3.GAIA. EKUAZIO LINEALETAKO SISTEMAK

1. **Definizioak**
2. **Sistema baliokideak**
3. **Ekuazio linealetako sistema baten sailkapena. Rouché-Frobenius-en teorema**
4. **Ekuazio linealetako sistemen ebazpena**

   4.1 Ebazpen matriziala

   4.2 Cramer-en erregela

   4.3 Gauss-en ebazpen-metodoa

   4.4 Gauss-Jordan-en metodoa

   4.5 Biribiltze erroreak. Pibotaia teknikak

   4.6 Ebazpen trinko metodoak

3.GAIA. EKUAZIO LINEALETAKO SISTEMAK

Ikasgai honetan, ikusiriko matrize eta determinante kontzeptuez baliaturik, ekuazio linealetako sistemen ebazpidea aztertuko dugu. Jakina da, fisika, kimika, ingeniaritza eta beste arlo askotako problema ugari ekuazio linealetako sistemen bidez ebazten direla. Ikus dezagun adibide bat:

Altzari-enpresa batean aulkiak eta mahaiak egiten dira. Horretarako bi zur-mota erabiltzen dira: A eta B. Aulki bat egiteko zur-mota bakoitzeko unitate bat behar da. Bestalde, mahai batek A motako zur unitate bat eta B motako bi zur unitate behar ditu. Astero A motako 14 zur unitate eta B motako 16 zur unitate badaude, kalkulatu astero egin daitezkeen aulkien eta mahaien kopuruak.

x_1 = astero egiten den aulki-kopurua eta x_2 = astero egiten den mahai-kopurua kontsideratzen baditugu, problema ondoko bi ezezaguneko eta bi ekuazio linealetako sistema bezala plantea dezakegu:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 14 \\ x_1 + 2x_2 = 16 \end{cases}$$

Ekuazio linealetako sistemetan agertzen diren elementuak edozein K gorputz trukakorren elementuak izan daitezke. Baina guk kontsideratuko ditugun elementuak zenbaki errealak izango dira.

1. DEFINIZIOAK

<u>Definizioa</u>. Ondoko adierazpenari n ezezaguneko *ekuazio lineal* esaten zaio:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots + a_nx_n = b$$

non a_{ij} koefizienteak, i = 1,...,n eta b zenbaki errealak diren.

<u>Definizioa</u>. Ondoko erako adierazpenari n ezezaguneko m ekuazio linealetako sistema esaten zaio:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} (i = 1,...,m; j = 1,...,n) sistemaren koefizienteak dira; b_i (i = 1,...,m) gai askeak eta x_i (i = 1,...,n) ezezagunak.

Aurreko sistema matrizialki modu honetan adieraz dezakegu:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix}$$

Hau da, A.X = B, non A sistemaren koefizienteen matrizea eta B gai askeen zutabe-matrizea diren.

<u>Definizioa</u>. $c_1, c_2, \dots, c_n \in$ **K** eskalarrek ekuazio linealetako sistemaren *soluzio* bat eratzen dute, baldin eta $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, ..., $x_n = c_n$ kontsideratuz, sistemaren m ekuazioak betetzen badira.

<u>Definizioa</u>. Ekuazio linealetako sistemaren soluzio guztiak lortzea, sistema *ebaztea* da.

<u>Definizioa</u>. Bi ekuazio linealetako sistema, soluzio berberak dituztenean, *baliokideak* direla esango dugu.

<u>Definizioa</u>. Ekuazio linealetako sistema baten gai aske guztiak nuluak direnean, B = (0), sistema *homogeneoa* dela esaten da.

Ekuazio linealetako sistemek soluziorik dutenaren arabera ondoko sailkapena egin dezakegu:

- *Sistema Bateragarria*. Sistemak gutxienez soluzio bat du. Eta, honen barruan:
  - *Sistema Bateragarri Determinatua*. Soluzio bakarra duenean.
  - *Sistema Bateragarri Indeterminatua*. Soluzio bat baino gehiago duenean.
- *Sistema Bateraezina*. Sistemak ez du soluziorik.

Sistema homogeneoek beti dute soluzio nulua, beraz sistema hauek beti dira bateragarriak.

2. SISTEMA BALIOKIDEAK

Sistema baten ekuazioetan hasierako sistema sistema baliokide (soluzio berberak) batean transformatzen duten eragiketak egin daitezke. Transformazio hauei *oinarrizko eragiketak* esaten zaie eta ondoko hauek dira:

a) Ekuazio bat zenbaki erreal ez-nulu batez biderkatu.

b) Bi ekuazio lekuz elkar aldatu.

c) Ekuazio bati beste ekuazio baten multiplo bat gehitu edo kendu.

3. EKUAZIO LINEALETAKO SISTEMA BATEN SAILKAPENA. ROUCHÉ-FROBENIUS-EN TEOREMA

Izan bedi S ondoko ekuazio linealetako sistema:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

$[A,B] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ matrizeari, *matrize zabaldua* esaten zaio eta sistemaren A matrizeari gai askeen zutabea gehituz lortzen da.

<u>Teorema</u>. n ezezaguneko m ekuazio linealetako S sistema bateragarria da, baldin eta soilik baldin koefizienteen matrizearen heina eta matrize zabalduaren heina berdinak badira ($r(A) = r[A,B]$), eta gainera:

a) $r(A) = r[A,B] = n$ (ezezagun-kopurua) denean, sistema bateragarria eta determinatua da.

b) $r(A) = r[A,B] < n$ (ezezagun-kopurua) denean, sistema bateragarria eta indeterminatua da.

<u>Proposizioa</u>. Baldin S sistema homogeneoa bada, $r(A) = r[A,B]$ betetzen da eta edozein sistema homogeneo bateragarria da. Partikularki, m = n denean:

a) Baldin $|A| \neq 0$ bada, orduan sistema bateragarria eta determinatua da (bere soluzio bakarra soluzio nabaria da: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$).

b) Baldin $|A| = 0$ bada, orduan sistema bateragarria eta indeterminatua da.

4. EKUAZIO LINEALETAKO SISTEMEN EBAZPENA

4.1 Ebazpen matriziala.

Izan bedi A.X =B sistema bateragarri determinatua, non $A \in M_n(\mathbf{R})$ erregularra den. A erregularra denez, A^{-1} A-ren alderantzizko matrizea existitzen da eta matrizeen propietateak erabiliz honako hau ondoriozta dezakegu: $X = A^{-1}.B$.

Metodo hau, n handia denean, oso nekeza gertatzen da egin behar den eragiketen kopurua oso handia delako.

Kostu operatiboa $\cong$ $n!.n^2$ biderketa-zatiketa

$n = 3 \Rightarrow$ K.O. $\cong$ 54 biderketa/zatiketa

$n = 4 \Rightarrow$ K.O. $\cong$ 384 biderketa/zatiketa

.....

$n = 10 \Rightarrow$ K.O. > 300 000 000 biderketa/zatiketa

4.2 Cramer-en erregela.

Izan bedi A.X =B sistema bateragarri determinatua, non $A \in M_n(\mathbf{R})$ erregularra den. Ezezagun bakoitza bi determinanteren zatidura bezala lor daiteke. Zenbakitzailea, A koefizienteen matrizean ezezagunaren zutabea gai askeen zutabeaz ordezkatuz lortzen den matrizearen determinantea da, eta izendatzailea koefizienteen matrizearen determinantea da. Hots:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Eragiketen kopurua kontuan hartzen badugu, metodo hau aurrekoa bezain nekeza da eta ekuazio linealetako sistemen dimentsioak handiak direnean metodo hauek ez dira erabiltzen.

4.3 Gauss-en ezabapen-metodoa.

Ondoren, ekuazio linealetako sistemak ebazteko beste metodo bat ikusiko dugu. Ekuazioen eragiketa elementalak erabiliko ditugu hasierako sistemak koefiziente nulu gehiago dituzten sistema baliokidetan transformatzeko, beraien ebazpenak errazagoak bihurtuz.

Sistema errazenak diagonalak dira:

$$\left.\begin{array}{llll} a_{11}x_1 & & & = b_1 \\ & a_{22}x_2 & & = b_2 \\ & & \dots & \dots \\ & & a_{nn}x_n & = b_n \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad i = 1, 2, ..., n \quad (a_{ii} \neq 0)$$

Gero, sistema goi-triangeluarrak aurkitzen dira:

$$\left.\begin{array}{lllllllll} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \dots & & \dots & & \dots \\ & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right\} (1) \qquad \left(a_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1,2,...,n\right)$$

Sistema hauen soluzioak *ordezkapen erregresiboa* erabiliz lortuko ditugu, hau da, ondorengo pausuak jarraituz:

1. Azkeneko ekuazioan x_n kalkulatzen dugu.
2. Azken aurreko ekuazioan x_n ordezkatuz, x_{n-1} lortuko dugu.
3. Azken-heren ekuazioan x_n eta x_{n-1} ordezkatuz, x_{n-2} lortuko dugu.
4. Prozesu honi jarraituko diogu x_1 kalkulatu arte.

Pauso hauek, modu laburrean, honela adieraz ditzakegu:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right) \qquad i = n, n-1, ..., 1$$

Hasierako sistema behe-triangeluarra baldin bada, soluzioa *ordezkapen progresiboa* erabiliz lortuko dugu. Kasu honetan, x_1 kalkulatuz hasiko gara eta aurrekoaren prozesu analogoa jarraituko dugu, ekuazioz ekuazio, gainerako ezezagunak lortu arte.

Gauss-en ezabapen-metodoa A.X = B ekuazio linealetako sistema, goi-triangeluarra den sistema baliokide batean transformatzean datza. Ondoren, ordezkapen erregresiboa erabiliz sistemaren soluzioa lortzen da.

Lehenengo pausoa: Baldin $a_{11} \neq 0$ bada, lehenengo ekuazioa erabiltzen da x_1 ezezagunaren koefizienteak gainerako ekuazioetan ezabatzeko:

$$E_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} E_1 ,\ E_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} E_1 , \ldots ,\ E_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} E_1$$

$$\boxed{\text{k garren ekuazioa} + \left(\frac{-a_{k1}}{a_{11}} \right) . \text{ lehen ekuazioa} \qquad \forall\ k = 2,\ldots,n}$$

Eta era honetako sistema baliokide berria lortuko dugu:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a^{(1)}_{22}x_2 + \ldots + a^{(1)}_{2n}x_n = b^{(1)}_2 \\ \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ \qquad a^{(1)}_{n2}x_2 + \ldots + a^{(1)}_{nn}x_n = b^{(1)}_n \end{cases}$$

$^{(1)}$ goi-indizeek lehenengo pauso honetan aldatu diren koefizienteak adierazten dizkigute. Baldin $a_{11} = 0$ bada, ekuazioen ordena aldatuko dugu a_{11} berria ez-nulua izan dadin.

Bigarren pausoa: Baldin $a^{(1)}_{22} \neq 0$ bada, bigarren ekuazioa erabiltzen da x_2 ezezagunaren koefizienteak 3,4,..., n ekuazioetan ezabatzeko

$$E_3 - \frac{a^{(1)}_{32}}{a^{(1)}_{22}} E_2 ,\ E_4 - \frac{a^{(1)}_{42}}{a^{(1)}_{22}} E_2 , \ldots ,\ E_n - \frac{a^{(1)}_{n2}}{a^{(1)}_{22}} E_2$$

$$\boxed{\text{k garren ekuazioa} + \left(\frac{-a^{(1)}_{k2}}{a^{(1)}_{22}} \right) . \text{ bigarren ekuazioa} \qquad \forall\ k = 3,\ldots,n}$$

Eta era honetako sistema baliokide berria lortuko dugu:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a^{(1)}_{22}x_2 + a^{(1)}_{23}x_3 + \ldots + a^{(1)}_{2n}x_n = b^{(1)}_2 \\ \qquad\qquad a^{(2)}_{33}x_3 + \ldots + a^{(2)}_{3n}x_n = b^{(2)}_3 \\ \qquad\qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ \qquad\qquad a^{(2)}_{n3}x_3 + \ldots + a^{(2)}_{nn}x_n = b^{(2)}_n \end{cases}$$

Modu honetan, n-1 pausoan (1) erako sistema triangeluar bat lortuko dugu eta bere ebazpena ordezkapen erregresiboa erabiliz egin daiteke. Eragiketa hauek ekuazioetan egin beharrean [A,B] matrize zabalduan egin daitezke.

Hasierako sistema bateragarri determinatua ez bada, Gauss-en metodoa aplikatu ondoren ez dugu (1) erako sistema bat lortuko. Kasu honetan, ondoko posibilitateen arteko batera helduko gara:

I) Baldin $m<n$ bada

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \\ a_{mm}x_m + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Azken ekuazioak n-(m-1) ezezagun erlazionatzen ditu. $x_{m+1}, \dots, x_n$ ezezagunei dagozkien gaiak bigarren atalera pasatuz, ekuazio linealetako sistema berri bat lortuko dugu, non $x_1, \dots, x_m$ ezezagunak $x_{m+1}, \dots, x_n$ ezezagunen funtzioan adierazita dauden. Hau da, sistema bateragarri indeterminatua da.

II) Baldin $m>n$ bada

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_{nn}x_n = b_n \\ 0x_n = b_{n+1} \\ \dots \dots \\ 0x_n = b_m \end{cases}$$

$b_{n+1}, \dots, b_m$ balioen artean nulua ez den gutxienez bat existitzen bada, sistema bateraezina izango da. ($b_{n+1}, \dots, b_m$ balio guztiak nuluak badira, lortu dugun sistema (1) erako sistema bat da eta bateragarri determinatua izango da).

Prozedura hau erabil daiteke ere matrize baten heinaren kalkulurako.

n ezezaguneko n ekuazio linealetako sistema baten ebazpenerako Gauss-en metodoaren kostua gutxi gorabehera $n^3/3$ biderketa-zatiketa ingurukoa da.

Cramer-en metodoaren kostua Gauss-en metodoaren kostua baino askoz handiagoa dela ohartzea komenigarria da. Honela, adibidez, n=10 denean kostuak gutxi

gorabehera 333 biderketa/zatiketa eta 300 milioi biderketa/zatiketa ingurukoak direla, hurrenez hurren, izango dugu.

4.4. Gauss-Jordan-en metodoa.

Gauss-en metodoaren antzeko bat Gauss-Jordan-en metodoa da. Metodo honetan hasierako A.X = B sistema, sistema triangeluar batean transformatu beharrean, sistema diagonal batean transformatzen da. Gauss-en metodoarekiko desberdintasuna , etapa bakoitzean ekuazio bat diagonal nagusiaren azpitik eta gainetik zeroak lortzeko erabiltzen dela datza.

<u>Lehenengo pausoa</u>: Baldin $a_{11} \neq 0$ bada, lehenengo ekuazioa erabiltzen da x_1 ezezagunaren koefizienteak gainerako ekuazioetan ezabatzeko:

$$E_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} E_1,\ E_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} E_1,\ \dots,\ E_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} E_1$$

$$\boxed{\text{k garren ekuazioa} + \left(\frac{-a_{k1}}{a_{11}}\right) . \text{ lehen ekuazioa} \qquad \forall\ k = 2,\dots,n}$$

Baldin $a_{11} = 0$ bada, ekuazioen ordena aldatuko dugu a_{11} berria ez-nulua izan dadin. Lehenengo pauso hau eta Gauss-en metodoaren lehenengoa berdinak dira.

<u>Bigarren pausoa</u>: Baldin $a_{22}^{(1)} \neq 0$ bada, bigarren ekuazioa erabiltzen da x_2 ezezagunaren koefizienteak gainerako ekuazioetan ezabatzeko:

$$E_1 - \frac{a_{12}}{a_{22}^{(1)}} E_2,\ E_3 - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} E_2,\ \dots,\ E_n - \frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} E_2$$

$$\boxed{\text{k garren ekuazioa} + \left(\frac{-a_{k2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right) . \text{ bigarren ekuazioa} \qquad \forall\ k = 1, 3, \dots,n}$$

<u>n-garren pausoa</u>: Demagun $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$ dela, elementu hau erabiltzen da x_n ezezagunaren koefizienteak gainerako ekuazioetan ezabatzeko:

$$E_1 - \frac{a_{1n}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} E_n,\ E_2 - \frac{a_{2n}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} E_n,\ \dots,\ E_{n-1} - \frac{a_{n-1n}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} E_n$$

$$\boxed{\text{k garren ekuazioa} + \left(\frac{-a_{kn}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}\right) . \text{ n-garren ekuazioa} \qquad \forall\ k = 1, 2, \dots,n-1}$$

n pauso hauek egin ondoren, sistema diagonal bat lortzen da:

$$\left.\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & & & = & b_1 \\ & a_{22}x_2 & & = & b_2 \\ & & \dots & & \dots \\ & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right\}$$

Eta honen soluzioa lortzea nabaria da.

Metodo honen kostua gutxi gorabehera $n^3/2$ biderketa-zatiketa ingurukoa da, beraz Gauss-en metodoa baino apur bat neketsuagoa da, baina ikusi ditugun gainerako metodoekin konparatzen badugu, honen kostu operatiboa txikiagoa da.

Matrize erregular baten alderantzizko matrizearen kalkulurako aplikazioa.

Izan bedi A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ matrize erregularra. A-ren A^{-1} = $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ alderantzizko matrizea kalkulatu nahi dugu. Badakigu $A.A^{-1} = I_2$ betetzen dela, hau da:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x_1+x_3 & 2x_2+x_4 \\ 4x_1+3x_3 & 4x_2+3x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bi matrizeen elementuak berdinduz, ondoko bi ezezagun bi ekuazio linealetako sistemak lortzen dira:

$$\text{(I)} \begin{cases} 2x_1+x_3=1 \\ 4x_1+3x_3=0 \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} 2x_2+x_4=0 \\ 4x_2+3x_4=1 \end{cases}$$

Gauss-Jordan-en metodoa erabiliz, (I) sistemaren ebazpenak A^{-1} matrizearen lehenengo zutabea emango digu eta (II) sistemaren ebazpenak A^{-1}-ren bigarren zutabea. Bestalde, bi sistemek koefizienteen matrize bera dute, A, eta ebazteko egin behar diren eragiketa elementalak berberak dira. Hau guztia kontuan hartuz, A matrizearen alderantzizko matrizearen kalkulua egiteko, 2x4 ordenako $(A|I_2)$erako matrize bat kontsideratuko dugu:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oinarrizko transformazioak eginez, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ matrizera helduko gara, hau da, $\left(I_2 \middle| A^{-1}\right)$.

Beraz, n ordenako A matrize karratuaren alderantzizko matrizea lortzeko $\left(A \middle| I_n\right)$ *matrizetik* $\left(I_n \middle| A^{-1}\right)$ *matrizera pasatuko gara oinarrizko transformazioak erabiliz.*

Prozesu honen eragiketen kostua gutxi gorabehera n^3 biderketa-zatiketa ingurukoa da. Beraz, A^{-1} kalkulatzeko determinanteak erabiltzearen kostua oinarrizko transformazioak erabiltzearen kostua baino askoz handiagoa da.

4.5. Biribiltze-erroreak. Pibotaia teknikak.

Gauss eta Gauss-Jordan ezabapen-metodoak erabiltzen ditugunean, $a_{ii}^{(k)} = 0$ elementu bat irteten bada, prozedurarekin jarraitzeko ekuazioak trukatzea beharrezkoa izango da. $a_{ii}^{(k)}$ motako elementuei, *pibotak* esaten zaie.

Praktikan, ekuazioak trukatzea beharrezkoa izango da ez bakarrik $a_{ii}^{(k)}=0$ denean, baizik eta beste kasu askotan ere, zeinetan biribiltze-errore asko egiten diren, erabiltzen diren digituen kopurua mugatua delako.

Praktikan, beste kasu askotan ere ekuazioak trukatzea beharrezkoa izango da. Adibidez, erabiltzen diren digituen kopurua mugatua denean biribiltze-errore asko egiteko arriskua handia da. Hau gertatzen da $a_{ii}^{(k)}$ balioak oso txikiak direnean.

Estrategia bat ondokoa da: elementu pibota bezala zutabean eta diagonalaren azpian dagoen balio absolutu handiena duen elementua aukeratuko dugu, eta zutabeak trukatuko ditugu (beharrezkoa baldin bada) transformazioak egin aurretik. Teknika hau *pibotaia partziala* bezala ezagutzen da.

Pibotaia partzialaren teknika kasu gehienetan nahikoa da, baina kasu batzuetan ez da guztiz egokia. Kasu hauetan, *pibotaia osoaren edo maximoaren* teknika erabiltzen da eta pibota bezala balio absolutu maximoa duen elementua aukeratuko dugu, eta bai ekuazioak eta bai ezezagunak trukatuko dira, beharrezkoa deneko kasuetan.

4.6. Ezabapen trinko metodoak.

Izan bedi A matrize karratu bat. Gauss-en metodoan, matrize karratu batean transformazioak eginez matrize goi-triangeluar bat lor daitekeela ikusi dugu.

Atal honetan ikusiko ditugun metodoetan, A matrizea bi matrize triangeluarren biderkadura bezala adierazten saiatuko gara, A= L.U, non L behe-triangeluarra eta U goi-triangeluarra diren.

Modu honetan A.X =B sistemaren ebazpena lortzeko bi sistema triangeluarren ebazpenak egingo ditugu. A.X = B sistema , A.X = L.U.X = B izango da eta Y = U.X eginez , ondoko bi sistema ditugu:

L.Y = B sistema behe-triangeluarra eta ordezkapen progresiboa erabiliz Y lortuko dugu.

Ondoren, **U.X = Y** sistema goi-triangeluarrean ordezkapen erregresiboa erabiliz hasierako sistemaren X soluzioa lortuko dugu.

A = L.U deskonposizioa ez da beti posible izaten. Ondorengo emaitzetan ikusiko ditugu bete behar diren baldintzak.

<u>Teorema</u>. A matrize batean Gauss-en ezabapen-metodoa errenkaden aldaketarik egin gabe aplikatu badaiteke, orduan aipaturiko matrizea A= L.U eran deskonposa daiteke, L goi-triangeluarra eta U behe-triangeluarra izanik.

<u>Definizioa</u>. A matrize karratua *hertsiki diagonal nagusia(menperatzaile)* dela esaten da, ondoko baldintza betetzen denean: $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \forall i = 1,2,...,n$.

<u>Teorema</u>. A matrize karratua *hertsiki diagonal nagusia(menperatzaile)* baldin bada, orduan erregularra da eta A.X =B erako edozein sistema linealetan soluzioa lortzeko Gauss-en ezabapen-metodoa errenkaden aldaketarik egin gabe erabili dezakegu,eta kalkuluak egonkorrak dira biribilketa-erroreekiko.

Bestalde, A matrizea A = L.U eran deskonposa badaiteke (L behe-triangeluarra eta U goi-triangeluarra izanik), faktorizazio hau ez da bakarra . Horrela, kontsidera dezagun ondoko sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Non a_{ij} datuak, eta l_{ij} eta u_{ij} determinatu behar diren ezezagunak diren. 12 ezezaguneko 9 ekuazio linealetako sistema lortzen dugu eta planteatutako sistema soluzio bakarra izan dezan 3 ezezagun finkatu behar dugu.

Orokorrean, n ordenako matrize baterako, determinatu behar dugun ezezagunen kopurua n^2 izango da eta finkatzen ditugun ezezagunen arabera metodo desberdinak sortuko dira:

* Baldin $l_{ii} = 1$ bada, i = 1,2,...,n $\Rightarrow$ **Doolittle-ren Metodoa.**

* Baldin $u_{ii} = 1$ bada, i = 1,2,...,n $\Rightarrow$ **Crout-en Metodoa.**

Doolittle-ren kalkuluaren prozesuan u_{ii} erako elementuren bat nulua baldin bada (berdin Crout-en metodoan l_{ii} erako elementuekin), A matrizea ezingo da L.U moduan deskonposatu (lehen enuntziatutako teoremen baldintzak ez dira beteko).

Sistema bat ebazteko Crout eta Doolittle metodoen koste operatiboa gutxi gorabehera $n^3/3$ biderketa eta zatiketa ingurukoa da. Metodo hauek alderantzizko matrizearen kalkulurako ere aplika daitezke, koste operatiboa n^3 b/z ingurukoa izanik.

Cholesky-ren metodoa matrize simetriko definitu positibotarako.

<u>Definizioa</u>. n ordenako A matrize karratu simetrikoa *definitu positiboa* dela esaten da, ondoko baldintza betetzen denean: $\bar{x}^t A\bar{x} > 0 \quad \forall \bar{x} \in \mathbf{R}^n, \ \bar{x} \neq 0$

Matrize bat definitu positiboa den ala ez jakiteko definizioa erabili gabe, ondoko karakterizazioa emango dugu:

A matrize simetrikoa, definitu positiboa da baldin eta soilik baldin bere minore printzipal edo nagusi guztiak positiboak badira, hau da:

$$|a_{11}| > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots\ldots, \quad |A| > 0$$

L eta U matrizeetan, diagonal nagusiko elementuak 1 egin beharrean, Doolittle eta Crout metodoetan bezala, $l_{ii} = u_{ii}$ egiten badugu, i = 1,2,...,n, **Cholesky-ren metodoa** izango dugu.

Cholesky-ren metodoa A matrize simetriko definitu positiboetan aplikatzen denean, bereziki interesgarria da. Kasu hauetan, A matrizea $A = L.L^t$ moduan deskonposa daiteke eta determinatu behar izango dugun ezagunen kopurua $n.(n+1)/2$ da, beste faktorizazio-metodoetan kopuru hau n^2 izanik.

Cholesky-ren metodoaren kostu operatiboa gutxi gorabehera $n^3/6$ biderketa-zatiketa eta n erro ingurukoa da. Gainera, metodo honek beste abantaila handia du: ez da oso sentikor biribiltze-erroreekiko. Biribiltze-erroreek ez dute eragin handia metodo honetan.

Cholesky-ren metodoak erabilera asko ditu: ekuazio linealetako sistemen ebazpenean, A matrize simetriko bat definitu positiboa den ala ez jakiteko eta, azkenik, matrize simetriko definitu positiboen determinantea kalkulatzeko ere baliagarria da, hau da $|A| = |L|\,|L^t| = |L|^2 = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}^2$