eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

MATEMATIKA II

Oihana Aristondo Etxeberria

EUSKARA ETA ELEANIZTASUNEKO ERREKTOREORDETZAREN SARE ARGITALPENA

Liburu honek UPV/EHUko Euskara eta Eleaniztasuneko Errektoreordetzaren diru laguntza jaso du

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Liburu honek UPV/EHUko Euskara eta Eleaniztasuneko Errektoreordetzaren diru laguntza jaso du

AURKIBIDEA:

1. ALDAGAI ERREAL BATEKO FUNTZIO ERREALEN LIMITEAK ETA JARRAITASUNA……1

1.1. Sarrera……..……..1

1.2. Aldagai erreal bateko funtzio errealak……..…….4

1.3. Aldagai erreal bateko funtzio errealen limiteak.....…….....….....….....13

1.4. Infinitesimoak……..……...20

1.5. Aldagai erreal bateko funtzio errealen jarraitutasuna……..22

1.6. Ariketak……...25

2. ALDAGAI ERREAL BATEKO FUNTZIO ERREALEN DERIBAGARRITASUNA……...……29

2.1. Funtzio baten puntu batetako deribatua……...29

2.2. Deribagarritasuna eta jarraitutasuna……31

2.3. Deribatu funtzioa. Segidako deribatuak……..33

2.4. Aldagai erreal bateko funtzio erreal baten diferentziagarritasuna……...35

3. FUNTZIO KONPOSATU ETA INPLIZITUEN DERIBAZIOA……...40

3.1. Aldagai erreal bateko funtzio errealetarako katearen erregela orokorra…....40

3.2. Inplizituki definiturik dagoen funtzio baten deribatuen zehazpena……40

4. ALDAGAI BATEKO FUNTZIOEN TAYLOR-EN POLINOMIOA…….....42

4.1. Definizioa…….....42

4.2. McLaurin-en garapena…….…43

4.3. Aplikazioak……..44

5. ALDAGAI ERREAL BATEKO FUNTZIO ERREALEN DERIBAGARRITASUNAREN PROPIETATEAK……..……..45

5.1. Funtzio baten gorakortasun eta beherakortasuna……45

5.2. Mutur baten existentziarako baldintza beharrezkoa……45

5.3. Mutur baten existentziarako baldintza nahikoa……...47

5.4. Inflexio puntuak. Ahurtasuna eta ganbiltasuna……..…….51

5.5. Ariketak……...53

6. ALDAGAI ERREAL ANIZKOITZEN FUNTZIO ERREALEN LIMITEA ETA JARRAITUTASUNA……....56

6.1. Aldagai erreal anizkoitzen funtzio errealak…….56

6.2. Aldagai erreal anizkoitzen funtzio errealen limiteak……...57

6.3. Aldagai erreal anizkoitzen funtzio errealen jarraitutasuna……..……58

6.4. Ariketak…….……..59

7. ALDAGAI ERREAL ANIZKOITZEN FUNTZIO ERREALEN DERIBAGARRITASUNA…..…60

7.1. Deribatu partziala. Interpretazio geometrikoa…….60

7.2. Norabide deribatua. Funtzio beten puntu batetako gradientea……....60

7.3. Deribatu partzialak eta jarraitutasuna. Orden handiagoko deribatu partzialak. Matrize Hessiarra……61

7.4. Aldagai erreal anitzeko funtzio erreal baten diferentziagarritasuna…….....62

7.5. Plano ukitzailea edo tangentea……63

7.6. Ariketak……...…63

8. FUNTZIO KONPOSATU ETA INPLIZITUEN DERIBAZIOA……..…….66

8.1. Aldagai erreal anizkoitzen funtzio errealetarako katearen erregela orokorra……..…..66

8.2. Ekuazio-sistema baten bitartez inpliziturik definiturik dagoen aldagai bektorialen funtzio bektorial baten existentziaren teorema. Deribatuen zehazpena…….…….68

8.3. Ariketak…….…..69

9. ALDAGAI ERREAL ANIZKOITZEN FUNTZIO ERREALEN DERIBAGARRITASUNAREN PROPIETATEAK……..…..73

9.1. Aldagai erreal anizkoitzen funtzio errealen muturren existentzia……...73

9.2. Muturren definizioa…….…73

9.2.1. Muturen existentziarako baldintza beharrezkoak……..……..73

9.2.2. Muturen existentziarako baldintza nahikoak……...74

9.3. Maximo eta minimo baldintzatuak. Lagrange-ren biderkatzailearen metodoa……75

9.4. Ariketak……...……77

10. JATORRIZKO FUNTZIOEN KALKULURAKO METODO OROKORRAK. INTEGRAL MUGAGABEA……78

10.1. Jatorrizko funtzioa. Integral mugagabea……...…78

10.2. Aldagai aldaketa edo ordezkapena……....80

10.3. Zatikako integralak……82

10.4.Funtzio arrazionalen integrazioa…….…...83

10.5. Funtzio trigonometrikoen integrazioa……...88

10.6. Funtzio irrazionalen integrazioa……93

10.7. Ariketak……...…96

11. INTEGRAL MUGATUA……...…..98

11.1. Riemann-en integrala……...…..98

11.2. Barrow-en erregela…….…….100

11.3. Integral inpropioak……..101

11.4. Aplikazioak……..…102

11.5. Ariketak……...104

12. INTEGRAL ANIZKOITZAK……...….105

12.1.Integral Iteratuak……...105

12.2.Aplikazioak……..…….106

12.3. Integral bikoitzak……...……..106

12.4. Aldagai aldaketa……..108

12.5. Ariketak……..……..…109

BIBLIOGRAFIA

1. CALCULO. TOMOS 1 Y 2
   LARSON-HOSTETLER-EDWARDS
   McGRAW-HILL

2. CALCULUS DE UNA Y VARIAS VARIABLES
   S.L. SALAS Y E. HILLE.
   ED. REVERTE, S.A.

3. CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL
   FRANK AYRES.
   McGRAW-HILL

4. CALCULO
   FRANCISCO GRANERO
   McGRAW-HILL

5. CALCULO INTEGRAL
   PILAR CIMBRANOS Y JOSE MENDOZA.
   BASE UNIVERSITARIA-ANAYA

6. LIMITES Y DERIVADAS
   PILAR CIMBRANOS Y JOSE MENDOZA.
   BASE UNIVERSITARIA-ANAYA

7. INTRODUCCION AL CALCULO
   JOSE RAMON FRANCO BRAÑAS
   ED. PEARSON/PRENCTICE MAY.

8. CUADERNO DE PRÁCTICAS DE MATEMATICAS II
   ISABEL EGUÍA RIBERO Y MARIA JOSE GONZÁLEZ GÓMEZ
   DTO. DE MATEMÁTICA APLICADA. E.U.I.T. MINERA Y DE O.P.

1. ALDAGAI ERREAL BATEKO FUNTZIO ERREALEN LIMITEAK ETA JARRAITUTASUNA

1.1. Sarrera

Ikurrak

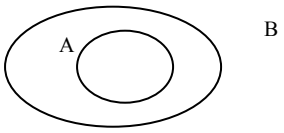
$\exists \rightarrow$ existitzen da	$\exists! \rightarrow$ bakar bat existitzen da	$\forall \rightarrow$ edozein
$\wedge \rightarrow$ eta	$\vee \rightarrow$ edo	$/, : \rightarrow$ non
$\Rightarrow, \Leftarrow \rightarrow$ baldin	$\Leftrightarrow \rightarrow$ baldin eta soilik baldin	

Multzoak

Izan bitez A eta B bi multzo.

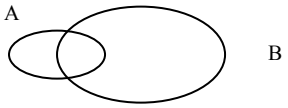
Definizioa: A-ren elementu guztiak B-n baldin badaude, ***A parte B*** dela esango dugu.

$A \subseteq B$



A ez parte B bada, A-ko elementu bat existituko da B-n ez dagoena.

$A \not\subset B$



Definizioa: x elementu bat A multzoan dagoela adierazteko, $x \in A$, ***x barne A***, idatziko dugu, eta ez dagoela: $x \notin A$.

Definizioa: Bi multzoren bildura eta ebakidura honela adieraziko dugu:

A bil B $\quad A \cup B = \{x / x \in A \ \vee \ x \in B\}$

A ebaki B $\quad A \cap B = \{x / x \in A \ \wedge \ x \in B\}$

Zenbakiak

Zenbaki naturalak, arruntak ($\mathbb{N}$)

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$$

Zenbaki osoak ($\mathbb{Z}$)

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Zenbaki arrazionalak ($\mathbb{Q}$)

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,/\, p, q \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad q \neq 0 \right\}$. Argi dago, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Zenbaki irrazionalak (I)

Hamartar bukaezina eta ez-periodikoa dutenak dira. Adibidez: $\sqrt{2}, \sqrt{11}$,…

Zenbaki errealak ($\mathbb{R}$) $\qquad \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathrm{I}$

$\mathbb{R}$ -ko tarteak. Irekia, itxia, eta abar

Definizioa: Izan bitez a, b$\in \mathbb{R}$ non a$<$b

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$ ***tarte irekia*** a,b $\notin (a,b)$

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$ ***tarte itxia*** a,b $\in [a,b]$ $\qquad$ Prop.: $(a,b) \in [a,b]$

Tarte infinituak

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > a\}$ irekia

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq a\}$ itxia

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < b\}$ irekia

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq b\}$ itxia

Koordenatu kartesiarretan kurba lauen ekuazioak

Planoko zuzenaren ekuazioak

Izan bitez $\boldsymbol{x}=(x_1,y_1)$ puntu bat eta $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)$ bektore zuzentzaile bat:

Ekuazio bektoriala: $(x,y)=(x_1,y_1)+\lambda(v_1,v_2)$

Ekuazio parametrikoa: $\begin{cases} x=x_1+\lambda v_1 \\ y=y_1+\lambda v_2 \end{cases}$

Ekuazio esplizitua: $y=mx+n \quad non \quad \begin{cases} m: zuzenaren\ malda \\ n: ordenatuaren\ mozketa-puntua \end{cases}$

Puntu-malda ekuazioa: $y-y_0=m(x-x_0)$

Bi punturen bidez definitutako zuzenaren ekuazioa: $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$

Zirkunferentziaren ekuazioak

Izan bitez $Z(a,b)$ zentroa eta R erradioa.

Ekuazio orokorra: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

Ekuazio kanonikoa: $(Z(0,0)$ izanik$)$*:* $x^2+y^2=R^2$

Elipsearen ekuazioak

Izan bitez $Z(x_0,y_0)$ zentroa eta *a,b* ardatz erdi erreal eta irudikaria.

Ekuazio orokorra: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

Ekuazio kanonikoa: $(Z(0,0))$ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Hiperbolaren ekuazioak

Izan bitez $Z(x_0, y_0)$ zentroa eta *a,b* ardatz erdi erreal eta irudikaria.

Ekuazio orokorra: $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Ekuazio kanonikoa: $(Z(0,0))$ $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Parabolaren ekuazioak

Ekuazio orokorra: $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$ eta $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$

Ekuazio kanonikoa: $y^2=2px$ eta $x^2=2py$

1.2.Aldagai erreal bateko funtzio errealak

Izan bedi $\mathbb{R}$ zuzen erreala $A\subseteq\mathbb{R}$ -ko azpimultzo bat. A-ko edozein *x* elementuri $\mathbb{R}$ -ko *y* elementu **bakar bat** dagokio. Beraz, *y* elementu hori *x*-ren funtzio izango da, eta era honetan idatziko da:

$$f: A\to B\subseteq\mathbb{R} \qquad f(x)=y$$
$$x\to f(x)$$

x =”aldagai askea” eta *y* =”menpeko aldagaia”

Beraz, *y x*-ren f-ren bidezko ***irudia*** izango da, eta *x, y*-ren f-ren bidezko ***aurreirudia***.

Definizioa: ***Eremua***, existentzia-tarte edo definizio-tartea, honako hau da:

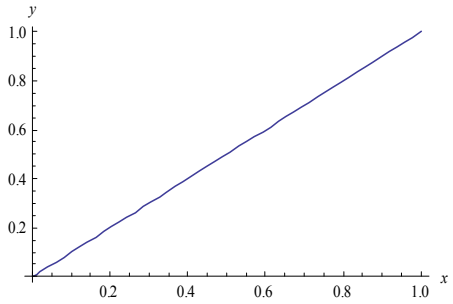
$$Dom\ f=\{x\ /\ \exists y,\ y=f(x)\}$$

A multzoari ***eremua*** (funtzioa definiturik dagoen eremua) deituko diogu. B-ri, aldiz, ***irudi multzoa*** (B: “A-ren irudi guztiak dauden multzoa”).

Adibideak:

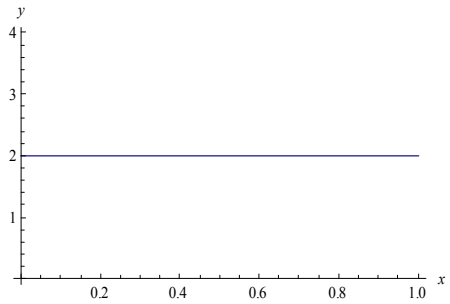
1) Identitate-funtzioa

$\forall x \in \mathbb{R} \quad 1_{\mathbb{R}}(x) = x$



2) Funtzio konstantea

$\forall x \in \mathbb{R} \quad i_k(x) = k$



Definizioa: $y = f(x)$ funtzioa ***gorakorra*** dela esango dugu, baldin

$\forall x_1, x_2 \in A \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$

Definizioa: $y = f(x)$ funtzioa ***beherakorra*** dela esango dugu, baldin

$\forall x_1, x_2 \in A \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$

Definizioa: Funtzio bat era ***esplizituan*** idatzita dagoela esango dugu, honako hau betetzen bada: $y = f(x)$.

Era ***inplizituan,*** aldiz, $F(x, y) = 0$

Funtzio konposatuak. Alderantzizko funtzioak

Batura

Izan bitez $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eta $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bi funtzio erreal non:

$Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$ eta $Dom\ g = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{aligned} (f+g) : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{aligned} \qquad \text{eta} \qquad Dom\,(f+g) = Dom\ f \cap Dom\ g$$

Biderkadura

$$\begin{aligned}(f\cdot g):\ \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\to (f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)\end{aligned}$$ eta $Dom\,(f\cdot g)=Dom\ f\cap Dom\ g$

Zatidura

$$\begin{aligned}(f/g):\ \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\to (f/g)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\end{aligned}$$ $Dom\,(f/g)=Dom\ f\cap Dom\ g-\{x\in\mathbb{R}\ /\ g(x)=0\}$

<u>Funtzio konposatuak</u>

$$\begin{aligned}(g\circ f):\ \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\to (g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)\end{aligned}$$

$Dom\,(g\circ f)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\in Dom\ f\ \wedge\ f(x)\in Dom\ g\}$

<u>Alderantzizko funtzioak</u>

Izan bedi f funtzio erreal bat $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Orduan ***$f^{-1}$ f -ren alderantzizko funtzioa*** izango da, honako hau betetzen baldin bada:

$$\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=x$$

<u>Adibideak:</u>

1) $$\begin{aligned}f:\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\to 2x-3\end{aligned}$$

<u>Alderantzizkoa:</u> $y=2x-3\to x=\dfrac{y+3}{2}$ $\qquad$ $$\begin{aligned}f^{-1}:\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\to \frac{x+3}{2}\end{aligned}$$

$$\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left(f^{-1}(x)\right)=f\left(\frac{x+3}{2}\right)=2\left(\frac{x+3}{2}\right)-3=x$$

Funtzio bakoiti eta bikoitiak

Definizioa: Funtzio bat ***bikoitia*** dela esango dugu, honako hau betetzen bada:

$$f(-x) = f(x) \qquad \forall x \in Dom\ f$$

Definizioa: Funtzio bat ***bakoitia*** dela esango dugu, honako hau betetzen bada:

$$f(-x) = -f(x) \qquad \forall x \in Dom\ f$$

Adibideak:

1) $\begin{array}{l} f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to x^2 \end{array}$ $\qquad f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ ***bikoitia***

2) $\begin{array}{l} f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to x^3 \end{array}$ $\qquad f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ ***bakoitia***

Funtzio periodikoak

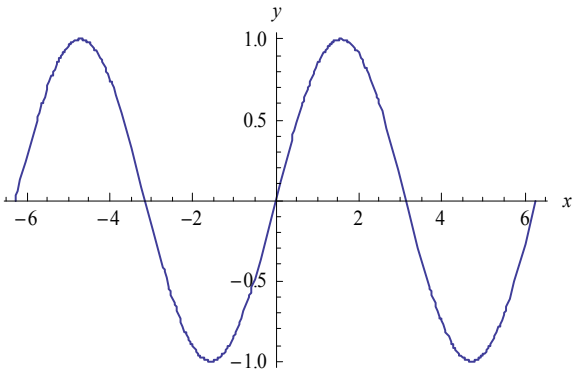
Definizioa: Izan bedi $y = f(x)$ funtzio bat. ***Periodikoa*** dela esango dugu, ***K*** zenbaki konstante bat existitzen bada, non x aldagaiari batu edo kentzean beraren funtzioaren balioa ez baita aldatzen:

$$f(x \pm K) = f(x)$$

Hori betetzen duen ***K*** zenbakirik txikiena funtzioaren ***periodoa*** izango da.

Adibidea:

1) $\begin{array}{l} f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \sin x \end{array}$ $\qquad f(x \pm 2\pi) = f(x)$



<u>Oinarrizko funtzio elementalak: potentzialak, esponentzialak, logaritmikoak, trigonometrikoak eta haien alderantzizkoak</u>

Potentzialak

$y = x^{\alpha}$, non α zenbaki erreala baita.

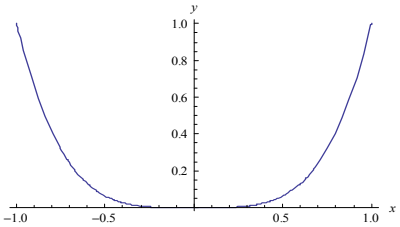
Propietateak

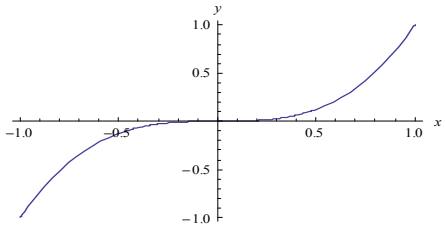
- $\left(x^{\alpha}\right)^{\beta} = x^{\alpha \cdot \beta}$ $\qquad$ - $x^{\alpha} \cdot x^{\beta} = x^{\alpha+\beta}$ $\qquad$ - $x^{1/\alpha} = \sqrt[\alpha]{x}$ $\qquad$ - $x^{-\alpha} = 1/x^{\alpha}$

* α zenbaki oso eta positiboa bada, funtzioa $(-\infty, +\infty)$ tarte infinituan definiturik egongo da, eta zenbaki oso eta negatiboa bada, funtzioa edozein *x*-rentzat definituta dago, x=0 puntuan izan ezik.

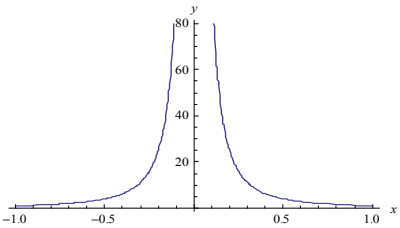
Adibideak:

1) $f(x) = x^4$ $\qquad$ 2) $f(x) = x^3$

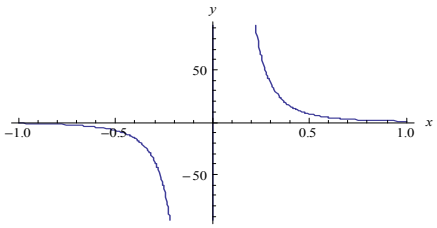




3) $f(x) = x^{-2} = 1/x^2$



4) $f(x) = x^{-3} = 1/x^3$



Alderantzizkoak

Potentzial baten alderantzizkoa beste potentzial bat izango da. Izan bedi $f(x) = x^{\alpha}$ funtzio potentzial bat, eta demagun $f^{-1}(x) = x^{\beta}$ haren alderantzizkoa dela. Beraz:

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x \Rightarrow \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}\left(x^{\alpha}\right) = \left(x^{\alpha}\right)^{\beta} = x^{\alpha \cdot \beta} = x$$

$$\Rightarrow \alpha \cdot \beta = 1 \Rightarrow \beta = 1/\alpha$$

Beraz, $f(x) = x^{\alpha}$-ren alderantzizko funtzioa $f(x) = x^{1/\alpha}$ izango da.

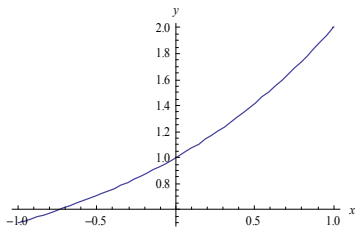
Oharra: α bikoitia bada, haren alderantzizkoa zati positiboan bakarrik definiturik egongo da; hau da, haren eremua $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ izango da.

Esponentzialak

$y = a^x, \quad a > 0, a \neq 1$. Funtzio horiek $\mathbb{R}$ -ko edozein *x*-rentzat definiturik daude.

Adibidea:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow 2^x$$



Alderantzizkoak

Alderantzizkoa lortzeko metodo bat x-a askatzea izango da. Gero, eremuekin zer gertatzen den ikusi beharko dugu.

$$y = a^x \Rightarrow \log_a y = \log_a \left(a^x\right) = x \log_a a = x \Rightarrow x = \log_a y$$

Beraz, $f(x) = a^x$ izanik, $f^{-1}(x) = \log_a x$ izango da.

Frogatu dezagun:

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}\left(a^x\right) = \log_a \left(a^x\right) = x$$

Orain, eremuak ikus ditzagun adibide baten bidez:

Adibidea:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$$
$$x \to 2^x$$

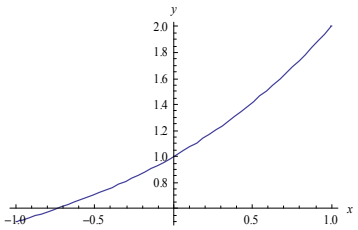
Eremua $\mathbb{R}$

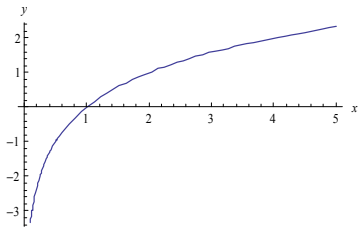
Irudi multzoa $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$x \to \log_2 x$$

Eremua $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$

Irudi multzoa $\mathbb{R}$





Logaritmikoak

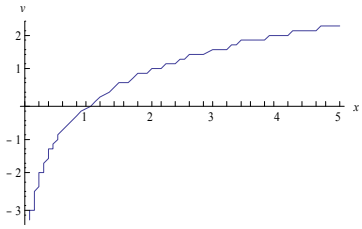
$y = \log_a x, \quad a > 0, a \neq 1$. Funtzio horiek $x > 0$ puntuentzat definiturik daude.

Propietateak

- $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$
- $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$
- $\log_a x^s = s \cdot \log_a x$

Adibidea:

$$f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$x \to \log_a x$$



Alderantzizkoa

$$y = \log_a x \Rightarrow a^y = a^{\log_a x} = x$$

Beraz, ***funtzio logaritmiko*** baten alderantzizkoa ***funtzio esponentziala*** izango da eta alderantziz.

$f(x) = \log_a x$ izanik $f^{-1}(x) = a^x$

Frogatu dezagun:

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}\left(\log_a x\right) = a^{(\log_a x)} = x$$

Trigonometrikoak

Funtzio trigonometrikoak:

$y = Sinx$ $\qquad$ $y = Cosx$ $\qquad$ $y = Tagx = \dfrac{Sinx}{Cosx}$

$y = Secx = \dfrac{1}{Cosx}$ $\qquad$ $y = Co\sec x = \dfrac{1}{Sinx}$ $\qquad$ $y = Cotagx = \dfrac{1}{Tagx}$

Alderantzizkoak

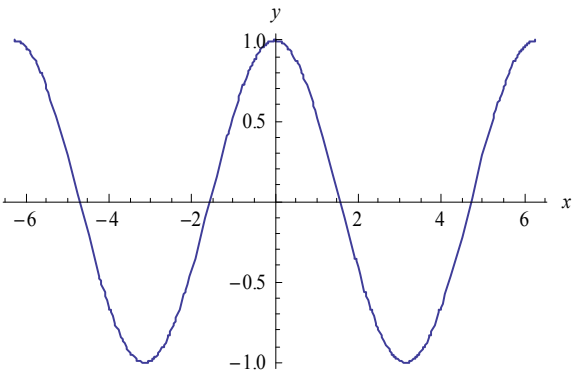
$y = ArcSinx$ $\qquad$ $y = ArcCosx$ $\qquad$ $y = ArcTagx$

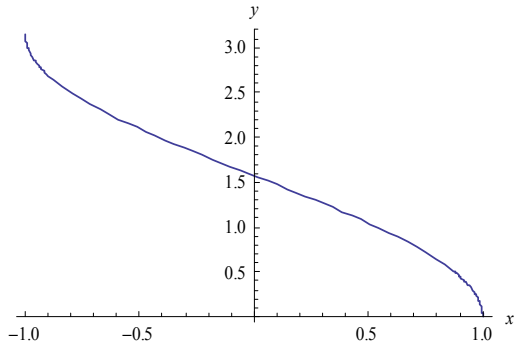
$y = ArcSecx$ $\qquad$ $y = ArcCo\sec x$ $\qquad$ $y = ArcCotagx$

Adibideak:

(1) $f:\mathbb{R} \to [-1,1]$
$x \to Cosx$

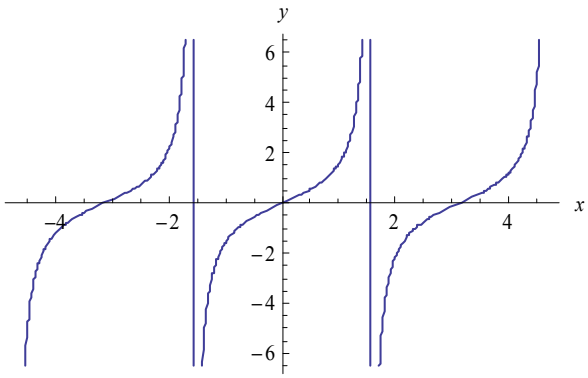
$f^{-1}:[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$x \to ArcCosx$

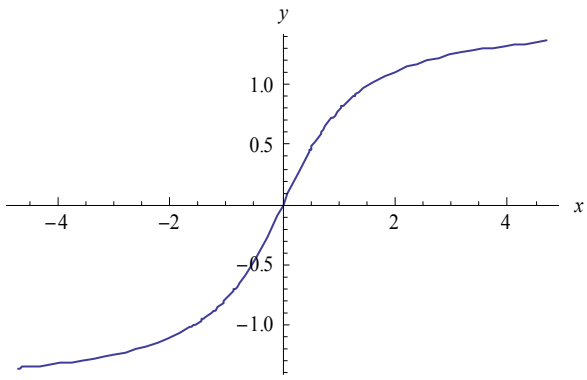




(2) $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$
$x \to Tagx$

$f^{-1}:\mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$x \to ArcTagx$





1.3. Aldagai erreal bateko funtzio errealen limiteak

Funtzio baten limitea

Definizioa: Izan bedi f funtzio erreal bat. Demagun existitzen dela δ, non f $(a-\delta, a+\delta)-\{a\}$ tartean definituta baitago.

Orduan, $l \in \mathbb{R}$ zenbakia "a" puntuko f-ren ***limitea*** dela esango dugu, hau betetzen bada:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(a, \varepsilon): \quad \forall x \quad x \in (a-\delta, a+\delta)-\{a\} \quad \Rightarrow \quad f(x) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$$

Albo-limiteak

Definizioa: Izan bedi f funtzio erreal bat. Demagun existitzen dela δ, zeina f $(a, a+\delta)$ tartean definituta baitago.

Orduan, $l \in \mathbb{R}$ zenbakia "a" puntuko f-ren ***eskuin-limitea*** dela esango dugu, hau betetzen bada:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(a, \varepsilon): \quad \forall x \quad x \in (a, a+\delta) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$$

Definizioa: Izan bedi f funtzio erreal bat. Demagun existitzen dela δ, non f $(a-\delta, a)$ tartean definituta baitago.

Orduan, $l \in \mathbb{R}$ zenbakia "a" puntuko f-ren ***ezker-limitea*** dela esango dugu, hau betetzen bada:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l$$

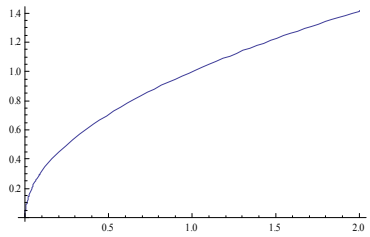
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(a, \varepsilon): \quad \forall x \quad x \in (a-\delta, a) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$$

Teorema:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l \,,\, \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l \\ \text{eta} \quad \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l \end{cases}$$

Adibidea:

$$f(x) = \sqrt{x}$$



Ez du ezker-limiterik "0" puntuan.

Beraz, ez du limiterik "0" puntuan.

Limite infinituak

Definizioa: $a \in \mathbb{R}$ izanik,

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \left(-\infty\right) \quad \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \;\; \exists \delta = \delta(M,a) \;:\; \forall x \in \left(a-\delta, a+\delta\right) - \left\{a\right\} \Rightarrow f(x) > M \left(< M\right)$$

Definizioa: $a \in \mathbb{R}$ izanik,

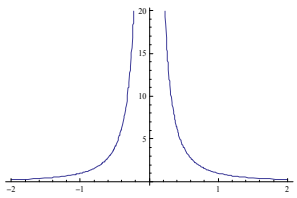
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \left(-\infty\right) \quad \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \;\; \exists \delta = \delta(M,a) \;:\; \forall x \in \left(a, a+\delta\right) \Rightarrow f(x) > M \left(< M\right)$$

Definizioa: $a \in \mathbb{R}$ izanik,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \left(-\infty\right) \quad \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \;\; \exists \delta = \delta(M,a) \;:\; \forall x \in \left(a-\delta, a\right) \Rightarrow f(x) > M \left(< M\right)$$

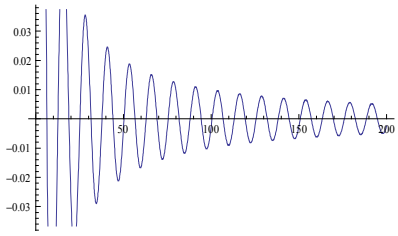
Adibidea:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$



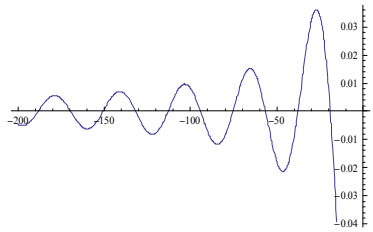
Limiteak infinituan

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$



$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K = K(\varepsilon) \; : \; \forall x \geq K \Rightarrow f(x) \in (l-\varepsilon, l+$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$



$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K = K(\varepsilon) \; : \; \forall x \geq K \Rightarrow f(x) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall L \in \mathbb{R} \;\; \exists K = K(L) \; : \; \forall x \geq K \Rightarrow f(x) > L$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall L \in \mathbb{R} \;\; \exists K = K(L) \; : \; \forall x \geq K \Rightarrow f(x) < L$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall L \in \mathbb{R} \;\; \exists K = K(L) \; : \; \forall x \leq K \Rightarrow f(x) > L$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall L \in \mathbb{R} \;\; \exists K = K(L) \; : \; \forall x \leq K \Rightarrow f(x) < L$

Limiteen arteko eragiketak: batura, biderkadura, zatidura, eta abar

Demagun *f(x)* eta *g(x)* funtzioek eremu berdina dutela eta

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1 \qquad \text{eta} \qquad \lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$

Orduan:

a) $\lim_{x \to a} \left[f(x) + g(x) \right] = l_1 + l_2$

b) $\lim_{x \to a} \left[f(x) \,.\, g(x) \right] = l_1 \,.\, l_2$

c) $\lim_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)} \right] = \dfrac{l_1}{l_2} \quad , \quad l_2 \neq 0$

d) $\lim_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)} \right] = \infty \quad , \quad l_1 \neq 0 \quad , \quad l_2 = 0$

<u>Teorema:</u>

Izan bitez *f* eta *g* bi funtzio, non $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ eta *g(x)* bornatua, orduan:

$\lim_{x \to a} f(x) \,.\, g(x) = 0$

<u>Adibidea:</u>

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{x}_{0} \; \underbrace{Sin \frac{1}{x}}_{\text{bornatua}} = 0$$

<u>Propietateak:</u>

Izan bitez *f* eta *g* funtzio errealak, non: $l = \lim_{x \to a} f(x)$ eta $m = \lim_{x \to a} g(x)$

Orduan:

(1) $\lim_{x \to a} log_{\beta} f(x) = log_{\beta} \lim_{x \to a} f(x) = log_{\beta}\, l$

(2) $\lim_{x \to a} \beta^{f(x)} = \beta^{\lim_{x \to a} f(x)} = \beta^{l}$

(3) $\lim_{x \to a} \left[f(x) \right]^{r} = l^{r}$

(4) $\lim_{x \to a} \left[f(x) \right]^{g(x)} = l^{m}$

Limite infinituak

Batuketa

$\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} g(x)$	$\lim_{x\to a} \left(f(x)+g(x)\right)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	l	$+\infty$
$-\infty$	l	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	INDETERMINAZIOA

Biderketa

$\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} g(x)$	$\lim_{x\to a} \left(f(x)+g(x)\right)$
∞	l	∞
∞	∞	∞
∞	0	INDETERMINAZIOA

Zatiketa

$\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} g(x)$	$\lim_{x\to a} \left(f(x)+g(x)\right)$
l	∞	0
∞	l	∞
0	∞	0
∞	0	∞
∞	∞	INDETERMINAZIOA
0	0	INDETERMINAZIOA

Esponentziala

	$\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} \beta^{f(x)}$
$\beta > 1$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	0
$\beta < 1$	$-\infty$	$+\infty$
	$+\infty$	0

Logaritmoa

	$\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} \log_\beta f(x)$
$\beta > 1$	0	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$
$\beta < 1$	0	$+\infty$
	$+\infty$	$-\infty$

$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$

$$f(x)^{g(x)} = \beta^{g(x).\log_\beta f(x)}$$

Adierazpen horretan, logaritmoa, biderketa eta esponentziala ditugu. Logaritmoak eta esponentzialak ez dute indeterminaziorik lortuko. Beraz, indeterminazioak biderketak sortuko ditu.

Hau da: $\infty . 0$

a) $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ eta $\lim_{x\to a} \log_\beta f(x) = \pm\infty$

b) $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ eta $\lim_{x\to a} \log_\beta f(x) = 0$

<u>Indeterminazioak:</u> ∞^0 , 0^0 , $1^{\pm\infty}$

<u>Indeterminazio guztiak</u>

$\infty - \infty$, $0 . \infty$, ∞/∞ , $0/0$, ∞^0 , 0^0 , $1^{\pm\infty}$

Indeterminazioak gainditzeko metodoak

a) $\infty - \infty$: orokorrean konjokatuaz biderkatuta eta zatituta.

b) ∞/∞: indeterminazio hau polinomioen zatidura batean agertzen denean, honako azterketa hau egin dezakegu:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}=\begin{cases} a_n/b_m & n=m \\ +\infty & n>m\ ,\ a_n>0 \\ -\infty & n>m\ ,\ a_n<0 \\ 0 & n<m \end{cases}$$

c) $0\,.\,\infty$: Biderkadura zatidura bihurtuz, ∞/∞ kasua izango da

d) $0/0$: Polinomioen zatiduraren limitea denean, ***Ruffini***-ren erregela erabiliz polinomioak sinplifikatuko dira.

- Errodurak azaltzen direnean, aldagai-aldaketa eginez, aurreko kasua lor daiteke.

Adibidea:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\begin{pmatrix} 1+x=y^6 \\ x\to 0\Rightarrow y\to 1\end{pmatrix}=\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^2-1}=\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y+1)}=$$

$$=\lim_{y\to 1}\frac{(y^2+y+1)}{(y+1)}=\frac{1^2+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

- Trigonometrikoetan: aldagai-aldaketa
- Infinitesimo baliokideak

e) $1^{\pm\infty}$: e zenbakiaren bidez

$$\left|\begin{array}{l}\lim_{x\to a} f(x)=1 \\ \lim_{x\to a} g(x)=1\end{array}\right. \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)}=1^{\infty}=e^{A} \quad non \quad A=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-1\right)g(x)$$

Adibidea:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{r(x)}\right)^{r(x)}=e$$

f) $\infty^0, 0^0$: logaritmoa aplikatuz, aurreko kasuren bat lortuko da.

Adibidea:

$$\lim_{x\to\infty}(x+3)^{\frac{1}{2x}}=\infty^0=l \;\Rightarrow\; Ln\,l=Ln\lim_{x\to\infty}(x+3)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to\infty}Ln(x+3)^{\frac{1}{2x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}Ln(x+3)=0 \quad\Rightarrow\quad l=e^0=1$$

1.4. Infinitesimoak

Definizioa: *f* funtzioa *"a"* puntuko ***infinitesimoa*** dela esango dugu, baldin $\lim_{x\to a} f(x)=0$ bada.

Adibidea:

$f(x)=sinx$ funtzioa $x=2\pi n\; n\in\mathbb{N}$ puntuetan infinitesimoa da. $\lim_{x\to 2\pi n} sin\,x=0$

Infinitesimo baliokideak

Definizioa: Izan bitez *f* eta *g* *"a"* puntuko infinitesimoak. Orduan, *f* eta *g* funtzioak *"a"* puntuko ***infinitesimo baliokideak*** izango dira, hau betetzen bada:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1 \qquad \left(f(x)\underset{x\to a}{\sim}g(x)\right)$$

Infinitesimoaren ordena eta zati nagusia

Definizioa: *f(x) "a"* puntuko infinitesimoaren ***ordena k*** balioa dela esango dugu, baldin:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^k}=A\neq\begin{cases}0\\ \pm\infty\end{cases}$$

Orduan, $A(x-a)^k$ infinitesimoaren ***zati nagusia*** da. Gainera, $f(x)\sim A(x-a)^k$

Adibidea:

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \Rightarrow \sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \Rightarrow ordena=1,\ zati\ nagusia=x$

- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow 1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \Rightarrow ordena=2,\ zati\ nagusia=\frac{x^2}{2}$

Infinitesimo baliokideen ordezkapena limiteen kalkuluan

Teorema

Demagun "a" puntuko limite batean "a" puntuko f(x) infinitesimoa biderkatzen edo zatitzen dela. Demagun, g(x) "a" puntuko infinitesimoa dela, non $f(x)\underset{x\to a}{\sim}g(x)$.

Orduan, limitearen barruan f(x) g(x) funtzioaz ordezka daiteke.

$$\lim_{x\to a}f(x).h(x)=\lim_{x\to a}g(x).h(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{g(x)}$$

Infinitesimo baliokide nagusiak

x → 0		
(1) $\sin x \sim x$	**(2)** $tag\ x \sim x$	**(3)** $\arcsin x \sim x$
(4) $arctag\ x \sim x$	**(5)** $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$	**(6)** $\ln(1+x) \sim x$
(7) $e^x - 1 \sim x$	**(8)** $a^x - 1 \sim (\ln a)x$	

f(x) → 0		
(1) $\sin f(x) \sim f(x)$	**(2)** $tag\ f(x) \sim f(x)$	**(3)** $\arcsin f(x) \sim f(x)$
(4) $arctag\ f(x) \sim f(x)$	**(5)** $1-\cos f(x) \sim \frac{f(x)^2}{2}$	**(6)** $\ln(1+f(x)) \sim f(x)$
(7) $e^{f(x)} - 1 \sim f(x)$	**(8)** $a^{f(x)} - 1 \sim (\ln a) f(x)$	

1.5. Aldagai erreal bateko funtzio errealen jarraitutasuna

Definizioa: Izan bedi f funtzioa eta $a \in Dom\ f$. Orduan:

f *"a"*-n ***jarraitua*** da $\Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Definizioa: Izan bedi f funtzioa eta $a \in Dom\ f$. Orduan:

f *"a"*-n ***eskuin jarraitua*** da $\Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Definizioa: Izan bedi f funtzioa eta $a \in Dom\ f$. Orduan:

f *"a"*-n ***ezker jarraitua*** da $\Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Definizioa: f funtzioa (a,b) tartean ***jarraitua*** dela esango dugu, $\forall x \in (a,b)$ f x-n jarraitua bada. Hau da, tarteko edozein puntutan jarraitua bada.

Funtzio baten etengune motak

Etenguneak

Definizioa: Izan bedi f funtzioa eta $D = Dom\ f$. *"a"* puntua *f*-ren ***etengunea*** dela esango dugu, bi baldintza hauetatik bat betetzen denean:

(1) $a \in D$ izanik f *"a"*-n jarraitua ez denean

(2) $a \notin D$ baina a D-ko *metatze-puntua* da. Hau da:

$$\forall \delta > 0 \Rightarrow \exists x_\delta \in D : x_\delta \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\}$$

Motak

Izan bedi a f-ren etengunea

(i) Baldin eta $\lim_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ bada, orduan "*a*" puntuko *f*-ren ***etengunea gaindigarria*** dela esango dugu. Kasu horretan, F funtzioa defini dezakegu, *f*-tik "*a*" puntuan desberdina dena soilik eta *a*-n jarraitua dena. Hau da:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ \lim_{x \to a} f(x) = l & x = a \end{cases}$$

(ii) ***"a" lehen mailako etengunea*** dela esango dugu, baldin eta horietariko baldintzaren bat betetzen bada:

1) $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ bada

2) $\lim_{x \to a^+} f(x)$ eta $\lim_{x \to a^-} f(x)$ aldeetako limite biak existitzen dira, baina desberdinak dira. Kasu horretan, $\lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x)$ balioa *f*-ren *"a"* puntuko ***jauzi*** deritzo.

(iii) ***"a" bigarren mailako etengunea*** dela esango dugu, aldeetako limiteren bat gutxienez existitzen ez bada.

<u>Bolzano-ren teorema</u>

<u>Definizioa:</u> f funtzioa $[a,b]$ tarte itxian ***jarraitua*** dela esango dugu, $f\left(a,b\right)$ tarte irekian jarraitua bada, *a*-n eskuin jarraitua eta *b*-n ezker jarraitua bada.

Teorema (Bolzanoren teorema):

Izan bedi f funtzioa $[a,b]$ tartean jarraitua. Baldin eta $f(a)<0$ eta $f(b)>0$ bada, orduan $\exists x\in\left(a,b\right)$, non $f(x)=0$ baita.

Teorema (Tarteko balioen teorema)

Izan bitez f funtzioa $[a,b]$ tartean jarraitua eta c $f(a)$ eta $f(b)$ bitarteko puntu bat; orduan, $\exists z\in\left(a,b\right)$ / $f(z)=c$ den.

Teorema (Wierstrass-en teorema)

Izan bedi f funtzioa $[a,b]$ tartean jarraitua. Orduan, f bornatua dago, eta maximo eta minimo bat ditu $[a,b]$-n.

1.6. Ariketak

Limiteak

1. Kalkulatu funtzio hauen eremuak:

a) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$

b) $f(x)=\dfrac{2x^3+3}{x^2+x+1}$

c) $f(x)=Ln\dfrac{2x}{x-1}$

d) $f(x)=\ln\left(x+3\right)$

e) $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}}$

f) $f(x)=\sqrt{1-x}+\sin\sqrt{x}$

g) $f(x)=\dfrac{3x+5}{x^2-5x+6}$

h) $f(x)=tagx$

2. Kalkulatu $f+g,\ f-g,\ f.g,\ f\circ g,\ g\circ f$, eta ondoren haien eremuak:

a) $f(x)=e^x$ eta $g(x)=x^3$

b) $f(x)=\cos x$ eta $g(x)=2-x$

c) $f(x)=\sqrt{x-1}$ eta $g(x)=\ln x$

d) $f(x)=\sqrt{x}$ eta $g(x)=e^{3x}$

b) $f(x)=tagx$ eta $g(x)=Arctagx$

3. Egiaztatu funtzio hauen limiteak:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2+2^{2/x}}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{tag\sqrt{2x}}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right)$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x^2-1}{x^2+x}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Ln\left(1+x^3\right)}{2x^3+x^5}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x^2}-1}{2-2\cos x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{lx}-e^{mx}}{x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{1/2x}$

9) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-x^3-x^2-4}{x^4-3x^2-4}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{tag\,2x}-1}{Ln\left(1+\sin 4x\right)}$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3+2}{x+2}\right)^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{Ln\left(1+4x^2\right)}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2Ln(1+x)}{e^x-1}$

14) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{Ln(1+\sin^2 x)}$

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2tagx-x^2+x^3}{\sin x+2ar\sin^2 x+5x^4}$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos ax\right)^{1/x^2}$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2\sin x\right)^{1/\ln x}$

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\, Ln\left(1+x\right)}{\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^2\left(e^{2x}-1\right)}$

20) $\lim\limits_{x\to 0} tagx\, e^{1/(1-\cos x)}$

21) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos x\right)^{1/(x+\sin x)^2}$

22) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+2x}-4}{\sqrt{x^2-2x+1}}$

23) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x-2}}{\sqrt[3]{x^3+x+1}}$

24) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{-x^3+3x-2}$

25) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x+3}{\sqrt{-6x^2-3x+3}}$

26) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt[4]{x+17}-2}$

27) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{25+2x}-3}$

28) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x}{2\sin^2 x-3\sin x}$

29) $\lim\limits_{x\to\infty} x\, Ln\dfrac{x+a}{x-a}$

30) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{1/x}$

31) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(tagx\right)^{tag\,2x}$

32) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+tagx}{1+\sin x}\right)^{1/\sin x}$

33) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\right)$

34) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+2x-4}{x^2-2x+1}$

35) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x^2-2x+1}}$

36) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x-4}{-5x^4-2x+1}$

37) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$

38) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-\sqrt{x}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)$

39) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{2x}}$

40) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}-1\right)$

41) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+x+2}{\sqrt{2x}-\sqrt{2}}$

42) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x+4}{\sqrt{x+5}-1}$

43) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{3x}$

44) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln(1+2x)+1\right)^{1/\sin x}$

45) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{1-\sqrt{1-x}}$

46) $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}$

47) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-2^{-x}}{3^x-3^{-x}}$

48) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}-1}$

4. Frogatu $f(x)=\sqrt{1+x}-1$ funtzioaren infinitesimo baliokidea x=0 puntuan. Emaitza hori erabili, $\sqrt{0,9}$ -ren balio hurbildua lortzeko.

5. Izan bitez funtzio hauek:

$f(x)=\ln\left(x^2+x-1\right)$ *eta* $g(x)=a\sin\left(\ln(1+x)\right)$ infinitesimoak x=1 puntuan.

a) Kalkulatu *f* eta *g* funtzioen ordenak eta zati nagusia.

b) Aurkitu "a"-ren balioa, *f* eta *g* infinitesimo baliokideak izan daitezen.

6. Izan bitez infinitesimo hauek x=0-n.

$f(x)=1-\cos\left(\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)\right)$ eta $g(x)=\sin\left(\ln(1+ax)\right)\ln(1+x)^3$

a) Kalkulatu *f* eta *g* funtzioen ordenak eta zati nagusia.

b) Aurkitu "a"-ren balioa, *f* eta *g* infinitesimo baliokideak izan daitezen.

7. $f(x)=Ln\left(\dfrac{11-3x}{3+x}\right)$ funtzioa infinitesimo bat da $x=2$ puntuan. Kalkulatu haren ordena eta zati nagusia.

8. Kalkulatu x=0 puntuko infinitesimo hauen ordena eta zati nagusia.

a) $f(x)=\sin\left(\sqrt{4+x}-2\right)$

b) $f(x)=3\sin x-\sin 2x$

c) $f(x)=tag\left(\ln\left(\sqrt{x}+1\right)\right)$

d) $f(x)=tag^2x+Ln\cos x$

9. Izan bitez x=0 puntuko infinitesimook:

$$f(x) = a\left[\ln\left(x^2+2\right) - \ln 2\right] \quad \text{non} \quad a \neq 0$$

$$g(x) = tag\left(x^2\right)$$

a) Kalkulatu f eta g funtzioen ordena eta zati nagusia

b) Zein "a" baliotarako betetzen da baliokidetasun hau?

$f(x) \sim g(x)$ x=0 puntuan

Jarraitutasuna

10. Aztertu funtzio hauen jarraitutasuna. Funtzioren bat punturen batean jarraitua ez bada, posible bada, definitu funtzioa puntu horretan jarraitua izan dadin:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \leq 1 \\ 1-x & 1 < x < 3 \\ x^2-11 & x \geq 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq -1 \\ x^2+x+1 & -1 < x < 1 \\ x^2+2 & x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \dfrac{4+x^2}{1-\sqrt{x^2-1}}$

d) $f(x) = \begin{cases} 5x\cos\dfrac{\pi}{2x} & x \leq 1 \\ 1-\sin\dfrac{\pi}{2x} & x > 1 \end{cases}$

11. Aztertu funtzio hauen jarraitutasuna parametroen balioen arabera:

a) $f(x) = \begin{cases} ax+1 & x \leq 1 \\ 1+x^2 & x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2\sin x & x < 0 \\ (x+a)^2 & x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -A\sin x+1 & x \leq \dfrac{-\pi}{2} \\ \cos x + B & \dfrac{-\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 1+\cos x & x \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

2. ALDAGAI ERREAL BATEKO FUNTZIO ERREALEN DERIBAGARRITASUNA

2.1. Funtzio baten puntu bateko deribatua

Definizioa: Izan bedi $f(x)$ funtzio erreala (a,b) tartean definitua eta $x_0 \in (a,b)$.

Orduan, $x = x_0$ puntuan f ***deribagarria*** dela esango dugu, limite hau existitzen bada:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Limiteari ***f(x) funtzioaren deribatua*** deituko diogu, eta ***f'(x)*** izendatu.

Ariketa:

Kalkulatu $y = x^2$ funtzioaren deribatua.

a) Edozein puntutan
b) x=3 balioarentzat

Eskuin eta ezker aldeetako deribatuak

Definizioa: f(x) funtzioaren ***eskuin deribatua*** ondoko limitea da

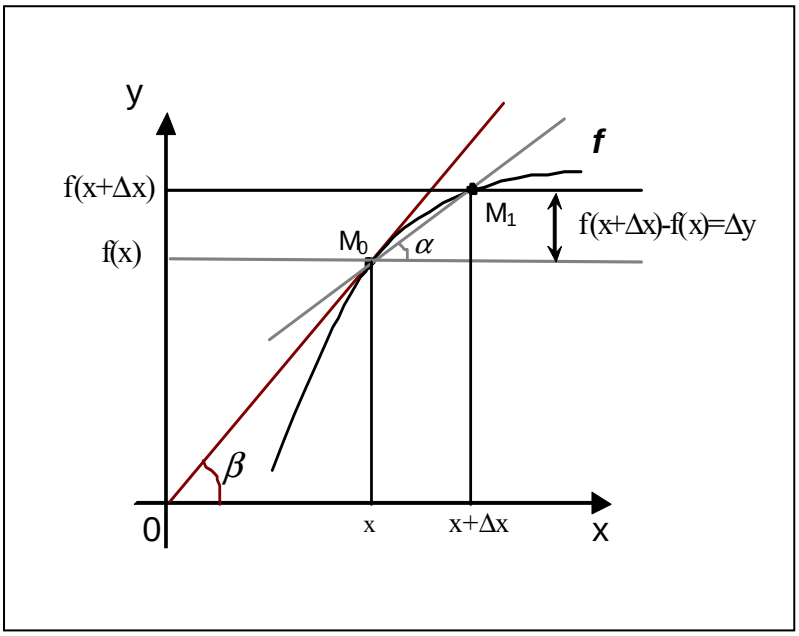
$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Definizioa: f(x) funtzioaren ***ezker deribatua*** ondoko limitea da

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Deribatuaren interpretazio geometrikoa

Azter dezagun *f(x)* funtzioa eta berari dagokion $y = f(x)$ kurba.



x aldagaiari funtzioaren *f(x)* balioa dagokio. Balio bi horiekin $M_0(x, y)$ puntua lortzen dugu.

Orduan, aldagaiari Δx gehikuntza bat egingo diogu. Aldagaiaren $x + \Delta x$ balio berriari funtzioaren $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ balioa dagokio. Balio bi horiekin $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ puntua lortzen dugu.

M_0M_1 zuzen ebakitzailea marraztuko dugu. Ebakitzaileak eta OX ardatzaren noranzko positiboak osatutako angeluari α deituko diogu. Irudian ikusten denez:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tag\alpha$$

Δx gehikuntzak zerorantz jotzen duenean, M_1 puntua kurbari jarraituz M_0 punturantz higituko da, eta α angelua aldatuz joango da.

$\Delta x \to 0$-rentzat α angeluak β limiterantz jotzen du, M_0 puntutik pasatzen den eta OX ardatzaren noranzko positiboarekin β angelua osatzen duen zuzena M_0 puntuan kurbak duen ukitzailea izango da. Gainera:

$$tag\beta = \lim_{\Delta x \to 0} tag\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Beraz, $f'(x) = tag\beta$. Hau da, aldagaiaren x balio bati dagokion $f'(x)$ deribatuaren balioa OX ardatzaren noranzko positiboak eta $M_0(x, y)$ puntuan kurbak duen ukitzaileak osatzen duten angeluaren tangentea da.

Adibidea:

Kalkulatu $y = x^2$ kurbak $M_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ eta $M_2(-1,1)$ puntuetan dituen ukitzaileen malda:

$y' = 2x$ $\quad tag\beta_1 = y'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ $\quad tag\beta_2 = y'(-1) = -2$

Zuzen ukitzailea

Definizioa: $y = f(x)$ funtzio baten *zuzen ukitzailea* $(a, f(a))$ puntuan hau da:

$$y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$$

2.2. Deribagarritasuna eta jarraitutasuna

Definizioa: $y = f(x)$ funtzioak $x = x_0$ puntuan deribatua baldin badu, orduan $y = f(x)$ funtzioa $x = x_0$ puntuan ***deribagarria*** dela esango dugu.

•(a,b) edo $[a,b]$ tarteko puntu bakoitzean funtzioa deribagarria bada, funtzioa (a,b) edo $[a,b]$ tartean deribagarria izango da.

Teorema

$y = f(x)$ funtzioa $x = x_0$ puntuan deribagarria bada, jarraitua da puntu horretan

Ariketa:

Kalkulatu funtzio hauen deribatuak:

1) $f(x) = Sinx$ 2) $f(x) = Cosx$ 3) $f(x) = e^x$ 4) $f(x) = Lnx$

DERIBATUEN TAULA

FUNTZIOA	DERIBATUA		FUNTZIOA	DERIBATUA
$y = k$	$y' = 0$		$y = k$	$y' = 0$
$y = k\,x$	$y' = k$		$y = k\,u(x)$	$y' = k\,u'(x)$
$y = x^n$	$y' = n\,x^{n-1}$		$y = u(x)^n$	$y' = n\,u(x)^{n-1} \cdot u'(x)$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$		$y = \ln u(x)$	$y' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x}\log_a e$		$y = \log_a u(x)$	$y' = \frac{u'(x)}{u(x)}\log_a e$
$y = e^x$	$y' = e^x$		$y = e^{u(x)}$	$y' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$		$y = a^{u(x)}$	$y' = u'(x) \cdot a^{u(x)} \ln a$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$		$y = \sin u(x)$	$y' = u'(x) \cdot \cos u(x)$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$		$y = \cos u(x)$	$y' = -u'(x) \cdot \sin u(x)$
$y = tag\ x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \left(1 + tag^2 x\right)$		$y = tag\ u(x)$	$y' = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)} = \left(1 + tag^2 u(x)\right) u'(x)$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$		$y = \arcsin u(x)$	$y' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u(x)^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$		$y = \arccos u(x)$	$y' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u(x)^2}}$
$y = arctag\ x$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$		$y = arctag\ u(x)$	$y' = \frac{u'(x)}{1 + u(x)^2}$

2.3. Deribatu funtzioa. Segidako deribatuak

Definizioa: Izan bedi $y = f(x)$ funtzio bat. *f* deribagarria bada beraren eremuan, $f'(x)$ beraren deribatu-funtzioa izango da.

Funtzio elementalen deribatuak

(1) $y = x^n$. Orduan, $y' = n\,x^{n-1}$

(2) $y = k$. Orduan, $y' = 0$

(3) $y = k\,u(x)$. Orduan, $y' = k\,u'(x)$

(4) $y = u(x) + v(x)$. Orduan, $y' = u'(x) + v'(x)$

(5) $y = u(x) \cdot v(x)$. Orduan, $y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

(6) $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$. Orduan, $y' = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$

(7) $y = \log_a x$. Orduan, $y' = \dfrac{1}{x}\log_a e$. Beraz, $y = \ln x$. Orduan, $y' = \dfrac{1}{x}$.

Ordena handiagoko deribatuak

Demagun $y = f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean deribagarria dela. Orduan, $f'(x)$ deribatua *x*-ren funtzio ere izango da. Deribatu hori berriro deribatzen badugu, $y = f(x)$ funtzioaren *"bigarren ordenako deribatua"* lortuko da. Deribatu hori honela adierazten da: y'' edo $f''(x)$.

Bigarren deribatuaren deribatua *"hirugarren ordenako deribatua"* da, eta honela adierazten da: y''' edo $f'''(x)$.

Oro har, (n-1) ordenako deribatuaren deribatua *"n-garren ordenako deribatua"* edo *"n-garren deribatua"* da, eta honela adierazten da: y^n edo $f^n(x)$.

Adibideak:

(1) $\boldsymbol{y = x\, e^x}$

$$y' = e^x + x\, e^x = (1+x)\, e^x$$

$$y'' = e^x + (1+x)\, e^x = (2+x)\, e^x$$

$$y''' = e^x + (2+x)\, e^x = (3+x)\, e^x$$

……..

$$y^n = (n+x)\, e^x$$

(2) $\boldsymbol{y = lnx}$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$y'' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y''' = \frac{2}{x^3}$$

$$y^{IV} = -\frac{6}{x^4}$$

$$y^{V} = \frac{24}{x^5}$$

……..

$$y^n = (-1)^{n-1}\, \frac{(n-1)!}{x^n}$$

Propietateak:

(1) $(u+v)^n = u^n + v^n$

(2) $(c \cdot u)^n = c\, u^n$

Deribazio logaritmikoa

$y(x)=\left(f(x)\right)^{g(x)}$ motako funtzio bat deribatu nahi badugu, logaritmoak aplikatu beharko ditugu.

$$y(x)=\left(f(x)\right)^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(y(x)\right)=\ln\left(\left(f(x)\right)^{g(x)}\right)=g(x)\ln\left(f(x)\right)$$

Deribatuak eginez:

$$\frac{y'(x)}{y(x)}=g'(x)\ln\left(f(x)\right)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\Rightarrow \quad y'(x)=y(x)\left(g'(x)\ln\left(f(x)\right)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

Orduan:

$$y(x)=\left(f(x)\right)^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad y'(x)=\left(f(x)\right)^{g(x)}\left(g'(x)\ln\left(f(x)\right)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

Adibideak:

(1) $y=a^x \quad f(x)=a$ eta $g(x)=x \Rightarrow \quad y'=a^x\left(1\cdot\ln a+x\frac{0}{a}\right)=a^x\ln a$

(2) $y=x^x \quad \Rightarrow \quad y'=x^x\left(1+\ln x\right)$

(3) $y=\left(\sin x\right)^{x^2} \quad \Rightarrow \quad y'=\left(\sin x\right)^{x^2}\left(x^2\cdot\frac{\cos x}{\sin x}+2x\ln\left(\sin x\right)\right)$

2.4. Aldagai erreal bateko funtzio erreal baten diferentziagarritasuna

Demagun $y=f(x)$ funtzioa deribagarria dela $[a,b]$ tartean. Beraz:

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, non $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ eta Δx x-ren gehikuntza

Definizioa: $f'(x)\,\Delta x$ biderkadurari funtzioaren ***diferentziala*** deitzen zaio eta dy gisa adierazten da:

$$dy=f'(x)\,\Delta x$$

<u>Oharra:</u> $\Delta x \to 0$ doanean $\Delta f = df$ beteko da. Beraz, Δx gehikuntza txikia denean, $\Delta f \cong df$ betetzen dela esan dezakegu.

<u>Adibideak:</u>

(1) $y = x$ funtzioa hartuz.

$$\left.\begin{array}{l} dy = f'(x)\,\Delta x = \Delta x \quad (dy = dx) \\ \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x) - (x) = \Delta x \end{array}\right. \Rightarrow \quad dy = \Delta y = \Delta x = dx$$

Beraz, frogatu dugu ***dy = f'(x) dx*** betetzen dela eta orduan $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

(2) $y = x^2$ funtzioa hartuz.

$$dy = f'(x)\,\Delta x = 2x\Delta x = 2x\,dx$$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - (x)^2 = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2$$

(3) Diferentzialaren kontzeptua erabiliz, hurbildu $f(x) = x^{2/5}$ funtzioaren gehikuntza:

a) x 32tik 34ra hasten denean

$$df = f'(x)\Delta x = \frac{2}{5x^{3/5}}\Delta x \qquad \Delta x = 34 - 32$$

$$\Delta f = f(34) - f(32) \cong df = f'(32)\Delta x = \frac{2}{5(32)^{3/5}}2 = \frac{4}{40} = 0{,}1$$

Benetako balioa hau da:

$$\Delta f = f(34) - f(32) = (34)^{2/5} - (32)^{2/5} = 0.0982$$

b) x 1etik $\dfrac{9}{10}$-era gutxitzen denean

$$df = f'(x)\Delta x = \frac{2}{5x^{3/5}}\Delta x \qquad \Delta x = \frac{9}{10} - 1 = \frac{-1}{10}$$

$$\Delta f = f(\frac{9}{10}) - f(1) \cong df = f'(1)\Delta x = \frac{2}{5(1)^{3/5}}\left(\frac{-1}{10}\right) = \frac{-2}{50} = -0.04$$

Benetako balioa hau da:

$$\Delta f = f(0.9) - f(1) = (0.9)^{2/5} - (1)^{2/5} = -0.0413$$

Propietateak:

Deribatuentzat ikusitako teorema gehienak diferentzialarentzat baliagarriak dira:

(1) $d(u+v)=du+dv$

(2) $d(u\cdot v)=du\cdot v+u\cdot dv$

(3) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{du\cdot v-u\cdot dv}{v^2}$

n-garren ordenako diferentzialak

Demagun $y=f(x)$ funtzioa dugula. Orduan:

$$d^2y=d(dy)=(dy=f'(x)dx\ denez)=(f'(x)dx)'\,dx=f''(x)(dx)^2=f''(x)dx^2$$

Beraz, $d^ny=f^n(x)\,dx^n$

L'Hôpital erregela

Izan bitez $f(x)$ eta $g(x)$ bi funtzio $[a,b]$ tartean jarraituak eta deribagarriak. $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ betetzen bada, orduan:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Oharra:

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\pm\infty$ betetzen bada, era berean aplika dezakegu L'Hôpital erregela:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Adibideak:

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\frac{0}{0}=\left(\text{ L'Hôpital }\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{(3x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{3}=\frac{5}{3}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{k}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}=(\text{L'Hôpital})$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sin\left(\frac{k}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{-k}{x^2}\right)\cos\left(\frac{k}{x}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}k\cos\left(\frac{k}{x}\right)=k$$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\frac{\infty}{\infty}=(\text{L'Hôpital})=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=\infty$

Limite indeterminatuen kalkuluan

a) $0\cdot\infty$

$\lim_{x\to a}f(x)=0$ eta $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$

$$\lim_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1/g(x)}=\frac{0}{0}=(\text{L'Hôpital})=\lim_{x\to a}\frac{(f(x))'}{\left(1/g(x)\right)'}$$

Adibidea:

$$\lim_{x\to 0}x^m\cdot\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x^m}=\frac{\infty}{\infty}=(\text{L'Hôpital})=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-m/x^{m+1}}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^m}{m}=0$$

b) 0^0

$\lim_{x\to a}f(x)=0$ eta $\lim_{x\to a}g(x)=0$

$l=\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=0^0$. Logaritmoak aplikatuz:

$$\ln l = \lim_{x\to a} g(x)\cdot \ln\left(f(x)\right) = \lim_{x\to a} \frac{\ln\left(f(x)\right)}{1/g(x)} = \frac{\infty}{\infty} = \text{(L'Hôpital)} = \lim_{x\to a} \frac{\left(\ln\left(f(x)\right)\right)'}{\left(1/g(x)\right)'}$$

c) ∞^0

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ eta $\lim_{x\to a} g(x) = 0$

$l = \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \infty^0$. Logaritmoak aplikatuz:

$$\ln l = \lim_{x\to a} g(x)\cdot \ln\left(f(x)\right) = \lim_{x\to a} \frac{\ln\left(f(x)\right)}{1/g(x)} = \frac{\infty}{\infty} = \text{(L'Hôpital)} = \lim_{x\to a} \frac{\left(\ln\left(f(x)\right)\right)'}{\left(1/g(x)\right)'}$$

d) 1^∞

$\lim_{x\to a} f(x) = 1$ eta $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$

$l = \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 1^\infty$. Logaritmoak aplikatuz:

$$\ln l = \lim_{x\to a} g(x)\cdot \ln\left(f(x)\right) = \lim_{x\to a} \frac{\ln\left(f(x)\right)}{1/g(x)} = \frac{0}{0} = \text{(L'Hôpital)} = \lim_{x\to a} \frac{\left(\ln\left(f(x)\right)\right)'}{\left(1/g(x)\right)'}$$

3. FUNTZIO KONPOSATU ETA INPLIZITUEN DERIBAZIOA

3.1. Aldagai erreal bateko funtzio errealetarako katearen erregela orokorra

Teorema (katearen erregela)

Izan bitez f eta g funtzioak, non f x_0-n deribagarria eta g $f(x_0)$-n deribagarria baitira. Orduan, $(g \circ f)$ x_0-n deribagarria da, eta:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

Adibideak:

(1) $f(x) = \sin\left(\cos\left(e^x\right)\right)$

$$f'(x_0) = \cos\left(\cos\left(e^{x_0}\right)\right) \cdot \left(-\sin\left(e^{x_0}\right)\right) \cdot \left(e^{x_0}\right)$$

(2) $f(x) = \ln\left(u(x)\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{u(x)} u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

(3) $f(x) = \sin\left(u(x)\right)$

$$f'(x) = \cos\left(u(x)\right) \cdot u'(x)$$

3.2. Inplizituki definiturik dagoen funtzio baten deribatuen zehaztapena

Definizioa: Bi aldagai (askea eta menpekoa) erlazionatzen dituen $F(x, y) = 0$ funtzioa, era ***inplizituan*** dagoela esaten da edo ***funtzio inplizitua*** dela.

Adibidea: Ikus dezagun adibide batzuen bidez funtzio inplizituak nola deribatzen diren.

Katearen erregela erabiliz:

(1) $x^2+y^2-a^2=0 \qquad y=y(x) \qquad \Rightarrow \; 2x+2yy'=0$

(2) $y^6-y-x^2=0 \qquad y=y(x) \qquad \Rightarrow \; 6y^5y'-y'-2x=0$

Funtzio inplizituen n-garren ordenako deribatuak

Adibidea:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ ekuazioak $y(x)$ funtzioa inplizituki definitzen du.

Kalkulatu $y'(x)$ eta $y''(x)$:

x aldagaiarekiko deribatuz: $\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0 \;\Rightarrow\; y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$

Berriro deribatuz:

$$\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}\left(y'y'+yy''\right)=0 \;\Rightarrow\; \left(y'\right)^2+yy''=-\frac{b^2}{a^2} \;\Rightarrow y''=\frac{-\frac{b^2}{a^2}-\left(y'\right)^2}{y}$$

$$\Rightarrow y''=\frac{-\frac{b^2}{a^2}-\left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)^2}{y}=\frac{-\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^4x^2}{a^4y^2}}{y}=\frac{-\frac{b^2a^2y^2-b^4x^2}{a^4y^2}}{y}=\frac{-b^2\left(a^2y^2+b^2x^2\right)}{a^4y^3}=$$

$$=\left(a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2\right)=\frac{-b^2\left(a^2b^2\right)}{a^4y^3}=-\frac{b^4}{a^2y^3}$$

Beraz, $y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$ eta $y''=-\frac{b^4}{a^2y^3}$

4. ALDAGAI BATEKO FUNTZIOEN TAYLOR-EN POLINOMIOA

4.1. Definizioa

Demagun $y = f(x)$ funtzioak $x = a$ puntua barnean duen tarte batean (n+1) mailako deribatua duela.

Aurki dezagun n baino maila handiagoa ez duen $P_n(x)$ polinomio bat, non haren balioa $x = a$ puntuan $f(x)$ funtzioarena baita eta haren n mailarainoko deribatuen balioak ere $f(x)$ funtzioaren deribatuenak baitira. Hau da:

$$P_n(a) = f(a)\,,\ P_n^{'}(a) = f^{'}(a)\,,\ \ldots\ldots\ldots,\ P_n^{n}(a) = f^{n}(a)$$

Polinomio hori lortzeko koefiziente indeterminatuak dituen $(x-a)$-ren potentziak erabiliko ditugu:

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \ldots + C_n(x-a)^n$$

$C_0, C_1, \ldots, C_n$ koefiziente indeterminatuen balioak lortzeko goiko baldintzak aplikatuko ditugu:

Lehenengo $P_n(x)$-ren deribatuak kalkulatuko ditugu:

$$P_n^{'}(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \ldots + nC_n(x-a)^{n-1}$$

$$P_n^{''}(x) = 2C_2 + 3.2C_3(x-a) + \ldots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_n^{n}(x) = 1.2.3\ldots(n-1)\,n\,C_n$$

x-ren ordez *"a"* ordezkatuz eta $P_n(a) = f(a)$, $P_n^{'}(a) = f^{'}(a)$,.., $P_n^{n}(a) = f^{n}(a)$ baldintzak aplikatuz:

Orduan:

$$C_0 = f(a),\ C_1 = f'(a),\ C_2 = \frac{f''(a)}{2!},\ C_3 = \frac{f'''(a)}{3!},\ \ldots,\ C_n = \frac{f^n(a)}{n!}$$

Beraz, bila gabiltzan polinomioa hau da:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

$f(x)$-ren eta $P_n(x)$-ren artean dagoen desberdintasuna $R_n(x)$ izendatuko dugu, eta ***gai osagarri*** deritzo. Hau da: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

Beraz, ***f(x) funtzioaren Taylor-en garapena*** hau da:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

4.2. McLaurin-en garapena

Kasu partikular bat ***a = 0*** denean izango da. Kasu horri ***f(x) funtzioaren McLaurin-en garapena*** deritzo.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + R_n(0)$$

Adibideak (MacLaurin-en garapenak):

(1) $f(x) = e^x$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

(2) $f(x)=\sin x$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^l\frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!}+\ldots \quad \text{non} \qquad n=2l+1$$

(3) $f(x)=\cos x$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^l\frac{x^{2l}}{(2l)!}+\ldots \quad \text{non} \qquad n=2l$$

(4) $f(x)=(1+x)^m$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

(5) $f(x)=\ln(1+x)$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

4.3 Aplikazioak

Taylor-en garapenak hainbat ariketa ebazteko erabil daitezke. Funtzioen puntu bateko hurbilketak lortzeko, limiteak kalkulatzeko eta abarrerako.

5. ALDAGAI ERREAL BATEKO FUNTZIO ERREALEN DERIBAGARRITASUNAREN PROPIETATEAK

5.1. Funtzio baten gorakortasun eta beherakortasuna

Funtzio baten gorakortasun eta beherakortasunaren analisia egiteko deribatuaren kontzeptua aplikatuko dugu.

Teorema

Demagun $f(x)$ funtzioa (a,b) tartean deribagarria dela. Orduan:

(1) $f(x)$ funtzioa (a,b) tartean ***gorakorra*** bada, orduan $f'(x) > 0$

(2) $f(x)$ funtzioa (a,b) tartean ***beherakorra*** bada, orduan $f'(x) < 0$

5.2. Mutur baten existentziarako baldintza beharrezkoa

Definizioa: *f(x)* funtzioak x_1 puntuan ***maximo erlatibo*** bat duela esaten da, x_1 puntua duen (α,β) tarte bat existitzen bada, non tarte horretako edozein *x*-rentzat $f(x) < f(x_1)$ betetzen baita.

Definizioa: *f(x)* funtzioak x_1 puntuan ***minimo erlatibo*** bat duela esaten da, x_1 puntua duen (α,β) tarte bat existitzen bada non tarte horretako edozein *x*-rentzat $f(x) > f(x_1)$ betetzen baita.

Teorema

Deribagarria den $f(x)$ funtzio batek $x = x_1$ puntuan maximo edo minimo erlatibo bat badu, orduan $f'(x_1) = 0$.

Oharrak:

(1) Gerta daiteke maximoa edo minimoa den puntu batean deribatua ez existitzea.

(2) Deribatua puntu batean 0 izateak ez du esan nahi maximo edo minimoa izan behar duenik.

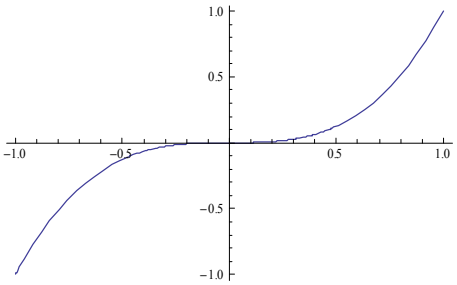
(3) Funtzio batek mutur-balioak puntu hauetan izan ditzake:

- **a.** Deribatua existitu eta zero balioa duen puntuetan
- **b.** Deribaturik existitzen ez den puntuetan

Adibideak:

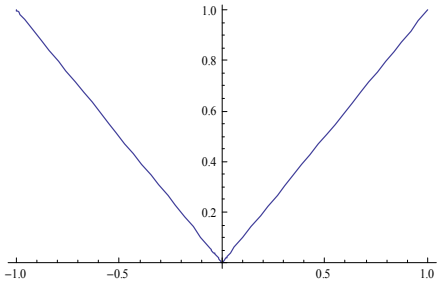
(1) $f(x) = x^3$

Deribatua x=0 puntuan zero da, baina ez da ez maximo ez minimo.



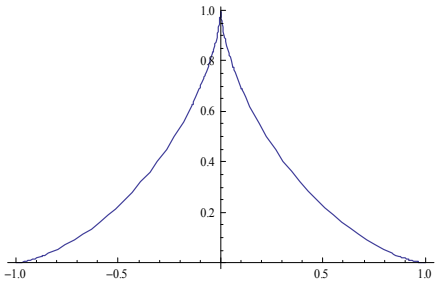
(2) $f(x) = |x|$

Deribatua ez da existitzen x=0 puntuan, baina minimo bat du.



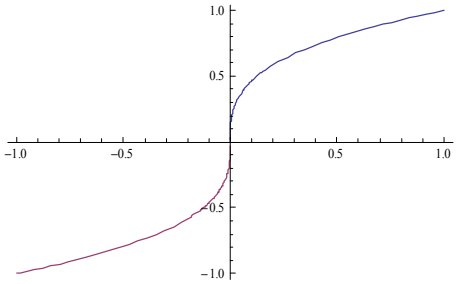
(1) $f(x) = \left(1 - x^{2/3}\right)^{3/2}$

Deribatua ez da existitzen x=0-n, eta ez da ez maximo ez minimoa



(2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Deribatua ez da existitzen x=0-n, baina maximo bat du.



Definizioa: Deribatua zero egiten diren puntuei eta deribatua existitzen ez den puntuei ***balio kritikoak*** deritze.

5.3. Mutur baten existentziarako baldintza nahikoa

Teorema:

Demagun $f(x)$ funtzioa x_1 balio kritikoa barnean duen tarte batean jarraitua eta deribagarria dela.

Puntu horretan ezkerretik eskuinera pasatzean deribatuaren zeinua ***positibotik negatibora (negatibotik positibora)*** aldatzen bada, funtzioak ***maximo (minimo)*** bat onartzen du puntuan.

Funtzio deribagarri baten maximo eta minimoaren analisia lehenengo deribatuaren bidez.

1. Funtzioaren $f'(x)$ lehenengo deribatua kalkulatu.

2. x aldagaiaren balio kritikoak aurkitu:

- **a.** $f'(x)=0$ ekuazioaren erro errealak.
- **b.** $f'(x)$ deribatua existitzen ez den x-ren balioak.

3. Puntu kritikoaren ezkerraldean eta eskuinaldean deribatuaren zeinua aztertu.

4. Aldagaiaren balio kritiko bakoitzarentzat $f(x)$ funtzioaren balioa kalkulatu.

Adibideak:

(1) $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$

1. $y'=x^2-4x+3$

2. a) $x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\left|\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right.$ $\quad x=1$ eta $x=3$

b) Deribatua jarraitua da puntu guztietan.

3.

• $x=0$ puntuan $y'(0)=3$, eta $x=2$ puntuan $y'(2)=-1$.

Beraz, y' positibotik negatibora aldatzen da, orduan $x=1$ puntuan ***MAXIMO*** bat du.

• $x=2$ puntuan $y'(2)=-1$, eta $x=4$ puntuan $y'(4)=3$.

Beraz, y' negatibotik positibora aldatzen da; orduan, $x=3$ puntuan ***MINIMO*** bat du.

4. $x=1 \Rightarrow f(1)=\dfrac{7}{3}$ eta $x=3 \Rightarrow f(3)=1$

$\left(1,\dfrac{7}{3}\right)$ ***MAXIMOA*** eta $(3,1)$ ***MINIMOA***

(2) $\boldsymbol{y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}}$

1. $y'=\sqrt[3]{x^2}+(x-1)\dfrac{2}{3}x^{2/3-1}=\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{2}{3}\dfrac{(x-1)}{\sqrt[3]{x}}=\dfrac{3x+2x-2}{3\sqrt[3]{x}}=\dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$

2. a) $y'=\dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}=0 \quad \Rightarrow 5x-2=0 \quad \Rightarrow x=\dfrac{2}{5}$

b) $y'=\infty$ egiten dutenak; hau da, $x=0$ puntuan deribatua ez da existitzen

3.

• $x=\dfrac{1}{5}$ puntuan $y'(\dfrac{1}{5})=\dfrac{-1}{\sqrt[3]{1/5}}<0$, eta $x=1$ puntuan $y'(1)=3>0$.

Beraz, y' negatibotik positibora aldatzen da; orduan, $x=\dfrac{2}{5}$ puntuan ***MINIMO*** bat du.

• $x=-1$ puntuan $y'(-1)=\dfrac{-7}{\sqrt[3]{-1}}>0$ eta $x=\dfrac{1}{5}$ puntuan $y'(\dfrac{1}{5})<0$.

Beraz, y' positibotik negatibora aldatzen da; orduan, $x=0$ puntuan ***MAXIMO*** bat du.

4. $x=0 \Rightarrow f(0)=0$ eta $x=\frac{2}{5} \Rightarrow f(\frac{2}{5})=\frac{-3}{5}\sqrt[3]{4/25}$

$(0,0)$ ***MAXIMOA*** eta $\left(\frac{2}{5},\frac{-3}{5}\sqrt[3]{4/25}\right)$ ***MINIMOA***

<u>Funtzio deribagarri baten maximo eta minimoaren analisia bigarren deribatuaren bidez.</u>

Demagun $x=x_1$ puntuan funtzioaren deribatuaren balioa zero dela, hau da, $f'(x_1)=0$. Jo dezagun, gainera, $f''(x)$ bigarren deribatua existitzen dela eta x_1 puntuaren ingurune batean jarraitua dela. Orduan:

<u>Teorema</u>

$f'(x_1)=0$ izanik, $f''(x_1)<0$ bada, funtzioak $x=x_1$ puntuan ***MAXIMO*** bat du, eta $f''(x_1)>0$ bada, ***MINIMO*** bat.

<u>Oharra:</u> Puntu kritiko batean $f''(x_1)=0$ betetzen bada, posible da puntu horretan maximo edo minimo bat edukitzea, baina posible da ez maximo ez minimorik izatea ere. Kasu horietan, analisia egiteko lehenago ikusitako metodoa erabili beharko da, hau da lehenengo deribatua erabiliz.

<u>Adibideak:</u>

<u>(1)</u> *y = 2sinx + cos2x* funtzioaren maximo eta minimoak aurkitu.

Funtzioa periodikoa denez eta haren periodoa 2π denez, nahikoa da funtzioa $[0,2\pi]$ tartean aztertzea.

<u>Lehenengo deribatua</u>

$y'=2\cos x-2\sin 2x=2\cos x-2(2\sin x\cos x)=2\cos x(1-2\sin x)$

Balio kritikoak

$\bullet \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{\pi}{2}$ eta $x_2 = \dfrac{3\pi}{2}$

$\bullet\, 2\sin x = 1 \quad \Rightarrow \sin x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \quad x_3 = \dfrac{\pi}{6}$ eta $x_4 = \dfrac{5\pi}{6}$

Bigarren deribatua

$y'' = -2\sin x - 4\cos 2x$

$\bullet\, x_1 = \pi/2 \quad \Rightarrow \left| \begin{array}{l} y''(\pi/2) = 2 > 0 \\ y(\pi/2) = 1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ ***MINIMOA*** da

$\bullet\, x_1 = 3\pi/2 \quad \Rightarrow \left| \begin{array}{l} y''(3\pi/2) = 6 > 0 \\ y(3\pi/2) = -3 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{3\pi}{2}, -3\right)$ ***MINIMOA*** da

$\bullet\, x_1 = \pi/6 \quad \Rightarrow \left| \begin{array}{l} y''(\pi/6) = -3 < 0 \\ y(\pi/6) = \dfrac{3}{2} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{3}{2}\right)$ ***MAXIMOA*** da

$\bullet\, x_1 = 5\pi/6 \quad \Rightarrow \left| \begin{array}{l} y''(5\pi/6) = -3 < 0 \\ y(5\pi/6) = \dfrac{3}{2} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3}{2}\right)$ ***MAXIMOA*** da

(2) ***y = 1 - x⁴*** **funtzioaren maximo eta minimoak aurkitu.**

Lehenengo deribatua

$y' = -4x^3$

Balio kritikoak

$\bullet\, x = 0$

Bigarren deribatua

$y'' = -12x^2$

$y''(0)=0 \Rightarrow$ Kasu horretan, bigarren deribatua erabiliz ezin dugu ezer esan.

Beraz, lehenengo deribatuaren metodoa erabiliko dugu.

- $x<0$ puntuetan $y'>0$
- $x>0$ puntuetan $y'<0$

Beraz, $x=0$ puntuan ***MAXIMO*** bat izango du.

5.4. Inflexio-puntuak. Ahurtasuna eta ganbiltasuna

Inflexio-puntuak

Teorema

Izan bedi f funtzio bat non:

$f'(a)=0=f''(a)=...=f^{n-1}(a)=0$ eta $f^{n}(a)\neq 0$.

Orduan:

(1) n bikoitia $\begin{cases} f^{n}(a)>0 \Rightarrow (a,f(a)) & \textbf{\textit{MINIMOA}} \\ f^{n}(a)<0 \Rightarrow (a,f(a)) & \textbf{\textit{MAXIMOA}} \end{cases}$

(2) n bakoitia $\Rightarrow$ $(a,f(a))$ ***INFLEXIO – PUNTUA***

Adibidea

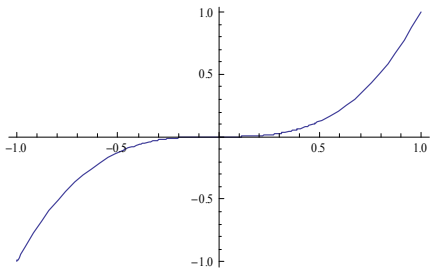
(1) $\boldsymbol{y=x^3}$

$f'(x)=3x^2=0 \Rightarrow x=0$

$f''(x)=6x$

$f'''(x)=6$

$f'(0)=f''(0)=0, \quad f'''(0)=6 \quad \Rightarrow \quad x=0$



INFLEXIO-PUNTUA da

Ahurtasuna eta ganbiltasuna

Teorema

Izan bedi *f* funtzio bat non:

$f'(a) = 0 = f''(a) = ... = f^{n-1}(a) = 0$ eta $f^n(a) \neq 0$.

Orduan:

(1) n bikoitia $\begin{cases} f^n(a) > 0 \Rightarrow \textit{funtzioa } \textbf{\textit{AHURRA}} \textit{ da} \\ f^n(a) < 0 \Rightarrow \textit{funtzioa } \textbf{\textit{GANBILA}} \textit{ edo } \textbf{\textit{KONBEXUA}} \textit{ da} \end{cases}$

(2) n bakoitia $\Rightarrow$ $(a, f(a))$ ***INFLEXIO – PUNTUA***.

Puntuaren alde batean ***AHURRA*** eta bestean ***GANBILA*** izango da, *"a"* puntuan aldaketa izanik.

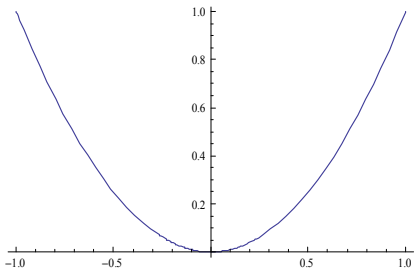
Adibidea:

(1) $\boldsymbol{y = x^2}$

$f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow x = 2$ MINIMOA da

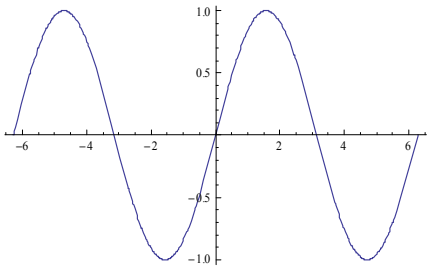
eta funtzioa AHURRA da



(2) $\boldsymbol{y = \sin x}$

$f'(x) = \cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$f''(x) = -\sin x$



Har ditzagun bi puntu, $x = \dfrac{\pi}{2}$ eta $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

• $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 < 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ MAXIMO bat da, funtzioa bere ingurune batean GANBILA (KONBEXUA) izanik.

• $x = \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow f'\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 1 > 0 \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2}$ MINIMO bat da, funtzioa haren ingurune batean AHURRA izanik.

5.5. Ariketak

Deribagarritasuna

1. Aurkitu funtzio hauen zuzen tangentea eta normala eskatutako puntuetan:

a) $f(x) = tagx + \ln(\sin x)$ $\quad x = 0$ puntuan

b) $g(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$ $\quad x = 0$ puntuan

2. Aurkitu $y = 2x^2 - 6x + 1$ parabolaren puntua, kontuan izanik puntu horretako zuzen ukitzailea $2x - y - 2 = 0$ zuzenarekin paraleloa dela.

3. Aurkitu $x^2 + y^2 + y = 3$ ekuazioaren zuzen ukitzailea eta normala $(-1, 1)$ puntuan.

4. Diferentziala erabiliz, kalkulatu adierazpen hauen balio hurbilduak:

a) $(2.001)^2$ $\quad$ b) $\sqrt{24.998}$ $\quad$ c) $\ln(1.03)$ $\quad$ d) $\cos(0.04)$

5. 20 cm-ko altuera eta 15 cm-ko erradioa duen plastikozko edalontzi zilindriko bat, urarekin betetzen dugunean, deformatu egiten da. Erradioa 1 cm/min-ko abiaduran txikitzen da, eta altuera 1,5 cm/min-ko abiaduran handitzen da. Bolumenaren aldakuntzaren abiadura aurkitu 2 minutu pasatu ondoren.

6. Bi auto toki berdinerantz doaz, beren artean angelu zuzen bat sortzen dutela. Autoetako bat 100 km/h-ko abiadura du eta 600 km-ra dago, eta beste autoa 400 km-ra dago, eta 80 km/h-ko abiadura du.

a) Zer abiaduratan gutxitzen da autoen arteko 0,5 ordu pasatu ondoren?

b) Zenbat denbora daukate autoek norabide desberdinetan jartzeko?

7,8 metroko luzera duen eskailera bat etxe batean oinarrituta dago. Eskaileraren goi-muturra hormatik 0,3 m/s-ko abiaduran jaisten bada:

a) Zenbat da goi-muturretik lurrerainoko distantzia segundo bakoitzean?

b) Zer abiaduratan bananduko da hormatik behe-muturra 2 segundo pasatu ondoren? Eta 6 segundo? Eta 10 segundo?

Taylor-en polinomioa

8. Kalkulatu, McLaurin-en garapena erabiliz, balio hauen hurbilketak:

a) $e^{0.1}$ b) $\ln(0.9)$ c) $\sin(0.02)$

9. Izan bedi $f(x)=2x^{200}+x^{100}+3x^{50}$ funtzioa. Lortu $f(x)$-ren $(x-2)$ berreketen Taylor-en 3. mailako garapena, eta hura erabiliz $f(1.995)$ funtzioaren balio hurbildua.

10. $f(x)=Ln(1+2x)^{e^{2x}}$ funtzioaren McLaurin-en 3. mailako garapena erabiliz, aurkitu $Ln\left(\sqrt{1+2x}\right)=e^{-2x}\left(1-e^{2}x^{3}\right)$ ekuazioaren erro hurbilduak.

11. $f(x)=\sin x\cdot\cos x$ funtzioaren McLaurin-en 3. mailako garapena erabiliz, ebatzi $\sin x\cdot\cos x+x=0$ ekuazioa.

12. $f(x)=1-\cos x$ eta $g(x)=\sin x$ funtzioen $x=\pi$ puntuko Taylor-en garapena erabiliz, kalkulatu $f(x)$-ren eta $g(x)$-ren ordena eta zati nagusia.

13. Lortu $f(x)=\cos x$ funtzioaren $x=\dfrac{\pi}{2}$ puntuko Taylor-en 5. mailako garapena.

14. Lortu funtzio hauen MacLaurin-en 3. mailako garapenak:

a) $f(x)=\sin 2x-\sin x$ b) $f(x)=\ln\left(\sqrt[3]{1+x}\right)+\cos\sqrt{x}$

c) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x+1}}$ d) $f(x)=e^{x}+e^{-x}$

15. Lortu funtzio hauen Taylor-en 3. mailako garapenak:

a) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x+1}}$ $x=3$ b) $f(x)=1-\sin x$ $x=\dfrac{\pi}{2}$

c) $f(x)=\ln\left(x^2+x-1\right)-\sqrt[3]{x-1}$ $\qquad x=1$

16. Kalkulatu funtzio hauen maximo eta minimoak:

a) $f(x)=x^3-x+1$ b) $f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}$ c) $f(x)=(x+1)\ln(x+1)$

17. 10×20 m^2-ko kartoi zati batekin, erpin bakoitzean karratuak moztuz, kutxa bat egin nahi dugu. Kalkulatu kutxaren dimentsioak, haren bolumena maximoa izan dadin.

18. Gizon bat autopistarik ez dagoen herri batean dago P puntu batean, A puntu batetik 10 km-ra (zuzenean eta elkarzut). Gizonak A-tik autopista zuzenean hartuz 15 km-ra dagoen B herrira joan nahi du denbora minimoa erabiliz. Zehaztu zer bide erabili behar duen, jakinik 60 km/h-ko abiaduran doala errepidetik eta 100 km/h-ko abiaduran autobidetik.

19. Erloju baten orratzak 10 eta 5 cm luze dira. Bi orratzek sortzen duten paralelepipedoa kontuan hartuz:

a) Adierazi paralelepipedoaren azalera denboraren menpe.

b) Aurkitu paralelepipedoaren azalera maximoa egiten duen 12:00 eta 12:30 arteko aldiunea. Lortu azalera.

20. 10 m^3-ko bolumena duen kono bat eraiki nahi da, baina ahal den eta material gutxien gastatuz, hau da, gainazala minimoa izanik. Kalkulatu zilindroaren dimentsioak.

21. Aurkitu azalera maximoa duen laukizuzena, jakinik alde bat OX ardatzean duela eta beste bi erpinak $y=9+x^2$ ekuazioa duen kurban dituela.

6. ALDAGAI ERREAL ANIZKOITZEN FUNTZIO ERREALEN LIMITEA ETA JARRAITUTASUNA

6.1. Aldagai erreal anizkoitzen funtzio errealak

Funtzioak

Definizioa: $\mathbb{R}^n$ -tik $\mathbb{R}$ -ra definituriko funtzioa hau da:

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(x_1,\ldots x_n) \to f(x_1,\ldots x_n)$$

Adibidea:

1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \to x^2+y^2=z$$

Definizioa: Izan bedi $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definituriko funtzio bat. Orduan, ***f-ren eremua,*** **D**, $f(x,y)$ ondo definiturik dagoen (x,y) puntuen multzoa izango da.

Adibideak:

1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \to \sqrt{x^2+y^2}$$

Eremua=D= $\mathbb{R}^2$

2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \to \sqrt{x^2+y^2-4}$$

Eremua=D= $\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \geq 4\}$

Definizioa: ***Irudi multzoa*** D eremuko elementu guztien irudiek osatzen duten multzoa da.

Definizioa: Izan bedi $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definituriko funtzio bat. Orduan, ***f-ren grafoa*** hau da:

$$G(f)=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 / z=f(x,y)\}=(x,y,f(x,y))$$

Maila-kurbak

Definizioa: Funtzioa konstantea den eremuko puntuak dira, hots, funtzioaren grafoan altuera konstantea duten puntuak.

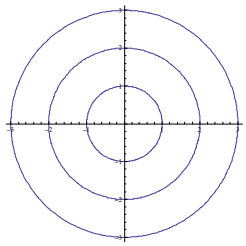
$$f(x,y)=k \quad \text{betetzen duten } (x,y) \text{ puntuak}$$

Oharra: k maila-kurba f_k izendatuko dugu

Adibidea:

1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \to x^2+y^2=z$$



6.2. Aldagai erreal anizkoitzen funtzio errealen limiteak

Definizioa: Izan bedi $(x_1,...x_n)$ bektore bat. Orduan, $\|(x_1,...x_n)\|$ ***norma*** bat izango da, honela definiturik dagoena:

$$\|(x_1,...x_n)\|=\sqrt{x_1^{\,2}+...+x_n^{\,2}}$$

Definizioa: Izan bedi $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funtzio bat. Orduan:

$$\lim_{(x_1,...x_n)\to(a_1,...a_n)} f(x_1,...x_n)=l$$

$$\forall\varepsilon>0 \ \exists\delta=\delta(\varepsilon): \quad \forall(x_1,...x_n) \quad 0<\|(x_1,...x_n)-(a_1,...a_n)\|<\delta \quad \Rightarrow \|f(x_1,...x_n)-l\|<\varepsilon$$

Limite iteratuak

Definizioa: Izan bedi $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funtzio bat. Orduan, ***f-ren limite iteratuak*** hauek izango dira:

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right)=l_1 \qquad \Big| \qquad \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)=l_2$$

Teorema

a) l_1 eta l_2 existitzen badira eta $l_1 \neq l_2$, orduan ez da existitzen limitea.

b) $\nexists l_1$ edo $\nexists l_2$, orduan ezin dugu ezer esan.

c) l_1 eta l_2 existitzen badira eta $l_1 = l_2$, orduan limitea, existitzekotan, $l = l_1 = l_2$ izango da.

Norabide-limiteak

Definizioa: Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funtzio bat. Orduan, ***f-ren limitea (a,b) puntuan eta y = g(x) norabidean*** hau izango da:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y = g(x)}} f\left(x, g(x)\right) = l$$

Teorema

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f\left(x, y\right) = l$ bada, orduan edozein norabidetatik kalkulaturiko limitea l izango da.

Oharra: $\lim_{\substack{x \to a \\ y = g(x)}} f\left(x, g(x)\right) = l_1$ eta $\lim_{\substack{x \to a \\ y = h(x)}} f\left(x, h(x)\right) = l_2$ bi norabide existitzen badira eta $l_1 \neq l_2$, orduan $\nexists \lim_{(x,y)\to(a,b)} f\left(x, y\right)$

6.3. Aldagai erreal anizkoitzen funtzio errealen jarraitutasuna

Definizioa: Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funtzio bat. Jarraitua izango da, (a,b) puntuan hau betetzen bada:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f\left(x, y\right) = f(a,b)$$

6.4. Ariketak

1. Kalkulatu funtzio hauen eremuak:

a) $f(x,y)=\sqrt{4-\left(x^2+y^2\right)}$ b) $f(x,y)=\cos x+\cos y$

c) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ d) $f(x,y)=\sqrt{x+y}$

2. Maila-kurbak erabiliz, adierazi funtzio hauek:

a) $f(x,y)=x-3y$ b) $f(x,y)=xy$ c) $f(x,y)=x^2+y^2$

3. Kalkulatu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ limitea $y=m\,x$ zuzenetan eta $y=mx^2$ paraboletan zehar.

Limite iteratuak ere kalkulatu.

4. Kalkulatu funtzio hauen limite iteratuak eta zuzenen bitarteko limiteak $(x,y)\to(0,0)$ denean:

a) $f(x,y)=\dfrac{2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ b) $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^4}$

c) $f(x,y)=\dfrac{y\sin\left(x^2\right)}{y+1}$ d) $f(x,y)=\dfrac{x^2y+y^3}{x^2+y^2}$

7. ALDAGAI ERREAL ANIZKOITZEN FUNTZIO ERREALEN DERIBAGARRITASUNA

7.1. Deribatu partziala. Interpretazio geometrikoa

Deribatu partzialak

- *f*-ren *x*-rekiko (a,b) puntuko deribatu partziala hau da:

$$f_x^{'}(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

- *f*-ren *y*-rekiko (a,b) puntuko deribatu partziala hau da:

$$f_y^{'}(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$$

7.2. Norabide deribatua. Funtzio baten puntu bateko gradientea

Norabide deribatuak

Definizioa: Izan bedi $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ funtzio bat. *f*-ren norabide deribatua (a,b) puntuan eta $\vec{u}=(u_1,u_2)$ bektore unitarioaren norabidean hau da:

$$D_{\vec{u}}f(a,b)=f_x(a,b)\cdot u_1+f_y(a,b)\cdot u_2$$

Oharra: $\vec{u}=(u_1,u_2)=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, non α $\vec{u}$ bektoreak OX ardatzarekin sortzen duen angelua baita.

Gradientea

Definizioa: Izan bedi $f(x,y)=z$ funtzio bat; orduan, $f(x,y)$ funtzioaren gradientea honako bektore hau da:

$$grad\ z = \nabla z = \nabla f = \left(f_x, f_y\right)$$

Teorema:

Funtzioaren puntu jakin bateko norabide deribatu maximoa gradientearen norabidean lortzen da. Gainera, deribatuaren balioa hau da:

$$\sqrt{\left(f_x\right)^2 + \left(f_y\right)^2}$$

7.3. Deribatu partzialak eta jarraitutasuna. Ordena handiagoko deribatu partzialak. Matrize hessiarra

Definizioa: f funtzio bat jarraitua ez bada, (a,b) puntuan ez da deribagarria izango.

Definizioa: f funtzio bat jarraitua bada (a,b) puntuan eta haren deribatu partzialak existitzen badira, orduan deribagarria izango da (a,b) puntuan.

Ordena handiagoko deribatu partzialak

- Bigarren mailako deribatu partzialak

$\bullet f''_{xx}(a,b)$ $\bullet f''_{xy}(a,b)$ $\bullet f''_{yx}(a,b)$ $\bullet f''_{yy}(a,b)$

- Bigarren mailako deribatu partzialak

$\bullet f'''_{xxx}(a,b)$ $\bullet f'''_{xxy}(a,b)$ $\bullet f'''_{xyx}(a,b)$ $\bullet f'''_{xyy}(a,b)$
$\bullet f'''_{yxx}(a,b)$ $\bullet f'''_{yxy}(a,b)$ $\bullet f'''_{yyx}(a,b)$ $\bullet f'''_{yyy}(a,b)$

<u>Teorema (Schwartz-en teorema):</u> f_{xy} eta f_{yx} funtzioak existitzen badira eta jarraituak badira (a,b) puntuan, orduan:

$$f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b)$$

<u>Matrize hessiarra</u>

$$H(f) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

<u>Adibidea:</u> Lortu $f(x,y) = x^2 y + y^2 x$ funtzioaren hessiarra.

$$f'_x = 2xy + y^2,\ f'_y = x^2 + 2xy,\ f'_{x^2} = 2y,\ f'_{y^2} = 2x,\ f'_{xy} = 2x + 2y$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+2y \\ 2x+2y & 2x \end{pmatrix}$$

<u>7.4. Aldagai erreal anitzeko funtzio erreal baten diferentziagarritasuna</u>

<u>Definizioa:</u> Izan bedi $f(x,y) = z$ funtzioa. Orduan, z-ren ***diferentziala*** hau da:

$$dz = f'_x\, dx + f'_y\, dy$$

<u>Ordena handiagoko diferentzialak:</u>

$$-d^2 z = f''_{x^2}\, dx^2 + f''_{y^2}\, dy^2 + f''_{xy}\, dx\, dy + f''_{yx}\, dy\, dx$$

$$-d^3 z = f'''_{x^3}\, dx^3 + f'''_{y^3}\, dy^3 + f''_{x^2 y}\, dx^2\, dy + f'''_{xy^2}\, dx\, dy^2 +$$
$$+ f'''_{yxx}\, dx\, dydx + f'''_{yx^2}\, dy\, dx^2 + f'''_{y^2 x}\, dy^2\, dx + f''_{yxy}\, dy\, dxdy$$

7.5. Plano ukitzailea edo tangentea

$z = f(x, y)$ funtzio baten plano ukitzailea hau da:

$$z - f(a,b) = f_x^{'}(a,b)\cdot(x-a) + f_y^{'}(a,b)\cdot(y-b)$$

Adibidea: $f(x, y) = xy$ funtzioaren plano ukitzailea lortu $(1,2)$ puntuan.

$f_x^{'} = y \quad \rightarrow f_x^{'}(1,2) = 2$ eta $f_y^{'} = x \quad \rightarrow f_x^{'}(1,2) = 1$ .Orduan:

Plano ukitzailea: $z - 2 = 2\cdot(x-1) + 1\cdot(y-2)$

7.6. Ariketak

1. Kalkulatu funtzio hauen deribatu partzialak:

a) $u(x, y) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)$

b) $u(x, y) = \arcsin\left(x^2 - y^2\right)$

c) $u(x, y, z) = e^{xy}\cos(z)$

d) $u(x, y, z) = \cos\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$

2. Frogatu adierazpenok:

a) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, baldin $u = \sin\dfrac{x+y}{2z}$

b) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, baldin $z = \cos\dfrac{x^2-y^2}{xy}$

c) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, baldin $z = arc\sin\dfrac{x}{y}$

d) $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, baldin $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

e) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{1}{z}$, baldin $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

g) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z^3$, baldin $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

3. Lortu funtzio hauen du eta d^2u :

a) $u(x, y, z) = x \ln z + y \cos x + z\, tag\, x$ b) $u(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2$

4. Lortu funtzioon plano tangentea emandako puntuan:

a) $z(x, y) = \sin xy + \cos xy$; $P(0,0,1)$ b) $z(x, y) = xy$; $P(2,2,4)$

c) $z(x, y) = \dfrac{x^2}{2^2} + y^2$; $P(2,1,2)$ d) $z(x, y) = \ln(x + y)$; $P(1,0,0)$

5. Hurrengo funtzioa emanik: $f(x, y) = x^2 y^2 - 10y$.

a) Kalkulatu $P(1,1)$ puntuko deribatua OX ardatzarekiko 30º-ko angelua sortzen duen bektorearen norabidean.

b) Zer norabidetan izango da puntu horretako deribatua maximoa? Zer balio izango du?

6. $P(x, y)$ puntuko altuerak $h(x, y) = x^2 + y^2$ funtzioari jarraitzen dio.

a) Kalkulatu $P(-3,1)$ puntuko altuera-aldakuntza $\vec{s} = \sqrt{3}\vec{i} - \vec{j}$ bektorearen norabidean.

b) Marraztu P puntutik pasatzen den maila-kurba eta beste bi maila-kurba.

c) Kalkulatu P puntuko gradientea.

d) Kalkulatu P puntuko deribatua tenperaturaren hazkundea maximoa den norabidean.

7. Labe bateko $P(x,y)$ puntu bateko tenperaturak $T(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ funtzioari jarraitzen dio.

a) Kalkulatu $P(1,1)$ puntuko tenperaturaren aldakuntza-koefizientea OX ardatzarekiko 45º-ko angelua sortzen duen bektorearen norabidean.

b) Kalkulatu P puntuko tenperaturaren hazkundea maximoa duen norabidea, eta lortu haren balioa.

8. Izan bedi $f(x,y)=x^2+y^2+xy+1$ funtzioa.

a) Kalkulatu $P(0,1)$ puntuko norabide deribatua $\vec{s}=-\sqrt{3}\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}$ bektorearen norabidean.

b) Kalkulatu P puntuko *f*-ren gradientea.

c) Zer norabidetan izango du funtzioak norabide deribatu maximoa? Zer balio izango du?

d) Kalkulatu P puntutik pasatzen den maila-kurbaren zuzen ukitzailea P puntuan.

9. Izan bitez $z(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$ funtzioa eta $P(1,1)$ puntua:

a) Marraztu P puntutik pasatzen den maila-kurba.

b) Kalkulatu P puntuko norabide deribatua $\vec{s}(1,-2)$ bektorearen norabidean.

c) Zein norabidetan da P puntuko deribatua maximoa? Zer balio du?

8. FUNTZIO KONPOSATU ETA INPLIZITUEN DERIBAZIOA

8.1. Aldagai erreal anizkoitzen funtzio errealetarako katearen erregela orokorra

Katearen erregela

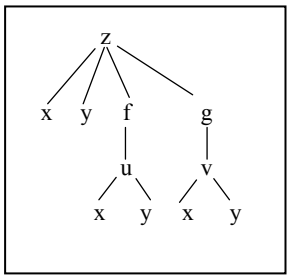
Demagun $f(x,y)$ funtzio bat dugula, non x eta y aldagaiak t-ren funtzio baitira. Hau da, $x = g(t)$ eta $y = h(t)$. Orduan, $z = f(x,y) = f\left(g(t), h(t)\right)$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Adibideak:

(1) $\boldsymbol{z = x\, f\left(\frac{x}{y}\right) + y\, g\left(\frac{y}{x}\right)}$ **bada, non** $\boldsymbol{x, y \neq 0}$**. Frogatu** $\boldsymbol{xz'_x + yz'_y = z}$ **dela**

$\boldsymbol{z = x\, f(u) + y\, g(v)}$, non $\boldsymbol{u = \frac{x}{y}}$ eta $\boldsymbol{v = \frac{y}{x}}$



$$z = x \cdot f + y \cdot g$$

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial f}\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial g}\frac{dg}{dv}\frac{\partial v}{\partial x} = f + x\, f'_u\left(\frac{1}{y}\right) + y\, g'_v\left(\frac{-y}{x^2}\right)$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial f}\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial g}\frac{dg}{dv}\frac{\partial v}{\partial y} = g + x\, f'_u\left(\frac{-x}{y^2}\right) + y\, g'_v\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$x\, z'_x + y\, z'_y = z$$

$$\Rightarrow x\left(f + x\, f'_u\left(\frac{1}{y}\right) + y\, g'_v\left(\frac{-y}{x^2}\right)\right) + y\left(g + x\, f'_u\left(\frac{-x}{y^2}\right) + y\, g'_v\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$= x\, f + y\, g + f'_u\left(\frac{x^2}{y} - \frac{x^2}{y}\right) + g'_v\left(\frac{-y^2}{x} - \frac{y^2}{x}\right) = x\, f + y\, g = z$$

(2) $z = x\,f\left(\dfrac{2y}{x}\right) + x\,y\,g\left(3x - y, x^2 - y^2\right)$ **bada, kalkulatu** $z'_x\left(1,1\right)$, $z'_y\left(1,1\right)$ **eta** dz, **jakinik** $f(2) = 2$, $f'(2) = -1$, $g\left(2,0\right) = 0$, $g_1\left(2,0\right) = 1$ **eta** $g_2\left(2,0\right) = -1$

$$z = x\,f\left(u\right) + xy\,g\left(v,w\right),\ \text{non}\ u = \frac{2y}{x}\ ,\ v = 3x - y\ \ \text{eta}\ \ w = x^2 - y^2$$

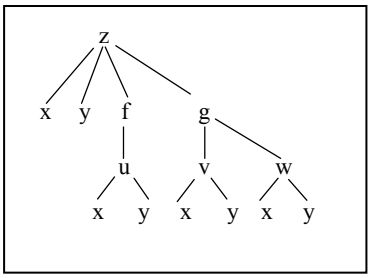
$$z = x \cdot f + x\,y \cdot g$$

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial f}\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} =$$

$$= \left(f + y\,g\right) + x\,f'_u\left(\frac{-2y}{x^2}\right) + x\,y\,g'_v\left(3\right) + x\,y\,g'_w\left(2x\right)$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial f}\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} =$$

$$= x\,g + x\,f'_u\left(\frac{2}{x}\right) + x\,y\,g'_v\left(-1\right) + x\,y\,g'_w\left(-2y\right)$$



$$z'_x\left(1,1\right) = f\left(2\right) + g\left(2,0\right) - 2f'_u\left(2\right) + 3g'_v\left(2,0\right) + 2\,g'_w\left(2,0\right) = 2 + 0 + 2 + 3 - 2 = 5$$

$$z'_y\left(1,1\right) = g\left(2,0\right) + 2\,f'_u\left(2\right) - g'_v\left(2,0\right) - 2\,g'_w\left(2,0\right) = 0 - 2 - 1 + 2 = -1$$

Jakobiarra

Izan bedi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funtzio bat, non $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \left(u_1, u_2, ..., u_m\right)$. Orduan, funtzio horren ***jakobiarra*** matrize hau da:

$$D\left(\frac{u_1, u_2, ..., u_m}{x_1, x_2, ..., x_n}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

8.2. Ekuazio-sistema baten bitartez inpliziturik definiturik dagoen aldagai bektorialen funtzio bektorial baten existentziaren teorema. Deribatuen zehaztapena

Inplizituki definituriko funtzio baten existentziaren teorema

Izan bitez $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bi funtzio jarraitu.

(1) $f(x,y)=0$

(2) $f_x^{'}, f_y^{'}$ deribatuak existitzen dira eta jarraituak dira.

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0$

Orduan, $f(x,y)=0$ ekuazioak $y(x)$ funtzioa inplizituki definitzen du.

Ekuazio-sistema batek inplizituki definituriko aldagai bektorialen funtzio bektorial baten existentziaren teorema

Izan bitez $f,g:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ bi funtzio jarraitu.

(1) $f(x,y,u,v)=0$ eta $g(x,y,u,v)=0$

(2) $f_x^{'}, f_y^{'}, f_u^{'}, f_v^{'}, g_x^{'}, g_y^{'}, g_u^{'}, g_v^{'}$ deribatuak existitzen dira eta jarraituak dira.

(3) $D\left(\dfrac{f,g}{u,v}\right) \neq 0$

Orduan, $\begin{cases} f(x,y,u,v)=0 \\ g(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ ekuazioek $\begin{cases} u(x,y) \\ v(x,y) \end{cases}$ funtzioak inplizituki definitzen dituzte.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} -f_x^{'} & f_v^{'} \\ -g_x^{'} & g_v^{'} \end{vmatrix}}{D\left(\dfrac{f,g}{u,v}\right)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix} -f_y^{'} & f_v^{'} \\ -g_y^{'} & g_v^{'} \end{vmatrix}}{D\left(\dfrac{f,g}{u,v}\right)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} f_u^{'} & -f_x^{'} \\ g_u^{'} & -g_x^{'} \end{vmatrix}}{D\left(\dfrac{f,g}{u,v}\right)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix} f_u^{'} & -f_y^{'} \\ g_u^{'} & -g_y^{'} \end{vmatrix}}{D\left(\dfrac{f,g}{u,v}\right)}$$

Funtzio inplizituen plano ukitzaile edo tangentea

Izan bedi $F(x,y,z)=0$ inplizituki definituriko $z=f(x,y)$ funtzio bat. Orduan, (a,b,c), non $c=f(a,b)$, puntuko plano ukitzailea hau da:

$$F_x'(a,b)\cdot(x-a)+F_y'(a,b)\cdot(y-b)+F_z'(a,b)\cdot(z-c)=0$$

Adibidea: Lortu $F(x,y,z)=xy-z=0$ funtzio inplizituaren plano ukitzailea $(1,2,2)$ puntuan.

$F_x'=y \quad \to F_x'(1,2,2)=2$, $F_y'=x \quad \to F_y'(1,2,2)=1$ eta $F_z'=-1 \quad \to F_z'(1,2,2)=-1$.

Orduan:

Plano ukitzailea: $2\cdot(x-1)+1\cdot(y-2)+(-1)\cdot(z-2)=0$

8.3. Ariketak

Funtzio konposatuen deribazioa

1. Frogatu:

a. $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=0$, baldin $z=2f(y-x,x-y)$

b. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, baldin $z=f(x^2-y^2)$

c. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x^2z$, baldin $z=x^2f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y}\right)$

d. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{2y}{x}=0$, baldin $z=\dfrac{y}{x}+f(2xy)$

2. Kalkulatu:

a. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial xy}$, baldin $z = 2f\left(y-x, x-y\right)$

b. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial xy}$, baldin $z = 2f\left(xy, x+y\right)$

3. Frogatu:

a. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$, baldin $u = f(x+y) + g(-y-x)$

b. $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x\,y \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, baldin $u = x\,f\left(\dfrac{x}{y}\right) + y\,g\left(\dfrac{y}{x}\right)$

Funtzio inplizituen deribazioa

4. Kalkulatu $y'(x)$ eta $y''(x)$, $y(x)$ funtzioa inplizituki definitua badago:

a) $xy - tag(y+x) = 0$ b) $x \sin y - y \cos x = 0$

5. Frogatu:

a. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, baldin $f\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{x}, z\right) = 0$ ekuazioak $z(x,y)$ funtzioa inplizituki definitzen badu.

b. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$, baldin $f\left(\dfrac{z}{x}, \dfrac{z}{y}\right) = 0$ ekuazioak $z(x,y)$ funtzioa inplizituki definitzen badu.

6. Izan bedi $F(x,y) = x^2 + 2x\,y + y^2$, non:

a. Frogatu $F(x,y) = 0$ ekuazioak $\left(1,-1\right)$ puntuaren ingurune batean $y = f(x)$ funtzio inplizitu bat definitzen duela.

b. Kalkulatu $\dfrac{dy}{dx}$ eta $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

c. Lortu $y = f(x)$ funtzioaren P puntuko malda.

7. Izan bedi $F(x,y)=\ln\left(x^2+y\right)$.

a. Frogatu $F(x,y)=0$ ekuazioak $P(1,1)$ puntuaren ingurune batean $y=f(x)$ funtzio inplizitu bat definitzen duela.

b. Kalkulatu $\dfrac{dy}{dx}$ eta $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

c. Aztertu $y=f(x)$ funtzioaren muturrak.

8. $F(x,y,z)=z^2+z+2y+\ln x=0$ ekuazioak $z=z(x,y)$ funtzio inplizitu bat definitzen du $P\left(x_0,y_0,z_0\right)=\left(1,-3,2\right)$ puntuaren ingurune batean.

a. Kalkulatu $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ eta $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ P puntuan.

b. Kalkulatu $F(x,y,z)=0$ gainazalaren plano tangentea P puntuan.

c. $y=f(x)$ funtzioak mutur erlatibo bat du $(1,-3)$ puntuan?

d. Kalkulatu $y=f(x)$ funtzioaren Taylor-en garapena x=1 puntuan

9. $y^2-1-2tg\left(xy\right)=0$ $\left(F(x,y)=0\right)$ ekuazioak $y=f(x)$ funtzio inplizitu bat definitzen du $P(0,1)$ puntuaren ingurune batean.

a. Kalkulatu $y(0), y'(0)$ eta $y''(0)$.

b. Lortu $y(x)$ funtzioaren McLaurin-en 2. ordenako garapena.

c. Lortu, aurreko garapena erabiliz, $y(0,01)$-en balio hurbildua.

10. Ekuazio-sistema honek

$$\begin{cases} 2x+y+t=0 \\ x^2+y^2-2t^2=0 \end{cases}$$

inplizituki definitzen ditu $x=f(t)$ eta $y=g(t)$ funtzioak $P(-1,1,1)$ puntuaren ingurune batean.

a. Kalkulatu $f(1), f'(1), g(1)$ eta $g'(1)$.

b. Kalkulatu $f(t)$ eta $g(t)$ funtzioen Taylor-en 2. ordenako garapena.

11. Ekuazio-sistema honek:

$$\begin{cases} e^{x+y} + \dfrac{\sin v}{u} = 0 \\ e^{u+v} + \dfrac{\cos y}{x} = 0 \end{cases}$$

inplizituki x eta y aldagaien u eta v bi funtzio definitzen ditu.

Kalkulatu $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$ eta $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

12. Ekuazio-sistema honek:

$$\begin{cases} y + x + u + z = 0 \\ xy + uz = 0 \end{cases}$$

inplizituki $z(x, y)$ eta $u(x, y)$ bi funtzio definitzen ditu $P\left(x_0, y_0, z_0, u_0\right) = \left(1, -1, 1, -1\right)$ puntuaren ingurune batean. Kalkulatu $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial x}$ eta $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ puntu horretan.

9. ALDAGAI ERREAL ANIZKOITZEN FUNTZIO ERREALEN DERIBAGARRITASUNAREN PROPIETATEAK

9.1. Aldagai erreal anizkoitzen funtzio errealen muturren existentzia

Maximo eta minimo erlatiboak

Definizioa: $f(x_1,...,x_n)$ funtzioak $(x_1^0,...,x_n^0)$ puntuan ***maximo erlatibo*** bat duela esaten da, $(x_1^0,...,x_n^0)$ puntua duen tarte bat existitzen bada, non tarte horretako edozein $(x_1,...,x_n)$-rentzat $f(x_1,...,x_n) < f(x_1^0,...,x_n^0)$ betetzen baita.

Definizioa: $f(x_1,...,x_n)$ funtzioak $(x_1^0,...,x_n^0)$ puntuan ***minimo erlatibo*** bat duela esaten da, $(x_1^0,...,x_n^0)$ puntua duen tarte bat existitzen bada, non tarte horretako edozein $(x_1,...,x_n)$-rentzat $f(x_1,...,x_n) > f(x_1^0,...,x_n^0)$ betetzen baita.

9.2. Muturren definizioa

9.2.1. Muturren existentziarako baldintza beharrezkoak

Teorema (baldintza beharrezkoa):

Demagun $f(x_1,...,x_n)$ funtzioa diferentziagarria dela $(x_1^0,...,x_n^0)$ puntuan. Orduan, $(x_1^0,...,x_n^0)$ puntua mutur erlatibo bat izango da baldin:

$$\nabla f(x_1^0,...,x_n^0) = 0$$

Hau da, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,...,x_n^0) = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^0,...,x_n^0) = 0$

<u>Oharra:</u> Bi aldagaiko $f(x,y)$ funtzioa badugu $f(x,y)$ funtzioak (x_0,y_0) puntuan mutur erlatibo bat izango du, baldin:

$$\nabla f(x_0,y_0)=0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$$

9.2.2. Muturen existentziarako baldintza nahikoak

<u>Teorema (baldintza nahikoa):</u>

Demagun $f(x_1,...,x_n)$ funtzioa diferentziagarria dela $(x_1^0,...,x_n^0)$ puntuan eta bigarren ordenako deribatuak dituela. Orduan, $\nabla f(x_1^0,...,x_n^0)=0$ betetzen bada:

$$H(f)_{(x_1^0,...,x_n^0)}=\begin{pmatrix} f'_{x_1^2} & \cdots & f'_{x_1x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{x_nx_1} & \cdots & f'_{x_n^2} \end{pmatrix}_{(x_1^0,...,x_n^0)}$$

1. $d^2f>0$, *positiboki definitua* badago, orduan $(x_1^0,...,x_n^0)$ ***MINIMOA*** izango da
2. $d^2f<0$, *negatiboki definitua* badago, orduan $(x_1^0,...,x_n^0)$ ***MAXIMOA*** izango da

<u>Oharrak:</u>

Izan bedi Δ_k, k ordenako minor nagusia. Hau da:

$$\Delta_{k(x_1^0,...,x_n^0)}=\begin{pmatrix} f'_{x_1^2} & \cdots & f'_{x_1x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{x_kx_1} & \cdots & f'_{x_k^2} \end{pmatrix}_{(x_1^0,...,x_n^0)}$$

1. $d^2f>0$, *positiboki definitua* dago $\Leftrightarrow$ $\Delta_k>0$ edozein k (MINIMOA)
2. $d^2f<0$, *negatiboki definitua* dago $\Leftrightarrow$ $(-1)^k\Delta_k>0$ edozein k (MAXIMOA)

Teorema (baldintza nahikoa):

Demagun $f(x,y)$ funtzioa diferentziagarria dela (x_0,y_0) puntuan eta bigarren ordenako deribatuak dituela. Orduan, $\nabla f(x_0,y_0)=0$ betetzen bada:

$$H(f)_{(x_0,y_0)}=\begin{pmatrix} f'_{x^2} & f'_{xy} \\ f'_{yx} & f'_{y^2} \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)}$$

1. $\left|H(f)_{(x_0,y_0)}\right|<0 \;\Rightarrow\; (x_0,y_0)$ ***ZELADURA - PUNTUA*** izango da

2. $\left|H(f)_{(x_0,y_0)}\right|>0$ eta $\begin{cases} f''_{x^2}>0 \Rightarrow (x_0,y_0) & \textbf{\textit{MINIMOA}} \text{ izango da} \\ f''_{x^2}<0 \Rightarrow (x_0,y_0) & \textbf{\textit{MAXIMOA}} \text{ izango da} \end{cases}$

9.3. Maximo eta minimo baldintzatuak. Lagrange-ren biderkatzailearen metodoa

Maximo eta minimo baldintzatuak

Izan bedi $f(x_1,...,x_n)$ funtzio diferentziagarri bat. Orduan, *f*-ren muturrak aurkitu nahi ditugu $g(x_1,...,x_n)=0$ baldintza betetzen duten puntuen artean. Hau da:

$$\begin{array}{c} \textbf{Max/Min} \quad f(x_1,...,x_n) \\ g(x_1,...,x_n)=0 \end{array}$$

Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa

Izan bedi problema hau:
$$\begin{array}{c} \textbf{Max/Min} \quad f(x_1,...,x_n) \\ g(x_1,...,x_n)=0 \end{array}$$

Problema horren mutur erlatiboak lortu nahi ditugu. Horretarako, defini dezagun Lagrange-ren funtzioa: $\mathcal{L}(x_1,...,x_n)=f(x_1,...,x_n)-\lambda\, g(x_1,...,x_n)$.

Baldintza beharrezkoa

$$\mathcal{L}'_{x_1}\left(x_1^0,...,x_n^0\right)=\mathcal{L}'_{x_2}\left(x_1^0,...,x_n^0\right)=...=\mathcal{L}'_{x_n}\left(x_1^0,...,x_n^0\right)=0$$

Baldintza nahikoa

Izan bedi *w* funtzioa *f* funtzioaren berdina baina *g* baldintza ordezkatuta.

1. $d^2w>0$ positiboki definituta, orduan $\left(x_1^0,...,x_n^0\right)$ ***MINIMOA*** izango da.
2. $d^2w<0$ negatiboki definituta, orduan $\left(x_1^0,...,x_n^0\right)$ ***MAXIMOA*** izango da.

KASU PARTIKULARRA

Max/Min $f(x,y)$
$g(x,y)=0$ non $\mathcal{L}(x,y)=f(x,y)-\lambda\, g(x,y)$

Baldintza beharrezkoa

$$\boxed{\mathcal{L}'_x(x_0,y_0)=\mathcal{L}'_y(x_0,y_0)=0}$$

Baldintza nahikoa

$$H(L)_{(x_0,y_0)}=\begin{pmatrix}\mathcal{L}'_{x^2} & \mathcal{L}'_{xy} & \mathcal{L}'_{x\lambda}\\ \mathcal{L}'_{yx} & \mathcal{L}'_{y^2} & \mathcal{L}'_{x\lambda}\\ \mathcal{L}'_{\lambda x} & \mathcal{L}'_{\lambda y} & \mathcal{L}'_{\lambda^2}\end{pmatrix}_{(x_0,y_0)}=\begin{pmatrix}\mathcal{L}'_{x^2} & \mathcal{L}'_{xy} & g'_x\\ \mathcal{L}'_{yx} & \mathcal{L}'_{y^2} & g'_y\\ g'_x & g'_y & 0\end{pmatrix}_{(x_0,y_0)}$$

1. $\left|H(L)_{(x_0,y_0)}\right|>0$ (x_0,y_0) ***MAXIMOA*** izango da.

2. $\left|H(L)_{(x_0,y_0)}\right|<0$ (x_0,y_0) ***MINIMOA*** izango da.

9.4. Ariketak

1. Aurkitu eta sailkatu funtzio hauen muturrak:

a) $f(x,y)=x^3-xy+x^2y$

d) $f(x,y)=x^3-y^3-2x^2-y^2$

e) $f(x,y)=x^3-y^3+x^2+y^2-2x\,y$

2. $x^2\ y$ funtzioa minimizatu $x^2+y^2=4$ zirkunferentzian.

3. Aurkitu $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ elipsean inskribaturiko azalera maximoko laukizuzena.

4. Aurkitu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ elipsoidean inskribaturiko bolumen maximoko paralelepipedoa.

5. Kalkulatu $f(x,y)=x^2+y^2-x\,y$ funtzioaren muturrak.

6. Kalkulatu $f(x,y)=x^2+y^2-x\,y$ funtzioaren muturrak $g(x,y)=x-x\,y=0$ baldintzapean.

7. Aurkitu $x^2+y^2=4$ baldintza betetzen duten puntuen artean $f(x,y)=x-2y$ funtzioaren maximoa.

10. JATORRIZKO FUNTZIOEN KALKULURAKO METODO OROKORRAK. INTEGRAL MUGAGABEA

10.1. Jatorrizko funtzioa. Integral mugagabea

Deribagarritasunaren kapituluan zera aztertu dugu: F(x) funtzio bat izanik bere deribatua nola aurkitu, f(x)=F'(x).

Orain, aurkakoa aztertuko dugu: f(x) funtzio bat izanik, F(x) beste funtzio bat nola aurkitu, non deribatua f(x) baita, hau da, F'(x)=f(x).

Definizioa: Izan bedi $[a,b]$ tarte bat. Tarteko edozein puntutan F'(x)=f(x) betetzen bada, F(x) funtzioa tarte horretan f(x) funtzioaren **jatorrizko funtzioa** dela esango dugu.

Adibidea:

1) Aurkitu $f(x)=x^2$ funtzioaren jatorrizko funtzio bat:

$F(x)=\frac{x^3}{3}+C$ izango da jatorrizko funtzioa, non C edozein zenbaki erreal baita.

Propietateak

1. Bi edo funtzio gehiagoren baturaren integrala funtzio horien integralen batura da.

$$\int [f_1(x)+f_2(x)]\,dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx$$

2. Konstanteak integraletatik kanpora atera daitezke, biderketetan.

$$\int a\,f\,(x)\,dx=a\int f\,(x)\,dx$$

Integral zuzenen taula

Integrazio-metodoekin hasita, funtzio elementalen integrazio-taula ikusiko dugu.

INTEGRAL ZUZENEN TAULA

1. $\int 1\, dx = x + K$

2. $\int x^{\alpha}\, dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K \qquad \alpha \neq 1$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + K$

4. $\int e^{x}\, dx = e^{x} + K$

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + K$

6. $\int \cos x\, dx = \sin x + K$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tagx + K$

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -cotagx + K$

9. $\int tagx\, dx = -\ln|\cos x| + K$

10. $\int \operatorname{cotg} x\, dx = \ln|\sin x| + K$

11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctagx + K$

12. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} arctag \dfrac{x}{a} + K$

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + K$

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + K$

15. $\int a^{x} = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + K$

10.2. Aldagai-aldaketa edo -ordezkapena

Demagun $\int f(x)\,dx$ lortu nahi dugula, baina ez dakigu zein den $f(x)$ -ren jatorrizko funtzioa. Egin dezagun $x=\phi(t)$ aldagai-aldaketa, non $\phi(t)$ eta haren deribatua jarraituak baitira eta alderantzizko funtzioa baitute. Orduan, $dx=\phi'(t)\,dt$ denez:

$$\int f(x)\,dx=\int f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt$$

Bi integral horiek berdinak direla frogatzeko, haien *x*-rekiko deribatuak berdinak direla frogatzea beharrezkoa da.

Frogapena:

$$\bullet\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right)=f(x)$$

$$\bullet\frac{d}{dx}\left(\int f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt\right)=\frac{d}{dt}\left(\int f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt\right)\frac{dt}{dx}=f(\phi(t))\,\phi'(t)\frac{dt}{dx}=\begin{pmatrix}\dfrac{dx}{dt}=\phi'(t)\\ \Downarrow\\ \dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{\phi'(t)}\end{pmatrix}=$$

$$=f(\phi(t))\,\phi'(t)\frac{1}{\phi'(t)}=f(\phi(t))=f(x)$$

Oharra: Gehienetan, $x=\phi(t)$ aukeratu beharrean, $t=\psi(x)$ aukeratuko dugu.

Adibideak:

1) $\int\sqrt{\sin x}\cos x\,dx=\begin{pmatrix}t=\sin x\\ dt=\cos x\,dx\end{pmatrix}=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{1/2}\,dt=\dfrac{t^{1/2+1}}{1/2+1}+K=\dfrac{2}{3}\sin^{3/2}x+K$

2) $\int\dfrac{x}{1+x^2}\,dx=\begin{pmatrix}t=1+x^2\\ dt=2x\,dx\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{dt}{t}=\dfrac{1}{2}\ln|t|+K=\dfrac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+K$

3) $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{dx/a^2}{a^2/a^2 + x^2/a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(x/a\right)^2} = \begin{pmatrix} t = x/a \\ dt = dx/a \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} arctgt + K = \frac{1}{a} arctg\left(\frac{x}{a}\right) + K$$

4) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx/a}{\sqrt{a^2/a^2 - x^2/a^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(x/a\right)^2}} = \begin{pmatrix} t = x/a \\ dt = dx/a \end{pmatrix} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + K = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + K$$

5) $$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \begin{pmatrix} t = \ln x \\ dt = \dfrac{dx}{x} \end{pmatrix} = \int t^3\, dt = \frac{t^4}{4} + K = \frac{(\ln x)^4}{4} + K$$

6) $$\int \frac{x}{1+x^4} dx = \begin{pmatrix} t = x^2 \\ dt = 2x\, dx \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} arctg\, t + K = \frac{1}{2} arctg\, x^2 + K$$

7) $$\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2} = \begin{pmatrix} t = x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \\ dt = \dfrac{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \dfrac{t}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx \end{pmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + K =$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + K$$

8) $$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \begin{pmatrix} t = \dfrac{a+x}{a-x} \Rightarrow t = \dfrac{a+x}{a-x}\dfrac{a-x}{a-x} = \dfrac{a^2-x^2}{(a-x)^2} \\ dt = \dfrac{2a}{(a-x)^2} dx \Rightarrow dt = \dfrac{2at}{a^2-x^2} dx \end{pmatrix} = \int \frac{dt}{2at} = \frac{1}{2a}\ln|t| + K$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + K$$

10.3. Zatikako integralak

Izan bitez $u(x)$ eta $v(x)$ x-ren bi funtzio, orduan:

Diferentziala $\quad d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$

Integratuz $\quad u \cdot v = \int u \cdot dv + \int v \cdot du$

edo $\quad \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

Beraz, **zatikako integrazioaren formula** hau izango da: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

Adibideak:

1)

$$\int x \sin x\, dx = \begin{pmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin x dx & v = \int \sin x dx = -\cos x \end{pmatrix} = -x\cos x + \int \cos dx = -x\cos x + \sin x + K$$

2) Zatikako integrazioaren metodoa kasu askotan erabiltzen da. Adibidez, era honetako integraletan:

$$\int x^k \sin ax\, dx \ , \ \int x^k \cos ax\, dx \ , \ \int x^k e^{ax}\, dx \ , \ \int x^k \ln x\, dx$$

3)

$$\int arctgx\, dx = \begin{pmatrix} u = arctgx & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx & v = \int dx = x \end{pmatrix} = x\, arctgx - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x\, arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx =$$

$$= x\, arctgx - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + K$$

4)

$$\int x^2 e^x\, dx = \begin{pmatrix} u = x^2 & du = 2x\, dx \\ dv = e^x\, dx & v = e^x \end{pmatrix} = x^2 e^x - \int 2x\, e^x\, dx = \begin{pmatrix} u = 2x & du = 2\, dx \\ dv = e^x\, dx & v = e^x \end{pmatrix} =$$

$$= x^2 e^x - \left(2xe^x - \int 2e^x\, dx\right) = x^2 e^x - 2xe^x - 2e^x + K$$

5)

$$\int\left(x^2+7x-5\right)\cos 2x\,dx=\begin{pmatrix} u=x^2+7x-5 & du=\left(2x+7\right)dx \\ dv=\cos 2x\,dx & v=\sin 2x/2 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{\left(x^2+7x-5\right)\sin 2x}{2}-\frac{1}{2}\int\left(2x+7\right)\sin 2x\,dx=\begin{pmatrix} u=2x+7 & du=2\,dx \\ dv=\sin 2x\,dx & v=-\cos 2x/2 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{\left(x^2+7x-5\right)\sin 2x}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{\left(2x+7\right)}{2}\cos 2x+\int\cos 2x\,dx\right)=$$

$$=\frac{\left(x^2+7x-5\right)\sin 2x}{2}+\frac{\left(2x+7\right)}{4}\cos 2x-\frac{\sin 2x}{4}+K$$

10.4. Funtzio arrazionalen integrazioa

Izan bedi funtzio arrazional bat. Orduan, bi polinomioen zatiketa gisa idatz dezakegu.

$$S(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1 x+b_0}$$

$P(x)$-k eta $Q(x)$-k erro desberdinak dituztela joko dugu. Zenbakitzailearen maila izendatzailearen maila baino txikiagoa bada, **frakzio propio** deituko diogu, eta, alderantziz, zenbakitzailearen maila izendatzailearen maila baino handiagoa bada **frakzio inpropioa**.

Frakzio inpropioa bada, zenbakitzailea izendatzaileaz zatitu dezakegu:

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}=M(x)+\dfrac{H(x)}{Q(x)}$, non $M(x)$ polinomio bat baita eta $\dfrac{H(x)}{Q(x)}$ frakzio propioa.

Adibidea:

$\dfrac{x^4-3}{x^2+2x+1}$ frakzio inpropioa da. Beraz, zatitu dezagun x^4-3 polinomioa x^2+2x+1 polinomioaz.

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - 3 & x^2+2x+1 \\ \cline{2-2}
-x^4-2x^3-x^2 & x^2-2x+3 \\ \cline{1-1}
-2x^3-x^2-3 & \\
2x^3+4x^2+2x & \\ \cline{1-1}
3x^2+2x-3 & \\
-3x^2-6x-3 & \\ \cline{1-1}
-4x-6 &
\end{array}
$$

Orduan: $\dfrac{x^4-3}{x^2+2x+1} = \left(x^2-2x+3\right) + \dfrac{-4x-6}{x^2+2x+1}$

<u>Definizioa</u>: Era honetako frakzio arrazional sinpleei I., II., III. eta IV. motako frakzio sinpleak deritze.

$$I.\ \frac{A}{x-a} \qquad II.\ \frac{A}{(x-a)^k} \qquad III.\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

Frogatu daiteke edozein frakzio arrazional frakzio sinpleen batura gisa idatz daitekeela. Frakzio sinpleen integrazioak ezagunak izango dira, eta, beraz, frakzio osoaren integrala kalkulatu ahal izango dugu.

Ebatz ditzagun frakzio sinpleak:

$$I.\ \int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + K$$

$$II.\ \int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = \int A(x-a)^{-k}\,dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + K$$

$$III.\ \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)}{x^2+px+q}\,dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} = \begin{pmatrix} t = x+\frac{p}{2} \\ dt = dx \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} = \left(\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctag\frac{x}{a}\right) =$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\sqrt{4q-p^2}}+K=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+K$$

Frakzio edo zatiki arrazionalen deskonposizioa frakzio sinpleen bitartez

Edozein frakzio arrazional propio frakzio sinpleen batura gisa deskonposa dezakegula ikusiko dugu.

Izan bedi $\frac{P(x)}{Q(x)}$ frakzio arrazional propio bat.

Teorema:

Izan bedi x=a zenbakitzaileko erro anizkoitz bat, hau da, $Q(x)=(x-a)^k Q_1(x)$, non $Q_1(a)\neq 0$. Orduan, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ frakzio arrazional propioa bi frakzio propioren batura gisa adieraz daiteke.

$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$, non $A\neq 0$, konstante bat da, eta $P_1(x)$ polinomioaren maila $(x-a)^{k-1}Q_1(x)$ polinomioaren maila baino txikiagoa da.

Teorema:

$Q(x)=\left(x^2+px+q\right)Q_1(x)$ bada, non polinomioa ez baitu zatitzen $\left(x^2+px+q\right)$ polinomioak.

Orduan, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ frakzio arrazional propio bi frakzio arrazional propioren batura gisa idatz daiteke.

$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)}+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, non $P_1(x)$-ren maila $Q_1(x)$ polinomioaren maila baino txikiagoa baita.

Funtzio arrazionalen integrazioa

Demagun $\frac{P(x)}{Q(x)}$-ren integrala kalkulatu nahi dugula, hau da: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$

Frakzioa **inpropioa** bada. $M(x)$ polinomio baten eta $\frac{F(x)}{Q(x)}$ frakzio **propio** baten arteko batura gisa adieraz dezakegu.

Orain, $\frac{F(x)}{Q(x)}$ **frakzio sinpleen** batura gisa adieraziko dugu. Beraz, frakzio sinpleak integratu beharko ditugu, eta hori badakigu egiten.

Baina nola idatzi frakzio sinpleen batura gisa?

<u>1. kasua</u>

Izendatzailearen erroak errealak eta desberdinak badira:

$$Q(x) = (x-a)(x-b)...(x-d)$$

Orduan, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ era honetan idatz dezakegu:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + ... + \frac{C}{(x-d)}$$

<u>2. kasua</u>

Izendatzailearen erroak erreal anizkoitzak badira:

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}...(x-d)^{\delta}$$

Orduan, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ era honetan idatz dezakegu:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = &\frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + ... + \frac{A_1}{(x-a)} + \\ &+ \frac{B_{\beta}}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}} + ... + \frac{B_1}{(x-b)} + \\ &+ ..... + \\ &+ \frac{D_{\delta}}{(x-b)^{\delta}} + \frac{D_{\delta-1}}{(x-b)^{\delta-1}} + ... + \frac{D_1}{(x-b)}\end{aligned}$$

3. kasua

Izendatzailearen erroak konplexu desberdinak baditu:

$$Q(x) = (x^2 + px + q)(x^2 + lx + s)...(x^2 + nx + m)$$

Orduan, $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ era honetan idatz dezakegu:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)} + \frac{Cx+D}{(x^2+lx+s)} + ... + \frac{Ex+F}{(x^2+nx+m)}$$

Adibideak:

1) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx$

$\dfrac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$ propioa da. Beraz, era honetan idatz daiteke:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)} + \frac{D}{(x-2)} =$$

$$= \frac{A(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)^2(x-2)+D(x+1)^3}{(x+1)^3(x-2)}$$

$$\Rightarrow x^2+2 = A(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)^2(x-2)+D(x+1)^3$$

$$\begin{cases} (0\,maila) \to 2 = -2A-2B-2C+D \\ (1.maila) \to 0 = A-B-3C+3D \\ (2.maila) \to 1 = B+3D \\ (3.maila) \to 0 = C+D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 & C=-\dfrac{2}{9} \\ B=\dfrac{1}{3} & D=\dfrac{2}{9} \end{cases}$$

$$\bullet \int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx = \int \left(\frac{-1}{(x+1)^3} + \frac{1/3}{(x+1)^2} + \frac{-2/9}{(x+1)} + \frac{2/9}{(x-2)} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)} - \frac{2}{9}\ln|x+1| + \frac{2}{9}\ln|x-2| + K$$

2) $\displaystyle\int \frac{2x^4+8x^3+15x^2+16x+9}{\left(x^2+2x+3\right)\left(x+2\right)^3}dx$

Frakzio sinpletan deskonposa dezagun:

$$\frac{2x^4+8x^3+15x^2+16x+9}{\left(x^2+2x+3\right)\left(x+2\right)^3}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+3}+\frac{C}{\left(x+2\right)^3}+\frac{D}{\left(x+2\right)^2}+\frac{E}{\left(x+2\right)}=$$

$$=\frac{\left(Ax+B\right)\left(x+2\right)^3+C\left(x^2+2x+3\right)+D\left(x^2+2x+3\right)\left(x+2\right)+E\left(x^2+2x+3\right)\left(x+2\right)^2}{\left(x^2+2x+3\right)\left(x+2\right)^3}$$

$$2x^4+8x^3+15x^2+16x+9=\left(Ax+B\right)\left(x+2\right)^3+C\left(x^2+2x+3\right)+D\left(x^2+2x+3\right)\left(x+2\right)+E\left(x^2+2x+3\right)\left(x+2\right)^2$$

$$\begin{cases}(0\,maila)\rightarrow 9=B+3C+3D+3E\\(1.maila)\rightarrow 16=A+3B+2C+5D+8E\\(2.maila)\rightarrow 15=3A+3B+C+3D+8E\Rightarrow\left\{A=C=D=E=1\qquad B=0\right.\\(3.maila)\rightarrow 8=3A+B+D+4E\\(4.maila)\rightarrow 2=A+E\end{cases}$$

$$\bullet\int \frac{2x^4+8x^3+15x^2+16x+9}{\left(x^2+2x+3\right)\left(x+2\right)^3}dx=\int\left(\frac{x}{x^2+2x+3}+\frac{1}{\left(x+2\right)^3}+\frac{1}{\left(x+2\right)^2}+\frac{1}{\left(x+2\right)}=\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right|-\frac{2}{\sqrt{8}}arctg\left(\frac{2x+2}{\sqrt{8}}\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}+\ln\left|x+1\right|+K$$

10.5. Funtzio trigonometrikoen integrazioa

Atal honetan funtzio trigonometrikoak nola integratzen diren ikasiko dugu.

Aldagai-aldaketa unibertsala

$\int R\left(\sin x,\cos x\right)dx$ motako integral guztiak, $t=tag\dfrac{x}{2}$ aldagai-aldaketa eginez, funtzio arrazional bihurtu daitezke. Horretarako, $\sin x$ eta $\cos x$ $tag\dfrac{x}{2}$-ren funtzio gisa idatzi behar dira:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \left(\frac{1/\cos^2\frac{x}{2}}{1/\cos^2\frac{x}{2}}\right) = \frac{2tag\frac{x}{2}}{tag^2\frac{x}{2}+1}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \left(\frac{1/\cos^2\frac{x}{2}}{1/\cos^2\frac{x}{2}}\right) = \frac{1-tag^2\frac{x}{2}}{tag^2\frac{x}{2}+1}$$

Beraz, $t = tag\frac{x}{2}$ aldagai-aldaketa eginez:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad , \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{eta} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Integralean sartuz: $\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$

<u>Adibidea:</u>

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \begin{pmatrix} t = tg\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{pmatrix} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + K = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + K$$

<u>Oharra:</u> Aldagai-aldaketa hori erabiliz edozein funtzio trigonometriko integra dezakegu. Baina, askotan aldagai-aldaketa hori egitean oso integral konplikatuak azal daitezke. Beraz, kasu batzuetan, beste aldagai-aldaketa bat egitea gomendagarriagoa izango da.

1) $\int R(\sin x)\cos x dx$ **motako integralak**

Aldagai-aldaketa $(t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx)$ erabiliz, integrala era honetan geldituko da:

$\int R(t)\,dt$

2) $\int R(\cos x)\sin x dx$ **motako integralak**

Aldagai-aldaketa $(t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx)$ erabiliz, integrala era honetan geldituko da: $-\int R(t)\,dt$

3) $\int R(tagx)\,dx$ **motako integralak**

Aldagai-aldaketa $\left(t = tagx \Rightarrow dt = (1+tag^2 x)dx = (1+t^2)dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{1+t^2}\right)$ erabiliz,

integrala era honetan geldituko da: $\int R(t)\dfrac{dt}{1+t^2}$

4) $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\,dx$ **motako integralak**

Aldagai-aldaketa $\left(t = tagx \Rightarrow dt = (1+tag^2 x)dx = (1+t^2)dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{1+t^2}\right)$ erabiliz eta jakinik:

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \left(\frac{1/\cos^2 x}{1/\cos^2 x}\right) = \frac{tag^2 x}{tag^2 x + 1} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \left(\frac{1/\cos^2 x}{1/\cos^2 x}\right) = \frac{1}{tag^2 x + 1} = \frac{1}{1+t^2}$$

Integrala era honetan geldituko da: $\int R\left(\dfrac{t^2}{1+t^2}, \dfrac{1}{1+t^2}\right)\dfrac{dt}{1+t^2}$

Adibideak:

1) $\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx$

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{2+\cos x}\sin x dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x}\sin x dx = \begin{pmatrix} t=\cos x \\ dt=-\sin x dx \end{pmatrix} = -\int \frac{1-t^2}{2+t}dt =$$

$$= \int \left(t-2+\frac{3}{2+t} \right) dt = \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|2+t| + K = \frac{\cos x^2}{2} - 2\cos x + 3\ln|2+\cos x| + K =$$

2) $\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \begin{pmatrix} t = tagx \Rightarrow dt = \left(1+t^2\right)dx \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{pmatrix} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2-\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctag \frac{t}{\sqrt{2}} + K =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} arctag \frac{tagx}{\sqrt{2}} + K$$

5) $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ **motako integralak**

-5.1.) m bakoitia

Demagun $m = 2p+1$ dugula.

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \sin^{2p+1} x \cos^n x\, dx = \int \sin^{2p} x \cos^n x \sin x dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^p \cos^n x \sin x dx =$$

$$= \begin{pmatrix} t=\cos x \\ dt=-\sin x dx \end{pmatrix} = -\int \left(1-t^2\right)^p t^n dt$$

Polinomio bat da; beraz, oso erraza da ebazten.

-5.2.) n bakoitia

Demagun $n = 2p+1$ dugula.

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \sin^m x \cos^{2p+1} x\, dx = \int \sin^m x \cos^{2p} x \cos x dx = \int \sin^m x \left(1-\sin^2 x\right)^p \cos x dx =$$

$$= \begin{pmatrix} t=\sin x \\ dt=\cos x dx \end{pmatrix} = \int t^m \left(1-t^2\right)^p dt$$

Polinomio bat da; beraz, oso erraza da ebazten.

Adibidea:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\cos x dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^4 x}\cos x dx = \begin{pmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{pmatrix} = \int \frac{1-t^2}{t^4}dt = \int \frac{1}{t^4} - \frac{t^2}{t^4}dt =$$

$$= \frac{t^{-4+1}}{-4+1} - \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + K = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + K = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + K$$

-5.3.) n eta m bikoitiak eta positiboak

Kosinua eta sinua era honetan idatziko ditugu:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \text{eta} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Orduan, $m = 2s$ eta $n = 2k$ izanik:

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \left(\sin^2 x\right)^s \left(\cos^2 x\right)^k dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^s \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^k dx$$

Kasu honetan, biderketa eginez, $\cos 2x$ -ren funtzioak izango ditugu. $\cos 2x$ -ren berretzailea bikoitia denean, $\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}$ formula erabiliko dugu berriro. Aldiz, $\cos 2x$ -en berretzailea bakoitia denean, 5.2. kasuan egongo gara.

Adibidea:

$$\int \sin^4 x\, dx = \int \left(\sin^2 x\right) dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - 2\frac{\sin 2x}{2} + \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx\right) = \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]\right) = \frac{3}{8}x - \frac{3\sin 2x}{16} + K$$

6) $\int \sin mx \cos nx\, dx \qquad \int \sin mx \sin nx\, dx \qquad \int \cos mx \cos nx\, dx$ **motako integralak**

Formulok erabiliz kalkulatuko ditugu integral hauek:

- $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]$
- $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]$
- $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]$

Ordezkatuz:

(1)

$$\int \sin mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(m+n)x}{(m+n)} + \frac{\cos(m-n)x}{(m-n)}\right) + K$$

(2)

$$\int \sin mx \sin nx\, dx = \frac{1}{2}\int\left[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]dx = \frac{1}{2}\left(\frac{-\sin(m+n)x}{(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{(m-n)}\right) + K$$

(3)

$$\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m+n)x}{(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{(m-n)}\right) + K$$

<u>Adibidea:</u>

$$\int \sin 5x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int(-\cos 8x + \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sin 8x}{8} + \frac{\sin 2x}{2}\right) + K = -\frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + K$$

<u>10.6. Funtzio irrazionalen integrazioa</u>

1) $\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx$ **motako integralak**

Integral hauek ebazteko erabili behar den aldagai-aldaketa $t^n = ax + b$ da.

Beraz, $\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx = \begin{pmatrix} t^n = ax+b \\ nt^{n-1}dt = adx \end{pmatrix} = \int R\left(\frac{t^n - b}{a}, t\right)\frac{nt^{n-1}dt}{a}$

Adibidea:

$$\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx = \begin{pmatrix} t^2 = x+1 \\ 2tdt = dx \end{pmatrix} = \int \frac{t^2-1+t}{t} 2tdt = 2\int \left(t^2-1+t\right)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-t\right)+K =$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3}+\frac{x+1}{2}-\sqrt{x+1}\right)+K =$$

2) $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ **motako integralak**

Hiru ordezkapen posible:

- $a>0$ bada, $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x+t$
- $c>0$ bada, $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt+c$
- $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ bada, $\sqrt{ax^2+bx+c} = \begin{cases} (x-\alpha)t \\ (x-\beta)t \end{cases}$

Adibideak:

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$

Kasu honetan, $a=1>0$ denez, $\sqrt{x^2-x+3} = x+t$ egingo dugu.

$$x^2-x+3 = (x+t)^2 = x^2+2xt+t^2 \quad \Rightarrow \quad 3-t^2 = x(2t+1) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3-t^2}{2t+1}$$

$$dx = \frac{-2t(2t+1)-(3-t^2)2}{(2t+1)^2}dt = \frac{-2t^2-2t-6}{(2t+1)^2}dt$$

Beraz, aldagai-aldaketa: $x = \frac{3-t^2}{2t+1} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{-2t^2-2t-6}{(2t+1)^2}dt$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}} = \int \frac{\frac{-2t^2-2t-6}{(2t+1)^2}dt}{\frac{3-t^2}{2t+1}\left(\frac{3-t^2}{2t+1}+t\right)} = \int \frac{-2}{3-t^2}dt$$

Hortik aurrera, funtzio arrazionalen metodoa erabiltzen da.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}} = \int \frac{-2}{3-t^2}dt = -2\int \frac{dt}{\left(\sqrt{3}-t\right)\left(\sqrt{3}+t\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\sqrt{3}-t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\sqrt{3}+t\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}-t}{\sqrt{3}+t} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}+x-\sqrt{x^2-x+3}}{\sqrt{3}-x+\sqrt{x^2-x+3}} + K$$

2) $\int \sqrt{2x-x^2}\,dx$

Kasu honetan, $2x-x^2 = x(x-2)$ denez, $\sqrt{2x-x^2} = xt$ egingo dugu.

$$2x-x^2 = x^2t^2 \quad \Rightarrow \quad 2x = x^2(t^2+1) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{t^2+1} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{-2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}dt$$

Beraz, aldagai-aldaketa: $\quad x = \dfrac{2}{t^2+1} \quad \Rightarrow \quad dx = \dfrac{-2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}dt$

$$\int \sqrt{2x-x^2}\,dx = \int \frac{2}{t^2+1}t\frac{-4t}{(t^2+1)^2}dt = -\int \frac{8t^2}{(1+t^2)^3}dt$$

Eta hortik aurrera, funtzio arrazionalen metodoa erabiltzen da. Kalkulatu ariketa modura.

3) $\int R\left(x,\sqrt{m^2x^2+n^2}\right)dx$**,** $\int R\left(x,\sqrt{m^2x^2-n^2}\right)dx$ **eta** $\int R\left(x,\sqrt{n^2-m^2x^2}\right)dx$ **motako integralak**

(1) $$\int R\left(x,\sqrt{m^2x^2+n^2}\right)dx = \begin{pmatrix} x = \dfrac{n}{m}tagt \\ dx = \dfrac{n}{m}\dfrac{dt}{\cos^2 t} \end{pmatrix} = \int R\left(\frac{n}{m}tagt, \frac{n}{\cos t}\right)\frac{n}{m}\frac{dt}{\cos^2 t}$$

(2) $$\int R\left(x,\sqrt{m^2x^2-n^2}\right)dx = \begin{pmatrix} x = \dfrac{n}{m}\sec t \\ dx = \dfrac{n}{m}\dfrac{\sin t dt}{\cos^2 t} \end{pmatrix} = \int R\left(\frac{n}{m}\sec t, n\,tagt\right)\frac{n}{m}\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$$

(3) $\int R\left(x,\sqrt{n^2-m^2x^2}\right)dx=\begin{pmatrix} x=\dfrac{n}{m}\sin t \\ dx=\dfrac{n}{m}costdt \end{pmatrix}=\int R\left(\dfrac{n}{m}\sin t, n\cos t\right)\dfrac{n}{m}costdt$

<u>Adibidea:</u>

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}=\begin{pmatrix} x=a\sin t \\ dx=a\cos tdt \end{pmatrix}=\int\frac{a\cos tdt}{\sqrt{\left(a^2-a^2\sin^2 t\right)^3}}=\int\frac{a\cos tdt}{\sqrt{\left(a^2\cos^2 t\right)^3}}=\int\frac{a\cos tdt}{a^3\cos^3 t}=\int\frac{dt}{a^2\cos^2 t}=$$

$$=\frac{1}{a^2}tagt+K=\frac{1}{a^2}\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}+K=\frac{1}{a^2}\frac{x/a}{\sqrt{1-\left(x/a\right)^2}}+K=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+K$$

<u>10.7. Ariketak</u>

Aldagai-aldaketa erabiliz, ebatzi ariketa hauek:

1. $\int\left(x^3-4x^2-2x-5\right)dx$
2. $\int\left(\sin x+\cos x+x\right)dx$
3. $\int tag^2x\,dx$
4. $\int\left(x+1\right)\left(x^3+x^4\right)dx$
5. $\int\dfrac{2e^{3x}+e^{2x}}{e^x}dx$
6. $\int 5^x dx$
7. $\int\dfrac{ArcTan(x)}{1+x^2}dx$
8. $\int\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{x}-x^4\right)dx$
9. $\int\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{2}\right)dx$
10. $\int\dfrac{x^3+2x^2-x+4}{x^2}dx$
11. $\int\sin x\cos x\,dx$
12. $\int x^2\cos\left(x^3\right)x^2\,dx$
13. $\int\cos x\,e^{\sin x}dx$
14. $\int\dfrac{x}{1+x^4}dx$
15. $\int\dfrac{tagx}{\cos^2 x}dx$
16. $\int\left(1-\cos x\right)^3\sin x\,dx$

Zatikako metodoa erabiliz, kalkulatu integralok:

1. $\int x\, e^{x}\, dx$
2. $\int x^{2}\, e^{x+1}\, dx$
3. $\int arctag\, x\, dx$
4. $\int \arcsin x\, dx$
5. $\int \frac{x}{e^{x}} dx$
6. $\int \frac{x}{\sin^{2} x} dx$
7. $\int e^{x}\, Cosx\, dx$
8. $\int \frac{Lnx}{x^{4}} dx$

Funtzio arrazionalen integrazio-metodoak erabiliz, ebatzi integral hauek:

1. $\int \frac{3x}{2x(x-1)} dx$
2. $\int \frac{x-1}{x(x-1)} dx$
3. $\int \frac{x-3}{(x^{2}-1)(x-4)} dx$
4. $\int \frac{1}{x(x+2)^{2}(x+4)} dx$
5. $\int \frac{x^{2}}{x^{2}(x-1)^{3}(x+5)} dx$
6. $\int \frac{4}{(x^{2}-5x+6)} dx$
7. $\int \frac{x^{2}+9}{x^{3}+7x^{2}+12x} dx$
8. $\int \frac{2}{(x^{2}+x+1)} dx$
9. $\int \frac{9}{(x^{2}+1)(x+1)} dx$
10. $\int \frac{2x+1}{(x^{2}+4)(x-1)} dx$

Ebatzi integral trigonometrikook:

1. $\int Cosx\, Sinxdx$
2. $\int 2-Cos^{2}x\, dx$
3. $\int Sin^{4}xdx$
4. $\int \frac{1}{Cosx+Sinx} dx$
5. $\int Cos^{2}(2x)\, Sin^{3}(x)\, dx$
6. $\int \frac{Cosx}{1+Sinx} dx$
7. $\int \frac{1+Tanx}{Tanx} dx$
8. $\int Tan^{2}xdx$

11. INTEGRAL MUGATUA

11.1. Riemann-en integrala

Izan bedi $y = f(x)$ funtzio bat $[a,b]$ tartean definituriko funtzio jarraitua. Izan bitez m eta M tarte horretan funtzioak hartzen dituen balio minimoa eta maximoa.

$$m = \min f(x) \qquad M = \max f(x) \quad \text{non} \quad x \in [a,b]$$

Zatitu dezagun $[a,b]$ tartea n zatitan $x_0, x_1, ..., x_n$ puntuen bidez.

$a = x_0, x_1, ..., x_n = b \quad (x_0 < x_1 < ... < x_n), \quad [x_i, x_{i+1}]$ eta dei diezaiogun

$\Delta x_1 = x_1 - x_0, ..., \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$.

Orain, $[x_i, x_{i+1}]$ tarte bakoitzerako maximoa eta minimoa aurkituko ditugu: M_{i+1} eta m_{i+1}.

$[x_0, x_1] \quad m_1 \quad M_1 \quad \Delta x_1 = x_1 - x_0$

……

$[x_{n-1}, x_n] \quad m_n \quad M_n \quad \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$

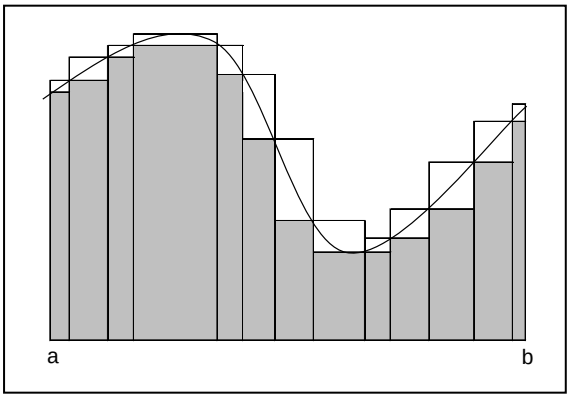
Eratu ditzagun hurrengo baturak:

Behe-batura

$$\underline{S_n} = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + ... + m_n \Delta x_n$$

Goi-batura

$$\overline{S_n} = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + ... + M_n \Delta x_n$$



Propietateak

1. $m_i \le M_i \quad \forall i \quad \Rightarrow \underline{S_n} \le \overline{S_n}$

2. $m = \min f(x) \; x \in [a,b]$ denez $m_1 \ge m, ..., m_n \ge m$ eta $M_1 \ge m, ..., M_n \ge m$. Beraz:

$$\underline{S_n} = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + ... + m_n\Delta x_n \ge m\Delta x_1 + m\Delta x_2 + ... + m\Delta x_n = m\left(\Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n\right) = m(b-a)$$

$$\overline{S_n} = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + ... + M_n\Delta x_n \ge m\Delta x_1 + m\Delta x_2 + ... + m\Delta x_n = m\left(\Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n\right) = m(b-a)$$

$M = \max f(x) \quad x \in [a,b]$ denez $m_1 \le M, m_2 \le M, ..., m_n \le M$.

Beraz:

$$\underline{S_n} = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + ... + m_n\Delta x_n \le M\Delta x_1 + M\Delta x_2 + ... + M\Delta x_n = M\left(\Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n\right) = M(b-a)$$

$$\overline{S_n} = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + ... + M_n\Delta x_n \le M\Delta x_1 + M\Delta x_2 + ... + M\Delta x_n = M\left(\Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n\right) = M(b-a)$$

$$m(b-a) \le \underline{S_n} \le M(b-a) \qquad m(b-a) \le \overline{S_n} \le M(b-a)$$

Riemann-en integrala

$\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \underline{S_n} = \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \overline{S_n}$ betetzen bada, orduan $f(x)$ funtzioa $[a,b]$-n integragarria dela esango dugu eta $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \underline{S_n} = \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \overline{S_n}$

Propietateak

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

2. a=b bada $\int_a^a f(x)dx = 0$

3. $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$

4. $\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$

5. $[a,b]$ tartean $f(x) \le g(x)$ $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

6. $m = \min f(x)$, $M = \max f(x)$ $x \in [a,b]$ $\Rightarrow$ $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

Teorema (batez besteko balioa)

Izan bedi $f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean jarraitua. Orduan, $[a,b]$ tartean existitzen da ξ balio bat, non $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$

11.2. Barrow-en erregela

Teorema (Barrow-en erregela)

Izan bedi $f(x)$ funtzio bat $[a,b]$ tartean jarraitua. Orduan, G f(x)-ren jatorrizko funtzio bat bada $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$

Aldagai-aldaketa integral mugatuetan

Teorema:

Izan bedi $\int_a^b f(x)dx$, non $f(x)$ jarraitua baita $[a,b]$ tartean. Egin dezagun $x = \varphi(t)$ aldagai-aldaketa. Orduan:

1) $\varphi(\alpha) = a$ eta $\varphi(\beta) = b$ 2) $\varphi(t)$ eta $\varphi'(t)$ jarraituak dira $[\alpha,\beta]$-n

3) $f[\varphi(t)]$ ondo definitua eta jarraitua $[\alpha,\beta]$-n

1), 2) eta 3) betetzen badira $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Adibidea:

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \begin{pmatrix} x = r\sin t \\ dx = r\cos t \\ x=0 \to t=0 \\ x=r \to t=\dfrac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}\; r\cos t\; dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos t\; r\cos t\; dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2 t\;\; dt = r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\;\; dt = \frac{r^2}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}$$

Zatikako integralak

$$\int_a^a udv = uv\Big|_a^b - \int_a^a vdu$$

11.3. Integral inpropioak

Limite infinitudun integralak

Izan bedi $f(x)$ funtzioa. $a \le x < \infty$ tartean definiturik badago eta jarraitua bada eta $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ limitea existitzen bada, $f(x)$ funtzioaren $[a,\infty)$ tarteko integral inpropioa deituko diogu eta era honetan idatziko: $\int_a^\infty f(x)dx$.

Era berean, $\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)dx$

Funtzio ez-jarraituen integralak

Izan bedi $f(x)$ funtzioa. $a \le x < c$ tartean definiturik dago eta jarraitua da eremuan x=c puntuan izan ezik. Kasu horretan, integrala era honetan definituko da:

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b \to c} \int_a^b f(x)dx$$

Ariketak:

1) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ **2)** $\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ **3)** $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ **4)** $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$

11.4. Aplikazioak

Azalera lauen kalkulua

- $f(x) \ge 0$ bada $[a,b]$-n, orduan $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ eta $x = b$ kurbek sortutako azalera $\int_a^b f(x)dx$ izango da.

- $f(x) \le 0$ bada $[a,b]$-n, orduan $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ eta $x = b$ kurbek sortutako azalera $-\int_a^b f(x)dx$ izango da.

- $f(x)$ eta $g(x)$ $\left(f(x) \ge g(x)\right)$ bi kurben arteko azalera $x = a$ eta $x = b$ tartean $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ izango da

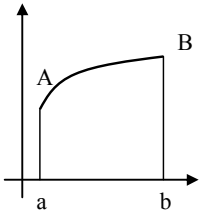
Ariketak:

1) Kalkulatu $\int_0^{2\pi} senx\, dx$ 2) $y = \sqrt{x}$ eta $y = x^2$ funtzioen arteko azalera.

Kurba lau baten arku-luzera

Izan bedi $y = f(x)$. $f(x)$ kurbak A-tik B-ra duen arku-luzera hau da:

$$\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

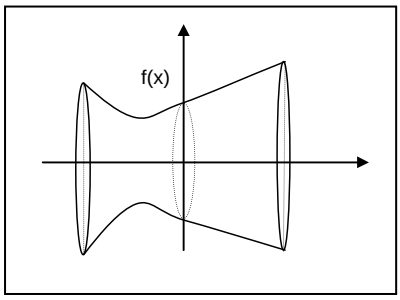


<u>Ariketa:</u> Kalkulatu R erradiodun zirkunferentziaren luzera.

Biraketa-gorputzen bolumena

$f(x)$ kurba batek OX ardatzarekiko biratuz sortzen duen gorputzaren bolumena hau da:

$$B = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$



11.5. Ariketak

1. Kalkulatu $y = x - x^2$ parabolak eta OX ardatzak sortzen duten gainazalaren azalera.
2. Kalkulatu OX ardatzak, $y = \ln(1+x)$ kurbak eta $x = 1$ zuzenak inguratzen duten gainazalaren azalera.
3. Kalkulatu $y = x(x+1)(x-4)$ kurbak eta OX ardatzak inguratzen duten gainazalaren azalera.
4. Kalkulatu $y = 2x + x^2$ parabolak eta $y = x$ zuzenak inguratzen duten gainazalaren azalera.
5. Kalkulatu $y = x^2 - 2x + 1$ eta $y = 2x^2 - 2$ parabolek inguratzen duten gainazalaren azalera.
6. Lortu $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ elipsearen OX ardatzarekiko biraketaren bidez sortzen den elipsoidearen bolumena.
7. Lortu $y^2 = x^3$ parabola erdikubikoak OX ardatzarekiko biraketaren bidez sortzen duen gorputzaren bolumena.
8. Lortu $y = x^2$ eta $y^2 = x$ parabolek sortzen duten gainazala OX ardatzarekiko biraketaren bidez sortzen duen gorputzaren bolumena.
9. Lortu $y^2 = 4x$ eta $x^2 = 4y$ parabolek mugatzen duten gainazalaren azalera OX ardatzarekiko biratzean sortzen duen biraketa-gorputzaren bolumena.

12. INTEGRAL ANIZKOITZAK

12.1. Integral Iteratuak

Bi aldagaien funtzioak aldagai batekiko deribatzen ditugun bezala, partzialki integratu ere egin ditzakegu.

Adibidea:

1) $\int 2xy \quad dx = x^2 y + k(y) \rightarrow$ Integrazio konstantea y-ren menpekoa izango da, y-k konstante gisa jokatzen baitu.

$$\int_1^{2y} 2xy \quad dx = \left[x^2 y\right]_1^{2y} = (2y)^2 \, y - 1y = 4y^3 - y$$

x aldagaia izango da, eta y kte bat

x-ren ordez integrazio-limiteak ordezkatuz

2)

$$\int_1^x \left(2x^2 y^{-2} + 2y\right) dy = \left[2x^2 \frac{y^{-1}}{-1} + 2\frac{y^2}{2}\right]_1^x + h(x) = \left.\frac{-2x^2}{y} + y^2\right|_1^x + h(x) =$$

$$= -2x + x^2 + 2x^2 - 1 + h(x) = 3x^2 - 2x^2 - 1 + h(x)$$

Integralok:

$$\int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) \quad dy\right] \quad dx \quad edo \quad \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) \quad dx\right] \quad dy$$

Integral iteratuak izango dira, eta gehienetan kortxete gabe idatziko ditugu.

Adibidea:

$$\int_0^1 \left[\int_x^1 (x+y) \ dy \right] \ dx = \int_0^1 xy + \frac{y^2}{2} \Big|_x^1 \ dx = \int_0^1 x + \frac{1}{2} - x^2 - \frac{x^2}{2} \ dx = \int_0^1 x + \frac{1}{2} - \frac{3x^2}{2} \ dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ariketak:

1. $\int_0^2 dy \int_0^1 \left(x^2 + 2y\right) \ dx = \frac{14}{3}$ **2.** $\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} \ dy = \frac{9}{4}$ **3.** $\int_{-3}^{3} dy \int_{y^2-4}^{5} (x+2y) \ dx = \frac{252}{5}$

12.2.Aplikazioak

Azalerak kalkulatzeko

$$S = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] \ dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \right] \ dx = \int_a^b dx \ \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \right]$$

Bolumenak kalkulatzeko

Izan bedi $z = f(x,y)$ funtzio bat. Orain, $f(x,y)$ funtzioak eta planoko D eremuak sortzen duten gorputzaren bolumena hau da: $\iint_D f(x,y) \ dx \ dy$.

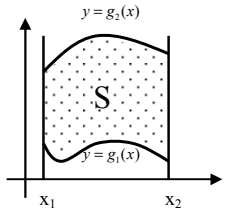
12.3. Integral bikoitzak

$\iint_D f(x,y) \ dx \ dy$ motako integralak ebazterakoan, integrazio-limiteen 3 kokapen mota ikusiko ditugu.

1. mota

Ezkerretik eskuinera $x = x_1$ eta $x = x_2$ zuzenek mugatzen dute. Behealdetik eta goialdetik, aldiz, $y = g_1(x)$ eta $y = g_2(x)$ kurbek. Beraz, integrala hau da:

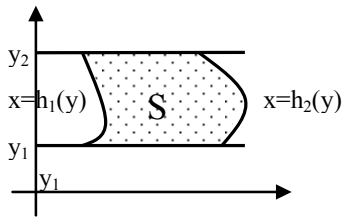
$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$$



2. mota

Behetik gora $y = y_1$ eta $y = y_2$ zuzenek mugatzen dute. Ezkerretik eskuinera, aldiz, $x = h_1(y)$ eta $x = h_2(y)$ kurbek. Beraz, integrala hau da:

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx$$



3. mota

Eremua ez bada 1. motakoa ez 2. motakoa, zatitu egingo dugu zati, bakoitza 1. eta 2. motakoa izanik.

<u>Adibidea:</u>

Lortu integralaren integrazio-limiteak:

$\iint_S f(x,y)\ dx\ dy$, non S: $y^2 - x^2 = 1$ hiperbolak eta $x = 2$, $x = -2$ mugatutakoa

$$\iint_S f(x,y)\ dx\ dy = \int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)dy$$

12.4. Aldagai-aldaketa

Izan bedi $\iint_S f(x,y)\ dx\ dy$ integral bikoitza eta aldagai-aldaketa hau:

$$\begin{array}{l} x=\varphi(u,v) \\ y=\psi(u,v) \end{array}.$$

Orduan, jakobiarra definituko dugu:

$J\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$. Beraz, integrala aldagai-aldaketaren ondoren hau da:

$$\iint_S f(x,y)\ dx\ dy=\iint_{S'} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\left|J\right|\ du\ dv$$

Aldagai-aldaketa polarra

Izan bedi $\iint_S f(x,y)\ dx\ dy$ integral bikoitza.

Polarretako aldagai-aldaketa: $\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{array}$.

Haren jakobiarra: $J\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right)=\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=r$.

Beraz, aldagai-aldaketaren ondoren integrala hau da:

$$\iint_S f(x,y)\ dx\ dy=\iint_{S'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\ \ dr\,d\theta$$

Adibidea:

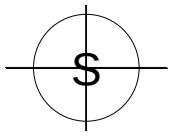
Kalkulatu integral hau koordenatu polarrak erabiliz:

$\iint_S \sqrt{1-x^2-y^2}\ \ dx\ \ dy$, non S r=1 erradioko zirkunferentzia baita zentroa (0,0) izanik.

Ebazpena:

$$\sqrt{1-x^2-y^2}=\sqrt{1-r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta}=\sqrt{1-r^2}$$

S-n "r" aldagaia 0tik 1era doa eta θ 0tik 2π-ra.



$$\iint_S \sqrt{1-x^2-y^2}\ \ dx\ \ dy=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr=\begin{pmatrix}1-r^2=u^2\\ -2rdr=2udu\end{pmatrix}=$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 u(-u)\,du=\int_0^{2\pi} d\theta\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta=\frac{1}{3}\theta\Big|_0^{2\pi}=\frac{2\pi}{3}$$

12.5. Ariketak

1. Kalkulatu integral bikoitzok:

a) $\int_1^2\int_0^2 (x+y)\,dxdy$ b) $\int_{-1}^1\int_{x^2}^{x} xy^2\,dxdy$ c) $\int_0^{\pi/2}\int_{\sin x}^{2\sin x} 3x(2+y)\,dxdy$

2. Kalkulatu:

a) $\iint_D x^2 y\,dx\,dy$, non D $x=-4y^2+3$ parabolak eta OY ardatzak mugatzen duten gainazala baita.

b) $\iint_D (xy)\,dx\,dy$ non $D=\{(x,y)/1\le x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$.

3. Kalkulatu $\iint_D f(x,y)dx\,dy$ 1. mota eta 2. mota gisa, non D:

a) $y = 2x$ eta $y = x^2 - x$ mugatzen duten gainazalean den.

b) Lehenengo koadranteko $1 \le x^2 + y^2 \le 9$ koroi zirkularrean dagoen.

c) $O(0,0)$, $A(2,0)$ eta $B(1,1)$ erpinak dituen triangeluan dagoen

4. Idatzi eta marraztu eremuok inguratzen dituzten ekuazioak:

a) $\int_{-6}^{2}\left(\int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)\,dx\right)dy$ b) $\int_{1}^{3}\left(\int_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x,y)\,dy\right)dx$

b) $\int_{0}^{3}\left(\int_{0}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx$ d) $\int_{0}^{4}\left(\int_{y}^{10-y} f(x,y)dx\right)dy$

5. Aldatu integrazio-ordena:

a) $\int_{0}^{1}\left(\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} \left(x^2+y^2\right)dx\right)dy$

6. Kalkulatu:

a) $\iint_D e^{\frac{x}{y}}dx\,dy$, non D $9x = y^2$, $x = 1$, $y = 1$ eta $y = 2$ kurbek mugatzen duten gainazala baita.

b) $\iint_D \frac{2x}{x^2+y^2}dx\,dy$, non D $y = x^2$ eta $x = y$ kurbek mugatzen duten gainazala baita.

Bolumenak

1. Kalkulatu $z = 4 - x^2 - y^2$ paraboloidea OXY planoarekin ebakitzean lortzen den bolumena.

2. Aurkitu $z = x^2 + y^2$ paraboloideak eta $1 = x^2 + y^2$ zilindroak mugatzen duten eta OXY gainetik geratzen den eremuaren bolumena.

3. Kalkulatu ondoko paraboloideek mugatzen duten eremuaren bolumena:
$z = 20 - x^2 - 9y^2$ eta $z = x^2 + 9y^2$

4. Kalkulatu $z = 4 - 2x^2 - y^2$ paraboloideak eta OXY planoak mugaturiko gorputzaren bolumena.

5. Kalkulatu ondoko paraboloideek definitutako gorputzaren bolumena.
$z = 6 - 2x^2 - y^2$ eta $z = x^2 + 2y^2$.