4.GAIA. ESPAZIO BEKTORIALAK

1. **Definizioa**
2. **Propietateak**
3. **Azpiespazio bektorialak**
4. **Konbinazio linealak**
5. **Dependentzia eta independentzia lineala**
6. **Oinarria eta dimentsioa**
7. **Oinarri-aldaketa**
8. **Azpiespazio bektorialen arteko ebaketa eta batuketa**

4.GAIA. ESPAZIO BEKTORIALAK

Matematikan, beraien artean batu egin daitezkeen edo zenbaki errealekin biderka daitezke objektu matematiko askoren adibide aurki ditzakegu. Nabaria da zenbaki errealek guzti hau betetzen dutela. Baina adibide gehiago ere badaude; besteak beste, matrizeak,funtzioak, zenbaki konplexuak, planoko eta espazioko bektoreak. Gai honetan ideia hau jeneralizatuko dugu Aljebra Linealaren egitura garrantzitsuena sartuz: espazio bektoriala.

Multzo desberdinetan antzeko egiturak agertzen direnean, hauek axiomatizatzea eta sortzen den izate berriari izen bat ematea komeni da.Abantaila handiena honako hau da: egitura hau aztertzen badugu, bere barnean sartzen diren egitura guztiak aztertuta geratzen dira.

Laburtuz, espazio bektorial bat edozein elementuren multzo bat da, non batuketa eta zenbaki baten bidezko biderketa deitzen diren eragiketak egin daitezkeen. Espazio bektorialaren kontzeptua definitzerakoan ez dugu zehazten elementuen izaera ezta beraien arteko eragiketak nola egiten diren ere, baina espazio bektorialaren axiomatzat kontsideratuko ditugun propietate batzuk betetzea exijituko dugu.

Goazen, bada, espazio bektorial delako egitura eta berari dagozkion propietateak ikustera.

1. DEFINIZIOA

Izan bedi **K** gorputz trukakor bat. Adibidez, **K** = **R** edo **K** = **C.**

Izan bedi V multzo bat non V $\neq \phi$ den. V multzoan VxV $\xrightarrow{+}$ V barne-eragiketa bat eta **K**.V $\xrightarrow{\bullet}$ V kanpo-eragiketa bat definitzen dira. Orduan, V **K gainean espazio bektoriala** edo **K gorputzaren gaineko espazio bektoriala** dela esango dugu, ondoko baldintzak betetzen direnean:

I) (V,+) Talde abeldarra da.

1. Elkarkorra: $(\overline{x}+\overline{y})+\overline{z}=\overline{x}+(\overline{y}+\overline{z}) \quad \forall \overline{x},\overline{y},\overline{z}\in V$
2. Trukakorra: $\overline{x}+\overline{y}=\overline{y}+\overline{x} \quad \forall \overline{x},\overline{y}\in V$
3. Elementu neutroa: $\forall \overline{x}\in V \quad \exists!\ \overline{0}\in V \quad / \quad \overline{x}+\overline{0}=\overline{0}+\overline{x}=\overline{x}$

4. Aurkako elementua: $\forall \overline{x} \in V \quad \exists -\overline{x} \in V \quad / \quad \overline{x} + (-\overline{x}) = (-\overline{x}) + \overline{x} = \overline{0}$

II) Kanpo-biderketarekiko ondoko propietateak betetzen dira:

1. $\alpha.(\overline{x} + \overline{y}) = \alpha.\overline{x} + \alpha.\overline{y} \quad \forall \alpha \in K, \forall \overline{x}, \overline{y} \in V$
2. $(\alpha + \beta).\overline{x} = \alpha.\overline{x} + \beta.\overline{x} \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall \overline{x} \in V$
3. $\alpha.(\beta.\overline{x}) = (\alpha.\beta).\overline{x} \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall \overline{x} \in V$
4. $1_{\mathbf{K}}.\overline{x} = \overline{x} \quad \forall \overline{x} \in V$ non $1_{\mathbf{K}}$ **K**-ren unitate elementua den (t.1=1.t =t $\forall$ t$\in$ **K**).

V espazio bektorialeko elementuei *bektoreak* esaten zaie, eta **K** gorputzeko elementuei *eskalarrak*.

Baldin **K** = **R,** V espazio bektorial erreala dela esango dugu eta **K** = **C** denean, V espazio bektorial konplexua dela esango dugu.

<u>Adibideak</u>:

1. Planoko bektore geometrikoen multzoa eta espazioko bektore geometrikoen multzoa batuketa eta zenbaki erreal baten bidezko biderketarekin espazio bektorial errealak dira.
2. m errenkada eta n zutabe dituzten matrize guztien $M_{mxn}(\mathbf{K})$ multzoa , elementuak **K** gorputzeko elementuak izanik, **K** gorputzaren gaineko espazio bektoriala da.
3. **R** multzoa **R** gorputzaren gaineko espazio bektoriala da.
4. **C** multzoa **R** gorputzaren gaineko eta **C** gorputzaren gaineko espazio bektoriala da.
5. Izan bedi $\mathbf{R}_n[x]$, n baino txikiagoko edo maila berdineko x ezezaguneko polinomioen multzoa, koefizienteak **R**-n daudelarik. Orduan, $\mathbf{R}_n[x]$ **R** gorputzaren gaineko espazio bektoriala da.
6. $\mathbf{R}^n = \{ (x_1,x_2,...,x_n) \ / \ x_i \in \mathbf{R}, \ i = 1,2,...,n \}$ multzoa ondoko eragiketekin **R** gorputzaren gaineko espazio bektoriala da:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_n+y_n)$$

$$\alpha.(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$$

Jeneralean, $\mathbf{K}^n$ **K** gorputzaren gaineko espazio bektoriala da.

7. [a,b] tartean definitutako funtzio erreal jarraituen C[a,b] multzoa, ondoko eragiketekin, **R** gorputzaren gaineko espazio bektoriala da:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{eta} \quad (\alpha.f)(x) = \alpha.f(x)$$

Baina badaude espazio bektorialaren axioma guztiak betetzen ez dituzten egiturak. Ikus dezagun zenbait adibide:

1. **N** zenbaki arrunten multzoan, zenbaki erreal baten eta zenbaki arrunt baten arteko biderkadura ez da beti zenbaki arrunta.
2. **R** ez da **C** gorputzaren gaineko espazio bektoriala.
3. Determinante nulua duten n ordenako matrize karratuen D multzoa ez da espazio bektoriala, D-n matrizeen batura barne-eragiketa ez delako.Adibidea:

   $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in D$, baina $|A+B| = 1 \neq 0$ beraz $A + B \notin D$
4. $A.\overline{x} = \overline{b}$, ($\overline{b} \in \mathbf{R}^n$, $\overline{b} \neq 0$), sistema ez homogeneo baten $S(A, \overline{b})$ soluzioen multzoa ez da espazio bektoriala, sistemaren edozein bi soluzioren batura sistemaren batura ez delako. Bestalde, sistema homogeneoa baldin bada, $A.\overline{x} = \overline{0}$, soluzioen multzoa espazio bektoriala da.

2. PROPIETATEAK

1) $\forall \overline{x} \in V, \quad 0.\overline{x} = \overline{0}$

2) $\alpha.\overline{x} = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \quad$ edo $\quad \overline{x} = \overline{0}$

3) $\forall \alpha \in K, \quad \alpha.\overline{0} = \overline{0}$

4) $\forall \alpha \in K, \quad \forall \overline{x} \in V, \quad \alpha.(-\overline{x}) = -(\alpha.\overline{x})$

5) $\forall \alpha \in K, \quad \forall \overline{x} \in V, \quad (-\alpha).\overline{x} = -(\alpha.\overline{x})$

6) $\forall \alpha \in K, \quad \forall \overline{x}, \overline{y} \in V, \quad \alpha.(\overline{x} - \overline{y}) = \alpha.\overline{x} - \alpha, \overline{y}$

7) $\forall \alpha, \beta \in K, \quad \forall \overline{x} \in V, \quad (\alpha - \beta).\overline{x} = \alpha.\overline{x} - \beta.\overline{x}$

8) $\alpha.\overline{x} = \beta.\overline{x} \quad$ eta $\quad \overline{x} \neq \overline{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta$

9) $\alpha.\overline{x} = \alpha.\overline{y} \quad$ eta $\quad \alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{x} = \overline{y}$

3. AZPIESPAZIO BEKTORIALAK

<u>Definizioa</u>. Izan bitez V **K** gainean espazio bektoriala eta honen F azpimultzoa. Baldin eta V-n definitutako eragiketekin F espazio bektoriala badugu, F V-ren azpiespazio bektoriala dela esango dugu.

V-ren azpimultzo bat azpiespazioa dela frogatzeko, espazio bektorialaren propietate guztiak betetzen dituela frogatzea ez da beharrezkoa izango ondorengo karakterizazio-teorema erabiltzen badugu:

Teorema. V-ren F azpimultzoa V-ren azpiespazio bektoriala dugu, baldin eta soilik baldin ondoko propietateak betetzen badira:

a) $\forall \overline{x}, \overline{y} \in F \Rightarrow \overline{x} + \overline{y} \in F$

b) $\forall \alpha \in K, \forall \overline{x} \in F \Rightarrow \alpha.\overline{x} \in F$

Hau da,F azpiespazio bektoriala batuketarekiko eta biderketarekiko zati egonkorra da.

Oharra. $\overline{0}$ bektore nulua azpiespazio bektorial guztietan dago, $\alpha = 0$ denean b) aplikatuz $\alpha.\overline{x} = \overline{0} \in F$ betetzen baita.

Adibideak:

1. $\{\overline{0}\}$ eta V multzoak V-ren azpiespazio bektorialak dira eta *azpiespazio ez-propio* edo *nabari* deritze.Aurrekoren bat ez den beste azpiespazio bektoriali *azpiespazio bektorial propio* deritzo.
2. Jatorritik pasatzen diren zuzen guztien multzoa $\mathbf{R}^3$ espazio bektorialaren azpiespazio bektoriala da. Gauza bera geratzen da jatorritik pasatzen diren planoko zuzen guztien multzoarekin.
3. Izan bedi F = { (x,0,z) / x, z $\in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^3$, orduan F $\mathbf{R}^3$-ren azpiespazio bektoriala da.
4. $A.\overline{x} = \overline{0}$, $\overline{x} \in \mathbf{R}^n$, sistema homogeneoaren S(A) soluzioen multzoa $\mathbf{R}^n$-ren azpiespazio bektoriala da.
5. $\mathbf{R}_2[x]$ polinomioen multzoa, koefiziente errealak dituzten polinomio guztien espazio bektorialaren azpiespazio bektoriala da.

4. KONBINAZIO LINEALAK

Definizioa. Izan bedi V **K** gainean espazio bektoriala. Baldin $\overline{x} \in V$ bektorea ondoko erara idazterik badago: $\overline{x} = \alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + ... + \alpha_n\overline{x}_n$, non $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbf{K}$ diren, Orduan $\overline{x} \in V$ bektorea $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n \in V$ bektoreen konbinazio lineala dela esaten da.

Baldin A = { $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n$ } bada, C(A) = $<\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n>$ ikurraren bidez A-ren bektoreen konbinazio lineala diren bektoreen multzoa adierazten dugu.(itxidura lineala)

Proposizioa. Izan bitez $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n \in V$. Orduan, F = $<\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n>$ V-ren azpiespazio bektoriala dela betetzen da eta A = { $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n$ } bektore-familiak

sorturiko azpiespazio bektoriala dela esaten da. A = { $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n$ } F-ren sistema sortzaile bat dela esaten da.

5. DEPENDENTZIA ETA INDEPENDENTZIA LINEALA

Izan bitez V espazio bektoriala eta $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n \in V$.

Definizioa. $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n \in V$ bektoreak *linealki dependenteak edo linealki mendekoak* direla esaten da baldin eta ondokoa betetzen duten $\alpha_i \in \mathbf{K}$ eskalarrak existitzen badira, guztiak batera zero ez izanik: $\alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + ... + \alpha_n\overline{x}_n = \overline{0}$

Kasu honetan, { $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n$ } familia edo sistema *lotua* dela esaten da.

Definizioa. $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n \in V$ bektoreak linealki dependenteak ez direnean *linealki independenteak* direla esaten da. Beraz, $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n \in V$ bektoreak emanik, baldin eta

$$\alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + ... + \alpha_n\overline{x}_n = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$$

betetzen bada, orduan $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n$ bektoreak linealki independenteak dira eta { $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n$ } familia edo sistema *askea* dela esaten da.

Proposizioa. $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n \in V$ bektoreak linealki dependenteak dira, baldin eta soilik baldin bektoreetatik bat gutxienez gainerakoen konbinazio lineala bada.

Proposizioa. Baldin A = { $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n$ } V-ren sistema askea bada, orduan A-ren edozein azpisistema askea da.

Proposizioa. Baldin A = { $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n$ } V-ren sistema lotua bada, orduan A barnean duen V-ren edozein G sistema ($A \subset G$) lotua da.

Proposizioa. $\overline{0}$ bektore nulua duen edozein bektore-sistema lotua da.

$$a.\overline{x}_1 + 0.\overline{x}_2 + ... + 0.\overline{x}_n = \overline{0} \text{ betetzen da} \qquad \forall a \in \mathbf{K} \text{ eskalarretarako}$$

Adibideak.

- 1, $\sin^2 x$, $\cos^2 x \in C[0,2\pi]$ funtzioak linealki dependenteak dira.
- { 1-x, 2+x+x^2, 1+x^2 } $\subset \mathbf{R}_2[x]$ bektore-sistema askea da.
- { (1,2), (0,2), (1,1) } $\subset \mathbf{R}^2$ bektore-sistema ez da askea .

Aurreko guztia kontuan hartuz, **matrize baten heina**, linealki independenteak diren matrizearen errenkada-kopuru edo zutabe-kopuru maximoa bezala defini dezakegu.

Beraz, bektore-sistema bat askea den ikusteko nahikoa izango da bektoreek osatzen duten matrizearen heina aztertzea.

6. OINARRIA ETA DIMENTSIOA

Izan bitez V **K** gainean espazio bektoriala eta $A \subset V$. Orduan, V = <A> baldin bada, A-ri V-ren *sistema sortzaile* esaten zaio. V espazio bektoriala *sorkuntza finitukoa edo dimentsio finitukoa* dela esango dugu, baldin eta soilik baldin sistema sortzaile finituren bat badu. Beraz, V dimentsio finituko espazio bektoriala da, ondokoa betetzen duen V-ren $A = \{ \overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n \}$ azpimultzo finituren bat existitzen bada:

$$\forall \overline{x} \in V \quad \exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbf{K} \ / \ \overline{x} = \alpha_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \overline{x}_2 + ... + \alpha_n \overline{x}_n$$

Badaude dimentsio finitukoak ez diren espazio bektorialak, besteak beste C[a,b] eta polinomio guztien espazio bektoriala, baina hemendik aurrera dimentsio finituko espazio bektorialak soilik kontsideratuko ditugu.

<u>Definizioa</u>. Baldin eta $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$ bektore-sistema V espazio bektorialaren sistema sortzailea eta askea bada, V-ren *oinarria* dela esango dugu.

<u>Adibideak</u>.

- $\{ \overline{e}_1 = (1,0), \overline{e}_2 = (0,1) \}$ bektore-sistema $\mathbf{R}^2$-ren oinarri bat da.
- Jeneralean, $\{ \overline{e}_1 = (1,0,...,0), \overline{e}_2 = (0,1,0,...,0), ..., \overline{e}_n = (0,...,0,1) \}$ $\mathbf{R}^n$-ren oinarri bat da eta $\mathbf{R}^n$-ren oinarri kanonikoa esango diogu.
- $\{1, x, x^2\}$ $\mathbf{R}_2[x]$ espazio bektorialaren oinarri bat da.
- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ 2 ordenako matrize karratuen $M_2(\mathbf{K})$ espazio bektorialaren oinarri bat da.

<u>Proposizioa</u>. V-ren edozein bektore, oinarri baten bektoreen konbinazio lineal moduan idatzia izan daiteke eta konbinazio lineal hori bakarra da.

Izan bedi $B = \{ \overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n \}$ V-ren oinarri bat, orduan

$\forall \overline{x} \in V - \text{rentzat} \quad \exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbf{K}$ bakarrak / $\overline{x} = \alpha_1 \overline{e}_1 + \alpha_2 \overline{e}_2 + ... + \alpha_n \overline{e}_n$ den.

Aurreko adierazpenean agertzen diren n eskalarrei, B oinarriarekiko $\overline{x}$ bektorearen *koordenatuak* esaten zaie: $\overline{x} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)_B$.

Proposizioa. $\{\overline{0}\}$ ez den dimentsio finituko edozein espazio bektorialek gutxienez oinarri bat du.

Oinarriaren teorema. V-ren oinarri guztiek bektore-kopuru berbera dute.

V espazio bektorialaren edozein oinarriren bektore-kopuruari, V-ren *dimentsioa* esaten zaio eta dim(V) ikurraren bidez adieraziko dugu.

$\{\overline{0}\}$ espazio bektorialaren dimentsioa 0 dela onartzen da.

Adibideak.

$\dim(\mathbf{R}^2) = 2, \dim(\mathbf{R}^n) = n$, $\dim(\mathbf{R}_2[x]) = 3$, $\dim(\mathbf{R}_n[x]) = n+1$, $\dim(M_2(\mathbf{R})) = 4$

Proposizioa. Baldin dim(V) = n bada, orduan "m" elementu dituen V-ren edozein bektore-sistema, m>n izanik, lotua da.

Proposizioa. Izan bitez n dimentsiotako V espazio bektoriala (dim(V)=n) eta "n" bektorez osatutako V-ren A bektore-familia. Orduan:

A V-ren oinarria $\Leftrightarrow$ A askea edo A V-ren sistema sortzailea

Definizioa. Izan bitez V espazio bektoriala eta $H = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n\} \subset V$. H-ren *heina*, linealki independenteak diren familiaren bektore-kopuru handienari esaten zaio. Beraz, r(H) = dim<H>.

Hemen matrize baten heina defini dezakegu: Matrize baten *heina*, linealki independenteak diren matrizearen errenkada-kopuru edo zutabe-kopuru maximoa da. Froga daiteke matrizean linealki independente diren errenkada-kopuru maximoa eta zutabe-kopuru maximoa kopuru berbera direla.

Izan bitez V espazio bektoriala eta $F \subset V$. Orduan, dim(F) = dim(V) – n non "n" F definitzen duten ekuazio linealki independenteen kopurua den.

7. OINARRI-ALDAKETA

Atal honetan, bi oinarri desberdinekiko bektore baten koordenatuen arteko erlazioa aztertuko dugu.

Izan bedi V "n" dimentsioko espazio bektorial bat, dim(V) = n.

Izan bitez $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$ eta $B' = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\}$ V-ren bi oinarri. Badakigu V-ren edozein bektore B oinarriaren bektoreen konbinazio lineal moduan eta

B’ oinarriaren bektoreen konbinazio lineal bezala adieraz daitekela. Izan bedi $\overline{x} \in$ V, orduan:

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbf{K} \ / \ \overline{x} = \alpha_1 \overline{e}_1 + \alpha_2 \overline{e}_2 + ... + \alpha_n \overline{e}_n$$

$$\exists \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in \mathbf{K} \ / \ \overline{x} = \beta_1 \overline{u}_1 + \beta_2 \overline{u}_2 + ... + \beta_n \overline{u}_n$$

Bestalde, B-ren elementuak V-renak dira eta B’ oinarriaren bektoreen konbinazio lineal bezala adieraz ditzakegu.

$$\overline{e}_1 = a_{11}\overline{u}_1 + a_{21}\overline{u}_2 + ... + a_{n1}\overline{u}_n$$

$$\overline{e}_2 = a_{12}\overline{u}_1 + a_{22}\overline{u}_2 + ... + a_{n2}\overline{u}_n$$

$$.....$$

$$\overline{e}_1 = a_{1n}\overline{u}_1 + a_{2n}\overline{u}_2 + ... + a_{nn}\overline{u}_n$$

Orain, α_i eta β_i koordenatuen arteko erlazioa lortuko dugu:

$$\begin{aligned}\overline{x} = \alpha_1 \overline{e}_1 + \alpha_2 \overline{e}_2 + ... + \alpha_n \overline{e}_n = \ & \alpha_1 (a_{11}\overline{u}_1 + a_{21}\overline{u}_2 + ... + a_{n1}\overline{u}_n) + \\ & + \alpha_2 (a_{12}\overline{u}_1 + a_{22}\overline{u}_2 + ... + a_{n2}\overline{u}_n) + \\ & ..... \\ & + \alpha_n (a_{1n}\overline{u}_1 + a_{2n}\overline{u}_2 + ... + a_{nn}\overline{u}_n) = \beta_1 \overline{u}_1 + \beta_2 \overline{u}_2 + ... + \beta_n \overline{u}_n\end{aligned}$$

Eta hemendik, ondoko erlazioa lortzen dugu:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ .. \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ .. \\ \alpha_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \ (\overline{x})_{B'} = A.(\overline{x})_B$$

A matrizea , B eta B’ oinarrien arteko oinarri-aldaketaren matrizea da eta bere zutabeak B oinarriaren elementuen B’ oinarriarekiko koordenatuak dira.

$$A = \left((\overline{e}_1)_{B'}, (\overline{e}_2)_{B'}, ..., (\overline{e}_n)_{B'} \right)$$

A matrizea inbertigarria da eta A^{-1} matrizeak B’ eta B oinarrien arteko oinarri-aldaketa adierazten du.

8. AZPIESPAZIO BEKTORIALEN ARTEKO EBAKETA ETA BATUKETA

Izan bitez **K**-ren gaineko V espazio bektoriala eta V-ren F eta G azpiespazio bektorialak.

Definizioa. F-ren eta G-ren *ebakidura* honela definitzen dugu:

$$F \cap G = \{\overline{x} \,/\, \overline{x} \in F \text{ eta } \overline{x} \in G\}$$

Definizioa. F-ren eta G-ren *batura* honela definitzen dugu:

$$F + G = \{\overline{x} = \overline{u} + \overline{v} \,/\, \overline{u} \in F \text{ eta } \overline{v} \in G\}$$

F + G batura *batura zuzena* dela esango dugu, eta $F \oplus G$ ikurraren bidez adieraziko dugu, ondoko baldintza betetzen denean:

$$\forall \overline{x} \in F + G \quad \exists! \overline{u} \in F \text{ eta } \exists! \overline{v} \in G \,/\, \overline{x} = \overline{u} + \overline{v}$$

edo, aurrekoaren baliokide dena: $F \cap G = \{\overline{0}\}$.

Proposizioa. Aurrean definituriko F+G eta $F \cap G$ multzoak, V-ren azpiespazio bektorialak dira. Gainera, F+G = <$F \cup G$>betetzen da.

Oharra. Jeneralean, azpiespazioen bildura, $F \cup G = \{\overline{x} \,/\, \overline{x} \in F \text{ edo } \overline{x} \in G\}$, ez da azpiespazio bektoriala.

Proposizioa. dim(F+G) = dim(F) + dim(G) – dim($F \cap G$)