9. GAIA. ALDAGAI ERREALEKO FUNTZIO ERREALEN JARRAITASUNA ETA DERIBAGARRITASUNA

1. **Jarraitasuna**
   - **1.1 Definizioa**
   - **1.2 Eten-puntuak**
   - **1.3 Propietateak**
2. **Deribagarritasuna**
   - **2.1 Deribatua puntu batean. Definizioa**
   - **2.2 Funtzio deribatua. Goi ordenako deribatuak**
   - **2.3 Deribatuaren propietateak**
   - **2.4 Diferentziala**

9. GAIA. ALDAGAI ERREALEKO FUNTZIO ERREALEN JARRAITASUNA ETA DERIBAGARRITASUNA

1. JARRAITASUNA

1.1 Definizioa.

Definizioa. Izan bitez f: X$\rightarrow$**R** eta a$\in$ **R**, $a\in$ X=Dom(f) puntua. *f(x) a* puntuan *jarraitua* dela esaten da baldin eta $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Hau da, $\lim_{x\to a} f(x)$ existitzen bada eta bere balioa *f(a)* bada. Definizio honek honako hau suposatzen du:

1. *f(a)* existitzea.
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existitzea.
3. Balio hauek berdinak izatea.

Aurreko baldintzaren bat betetzen ez bada, *f(x) a* puntuan *funtzio etena* dela esaten da.

Limitearen definizioa kontuan harturik, *f* funtzioa *a* puntuan jarraitua da baldin eta

$$\forall \boldsymbol{e} > 0,\ \exists \boldsymbol{d} > 0 \ /\ \forall x \in X,\ |x-a| < \boldsymbol{d} \ \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \boldsymbol{e}$$

betetzen bada.

Jar dezagun h=x-*a* $\Rightarrow$x=*a*+h (x$\rightarrow$ *a* doanean $\Rightarrow$ h$\rightarrow$0). *f(x)*-ren jarraitasunaren definizioa *a* puntuan, ondokoa da:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{h\to o} f(a+h) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{h\to o}\left[f(a+h) - f(a)\right] = 0$$

Geometrikoki, *f(x)*-ren jarraitasuna *a* puntuan zera da: bere grafikoa x=*a*-δ, x=*a*+δ, y=*f(a)*+ $\boldsymbol{e}$, y=*f(a)*- $\boldsymbol{e}$ zuzenek bornatzen duten laukizuzenean marraztuta dago.

<u>Aldetako jarraitasuna</u>

f: X$\rightarrow$**R** funtzioa *a* puntuan *eskuin-jarraitua* da, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existitzen bada eta

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

f: X$\rightarrow$**R** funtzioa *a* puntuan *ezker-jarraitua* da , $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existitzen bada eta

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

Proposizioa. *f(x)* funtzioa *a* puntuan jarraitua da baldin eta soilik baldin eskuin- eta ezker-jarraitua bada *a* puntuan.

Jarraitasuna multzo batean

Funtzio bat (a,b)$\subset$ **R** tartean jarraitua da, (a,b) tarteko puntu guztietan jarraitua bada.

Funtzio bat [a,b]$\subset$ **R** tartean jarraitua da, (a,b) tarteko puntu guztietan jarraitua bada, eskuin-jarraitua a puntuan eta ezker-jarraitua b puntuan ere.

Orokorrean, funtzio bat bere *existentzi eremuan* jarraitua da, eremuko puntu guztietan jarraitua bada.

1.2 Eten-puntuak.

Izan bedi f: X$\rightarrow$**R** *a* puntuan etena den funtzioa. Ondorengo *eten-puntuak* gerta daitezke:

1. *ETEN-PUNTU GAINDIGARRIA*. $\lim_{x\to a} f(x)$ finitua existitzen bada, baina bere balioa *f(a) ez bada, f(a)* ez existitzeagatik edo balioak desberdinak direlako. *f* funtzioak *a* puntuan eten-puntu gaindigarria badu, jarraitua bilakatu daiteke: $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$ definituz, ez bazegoen definiturik (eremuko zabalpena), edo *a* puntuan *f*-ren definizioa aldatuz.
2. *1.MAILAKO ETEN-PUNTU FINITUA.* Aldetako limiteak existitzen badira, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ eta $\lim_{x\to a^-} f(x)$, finituak baina desberdinak badira. Beraien arteko kendura balio absolutuan, *jauzia* deitzen da.
3. *1. MAILAKO ETEN-PUNTU INFINITUA.* Aldetako limiteren bat edo biak infinituak badira, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ edo/eta $\lim_{x\to a^-} f(x)$ infinituak. Jauzia infinitua da.
4. *2.MAILAKO ETEN-PUNTUA.* Aldetako limiteren bat ez bada existitzen, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ edo/eta $\lim_{x\to a^-} f(x)$ ez da existitzen.

1.3 Propietateak.

1. Funtzio jarraituen arteko eragiketak. Funtzio jarraituen arteko batura, biderkadura, konstante batez biderkadura eta zatidura (zatitzailea ez nulua bada), funtzio jarraituak dira.

2. <u>Weierstrass-en teorema.</u> f [a,b] tarte itxi eta bornatu batean jarraitua bada, orduan f [a,b] tartean bornatua da. Gainera, f-k maximo eta minimoa ditu [a,b] tartean, hau da, x_1, $x_2 \in$ [a,b] bi puntu existitzen dira non ondokoa betetzen den

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \ \forall x \in [a,b] ,$$

$$f(x_1)=\min\{f(x)/x\in [a,b]\} \quad , \quad f(x_2)=\max\{f(x)/x\in [a,b]\}$$

izanik hurrenez hurren.

3. <u>Zeinuaren teorema.</u> f a puntuan jarraitua bada, $f(a)\neq 0$ izanik, orduan a puntuaren inguruneren bat existitzen da non, inguruko puntu guztietako irudien zeinua $f(a)$-rena den. Hots

$$\exists \ \boldsymbol{e}(a,\boldsymbol{d})/\forall x \in \left(\boldsymbol{e}(a,\boldsymbol{d}) \cap Dom(f)\right) \quad sg(f(x)) = sg(f(a))$$

4. <u>Bolzano-ren teorema.</u> f [a,b] tartean jarraitua bada, f(a) eta f(b) irudiek aurkako zeinuak badute (f(a) . f(b) <0) , orduan c$\in$ (a,b) punturen bat existitzen da non f(c)=0 den. Hau da, gutxienez f(x)-ren zero bat existitzen da.

5. <u>Darboux-en propietatea.</u> f [a,b] tartean jarraitua bada eta f(a) $\neq$ f(b) badira, orduan: $\forall$ p$\in$ **R**, f(a) <p< f(b) $\exists$ c$\in$ (a,b) / f(c)=p (modu berean f(b) < f(a) bada). Hau da, f(x) funtzioak [a,b] tartean f(a) eta f(b) arteko balio guztiak hartzen ditu gutxienez behin.

6. <u>Funtzio konposatuaren jarraitasuna.</u> f: X$\rightarrow$**R** funtzioa a puntuan jarraitua bada eta g: f(X)$\rightarrow$ **R** $f(a)$ puntuan jarraitua bada, orduan $g \circ f$ konposizioa jarraitua da ere a puntuan.

7. <u>Alderantzizko funtzioaren jarraitasuna.</u> f: [a,b]$\rightarrow$ **R** funtzioa [a,b] tartean jarraitua eta hertsiki gorakorra bada (hertsiki beherakorra), orduan f^{-1} existitzen da [f(a),f(b)] tartean eta jarraitua eta hertsiki gorakorra izango da (hertsiki beherakorra [f(b),f(a)] tartean).

8. <u>Oinarrizko funtzioen jarraitasuna.</u> $y=a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ funtzio polinomikoa , $y=a^x$, a>0 eta a$\neq$ 1 izanik funtzio esponentziala, $y=\log_a x$, a>0 eta a$\neq$ 1 funtzio logaritmikoa, $y=x^b$, b$\in$**R** funtzio potentziala; funtzio trigonometrikoak eta alderantzizkoak, y=sin x eta y=arc sin x , y=cos x eta y=arc cos x , y=tan x eta y=arctan x , funtzio hiperbolikoak eta alderantzizkoak …, jarraituak dira beraien existentzi eremuetan.

2. DERIBAGARRITASUNA

2.1 Deribatua puntu batean. Definizioa.

Definizioa. Izan bedi $f : X \to \mathbf{R}$ funtzioa a puntuan f deribagarria da ondoko limitea existitzen bada: $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Limite hau *f'(a)* adieraziko dugu edo $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}$ eta *f*-ren deribatua *a* puntuan deitzen da. Hau da:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (x-a=h \text{ aldaketa eginez})$$

Aurreko limitea infinitua bada eta *f*(x) *a* puntuan jarraitua bada, orduan *f*(x) funtzioak *a* puntuan deribatu infinitua duela esaten da.

Aldetako deribatuak

f a puntuan *eskuin-deribagarria* da, ondoko limitea existitzen bada:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a^+)$$

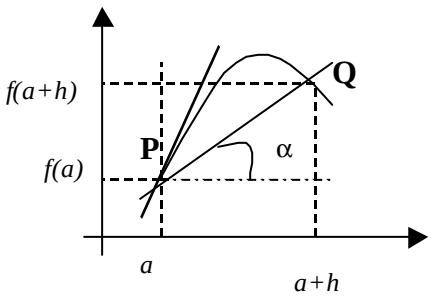
f a puntuan *ezker-deribagarria* da, ondoko limitea existitzen bada:

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} = f'(a^-)$$

Teorema *f a* puntuan deribagarria da baldin eta soilik baldin aldetako deribatuak existitzen badira eta berdinak badira. Hau da , $f'(a^+) = f'(a^-) = f'(a)$.

f-ren definizioa *a* puntuaren eskuinetik eta ezkerretik ezberdina bada, *f*-ren deribagarritasuna *a* puntuan aztertzeko, aldetako deribatuen kalkulua ezinbestekoa da.

Esanahi geometrikoa



Izan bitez *f*-ren grafikoko **P**(*a*,*f(a)*) eta **Q**(*a*+*h*,*f*(*a*+*h*)) bi puntu. **P** finkoa eta **Q** aldakorra ($h \to 0$). Kontsidera dezagun **P** eta **Q** elkartzen duen *f*-rekiko zuzen ebakitzailea. $\overline{\mathbf{PQ}}$ ebakitzaileak OX ardatzarekin osatzen duen angelua α bada, orduan $\overline{\mathbf{PQ}}$ -ren malda hauxe da:

$$\tan \alpha = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$h \to 0$ doanean, **Q** puntua **P** punturantz hurbiltzen da *f*-ren grafikoaren zehar.

f a puntuan deribagarria bada, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$-ren limitea *f'*(*a*) balio erreala da $h \to 0$ doanean.

f'(*a*) deribatua modu honetan interpreta dezakegu : **P** puntutik pasatuz $\overline{\mathbf{PQ}}$ ebakitzaileen kokapen limitea duen zuzen baten malda da, **Q** puntua **P**-rantz hurbiltzen denean *f*-ren grafikoaren zehar.

P puntutik pasatzen den eta *f'*(*a*) zenbaki erreala malda duen zuzena , **P** puntuan *f*-ren grafikoarekiko *zuzen ukitzailea* **P**(*a*,*f*(*a*)) puntuan deitzen da. Bere ekuazioa ondokoa da:

$$y-f(a) = f'(a)\,(x-a)$$

a puntuan *f*(x)-ren deribatua infinitua bada, orduan zuzen ukitzailea Y ardatzarekiko paraleloa da eta bere ekuazioa x=*a* da.

P puntuan zuzen ukitzailearen zuzen elkarzuta, puntu honetan kurbarekiko *zuzen normala* da eta bere ekuazioa ondokoa da:

$$y-f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x-a) \quad , \quad f'(a) \neq 0 \text{ bada}$$

$$x=a \quad , \quad f'(a) = 0 \text{ bada}$$

2.2 Funtzio deribatua. Goi ordenako deribatuak.

<u>Definizioa</u>. Izan bedi f:X$\to$**R** eta izan bedi B X multzoko azpimultzoa non *f* deribagarria den eta *f*-ren deribatua B-ko puntuetan finitua den. $a \in$ B puntu bakoitzari *f'*(*a*) balioa elkartzen dion funtzioa, *f*-ren *funtzio deribatua* da eta *f'* edo $\frac{df}{dx}$ adieraziko dugu.

$$f' : B \to \mathbf{R}$$

$$a \mapsto f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

<u>Definizioa</u>. Izan bedi C B-ko azpimultzoa non *f'* deribagarria den, bere deribatua C-ko puntuetan finitua izanik. *f*-ren *funtzio deribatu bigarrena* *f''* edo $\frac{d^2 f}{dx^2}$ ikurren bidez adieraziko dugu eta ondoko funtzioa da:

$$f'' : C \to \mathbf{R}$$

$$a \mapsto f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}$$

Modu berean funtzio deribatu hirugarren, laugarren, … defini daitezke. Orokorrean f-ren n-garren deribatua $f^{n)}$ edo $\frac{d^n f}{dx^n}$, n-1 ordenako deribatua erabiliz definitzen da: $f^{n)} = \left(f^{n-1)}\right)'$.

2.3 Deribatuaren propietateak.

1. f a puntuan deribagarria bada eta a puntuan bere deribatua finitua bada, orduan f a puntuan jarraitua da. (DERIBAGARRITASUNA $\Rightarrow$ JARRAITASUNA) Alderantzizkoa EZ da betetzen.
2. <u>Funtzio deribagarrien arteko eragiketak.</u> Funtzio deribagarrien arteko batuketa, biderketa, konstante batez biderketa eta zatiketa (zatitzailea ez nulua izanik) deribagarriak dira, hau da, f eta g x puntuan deribagarriak badira, orduan $f \pm g$, $f.g$, λf ($\lambda \in \mathbf{R}$) eta f/g ($g(x) \neq 0$ izanik) , x puntuan deribagarriak dira; eta gainera beren deribatuak ondokoak dira:

   $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

   $(\lambda f)'(x) = l\, f'(x)$, $\lambda \in \mathbf{R}$

   $(f.g)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$

   $(f/g)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
3. <u>Funtzio deribagarrien arteko konposizioa.</u> KATEAREN ERREGELA

   f funtzioa a puntuan deribagarria bada eta g funtzioa $f(a)$ puntuan deribagarria bada, orduan $g \circ f$ funtzio konposatua a puntuan deribagarria da eta bere deribatua ondokoa da:

   $$(g \circ f)'(x) = g'(f(a))\, f'(a)$$
4. <u>Alderantzizko funtzioaren deribatua.</u> Izan bedi f: $X \to \mathrm{Im}(f)$ bijektibo eta X multzoan jarraitua. f $a \in X$ puntuan deribagarria bada eta $f'(a) \neq 0$ bada, orduan f-ren f^{-1}: $\mathrm{Im}(f) \to X$ alderantzizko funtzioa $f(a)$ puntuan deribagarria da, eta ondokoa betetzen da: $(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.
5. <u>Deribatu logaritmikoak.</u> $h(x) = f(x)^{g(x)}$ itxura duen funtzio baten deribatua kalkulatzeko, f eta g deribagarriak badira eta $f(x) > 0$ bada, logaritmoak hartzen dira eta katearen erregela eta biderketaren deribatua erabiliz bere deribatua lortzen da. Kasu orokorrean:

$$\ln(h(x)) = g(x)\ln(f(x))$$

deribatuz: $\dfrac{h'(x)}{h(x)} = g'(x)ln[f(x)] + g(x)\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

Beraz: $h'(x) = \left(g'(x)ln[f(x)] + g(x)\dfrac{f'(x)}{f(x)} \right) f(x)^{g(x)}$

6. <u>Era parametrikoan emandako funtzio baten deribatua.</u> Izan bedi y=*f*(x) era parametrikoan emandako funtzioa:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad , t \in [T_1, T_2]$$

x(t) eta *y(t) t* parametroan deribagarriak badira, *x'(t)*$\neq$ 0 bada, orduan:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

7. <u>Era inplizituan emandako funtzio baten deribatua</u>. Eman dezagun y(x) funtzioa F(x,y)=0 ekuazioaren bidez definiturik dagoela. Hau da $y(x_0)=y_0$ bada, orduan $F(x_0,y_0)=0$ betetzen da. y-ren deribatua x-rekiko kalkulatzeko, ekuazioa deribatu behar da kontuan izanik y(x) funtzio bat dela x-rekiko eta katearen erregela erabiliz.

2.4 Diferentziala.

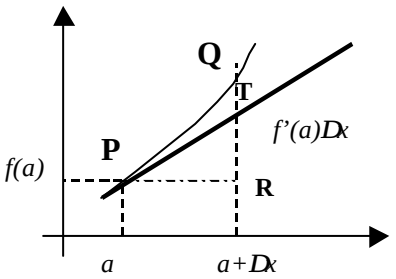
Izan bedi Δx=(x-*a*) *a*-ren gehikuntza eta $\Delta f(a)=f(a+\Delta x)-f(a)$ funtzioaren gehikuntza *a* puntuan.

<u>Definizioa.</u> Izan bedi y=*f(x) a* puntuan deribagarria. *f(x)*-ren *diferentziala a puntuan* ondokoa da:

$$df(a)= f'(a)\,\Delta x$$

<u>Adierazpen geometrikoa.</u>

Izan bedi y=*f*(x) *a* puntuan deribagarria. Kontsidera dezagun *f*-ren diferentziala *a* puntuan: $df(a)= f'(a)\,\Delta x$



Badakigu *f´(a)* geometrikoki **P** puntuan kurbarekiko zuzen ukitzailearen malda dela, orduan:

$$f'(a)= \frac{\mathbf{TR}}{\mathbf{PR}} \Rightarrow df(a)=f'(a)\Delta x= \frac{\mathbf{TR}}{\mathbf{PR}}\mathbf{PR} = \mathbf{TR}$$

Beraz, zera esan dezakegu: *diferentzialak puntu batean, zuzen ukitzailearen ordenatuaren aldakuntza neurtzen du.*

y=f(x) funtzioaren gehikuntza $\Delta f(a)=f(a+\Delta x)-f(a)=$**QR** bada, orduan orokorrean $df(a)\neq \Delta f(a)$ gertatzen da. Hala ere, Δx 0-rantz doanean $df(a)$ eta $\Delta f(a)$ infinitesimo baliokideak dira:

$$\lim_{Dx\to 0} Df(a)=\lim_{Dx\to 0} df(a)=0 \text{ eta } \Delta f(a) \underset{Dx\to 0}{\approx} df(a)$$

eta orduan

$$f(a+\Delta x)-f(a) \approx f'(a)\,\Delta x\,,\ \Delta x\to 0 \text{ doanean}$$

Aurreko formula baliagarria da funtzioaren balio hurbilak kalkulatzeko, deribatuaren bornapen bat ezagutuz gero.

Partikularki f(x)=x funtzioa bada, bere deribatua f'(x) =1 da eta bere diferentziala df(x) = dx = 1 Δx = Δx izango da eta orduan diferentzialaren definizioan Δx jarri beharrean dx jar daiteke, hots

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

Diferentzialaren propietateak, deribatuaren propietateak kontuan harturik berehala deduzitu daitezke. Kasu orokorrean, deribazio erregeletik beti ondorioztatzen da antzekoa den diferentziazio erregela bat.

<u>Goi-ordenako diferentzialak</u>

f funtzioak bigarren ordenako deribatua ametitzen badu, f funtzioaren *diferentziala bigarren* ondoko funtzioa da

$$d^2f(x) = d(df(x))=d(f'(x)\,dx)= f''(x)\,[dx]^2$$

eta modu laburrean adierazita

$$d^2f(x) = f''(x)\,dx^2$$

Orokorrean, f-ren n-garren diferentziala $d^nf(x) = f^{n)}(x)\,[dx]^n$ izango da, modu laburrean adierazita $d^nf(x) = f^{n)}(x)\,dx^n$.

DERIBATUEN TAULA

Funtzioak	Deribatuak	Funtzioak	Deribatuak
y = k , k Î R	$y' = 0$		
y = x^n	$y' = n\,x^{n-1}$	**y = $[f(x)]^n$**	$y' = n[f(x)]^{n-1}\ f'(x)$
y = ln x	$y' = \frac{1}{x}$	**y = ln[f(x)]**	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
y = $\log_a x$	$y' = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$	**y = $\log_a f(x)$**	$y' = \frac{1}{\ln a}\frac{f'(x)}{f(x)}$
y =a^x	$y' = a^x \ln a$	**y = $a^{f(x)}$**	$y' = a^{f(x)}\ f'(x) \ln a$
y = sin x	$y' = \cos x$	**y = sin[f(x)]**	$y' = \cos[f(x)]\ f'(x)$
y = cos x	$y' = -\sin x$	**y = cos[f(x)]**	$y' = -\sin[f(x)]\ f'(x)$
y = tan x	$y' = 1/\cos^2 x$	**y = tan[f(x)]**	$y' = \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$
y = sec x	$y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$	**y = sec[f(x)]**	$y' = \frac{\sin[f(x)]}{\cos^2[f(x)]} f'(x)$
y = csc x	$y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	**y = csc [f(x)]**	$y' = -\frac{\cos[f(x)]}{\sin^2[f(x)]} f'(x)$
y = cotan x	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	**y = cotan [f(x)]**	$y' = -\frac{1}{\sin^2[f(x)]} f'(x)$
y = arc sin x	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	**y = arc sin [f(x)]**	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
y = arc cos x	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	**y = arc cos[f(x)]**	$y' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
y = arc tan x	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	**y = arc tan[f(x)]**	$y' = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$
y = sh x	$y' = \mathrm{ch}\ x$	**y = sh[f(x)]**	$y' = \mathrm{ch}[f(x)]\ f'(x)$
y = ch x	$y' = \mathrm{sh}\ x$	**y = ch[f(x)]**	$y' = \mathrm{sh}[f(x)]\ f'(x)$
y = th x	$y' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	**y = th[f(x)]**	$y' = \frac{f'(x)}{\mathrm{ch}^2[f(x)]}$
y = arg sh x	$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	**y = arg sh[f(x)]**	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}$
y = arg ch x	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	**y = arg ch[f(x)]**	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2-1}}$
y = arg th x	$y' = \frac{1}{1-x^2}$	**y = arg th[f(x)]**	$y' = \frac{f'(x)}{1-[f(x)]^2}$