bi direla. Kasu horretan, matrize hau eraikiko dugu:

$$J_i = \begin{pmatrix} & & \downarrow & \\ \lambda_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

J_i -ren ordena λ_i -ren anizkoiztasuna izango da (4, kasu honetan).

J_i matrizearen diagonalean ez dauden elementuak nuluak izango dira, diagonalaren gainean dagoen zuzen paraleloa izan ezik.

Zuzen paralelo horretan lehenengo zeroak eta gero 1ekoak jarriko ditugu. Lehenengo batekoa 1+bektore propio kopurua duen zutabean jarriko dugu. Gure adibidean, 1+2=3 zutabean (ikus gezia).

Adibidea:

Izan bedi $(\lambda-2)^4(5-\lambda)^3=0$, 7 ordena duen A matrize baten ekuazio karakteristikoa, E 7 dimentsioa duen K bektore-espazioa izanik.

Demagun $\lambda_1=2$ *eta* $\lambda_2=5$ balio propioek hiru eta bat bektore propio elkartuta dituztela Aurkitu endomorfismoa karakterizatzen duen Jordan-en matrizea

Erantzuna: bi balio propio desberdin existitzen direnez, bila gabiltzan matrizeak Jordan-en bi bloke izango ditu:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & (0) \\ (0) & J_2 \end{pmatrix}$$

Non $\left.\begin{array}{l} \lambda_1=2; \Rightarrow 1+\text{bektore propio kopurua}=1+3=4 \\ \lambda_2=5; \Rightarrow 1+\text{bektore propio kopurua}=1+1=2 \end{array}\right\}$ beraz,

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad J_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Beraz, bila gabiltzan Jordan-en matrizea hau da:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & (0) \\ (0) & J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

6.6. Adibideak

1. Izan bedi $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$ matrizea.

Kalkulatu "a" parametroaren balio errealak, A matrizea diagonalgarria izan dadin. Lortu haren forma diagonala, eta D, eta A eta D matrizeak ortogonalki erlazionatzen dituen matrizea.

Erantzuna: Polinomio karakteristikoa : $(a-1-\lambda)^2 * (a-\lambda+1)=0$;

Balio propioak : $\begin{cases} \lambda_1 = a-1 \; ; \; m_1 = 2 \\ \lambda_2 = a+1 \; ; \; m_2 = 1 \end{cases}$

Bektore propioak: $\begin{cases} \lambda_1 = a-1 \;\; bada; \vec{v}_1 = (-1,1,0) \; ; \; \vec{v}_2 = (0,0,1) \\ \lambda_2 = a+1 \;\; bada; \vec{v}_3 = (1,1,0) \\ ortonormalizatu \;\; gabeko \;\; bektoreak \end{cases}$

$$D=\begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix} \quad P=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalizazio ortogonala denez : $(D)=(P)^T * (A) * (P)$

2. Izan bedi $A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ matrizea.

Jakinik $\lambda_1=1$ balio propioaren bektore propioak $v_1=(1,0,0)$, $v_2=(0,1,0)$ direla eta $v_3=(1,1,-2)$ bektorea beste bektore propio bat dela:

1.- Kalkulatu A matrizea.

2.- Kalkulatu A^n , $\forall n \in N$.

3.- Aurrekoa erabiliz, kalkulatu hau:

$$\varphi(A)=3A^4+2A^3-A+I$$

Erantzuna: a =1; b = 1; c = 1; d = -1 ; $\lambda_2=-1$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};\ (A)^n=(P)*(D)^n*(P)^{-1}$$

$$\varphi(A)=3A^4+2A^3-A+I=(P)*(3D^4+2D^3-D+I)*(P)^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrizea.

a) Ebatzi “p” eta “q” parametroen zein baliotarako den A diagonalgarria.

b) Diagonalgarria denerako, lortu D matrize diagonala eta P oinarri aldaketako matrizea.

Erantzuna: p # 1 eta p # 2 → A diagonalgarria da $\forall q$;

p= 1 eta q = 0 → A diagonalgarria da. ;

p = 1 eta q # 0 →A ez da diagonalgarria.

p =2 → A diagonalgarria da $\forall q$