7.GAIA. ENDOMORFISMOEN ETA MATRIZEEN DIAGONALIZAZIOA

1. **Endomorfismo baten autobalioak eta autobektoreak**
2. **Matrize karratu baten autobalioak eta autobektoreak**
3. **Autobalioen eta autobektoreen kalkulua. Polinomio karakteristikoa**
4. **Balio eta bektore propioen azterketa**
5. **Diagonalizazioa**
6. **Matrize simetrikoen diagonalizazioa**

7.GAIA. ENDOMORFISMOEN ETA MATRIZEEN DIAGONALIZAZIOA

Gai honetan matrize karratu baten balio eta bektore propioak aztertuko ditugu, eta honen bidez matrize bat noiz den diagonalgarria eta noiz ez. Modu berdintsuan, endomorfismoen diagonalizazioa aztertuko dugu.

Definizioa. Izan bitez A eta A´ "n" ordenako bi matrize karratu, hau da, A, A´$\in$ $M_n(\mathbf{K})$. A eta A´ *antzekoak* direla esango dugu, A´ = P^{-1} A P berdintza betetzen duen P$\in M_n(\mathbf{K})$ matrize erregular bat existitzen denean.

Antzekotasunaren teorema. Izan bedi **K** gorputzaren gainean definitutako V espazio bektoriala. Izan bitez f : V $\rightarrow$ V endomorfismo bat eta B eta B´, V-ren bi oinarri.
Izan bitez A eta A´, f-ri elkartutako matrizeak B eta B´oinarrietan, hurrenez hurren.

Orduan, A eta A´ antzekoak dira eta A´ = P^{-1} A P betetzen da non P matrizea B´ eta B oinarrien arteko oinarri-aldaketaren matrizea den.

Gai honetan aztertu nahi dugun problema ondokoa da:

Izan bitez f : V $\rightarrow$ V endomorfismo bat eta A f-ri elkartutako matrizea V-ren B oinarri batean. Orduan, existitzen da V-ren B´ oinarriren bat non f-ri elkartutako matrizea B´ oinarrian diagonala den? Eta triangeluarra? Hau da, existitzen da V-ren B´ oinarriren bat non P^{-1}A P matrizea diagonala edo gutxienez triangeluarra den, P matrizea B´eta B oinarrien arteko oinarri-aldaketaren matrizea izanik?

Aurrekoa, modu matrizialean, honela adieraz dezakegu: A matrize karratu bat emanik, existitzen da A matrizearen antzekoa den matrize diagonal edo gutxienez triangeluar bat? Gai honen zehar, galderaren erantzuna baiezkoa izateko f endomorfismoak edo A matrizeak bete behar dituzten baldintzak ikusiko ditugu.

1. ENDOMORFISMO BATEN AUTOBALIOAK ETA AUTOBEKTOREAK

Definizioa. Izan bitez V **K** gainean espazio bektoriala eta f : V $\rightarrow$ V endomorfismoa.
$\overline{v} \in V$, $\overline{v} \neq \overline{0}_V$, bektore ez-nulu bat f endomorfismoaren *autobektore* edo *bektore propio* bat dela esango dugu, ondoko baldintza betetzen denean: $\exists\, \lambda \in \mathbf{K}$ / $f(\overline{v}) = \lambda \overline{v}$.

λ eskalarra f-ren *autobalio* edo *balio propio* bat dela esango dugu. Gainera:

$\overline{v}$: λ-ri elkartutako autobektore edo bektore propio bat da.

λ: $\overline{v}$-ri elkartutako autobalioa edo balio propioa da.

<u>Propietatea</u>. f endomorfismo baten $\overline{v}$ bektore propio bati elkartutako balio propioa BAKARRA da.

<u>Definizioa</u>. f endomorfismoaren λ balio propio bati elkartutako bektore propioek eta $\overline{0}_V$ bektore nuluak osatzen duten azpiespazioari, λ *balio propioari elkartutako azpiespazio propioa* esaten zaio eta $V_\lambda(f)$ ikurraren bidez adieraziko dugu.

$$V_\lambda(f) = \{\overline{v} \in V \ / \ f(\overline{v}) = \lambda\overline{v}\} \quad (\dim V_\lambda(f) \geq 1)$$

Gainera, $V_\lambda(f) = \{\overline{v} \in V \ / \ f(\overline{v}) = \lambda\overline{v}\} = \{\overline{v} \in V \ / \ f(\overline{v}) - \lambda\overline{v} = \overline{0}_V\} =$

$= \{\overline{v} \in V \ / \ (f - \lambda Id_V)(\overline{v}) = \overline{0}_V\} = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda Id_V)$

Beraz, λ autobalioari elkartutako f-ren azpiespazio propioa, $f - \lambda Id_V$ aplikazio linealaren nukleoa da.

<u>Propietatea</u>. Izan bedi $f : V \to V$ endomorfismo bat non $\mathrm{Ker}\, f \neq \{\overline{0}_V\}$ den. Orduan, $0 \in \mathbf{K}$ f-ren balio propio bat da eta alderantziz; hau da, $0 \in \mathbf{K}$ f-ren balio propio bat da, baldin eta soilik baldin f bijektiboa ez bada.

2. MATRIZE KARRATU BATEN AUTOBALIOAK ETA AUTOBEKTOREAK

<u>Definizioa</u>. Izan bedi $A \in M_n(\mathbf{K})$. $X \in M_{nx1}(\mathbf{K})$, $X \neq (0)$, zutabe matrize ez-nulu bat A matrizearen *autobektore* edo *bektore propio* bat dela esango dugu, ondoko baldintza betetzen denean: $\exists \lambda \in \mathbf{K} \ / \ A\,X = \lambda\,X$.

λ eskalarra A-ren *autobalio* edo *balio propio* bat dela esango dugu. Gainera:

X: λ autobalioari elkartutako autobektore edo bektore propio bat da.

λ: X autobektoreari elkartutako autobalioa edo balio propioa da.

<u>Propietatea</u>. A matrize karratu baten X bektore propio bati elkartutako balio propioa BAKARRA da.

<u>Definizioa</u>. A matrize karratuaren λ balio propio bati elkartutako bektore propioek eta $(0) \in M_{nx1}(\mathbf{K})$ zutabe matrize nuluak osatzen duten azpiespazioari, λ *balio propioari elkartutako azpiespazio propioa* esaten zaio eta $V_\lambda(A)$ ikurraren bidez adieraziko dugu.

$$V_\lambda(A) = \{X \in M_{nx1}(\mathbf{K}) \ / \ A\,X = \lambda\,X\} \quad (\dim V_\lambda(A) \geq 1)$$

3. AUTOBALIOEN ETA AUTOBEKTOREEN KALKULUA. POLINOMIO KARAKTERISTIKOA

Izan bedi f : V $\rightarrow$ V endomorfismo bat non dim V = n den.

Izan bedi B = { $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, ..., $\overline{v}_n$ } V-ren oinarri bat.

Izan bedi A $\in$ $M_n(\mathbf{K})$ f-ri elkartutako matrizea V-ren B = { $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, ..., $\overline{v}_n$ } oinarrian.

A $\in$ $M_n(\mathbf{K})$ f-ri elkartutako matrizea da, V-ren B = { $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, ..., $\overline{v}_n$ } oinarrian; beraz ondokoa betetzen da: $(f(\overline{v}))_B = A.(\overline{v})_B \quad \forall \overline{v} \in V.$

Izan bedi $\overline{v} \in V$. Orduan, $\overline{v} = x_1\overline{v}_1 + x_2\overline{v}_2 + ... + x_n\overline{v}_n$.

Izan bedi $X = (\overline{v})_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{nx1}(\mathbf{K})$

1.- $\lambda \in \mathbf{K}$ f-ren autobalio bat da $\Leftrightarrow$ $\lambda \in \mathbf{K}$ A-ren autobalio bat bada $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\lambda \in \mathbf{K}$ / $|A - \lambda I_n|$ = 0.

$\lambda \in \mathbf{K}$ f-ren autobalio bat da $\Leftrightarrow$ $\exists \overline{v} \in V, \overline{v} \neq \overline{0}_V$ / $f(\overline{v}) = \lambda\overline{v}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists X \in M_{nx1}(\mathbf{K}),\ X \neq (0)$ / $A.X = \lambda.X$ $\Leftrightarrow$ $\lambda \in \mathbf{K}$ A-ren autobalio bat da $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\ X \in M_{nx1}(\mathbf{K}),\ X \neq (0)$ / $A.X - \lambda.X = (0)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\ X \in M_{nx1}(\mathbf{K}),\ X \neq (0)$ / $(A - \lambda.I_n).X = (0)$

Beraz, $\lambda \in \mathbf{K}$ A-ren autobalio bat da (edo f-ren autobalio bat da) baldin, eta soilik baldin, n ezezaguneko eta n ekuazio linealetako $(A - \lambda.I_n).X = (0)$ sistema homogeneoak gutxienez soluzio ez-nulu bat badu; eta hau gertatzen da sistema homogeneoa bateragarri indeterminatua denean eta horretarako $A - \lambda.I_n$ matrizearen heina n baino txikiagoa izan behar da, hau da $|A - \lambda I_n| = 0$.

$$(A - \lambda.I_n).X = (0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$\left|A-\lambda I_n\right| = 0 \iff \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

$\left|A-\lambda I_n\right| = 0$ ekuazioari, A matrizearen *ekuazio karakteristikoa* esaten zaio. Beraz, f endomorfismoaren (edo A matrizearen) balio propioak **K**-n dauden ekuazio honen erroak dira. **K** = **C** denean, A-ren ekuazio karakteristikoak n erro konplexu ditu, erro bakoitza bere anizkoiztasunak adierazten duen adina aldiz zenbatuz. **K** = **R** denean, (2) ekuazioak n erro erreal dituela ezin dugu ziurtatu.

(2) adierazpenean agertzen den determinantea garatuz eta $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ A-ren autobalioak baldin badira, ondoko propietateak betetzen direla egiazta dezakegu:

i) $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ = tr(A) (A-ren aztarna)

ii) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot .... \cdot \lambda_n = \left|A\right|$

Bigarren propietate hau kontuan hartuz, A matrizea erregularra baldin bada, bere balio propioak (λ_i) ezin dira nuluak izan.

<u>Definizioak</u>. A matrizearen (edo f endomorfismoaren) autobalioen multzoari, A-ren (edo f-ren) *espektroa* esaten zaio. Eta $p(\lambda) = \left|A-\lambda I_n\right|$ polinomioari, A matrizearen (edo f endomorfismoaren) *polinomio karakteristikoa* esaten zaio.

2.- Izan bedi $\lambda \in$ K f-ren (edo A-ren) autobalio bat. orduan:

$\bar{v} \in$ V λ-ri elkartutako f-ren autobektore bat da $\iff$

$\iff$ X$\in$ M_{nx1}(K) λ-ri elkartutako A-ren autobektore bat bada $\iff$ (A-λ.I_n).X = (0)

Hau da, (A-λ.I_n).X = (0) sisteman λ_i autobalio bakoitza ordezkatuz, (A-λ_i.I_n).X = (0) sistemaren soluzio ez-nuluak λ_i autobalioari elkartutako autobektoreak izango dira, eta soluzio guztien multzoa $V_{\lambda_i}(f)$ (edo $V_{\lambda_i}(A)$).

Gainera, dim $V_{\lambda_i}(f)$ = n- ((A-λI_d)-ren heina), ondokoa betetzen baita:

Badakigu dim V = dim Ker (f - λI_d) + dim Im (f - λI_d) berdintza betetzen dela, beraz dim $V_{\lambda_i}(f)$ = dim Ker (f - λI_d) = n - dim Im (f - λI_d) $\Rightarrow$ dim $V_{\lambda_i}(f)$ = n - r(A- λI_n)

Hamilton-Cayleyren teorema. Edozein matrize karratu, bere polinomio karakteristikoaren erroa da. Teorema honek garrantzi handia du matrize baten berreduren kalkuluan eta matrize erregularren alderantzizko matrizeen kalkuluan.

4. BALIO ETA BEKTORE PROPIOEN AZTERKETA

Izan bedi $f : V \to V$ endomorfismo bat non $\dim V = n$ den.

Izan bedi $B = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_n \}$ V-ren oinarri bat.

Izan bedi $A \in M_n(\mathbf{K})$ f-ri elkartutako matrizea V-ren $B = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_n \}$ oinarrian.

1. V espazio bektorialean oinarri aldaketa bat egiten badugu, f-ren (edo A-ren) balio eta bektore propioak ez dira aldatzen.
2. $\lambda \in \mathbf{K}$ f-ren (edo A-ren) balio propio bat baldin bada, $\dim V_\lambda(f) = \dim V - r(A - \lambda I_n)$. ($\dim V_\lambda(A) = \dim V - r(A - \lambda I_n)$).
3. ERRO SINPLEEN (BAKUNEN) KASUA.

   $|A - \lambda I_n| = 0$ ekuazio karakteristikoak n erro sinple baldin baditu, hau da, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ desberdinak, orduan $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ autobalioei dagozkien autobektoreak linealki independenteak dira eta $\dim V_{\lambda_i}(f) = \dim V_{\lambda_i}(A) = 1 \quad \forall i = 1,2,...,n$. Beraz, autobektorez osatutako V-ren oinarri bat osa dezakegu.
4. ERRO ANIZKOITZEN KASUA.

   λ autobalioa polinomio karakteristikoaren k anizkoiztasun ordenako erroa bada, k ordenakoa dela esango dugu eta $1 \leq \dim V_\lambda(f) = \dim V_\lambda(A) \leq k$ betetzen da. Izan bitez $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ A-ren (edo f-ren)) autobalio desberdin guztiak eta "k_i" λ_i autobalio bakoitzari dagokion anizkoiztasun-ordena, i=1,2,...,r. Orduan, baldintza hauetan, autobektorez osotutako V-ren oinarri bat lor dezakegu ondorengo baldintzak betetzen direnean:

   1.- $k_1 + k_2 + ... + k_r = n$

   2.- $\dim V_{\lambda_1}(f) = k_1$; $\dim V_{\lambda 2}(f) = k_2$, ..., $\dim V_{\lambda r}(f) = k_r$

5. DIAGONALIZAZIOA

Definizioa. Izan bedi f : V $\rightarrow$ V endomorfismo bat, non V **K** gainean n dimentsioko espazio bektoriala den. f endomorfismoa *diagonalgarria* dela esaten da, V-ren oinarri bat existitzen bada non f-ri elkartutako matrizea oinarri horretan diagonala den.

Definizioa. Izan bedi $A \in M_n(\mathbf{K})$. A matrizea *diagonalgarria* dela esaten da, $P \in M_n(\mathbf{K})$ matrize erregular bat existitzen bada non $P^{-1} A P$ matrizea diagonala den.

Teorema. Izan bedi f : V $\rightarrow$ V endomorfismo bat non dim V = n den.

Izan bedi B = { $\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n$ } V-ren oinarri bat.

Izan bedi $A \in M_n(\mathbf{K})$ f-ri elkartutako matrizea V-ren B = { $\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n$ } oinarrian.

f-ren adierazpen matriziala B oinarrian: $\left(f(\overline{v})\right)_B = A.\ (\overline{v})_B \quad \forall\, \overline{v} \in V.$

Orduan, f endomorfismoa edo A matrizea *diagonalgarriak* dira baldin eta soilik baldin autobektorez osatutako V-ren oinarri bat existitzen bada. Oinarri horretan f-ri elkartutako matrizea diagonala izango da eta diagonal nagusiko elementuak balio propioak izango dira.

Ondorioa:

i) n balio propio desberdin $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ badaude, orduan f eta A diagonalgarriak dira eta $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$.

ii) Izan bitez $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ A-ren (edo f-ren) autobalio desberdin guztiak, "k_i" λ_i autobalio bakoitzari dagokion anizkoiztasun-ordena eta di = $\dim V_{\lambda_i}(f) = \dim V_{\lambda_i}(A)$, i=1,2,...,r. Orduan:

$$\text{f (edo A) diagonalgarria da} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 + ... + k_r = n \\ d_i = k_i \quad \forall i = 1,2,...,r \end{cases}$$

Kasu honetan, D matrizearen diagonal nagusiko elementuak ondokoak dira:

$$\overset{k_1)}{\lambda_1, ..., \lambda_1}, \overset{k_2)}{\lambda_2, ..., \lambda_2}, ..., \overset{kr)}{\lambda_r, ..., \lambda_r}$$

Endomorfismo bati edozein oinarritan elkartutako matrizearen eta autobektorez osatutako oinarri baten elkartutako matrizearen arteko erlazioa.

Izan bedi f : V $\rightarrow$ V endomorfismo bat /dim V = n den. Izan bitez B = $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n\}$ V-ren oinarri bat eta B* = $\{\overline{w}_1, \overline{w}_2, ..., \overline{w}_n\}$ f-ren autobektorez osatutako V-ren oinarri bat.

Izan bedi A $\in$ $M_n(\mathbf{K})$ f-ri elkartutako matrizea V-ren B = $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n\}$ oinarrian.

Izan bedi D $\in$ $M_n(\mathbf{K})$ f-ri elkartutako matrizea V-ren B* =$\{\overline{w}_1, \overline{w}_2, ..., \overline{w}_n\}$ oinarrian.

Orduan, A eta D matrizeak antzekoak dira eta P$\in$ $M_n(\mathbf{K})$ matrize erregular bat existitzen da non D = P^{-1}A P den. P matrizeari B* oinarritik B oinarrirako *iragan-matrizea* esaten zaio eta bere i-garren zutabea $\overline{w}_i$ autobektorearen koordenatuak B oinarrian dira ; i=1,2,...,n.

6. MATRIZE SIMETRIKOEN DIAGONALIZAZIOA

Teorema. Matrize simetriko eta erreal baten autobalioak errealak dira eta autobalio desberdinei dagozkien autobektoreak elkarrekiko ortogonalak dira. ($\mathbf{R}^n$ espazio bektorialean biderketa eskalar kanonikoa kontsideratuz).

Teorema. Matrize simetriko eta errealak diagonalgarriak dira. Gainera P$\in$ $M_n(\mathbf{K})$ matrize ortogonal bat existitzen da non D=P^{-1}AP den.