# 6. GAIA. ESPAZIO BEKTORIAL EUKLIDEARRA

1. **Biderketa eskalarra**
2. **Bektore baten norma**
3. **Bi bektoreren arteko angelua eta distantzia**
4. **Ortogonaltasuna**

   **4.1 Definizioa eta ortogonalizazio-metodoa**

   **4.2 Azpiespazio ortogonalak**

   **4.3 Matrize ortogonalak**

   **4.4 Proiekzio ortogonala eta hurbilketa onena**

# 6. GAIA. ESPAZIO BEKTORIAL EUKLIDEARRA

Aurreko gaietan bektoreen batuketarekin eta eskalar baten eta bektore baten arteko biderketarekin zerikusia zeuzkaten bektoreen propietate batzuk ( konbinazio lineala, dependentzia lineala, ...) aztertu ditugu eta espazio bektorialaren egitura lortu dugu. Alabaina, bektore geometrikoei buruzko hainbat kontzeptu aztertzeko bi eragiketa horiek ez dira nahikoak, esate baterako, bektore baten modulua edo luzera eta bi bektoreren arteko angelua definitzeko. Distantzia eta angelu kontzeptuak aztertzeko, beharrezkoa da lehenbizi biderketa eskalarra definitzea.

Gai honetan, biderketa eskalarraz baliatuz beste egitura berri bat definituko dugu, espazio bektorial euklidearra eta bertan bektoreen propietate geometrikoak aztertuko ditugu: bi bektoreren arteko angelua, bektoreen arteko distantziak, ...

Bestalde, ondorengo oharra aipatzea komeni da: hemendik aurrera espazio bektorial errealen kasura mugatuko gara, hau da, zenbaki errealen $\Re$ gorputzean definitutako espazio bektorialetara.

## 1. BIDERKETA ESKALARRA

<u>Definizioa</u>. Izan bedi $\mathbf{R}^n$-n definitutako V espazio bektorial bat.

(.): VxV $\rightarrow$ **R** aplikazio bati, *biderketa eskalar* esaten zaio, ondoko

$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \bar{x} . \bar{y}$

propietateak betetzen dituenean:

1.- $\bar{x} . \bar{y} = \bar{y} . \bar{x} \qquad \forall\ \bar{x}, \bar{y} \in$ V.

2.- $(\bar{x} + \bar{y}) . \bar{z} = \bar{x} . \bar{z} + \bar{y} . \bar{z} \qquad \forall\ \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in$ V.

3.- $(\lambda . \bar{x}) . \bar{y} = \lambda . (\bar{x} . \bar{y}) \qquad \forall\ \lambda \in \mathbf{R};\ \forall\ \bar{x}, \bar{y} \in$ V.

4.- $\bar{x} . \bar{x} > 0 \qquad \forall\ \bar{x} \in$ V / $\bar{x} \neq \bar{0}$.

$\bar{x} . \bar{y}$ zenbaki erreala, $\bar{x}$ eta $\bar{y}$ bektoreen arteko biderkadura eskalarra dela esaten da, eta modu hauetan adierazten da: $\bar{x} . \bar{y}$, $(\bar{x}|\bar{y})$, $< \bar{x}, \bar{y} >$ edo $(\bar{x}, \bar{y})$.

<u>Propietateak</u>.

a) $\bar{0} . \bar{z} = 0 \qquad \forall\ \bar{z} \in$ V.

b) $\bar{x} . \bar{x} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$.

Definizioa. Izan bedi V **R** gainean definitutako eta dimentsio finituko espazio bektorial bat. V-n (.) biderketa eskalar bat definitzen badugu, *espazio bektorial euklidear bat* izango dugu eta (V, .) ikurraren bidez adieraziko dugu.

Definizioa. (.) biderketa eskalarraz hornitutako V espazio bektorialari, *espazio bektorial euklidearra* esaten zaio.

Adibideak.

1) $\mathbf{R}^2$ espazio bektorial erreala, $\overline{x} = (x_1, x_2), \overline{y} = (y_1, y_2)$ badira, $\overline{x}.\overline{y} = x_1y_1 + x_2y_2$ biderketa eskalarraz hornituta, espazio bektorial euklidearra da.

2) $\mathbf{R}^n$ espazio bektorial erreala, $\overline{x} = (x_1,...,x_n), \overline{y} = (y_1,...,y_n)$ badira, orduan $\overline{x}.\overline{y} = x_1y_1 + ... + x_ny_n$ biderketa eskalarraz hornituta, espazio bektorial euklidearra da. Biderketa eskalar honi, $\mathbf{R}^n$ espazio bektorialeko *biderketa eskalar kanonikoa* esaten zaio.

3) $\mathbf{R}^2$ espazio bektorial errealean, $\overline{x}.\overline{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ biderketa eskalarra da.

4) [0,1] tartean definitutako funtzio jarraituen C[0,1] espazio bektorialean, ondorengo aplikazioa biderketa eskalarra da: $f.g = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

5) $\mathbf{R}^2$ espazio bektorial errealean, $\overline{x}.\overline{y} = x_1y_1$ eta $\overline{x}.\overline{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ aplikazioak ez dira biderketa eskalarrak.

**Biderketa eskalar baten determinazioa. Gram-en matrizea.**

Izan bedi (.) biderketa eskalar batez hornitutako eta $\Re$ gainean definitutako V espazio bektorial bat non dim V = n den. Izan bedi B = $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n\}$ V-ren oinarri bat. Izan bitez $\overline{x}$ eta $\overline{y} \in$ V. B V-ren oinarria denez, ondokoa betetzen da:

$$\overline{x} = x_1\overline{v}_1 + x_2\overline{v}_2 + ... + x_n\overline{v}_n \quad \text{eta} \quad \overline{y} = y_1\overline{v}_1 + y_2\overline{v}_2 + ... + y_n\overline{v}_n$$

Eta biderketa eskalarraren lehenengo hiru propietateak kontuan hartuz, ondokoa izango dugu:

$$\overline{x}.\overline{y} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{v}_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\overline{v}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j\overline{v}_i\overline{v}_j$$

Horrela, (.) biderketa eskalarra guztiz determinatuta dago V-ren oinarriaren bektoreen biderkadura eskalarrak ezagutuz, hau da, ondoko biderkadura eskalarrak ezagutzen direnean: $\overline{v}_i.\overline{v}_j = g_{ij} \quad \forall i,j = 1,...,n$.

Gainera, biderketa eskalarraren propietateak erabiliz, ondokoak betetzen dira:

$$g_{ij} = g_{ji} \quad \forall i,j = 1,...,n \quad \text{eta} \quad g_{ii} > 0 \quad \forall i = 1,...,n.$$

Beraz, biderketa eskalarra, matrizialki, honela adieraz dezakegu:

$$\overline{x}.\overline{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & ... & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & ... & g_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ g_{n1} & g_{n2} & ... & g_{nn} \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} x_i.g_{ij}.y_j = (\overline{x})_B^t.G.(\overline{y})_B$$

non $(\overline{x})_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ eta $(\overline{y})_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$, $\overline{x}$ eta $\overline{y}$ bektoreen koordenatuak diren B oinarrian.

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & ... & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & ... & g_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ g_{n1} & g_{n2} & ... & g_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{v}_1.\overline{v}_1 & \overline{v}_1.\overline{v}_2 & ... & \overline{v}_1.\overline{v}_n \\ \overline{v}_2.\overline{v}_1 & \overline{v}_2.\overline{v}_2 & ... & \overline{v}_2.\overline{v}_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \overline{v}_n.\overline{v}_1 & \overline{v}_n.\overline{v}_2 & ... & \overline{v}_n.\overline{v}_n \end{pmatrix}$$ matrizeari, biderketa

eskalarraren *Gram-en matrizea* esaten zaio V-ren $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n\}$ oinarrian.

*G* matrizea simetrikoa eta erregularra da.

<u>Adibidea</u>. $\mathbf{R}^n$ espazio bektorialean, biderketa eskalar kanonikoaren Gram-en matrizea, $\mathbf{R}^n$-ren oinarri kanonikoan, $G = I_n$ da.

## 2. BEKTORE BATEN NORMA

<u>Definizioa.</u> Izan bitez (V, . ) espazio bektorial euklidearra eta $\overline{x} \in V$.

$+\sqrt{\overline{x}.\overline{x}}$ zenbaki erreal ez-negatiboari, $\overline{x}$ bektorearen *norma, edo luzera edo modulua* esaten zaio eta $\|\overline{x}\|$ ikurraren bidez adierazten da. $\|\overline{x}\| = +\sqrt{\overline{x}.\overline{x}}$ .

Propietateak.

1.- $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$ .

2.- $\|\boldsymbol{l}.\bar{x}\| = |\boldsymbol{l}|.\|\bar{x}\|$ $\quad \forall \lambda \in \mathbf{R} \quad \forall \bar{x} \in V$

3.- Cauchy-Schwarz -en desberdintza: $|\bar{x}.\bar{y}| \leq \|\bar{x}\|.\|\bar{y}\|$ $\quad \bar{x}, \bar{y} \in V.$

4.- Desberdintza triangeluarra: $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ $\quad \bar{x}, \bar{y} \in V.$

5.- Paralelogramoaren legea: $\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 + \|\bar{x} - \bar{y}\|^2 = 2\left(\|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2\right)$ $\quad \bar{x}, \bar{y} \in V.$

Definizioa. $\bar{u}$ bektore bat *unitarioa* edo *normala* dela esaten da, $\|\bar{u}\| = 1$ betetzen denean. Baldin $\bar{x} \in V$ eta $\bar{x} \neq \bar{0}$ bada, orduan $\dfrac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}$ bektorea unitarioa da eta $\bar{x}$ bektorea *normalizatu* egin dela esaten da.

## 3. BI BEKTOREREN ARTEKO ANGELUA ETA DISTANTZIA

Cauchy-Schwarz -en $|\bar{x}.\bar{y}| \leq \|\bar{x}\|.\|\bar{y}\|$ desberdintza beste era honetara jar dezakegu: $-\|\bar{x}\|.\|\bar{y}\| \leq \bar{x}.\bar{y} \leq \|\bar{x}\|.\|\bar{y}\|$

Eta, beraz, $\bar{x} \neq \bar{0}$ eta $\bar{y} \neq \bar{0}$ direnean: $\quad -1 \leq \dfrac{\bar{x}.\bar{y}}{\|\bar{x}\|.\|\bar{y}\|} \leq 1$

Ondorioz, ondokoa betetzen duen $\theta$ angelu bat aurki dezakegu:

$$\theta \in [0\,,\pi] \quad / \quad \cos\theta = \frac{\bar{x}.\bar{y}}{\|\bar{x}\|.\|\bar{y}\|}\,.$$

Definizioa. $\theta$-ri, *$\bar{x}$ eta $\bar{y}$ bektoreek eratzen duten angelua* esaten zaio.

Eta $\bar{x}$ eta $\bar{y}$ bektoreek eratzen duten angelua erabiliz, $\bar{x}$ eta $\bar{y}$ bektoreen arteko biderkadura eskalarra, honela adieraz dezakegu: $\bar{x}\,.\,\bar{y} = \|\bar{x}\|.\|\bar{y}\| \cos\theta$.

Definizioa. Izan bitez $\bar{x}$ eta $\bar{y} \in V$. $\bar{x}$ eta $\bar{y}$ *bektoreen arteko distantzia*, $d(\bar{x}, \bar{y})$ adierazten da eta honela definitzen da: $d(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|$.

Propietateak.

1.- $d(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0 \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in V$

2.- $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$

3.- $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x}) \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in V$

4.- $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{z}, \bar{y}) \quad \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$

Propietate hauek guztiak normaren propietateen berehalako ondorioak dira. Bi bektoreren arteko distantziarako emandako definizioa norma batek induzitzen du, baina norma bat kontuan izan gabe ere defini dezakegu distantzia bat, horretarako aurreko lau propietateak betetzea nahikoa izango da.

Espazio bektorial batean distantzia bat definitzen badugu, beste egitura algebraiko bat lortzen dugu, eta *Espazio metriko* esaten zaio.

## 4. ORTOGONALTASUNA

### 4.1. Definizioa eta ortogonalizazio-metodoa.

Definizioa. Izan bitez (V, . ) espazio bektorial euklidear bat eta $\overline{x}, \overline{y} \in V$ bi bektore.

$\overline{x}$ eta $\overline{y}$ bektoreak *ortogonalak* direla esango dugu, baldin eta $\overline{x} . \overline{y}$ biderkadura eskalarra nulua bada. Hau da, $\overline{x} . \overline{y} = 0$.

Oharra.

$\forall \overline{x} \in V \quad \overline{x}.\overline{0} = 0$, beraz, bektore nulua edozein bektorerekiko ortogonala da.

Adibideak.

1) $\mathbf{R}^n$ espazio bektorialean biderketa eskalar kanonikoa kontsideratzen badugu, $\overline{e}_1$=(1,0,...,0), $\overline{e}_2$ = (0,1,...,0) $\overline{e}_n$ = (0,0,...,1) bektoreak binaka ortogonalak dira.

2) C[$-\pi, \pi$] espazio bektorialean f.g = $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ g(t)\, dt$ biderketa eskalarra kontsideratzen badugu, ondorengo funtzioak binaka ortogonalak dira:

1, cos t, sin t, cos 2t, sin 2t, ..., cos nt, sin nt

Definizioa. Bektore ez-nuluz osatutako $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_p\}$ sistema bat *ortogonala* dela esaten da, sistemaren bektore bakoitza gainerako guztiekiko ortogonala denean.

Pitagoras-en Teorema.

(V, . ) espazio bektorial euklidearrean $\overline{x}$ eta $\overline{y}$ bektoreak ortogonalak baldin badira, orduan: $\|\overline{x} + \overline{y}\|^2 = \|\overline{x}\|^2 + \|\overline{y}\|^2$ .

Definizioa. Bektore-sistema bat *ortonormala* dela esaten da, baldin eta ortogonala bada eta bere bektore guztiak normalak edo unitarioak badira.

Adibidea. $\mathbf{R}^3$ espazio bektorialean biderketa eskalar kanonikoa kontsideratzen badugu, $\{ \bar{e}_1 = (1,00),\ \bar{e}_2 = (0,1,0),\ \bar{e}_3 = (0,0,1) \}$bektore-sistema ortogonala da.

Teorema. Edozein sistema ortogonal askea da.

* Alderantzizkoa faltsua da.

**Oharra**. Biderketa eskalarraren adierazpena oinarri ortonormal batean.

Izan bitez V espazio bektorial euklidearra non dim V = n den eta V-ren bektore-familia ortogonal bat, orduan familia hori V-ren oinarri bat da. Gainera, oinarri hori ortonormalizatu egiten badugu, V-ren B oinarri ortonormal bat lortuko dugu eta biderketa eskalarraren Gram-en matrizea B oinarrian $I_n$ unitate matrizea izango da. Beraz, biderketa eskalarra honela geratuko zaigu:

$$\bar{x}\,.\,\bar{y} \;=\; (\bar{x})_B^t.(\bar{y})_B \;=\; x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

eta biderketa eskalar honi elkartutako norma ondokoa izango da: $\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x})_B^t.(\bar{x})_B}$ .

Beraz, (V, . ) espazio bektorial euklidear batean (.) biderketa eskalarraren Gram-en matrizea V-ren edozein oinarri ortonormaletan unitate matrizea da. Oinarri ortonormalak oso interesgarriak dira beraietan lortzen den biderketa eskalarraren adierazpena sinpleena delako.

**Gram-Schmidt -en ortogonalizazio metodoa.**

Edozein (V, . ) espazio bektorial euklidearrek oinarri ortonormal bat du.

V-ren edozein oinarritik abiatuta, V-ren oinarri ortonormal bat eraikitzeko metodo bat ikusiko dugu.

Izan bedi $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$ V-ren oinarri bat.

Izan bedi $\bar{v}_1 = \dfrac{\bar{u}_1}{\|\bar{u}_1\|}$ $\qquad \|\bar{v}_1\| = 1.$

* $\bar{w}_2 = \bar{u}_2 + \lambda.\bar{v}_1$ kontsideratzen dugu.

*l* determinatzen dugu, $\bar{w}_2$ eta $\bar{v}_1$ ortogonalak izan daitezen.

$$0 = \bar{v}_1.\bar{w}_2 = \bar{v}_1.\ \bar{u}_2 + \lambda. \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\bar{v}_1.\ \bar{u}_2.$$

Beraz, $\qquad \bar{w}_2 = \bar{u}_2 - (\bar{v}_1.\bar{u}_2).\bar{v}_1$ .

($\bar{w}_2 \neq \bar{0}$, bestela $\bar{u}_1$ eta $\bar{u}_2$ linealki dependenteak izango lirateke).

Izan bedi $\bar{v}_2 = \dfrac{\bar{w}_2}{\|\bar{w}_2\|}$ $\qquad \|\bar{v}_2\| = 1.$

$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ ortonormala da.

$\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in <\bar{u}_1, \bar{u}_2> \Rightarrow <\bar{v}_1, \bar{v}_2> \subset <\bar{u}_1, \bar{u}_2>$

eta $\dim <\bar{v}_1, \bar{v}_2> = \dim <\bar{u}_1, \bar{u}_2>$

( $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ ortogonala $\Rightarrow$ $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ askea)

Orduan: $<\bar{v}_1, \bar{v}_2> = <\bar{u}_1, \bar{u}_2>$.

* $\bar{w}_3 = \bar{u}_3 + \mu_1.\bar{v}_1 + \mu_2.\bar{v}_2$ kontsideratzen dugu.

$\mu_1$ eta $\mu_2$ determinatuko ditugu, $\bar{w}_3$ bektorea $\bar{v}_1$ eta $\bar{v}_2$ bektoreekiko ortogonala izan dadin.

$$\left.\begin{array}{lllllllll} 0 & = & \bar{v}_1 & . & \bar{w}_3 & = & \bar{v}_1 & . & \bar{u}_3 & + & \mu_1 \\ 0 & = & \bar{v}_2 & . & \bar{w}_3 & = & \bar{v}_2 & . & \bar{u}_3 & + & \mu_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mu_1 = -\bar{v}_1.\bar{u}_3 \text{ y } \mu_2 = -\bar{v}_2.\bar{u}_3.$$

Beraz, $\bar{w}_3 = \bar{u}_3 - (\bar{v}_1.\bar{u}_3).\bar{v}_1 - (\bar{v}_2.\bar{u}_3).\bar{v}_2$.

( $\bar{w}_3 \neq \bar{0}$, bestela $\bar{u}_3 \in <\bar{v}_1, \bar{v}_2> \Rightarrow \bar{u}_3 \in <\bar{u}_1, \bar{u}_2>$. Absurdua).

Izan bedi $\bar{v}_3 = \dfrac{\bar{w}_3}{\|\bar{w}_3\|}$ $\qquad \|\bar{v}_3\| = 1.$

$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ sistema ortonormala da.

$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in <\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3> \Rightarrow <\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3> \subset <\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3>$.

eta $\dim <\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3> = \dim <\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3>$

( $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ ortogonala $\Rightarrow$ $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ askea)

Orduan: $<\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3> = <\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3>$.

Aurreko prozesuari jarraituz, ondokoa lortuko dugu: $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_n\}$ sistema ortonormal bat / $<\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_n> = <\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n> = V$.

Beraz,

$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_n\}$ V-ren oinarri ortonormal bat izango da.

Teorema. Izan bitez (V, . ) espazio bektorial euklidearra eta B = $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n\}$ V-ren oinarri ortogonala (edo ortonormala). Orduan, V-ren edozein bektorerentzat ondokoa betetzen da:

Izan bedi $\overline{x} \in V$. Orduan,

$$\overline{x} = x_1\overline{v}_1 + x_2\overline{v}_2 + ... + x_n\overline{v}_n \quad \text{non} \quad x_i = \frac{\overline{v}_i.\overline{x}}{\overline{v}_i.\overline{v}_i} = \frac{\overline{v}_i.\overline{x}}{\|\overline{v}_i\|^2} \quad \forall\, i=1,...,n \text{ diren.}$$

(edo $x_i = \overline{v}_i.\overline{x} \quad \forall i = 1,...,n$, B ortonormala denean)

**4.2. Azpiespazio ortogonalak.**

Definizioa. Izan bedi (V, . ) espazio bektorial euklidear bat. V-ren $H_1$ eta $H_2$ azpiespazioak *ortogonalak* direla esaten da baldin eta $H_1$-eko edozein bektore $H_2$-ko edozein bektorerekiko ortogonala bada.

Proposizioa. Izan bedi (V, .) espazio bektorial euklidear bat. Izan bitez $H_1$ eta $H_2$ V-ren bi azpiespazio bektorial ortogonal. Orduan, $H_1 \cap H_2 = \{\overline{0}_V\}$.

Definizioa. Izan bitez (V, .) espazio bektorial euklidear bat eta H V-ren azpiespazio bektorial bat. H-ko bektore guztiekiko ortogonalak diren V-ren bektoreek osatzen duten multzoa $H^\perp$ ikurraren bidez adierazten da eta H-ko *betegarri* edo *osagarri ortogonala* dela esaten da. Hau da,

$$H^\perp = \{\overline{x} \in V \,/\, \overline{x}.\overline{h} = 0 \quad \forall \overline{h} \in H\}.$$

Proposizioa. $H^\perp = \{\overline{x} \in V \,/\, \overline{x}.\overline{v}_1 = 0, \overline{x}.\overline{v}_2 = 0, ..., \overline{x}.\overline{v}_p = 0\}$ non $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_p\}$ H-ren oinarri bat den.

Propietateak. Izan bitez (V, .) espazio bektorial euklidear bat eta H V-ren azpiespazio bektorial bat. Orduan:

1.- $H^\perp$ V-ren azpiespazio bektoriala da.

2.- $(H^\perp)^\perp = H$.

3.- H eta $H^\perp$ V-rekiko betegarriak dira. Hau da, $V = H \oplus H^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} V = H + H^\perp \\ H \cap H^\perp = \{\overline{0}_V\} \end{cases}$

4.- V-rekiko H-ren betegarriak diren V-ren azpiespazio bektorial guztien artean, $H^\perp$ da H-rekiko ortogonala den bakarra.

## 4.3. Matrize ortogonalak.

2.gaian matrize ortogonalen ondoko definizioa ikusi genuen:

A matrize karratua *ortogonala* dela esaten da bere matrize iraulia matrize alderantzizkoaren berdina denean. Hots, $A^t = A^{-1} \Leftrightarrow A^t.A = A.A^t = I$

$A \in M_n(K)$ baldin bada, orduan:

$$A.A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ . & \dots & . \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Beraz, A matrizearen errenkadak $\mathbf{R}^n$ espazio bektorialean definitutako biderketa eskalar kanonikoarekiko ortogonalak dira. Eta $A.A^t = I_n$ kontsideratzen badugu, , A matrizearen zutabeak $\mathbf{R}^n$ espazio bektorialean definitutako biderketa eskalar kanonikoarekiko ortogonalak direla lortuko dugu.

Aurrekoa kontuan hartuz, ezagutzen dugun matrize ortogonalen definizioaren definizio baliokide hau kontsidera dezakegu:

<u>Definizioa</u>. $A \in M_n(K)$ matrizea *ortogonala* dela esango dugu, , A matrizearen errenkadak (edo zutabeak) $\mathbf{R}^n$ espazio bektorialean definitutako biderketa eskalar kanonikoarekiko ortogonalak direnean.

<u>Propietateak</u>.

1) Matrize ortogonalak biderketa eskalarrarekiko egonkorrak dira. Hau da:

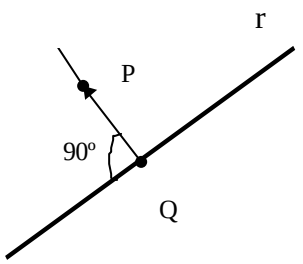
$$\text{A ortogonala} \Rightarrow (A\overline{x}).(A\overline{y}) = \overline{x}.\overline{y} \quad \forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbf{R}^n$$

(non (.), $\mathbf{R}^n$ espazio bektorialean definitutako biderketa eskalar kanonikoa den)

2) Matrize ortogonalak distantziekiko egonkorrak dira. Hau da:

$$\text{A ortogonala} \Rightarrow d(A\overline{x}, A\overline{y}) = d(\overline{x}, \overline{y}) \quad \forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbf{R}^n$$

## 4.4. Proiekzio ortogonala eta hurbilketa onena.




<u>Definizioa.</u> Izan bedi (V, .) espazio bektorial euklidear bat. Izan bitez $\overline{x} \in V$ eta H V-ren azpiespazio bektorial bat. $\overline{x}$ bektorearen H *azpiespazioaren gaineko proiekzio ortogonala*, $\text{proy}_H\, \overline{x}$ idatzita, honela definitzen da: $\text{proy}_H\, \overline{x} \in H \;/\; \overline{x} - \text{proy}_H\, \overline{x}$ H -rekiko ortogonala den.

Beraz, $\text{proy}_H\ \overline{x} \in H$ eta $\overline{x} - \text{proy}_H\ \overline{x} \in H^{\perp}$.

<u>Teorema</u>. Izan bedi (V, .) espazio bektorial euklidear bat.

Izan bitez H V-ren azpiespazio bektorial bat eta $\overline{x} \in V$.

Izan bedi $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_p\}$ H -ren oinarri ortonormal (ortogonal) bat.

Orduan, $\overline{x}$ bektorearen H azpiespazioaren gaineko proiekzio ortogonala ondokoa da:

$$\text{proy}_H\ \overline{x} = (\overline{x}.\overline{u}_1).\overline{u}_1 + (\overline{x}.\overline{u}_2).\overline{u}_2 + ... + (\overline{x}.\overline{u}_p)\overline{u}_p$$

$$(\text{proy}_H\ \overline{x} = \frac{(\overline{x}.\overline{u}_1)}{\|\overline{u}_1\|^2}.\overline{u}_1 + \frac{(\overline{x}.\overline{u}_2)}{\|\overline{u}_2\|^2}.\overline{u}_2 + ... + \frac{(\overline{x}.\overline{u}_p)}{\|\overline{u}_p\|^2}.\overline{u}_p).$$

<u>Proiekzioaren Teorema</u>.

Izan bedi (V, .) espazio bektorial euklidear bat.

Izan bitez H V-ren azpiespazio bektorial bat eta $\overline{x} \in V$.

Izan bedi $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_p\}$ H -ren oinarri ortonormal (ortogonal) bat.

Orduan, $\overline{x}$ bektorea modu bakarrean deskonposa daiteke ondoko eran:

$$\overline{x} = \text{proy}_H\ \overline{x} + (\overline{x} - \text{proy}_H\ \overline{x}),$$

non $\text{proy}_H\ \overline{x} \in H$ eta $\overline{x} - \text{proy}_H\ \overline{x} \in H^{\perp}$ diren.

<u>Hurbilketa Teorema.</u>

Izan bedi (V, .) espazio bektorial euklidear bat.

Izan bitez H V-ren azpiespazio bektorial bat eta $\overline{x} \in V$.

Orduan, H azpiespazio bektorialean $\text{proy}_H\ \overline{x}$ $\overline{x}$ bektorearen *hurbilketa onena* da, ondoko zentzuan: $\|\overline{x} - \text{proy}_H \overline{x}\| \leq \|\overline{x} - \overline{h}\|$ $\forall\ \overline{h} \in H$.

Hau da, $\text{proy}_H\ \overline{x}$ bektorea H -ren bektoreen artean $\overline{x}$ bektorearekiko *hurbilen* dagoen bektorea da.