4.GAIA. INTEGRAL MUGAGABEA

1. Jatorrizko funtzioak eta integral mugagabea.

2. Integral mugagabearen propietateak.

3. Integraziorako metodo orokorrak.
- **3.1. Deskonposizio-metodoa.**
- **3.2. Aldagai-aldaketaren metodoa.**
- **3.3. Zatikako integrazioa.**

4. Funtzio arrazionalen integrazioa.
- **4.1. Deskonposizioa frakzio sinpletan.**
- **4.2. Hermite-ren metodoa.**

5. Funtzio trigonometrikoen integrazioa.

6. Funtzio binomioen integrazioa.

7. e^x funtzioa duten funtzioen integrazioa.

8. Funtzio irrazionalen integrazioa.
- **8.1.** $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c} \right) dx$ **motako integralak.**
- **8.2. Beste integral irrazional batzuk.**

4.GAIA. INTEGRAL MUGAGABEA

Gai honetan deribazioaren alderantzizko problema aztertuko dugu: f(x) funtzioa ezaguna bada, F(x) kalkulatu non horren deribatua f(x) den, hau da

$$F'(x)=f(x)$$

1. JATORRIZKO FUNTZIOAK ETA INTEGRAL MUGAGABEA

<u>Definizioa.</u> [a,b] tartean definiturik eta deribagarria den F(x) funtzio bat, [a,b] tartean f(x) funtzioaren *jatorrizko funtzio bat* da baldin eta $F'(x)=f(x)$ $\forall x \in [a,b]$ bada.

F(x) funtzioa f(x)-ren jatorrizko funtzioa bada, orduan F(x)+K, K edozein konstante bada, ere f-ren jatorrizko funtzio bat izango da, ondorioz, f-k infinitu jatorrizko funtzio izango ditu. Beraz, f funtzioaren jatorrizko funtzioek osatzen duten multzoa F(x)+K adieraz daiteke eta multzo honi f(x)-ren *integral mugagabe* deitzen zaio eta horrela adierazten da:

$$\int f(x)dx = F(x) + K$$

K-ri *integrazio-konstante* deitzen zaio.

2. INTEGRAL MUGAGABEAREN PROPIETATEAK

i) $d\left(\int f(x)\ dx\right) = f(x)\ dx$

ii) $\int d\ F(x) \ = F(x) + K$

iii) $\int [f(x) \pm g(x)]\ dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

iv) $\int k\ f(x)\ dx = k\int f(x)\,dx\ ,\ k \in \mathbf{R}$

Deribazioa integrazioaren alderantzizko eragiketa dela kontsideratzen badugu, berehalako integralen taula deribatuen taulatik deduzitu daiteke. Hots,

1. $\int 0\ dx = K$

2. $\int (f(x))^n f'(x)\,dx = \dfrac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + K,\ n \neq -1$

3. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + K$

4. $\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\, dx = \sqrt{f(x)} + K$

5. $\int a^{f(x)} f'(x)\, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + K, \quad a > 0, a \neq -1$

6. $\int f'(x)\ \cos(f(x))\, dx = \sin(f(x)) + K$

7. $\int f'(x)\ \sin(f(x))\, dx = -\cos(f(x)) + K$

8. $\int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}\, dx = \tan(f(x)) + K$

9. $\int sh(f(x)) f'(x)\, dx = ch(f(x)) + K$

10. $\int ch(f(x)) f'(x)\, dx = sh(f(x)) + K$

11. $\int \left(1 - th^2 f(x)\right) f'(x)\, dx = th(f(x)) + K$

12. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}\, dx = \arcsin\ f(x) + K$

13. $\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}\, dx = \arccos\ f(x) + K$

14. $\int \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}\, dx = \arctan(f(x)) + K$

15. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x) + 1}}\, dx = \arg sh(f(x)) + K$

16. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x) - 1}}\, dx = \arg ch(f(x)) + K$

17. $\int \frac{f'(x)}{1 - f^2(x)}\, dx = \arg\ th(f(x)) + K$

3. INTEGRAZIORAKO METODO OROKORRAK

Jarraian, zenbait metodo emango ditugu zailak diren integralak beste integral errazagoetan deskonposatzeko.

3.1 Deskonposizio-metodoa.

Integralaren linealtasuna erabiltzen da (ikusi iii. eta iv. propietateak). Beraz, ondoko integralak,

$$\int \sin\ ax\ \cos\ bx\ dx \quad , \quad \int \sin\ ax\ \sin\ bx\ dx \quad , \quad \int \cos\ ax\ \cos\ bx\ dx$$

berehalako integral bihurtzen dira ondorengo formulak erabiliz:

$$2 \sin A\ \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$
$$2 \cos A\ \cos B = \cos(A-B) + \cos(A+B)$$
$$2 \sin A\ \cos B = \sin(A-B) + \sin(A+B)$$

3.2 Aldagai-aldaketaren metodoa.

Izan bedi alderantzizko funtzioa duen eta deribatu jarraitua duen g(t) funtzioa.. Orduan $\int f(x)\ dx$ integralean x=g(t) aldagai-aldaketa egiten bada

$$\int f(x)\ dx = \left\{ \begin{matrix} x = g(t) \\ dx = g'(t)dt \end{matrix} \right\} = \int f(g(t))\ g'(t)\ dt$$

lortzen da. x=g(t) funtzioa aukeratu behar da sortzen den integrala, hasierakoa baino errazagoa izan dadin. Integral mugagabea askatu eta gero, hau da t-rekiko jatorrizko funtzioa lortu ondoren, t aldagaia bere x aldagaiarekiko adierazpenaz ordezkatuko dugu, hasierako funtzioa x-rekiko funtzio bat baita.

Aldagai-aldaketa metodo hau, garrantzitsuenetariko bat da, azken finean integrazio metodo gehienetan, funtsean, aldagai-aldaketa komenigarriena aukeratzen da integrala ebazteko.

3.3 Zatikako integrazioa.

Izan bitez u eta v bi funtzio diferentziagarri. Orduan zera dugu:

$$d(uv)=u\ dv + v\ du$$

eta integratuz ondokoa lortzen da:

$$\int u\ dv = u\ \ v\ - \int v\ \ du$$

zatikako integrazioaren formula izanik.

Orokorrean f(x) eta g(x) funtzioek deribatu jarraituak ametitzen badute, orduan

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

4. FUNTZIO ARRAZIONALEN INTEGRAZIOA

P(x) eta Q(x) polinomioak badira orduan $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ integrala integral arrazionala da. Hurrengo metodoak aztertzeko P(x)-ren maila Q(x)-rena baino txikiagoa dela kontsideratuko dugu. Horrela ez balitz, zatiketa egin behar dugu eta ondokoa lortuko dugu:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \Rightarrow \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\, dx$$

Orain R(x)-ren maila Q(x)-rena baino txikiagoa izango da.

Funtzio arrazionalak integratzeko bi metodo azalduko ditugu: frakzio sinpletako deskonposizioa eta Hermite-ren metodoa.

Frakzio sinpletako deskonposizioaren metodoa, Q(x) polinomioak erro konplexu bakunak edota erro errealen anizkoiztasuna oso altua ez denean erabiltzen da. Hermite-ren metodoa, ordea, Q(x) polinomioaren erroak konplexu anizkoitzak edota erro erreal asko edo anizkoiztasuna altua denean erabiltzen da.

4.1 Frakzio sinpletako deskonposizioa.

Eman dezagun Q(x) polinomioak erro erreal bakunak edota anizkoitzak eta konplexu bakunak dituela. Bere faktoretako deskonposizioa

$$Q(x)=(x-x_1)(x-x_2)^{\alpha} \ldots (x-x_p)^{\beta} \left((x-a_1)^2 + b_1^2\right) \ldots \left((x-a_q)^2 + b_q^2\right)$$

izango da. Orduan frakzio sinpletako deskonposizioa behean agertzen den moduan egiten da:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B_1}{(x-x_2)} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{B_\alpha}{(x-x_2)^\alpha} + \ldots +$$
$$+ \frac{D_1}{(x-x_p)} + \frac{D_2}{(x-x_p)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-x_2)^\beta} +$$
$$+ \frac{M_1 x + N_1}{(x-a_1)^2 + b_1^2} + \ldots + \frac{M_q x + N_q}{(x-a_q)^2 + b_q^2}$$

non A, B_1, … B_α, D_1, …, D_β, M_1,…, M_q eta N_1, …,N_q kalkulatu behar diren koefizienteak diren. Horrela $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ integrala, errazagoak diren beste integralen arteko baturan deskonposatzen da. Sortzen diren integralak ondoko motakoak dira:

- $\int \frac{A}{(x-x_1)}dx = A\ln|x-x_1| + K$
- $\int \frac{B}{(x-x_2)^r}dx = \frac{B}{1-r}\ \frac{1}{(x-x_2)^{r-1}} + K$
- $\int \frac{M\ x+N}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \int \frac{M(x-a)+Ma+n}{(x-a)^2+b^2}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\,dx + + \frac{Ma+N}{b}\int \frac{(1/b)\,dx}{1+\left(\frac{(x-a)}{b}\right)^2} = \frac{M}{2}\ln\left|(x-a)^2+b^2\right| + \frac{Ma+N}{b}\arctan\frac{x-a}{b} + K$

4.2 Hermite-ren metodoa.

Izan bedi $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ integral arrazionala non Q(x) polinomioak erro anizkoitzak dituen. Hermite-ren metodoa aplikatzeko, ondokoa jartzen da:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{A_1(x)}{B_1(x)} + \int \frac{A_2(x)}{B_2(x)}\,dx \qquad (1)$$

non ondokoak betetzen diren:

$B_1(x)$=z.k.h (Q(x),Q'(x))

$B_2(x) = \frac{Q(x)}{B_1(x)}$

$A_1(x)$ polinomio bat da eta bere maila $B_1(x)$-rena baino unitate bat txikiagoa da

$A_2(x)$ polinomio bat da eta bere maila $B_2(x)$-rena baino unitate bat txikiagoa da

$A_1(x)$ eta $A_2(x)$ polinomioen koefizienteak, (1) adierazpenean deribatu eta gero, polinomioen koefizienteak berdinduz lortzen dira:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1'(x)\ B_1(x) - A_1(x)\,B_1'(x)}{(B_1(x))^2} + \frac{A_2(x)}{B_2(x)}$$

5. FUNTZIO TRIGONOMETRIKOEN INTEGRAZIOA

$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ erako integralak dira non R funtzio arrazionala den. Orokorrean, komenigarria den aldagai-aldaketa erabiliz, integral arrazional bihurtzen dira.

1) R(sin x,cos x) integrazio-funtzioa sinu funtzioan bakoitia da.

R(-sin x,cos x)=-R(sin x,cos x) betetzen da, orduan **cos x = t** izango da aldagai aldaketa.

$$\cos x = t \qquad \sin x = \sqrt{1-t^2} \qquad dx = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

2) R(sin x,cos x) integrazio-funtzioa kosinu funtzioan bakoitia da.

R(sin x,-cos x)=-R(sin x,cos x) betetzen da, orduan **sin x = t** izango da aldagai-aldaketa.

$$\sin x = t \qquad \cos x = \sqrt{1-t^2} \qquad dx = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

3) R(sin x,cos x) integrazio-funtzioa sinu eta kosinu funtzioetan bikoitia da.

R(-sin x,-cos x)=R(sin x,cos x) betetzen da, orduan **tan x = t** izango da aldagai-aldaketa.

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

4) Beste edozein kasutan **tan x/2 = t** izango da aldagai aldaketa. Aurreko kasuetan ere baliagarria izango da.

$$\sin x = \frac{2\,t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

6. FUNTZIO BINOMIOEN INTEGRAZIOA

Integral binomiak $\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$ erako integralak dira non m, n eta p zenbaki arrazionalak diren. Lehendabizi integrala prestatzeko, ondoko aldagai-aldaketa egiten da:

$$x^n = t \quad , \; x = t^{1/n} \quad , \; dx = \frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{n} dt$$

eta orduan aurreko integralean zera dugu

$$\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx = \frac{1}{n} \int t^{m/n} (a + bt)^p \, t^{\frac{1}{n}-1} \, dt = \frac{1}{n} \int t^q (a + bt)^p \, dt$$

non $q = \frac{m+1}{n} - 1$ den.

$\int t^q (a + bt)^p \, dt$ integrala, integral arrazional bihur daiteke ondoko kasuetan:

1. $q \in \mathbf{Z}$ bada, orduan arrazional bihurtzen da beheko aldagai-aldaketarekin

   $a+bt = u^s$, p=r/s bada (frakzio laburtezina)

2. $p \in \mathbf{Z}$ bada, orduan arrazional bihurtzen da beheko aldagai-aldaketarekin

   $t=u^s$, p=r/s bada (frakzio laburtezina)

3. $p+q \in \mathbf{Z}$ bada ($p \notin \mathbf{Z}$, $q \notin \mathbf{Z}$), orduan

$$\int t^q (a + bt)^p \, dt = \int t^{p+q} \left[\frac{a + bt}{t}\right]^p dt$$

eta lehenengo kasuan gaude, hau da $\frac{a + bt}{t} = u^s$, p=r/s bada (frakzio laburtezina).

7. e^x FUNTZIOA DUTEN FUNTZIOEN INTEGRAZIOA

$\int R(e^x) dx$ erako integralak dira, non R funtzio arrazionala den.

$$e^x = t \, , \; x = \ln t \, , \; dx = \frac{dt}{t}$$

aldagai-aldaketa egiten badugu, integral arrazional bihurtzen da.

8. FUNTZIO IRRAZIONALEN INTEGRAZIOA

Beti ez da posible funtzio irrazional baten integrala oinarrizko funtzioen bidez adieraztea. Bi mota aztertuko ditugu, non haien integralak, komenigarria den aldagai-aldaketaren bidez, funtzio arrazionalen edo funtzio trigonometrikoen integral bihur daitezkeen.

8.1 $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ motako integralak.

Arrazional bihurtzen dira ondorengo aldagai-aldaketa erabiliz:

1) a>0 bada , $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x+t$ egiten da. + zeinuarekin adibidez

$ax^2+bx+c=ax^2+2\sqrt{a}\,xt+t^2 \Rightarrow x=\dfrac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t} \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,\dfrac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}+t$

eta dx-ren adierazpena arrazionala da.

2) a<0 eta c<0 badira, $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)\,t$ egiten da, non α ax^2+bx+c polinomioaren erro bat den, existitzen bada.

3) a<0 eta c>0 badira, $\sqrt{ax^2+bx+c}=x\,t+\sqrt{c}$ egiten da.

8.2 Beste integral irrazional batzuk.

1) $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$ motako integrala bada, orduan:

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\sin t \qquad \Leftrightarrow \qquad x=a\cos t$$

2) $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})\,dx$ motako integrala bada, orduan:

$$\sqrt{a^2+x^2}=\frac{a}{\cos t} \qquad \Leftrightarrow \qquad x=a\tan t$$

3) $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})\,dx$ motako integrala bada, orduan:

$$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t \qquad \Leftrightarrow \qquad x=a\sec t$$