eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Psikologia ikasteko Estatistikako aurre-ezagutzak

Izaskun Ibabe
Lorena Gil de Montes

EUSKARA ETA ELEANIZTASUNEKO ERREKTOREORDETZAREN SARE ARGITALPENA

Liburu honek UPV/EHUko Euskara eta Eleaniztasuneko Errektoreordetzaren dirulaguntza jaso du

Aurkibidea

Sarrera

I. Matematikako kontzeptu batzuk

1.1 Batukariaren arauak

1.2 Funtzioak eta haien limiteak

1.3 Matrizeak eta bektoreak

II. Aldagai bakarreko estatistika deskribatzailea

2.1 Datuen antolaketa: maiztasun-banaketak

2.2 Adierazpide grafikoak

2.3 Zentralizazio- eta banakako posizio-neurriak

III. Probabilitatea

3.1 Zenbatzeko teknikak edo konbinatoria

3.2 Probabilitatearen oinarrizko kontzeptuak

IV. Estatistika inferentzialaren oinarriak

V. Datu-prozesua teknologia erabiliz

5.1 Kalkulagailua nola erabili

5.2 Datuen azterketa Excel programa erabiliz

VI. Zenbaki-ezjakintasunaren ondorioak

VII. Eranskinak

a. Ikur estatistikoak

b. Biribilketa

c. Aljebra

VII. Bibliografia eta Interneteko baliabideak

Sarrera

Matematika modu egokian ikasteko, garrantzitsua da ondoren azaltzen diren urratsak ezagutzea (Martínez, Cuadra eta Barrado, 2007):

Lehenengo urratsa: matematikaz gutxi dakit. Lehenengo arazo matematikoaren planteamendua: a) matematikaz gutxi dakit, b) ez dakit zenbat urte daramatzaten galduta edo c) matematikak gainditu egiten nau. Gauzak horrela badaude, mesedez, optimista izan zaitez: gutxi okertu daiteke zure egoera; alderantziz, hobetu bakarrik egin daiteke.

Ikaskuntzarako gogoa behar-beharrezkoa da, eta, normalean, nahikoa izaten da motibazioa, ikaskuntza lortzeko; ez da gaitasun berezirik behar izaten. Ikasi nahi duenak ikasiko du: lortuko du modua.

Matematika ikasten sortzen diren zailtasunen arrazoi aipagarriena da aktibitate mentalen artean abstraktuenetariko bat dela; Zientzia logiko, formal eta sistematikoa bat da, printzipio batzuetan oinarriturik, eta emaitzetara modu logiko-deduktiboa erabiliz iristen da. Edozein modutan ere, Matematikaren zailtasuna kontzeptu oso zehatz batzuetara mugatuta egoten da, eta edozein ikaslek baditu gaitasuna eta baliabideak zailtasun horiek gainditzeko. Halere, batzuetan, ikasle batzuei blokeo psikologikoa gertatzen zaie; Matematikaren aurrean, ezinduak sentitzen dira ikasteko. Blokeoa noizean behin gertatzen bada, ez dago arazorik, arrazoiketa-prozesuaren alde garrantzitsua baita. Baina, batzuetan, blokeoa behin betikoa da, eta ikasleak honelako pentsamenduak izaten ditu: “ez zait gustatzen; bestalde; ez dakit; ez dakidanez, ez zait gustatzen”. Etengabeko soka hori apurtzeko, Matematika berriro ikasten hastea da irten bide bakarra.

Bigarren urratsa: nondik hasi? Ikasle bakoitzak bere erantzuna izango du. Batxilergoko matematikako liburuak errepasatzea da gomendio orokorra. Errepaso hori egitean, kontuan izan kontzeptu garrantzitsuak eta propietate ezagunenak buruz ikasi behar direla. Gauzak ez dira gertatzen modu magikoan, denak badu bere zergati logikoa. Gauza zehatz bat egiten ez badakite, galdetu eta ikasi, eta konfiantza izan behar dute matematika ikasteko beren gaitasunean. Matematika ikastean, lagungarria da papera eta arkatza erabiltzea, ideia nagusiak eta eragiketak idazteko behar denean, eta marrazkiak egitea, batzuetan buruketak egiteko. Eta azkenik, (bizitzako beste egoera askotan bezala) noizean behin, komeni da gure buruari galdetzea momentu bakoitzean non gauden, zer nahi dugun, nora joan nahi dugun, ea bide zuzenetik goazen jakiteko.

Hirugarren urratsa: nola ebatzi buruketa bat? Matematikako eginkizun arruntena problemak ebaztea da. Lan honetan, esperientziak ematen du arrakasta. Baliagarria izaten da honako pauso hauei jarraitzea:

a) Buruketa ulertzea: zer eskatzen den, zer datu ematen diren, nahiko datu ditudan edo daturen bat sobera dagoen.
b) Datuak ezezagunekin edo aldagaiekin erlazionatu. Buruketak bakarrik egiten saiatu, emaitzak edo garapena ikusi gabe. Benetan saiatu ondoren, problema ebaztea lortu ezin bada, irakasleari galdetu. Gogoratu galdetzea adimen-froga bat dela, eta ez trebetasun falta.
c) Zein bideri jarraitu erabaki. Ikasleak, jakin arren non dagoen eta zein baliabide dituen, adi egon behar du. Oztopoak sor daitezke propietateren bat ondo aplikatu ez delako, edo ikaslea eragiketetan nahasi egin delako. Pauso bakoitza kontu handiz eman behar da. Galduta sentituz gero, honako hau egitea gomendatzen da: problema irakurri, metodoa errepasatu, beharbada beste bide batzuk bilatu, berriro kalkuluak egiten hasi eta ez etsi.
d) Ez etsi. Problema bat burutzeko, hainbat bide posible daude. Gogoratu errazenetik hasita gauza zaila erraztu egiten dela.

Animo eta arrakasta opa dizuegu.

I. MATEMATIKAKO KONTZEPTU BATZUK

1.1. Batukariaren arauak

Aurkibidea

1. Helburu didaktikoak
2. Oinarrizko kontzeptuak
3. Batukariaren esanahia eta arauak nola aplikatzen diren
4. Aldagai-aniztasuna
5. Matrizeak
6. Ariketak
7. Emaitzak

1. Helburu didaktikoak

- Batukariaren sinboloak ezagutzea eta irakurtzen jakitea.
- Batukariaren arauak aplikatzea.
- Ikerketetan lortutako datuak askotan tauletan antolatzen direnez, batukariak datu-matrizeetan aplikatzen jakitea.

2. Oinarrizko kontzeptuak

Batukariak osagai multzoak batzeko erabiltzen diren adierazpen aljebraikoak dira. Batukariaren sinboloa hauxe da: $\sum(?)$ eta, atzetik, adierazpenen bat izango da beti. Beraz, E moduko sinboloa agertzen bada, zerbait batu behar dela jakingo da.

Psikologian, pertsona taldeen datuak lantzen dira. Horrelako datuak deskribatzeko eta laburtzeko, sarritan, pertsona bakoitzaren datua batu beharko da. Batuketak aldagaien arabera, taldeen arabera eta abar egiten dira. Baliteke batukariak psikologian gehien erabiltzen diren adierazpen aljebraikoak izatea. Ondorengo ikasgaietan, zuzenki erabiltzen dira:

- Datu-azterketa I eta II
- Saiakuntza-diseinuak
- Psikometria

3. Batukariaren esanahia eta arauak nola aplikatzen diren

Batukariek elementu kopuru bat batu behar dela adierazten dute. Batu behar diren elementuak batukariaren atzetik agertzen den adierazpenean aurkeztuko dira. Adierazpen horiek ondorengo adibidean agertzen dira *i*-ren funtzio gisa. *i* hizkiak balio ezberdinak har ditzake. Ondoren ikusten denez, batukariak azpiindize eta goi-indizeak ditu. Azpian agertzen den *i*=*m* adierazpenak batu behar den *i*-ren lehenengo balioa zehazten du. Batukariaren gainean agertzen den goi-indizea, bestetik, batu behar den seriearen azken balioa da. Beraz, batukari honetan, *m*-tik hasita, *n*-raino dauden balio guztiak batu beharko dira.

$$\sum_{i=m}^{n} F(i) = F(m) + F(m+1) + ... + F(n-1) + F(n) \qquad (1.1)$$

Non *m* eta *n* batu behar den seriearen lehenengo eta azkeneko zenbaki osoak baitira.

Adibidez:

X aldagaiaren balioak 1, 2 eta 3 badira,

$$\sum_{i=1}^{3} X_i = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\sum_{i=1}^{3} (X_i + 1) = (1+1) + (2+1) + (3+1) = 9$$

$$\sum_{i=2}^{3} (X_i^2 - 1) = (2^2 - 1) + (3^2 - 1) = 3 + 8 = 11$$

Adibideetan, balio kopuru txikiak batu dira. Psikologiako ikerketetan, halere, balio kopuru handiagoak erabiltzen dira, eta, horrelako kasuetan, nekagarri suertatzen da batukarien eragiketak egitea. Hori dela-eta, batukarien eragiketak arintzeko, komenigarria da batukarien arauak ikastea.

Batukarien arauen adibideetan, *i* ordez, X_i agertzen da. X_i aldagai bat da, balio ezberdinak har ditzakeen irizpidea, hain zuzen. Beraz, X_1 aldagaiak hartzen duen lehenengo balioa da, eta X_n, berriz, aldagaiaren azken balioa. Bestetik, *k* hizkiak zenbaki oso bat adierazten du.

o $\sum_{i=1}^{n} k = nk$

Adibidez:

X: 1,2,3,4

$$\sum_{i=1}^{n} 2 = 2.4 = 8$$

o $\sum_{i=1}^{n}(X_i + k) = \sum_{i=1}^{n} X_i + nk$

Adibidez:

X: 4,6,8,9

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i + 3) = \sum_{i=1}^{n} X_i + nk = (4+6+8+9) + 4 \cdot 3 = 39$$

o $\sum_{i=1}^{n}(X_i - k) = \sum_{i=1}^{n} X_i - nk$

Adibidez:

X: 3,5,6,10

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - 2) = \sum_{i=1}^{n} X_i - nk = (3+5+6+10) - 4 \cdot 2 = 16$$

o $\sum_{i=1}^{n}(kX_i) = k\sum_{i=1}^{n} X_i$

Adibidez:

X: 2,5,7,8,12

$$\sum_{i=1}^{n}(4X_i) = 4\sum_{i=1}^{n} X_i = 4 \cdot (2+5+7+8+12) = 136$$

o $\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Adibidez:

X: 3,4,7,10,11

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{4} = \frac{1}{4}.\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{4}.(3+4+7+10+11) = 8.75$$

o $\sum_{i=1}^{n}(X_i^2) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

Adibidez:

X: 3,2,5

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2\right)=3^2+2^2+5^2=38$$

o $$\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}X_i\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i$$

Adibidez:

X: 3,2,5

$$\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2=(3+2+5)\cdot(3+2+5)=100$$

4. Aldagai-aniztasuna

Aurreko puntuan adierazitako arauak aldagai bakarreko funtzioei zegozkien. Psikologian, hala ere, bi aldagairekin osaturiko batukariak ere erabiltzen dira. Hala, bi aldagai elkarren artean erlazionatzea posible izango dugu. Ondoren, 5 pertsonaren datuak agertzen dira. Pertsona bakoitzari autoestimua neurtzeko test bat pasatu zaio eta harremanetako asetasuna neurtzeko galdera bat egin zaie. Bi aldagai horiek 0 eta 10 bitarteko eskaletan neurtu dira. Autoestimua aldagaia X hizkiarekin adierazi dugu eta harremanetako asetasuna aldagaia, Y hizkiarekin. Pertsona bakoitzak bi aldagaietan lortutako puntu kopurua taula honetan agertzen da.

1. Taula. Autoestimua eta harremanetako asetasuna

Subjektuak	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Autoestimua	5	7	3	7	7
Harremanetako asetasuna	3	8	2	7	7

Ikus ditzagun bi aldagaiekin egin daitezkeen zenbait eragiketa:

Lehen ikusi den bezala, X aldagaiaren batukaria X aldagaiaren balio guztiak batuz lortzen da.

Adibidez: $\sum_{i=1}^{n}X_i=5+7+3+7+7=29$

Bi aldagaien batuketaren batukaria ondorengo bi moduetan gara daiteke. Bi prozedurak erabiliz, emaitza bera jasotzen da.

Adibidez:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i+Y_i)=(5+3)+(7+8)+(3+2)+(7+7)+(7+7)=8+15+5+14+14=56$$

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i+Y_i)=\sum_{i=1}^{n}(X_i)+\sum_{i=1}^{n}(Y_i)=(5+7+3+7+7)+(3+8+2+7+7)=29+27=56$$

Kenketa baten batukaria prozedura bera aplikatuz garatzen da. Ezberdintasun bakarra izango da kasu honetan balioen arteko kenketa kalkulatu behar dela.

Adibidez:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-Y_i)=(5-3)+(7-8)+(3-2)+(7-7)+(7-7)=2-1+1+0+0=2$$

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-Y_i)=\sum_{i=1}^{n}(X_i)-\sum_{i=1}^{n}(Y_i)=(5+7+3+7+7)-(3+8+2+7+7)=29-27=2$$

Bi aldagaien balioak elkarren artean biderkatzeko garaian, kontu handia izan behar dugu. Beharrezkoa da i batukari mota elkarren artean bereiztea. Lehenengoa, X-ren eta Y-ren arteko biderketaren batukaria da $\left(\sum_{i=1}^{n}X_iY_i\right)$. Kasu honetan, X-ren eta Y-ren balioak biderkatzen dira subjektu bakoitzeko, eta, ondoren, batu egiten dira. Bigarrena, berriz, X-ren eta Y-ren batukarien arteko biderketa da $\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)$. Kasu honetan, X-ren eta Y-ren balio guztiak batu ondoren biderkatu egiten dira. Bi batukari horiek modu ezberdinetan garatzen dira, ondoren ikusten den bezala, eta emaitza ezberdinak dituzte.

Adibidez:

$$\sum_{i=1}^{n}X_iY_i=\sum_{i=1}^{n}(X_iY_i)=(5\cdot 3)+(7\cdot 8)+(3\cdot 2)+(7\cdot 7)+(7\cdot 7)=175$$

$$\sum_{i=1}^{n}X_i\sum_{i=1}^{n}Y_i=(\sum_{i=1}^{n}X_i)(\sum_{i=1}^{n}Y_i=(5+7+3+7+7).(3+8+2+7+7)=29.27=783$$

Aldagaien arteko batukarien eragiketak konplexuago bihur daitezke, baina, arauak aplikatuz gero, erraza da.

Adibidez:

$$\sum_{i=1}^{n}(4X_i - 3Y_i + 15) = \sum_{i=1}^{n}(4X_i) - \sum_{i=1}^{n}(3Y_i) + \sum_{i=1}^{n}15 = 4\sum_{i=1}^{n}X_i - 3\sum_{i=1}^{n}Yi + 15.n =$$
$$4.(5+7+3+7+7) - 3.(3+8+2+7+7) + 15.5 = 116 - 81 + 35 = 110$$

5. Matrizeak

Matrizeetan, ikerketan parte hartu duen pertsona bakoitzaren datua edo datuak jasotzen dira. Datuak aztertzeko, matrizeetan agertzen diren balioak hainbat modutan batu beharko dira. Ondorengo adibideetan, matrizeen balioekin egiten diren ohiko eragiketak aurkezten dira.

Ondoren, matrizeen balioak adierazteko erabiltzen diren ikurrak azalduko ditugu adibide baten bitartez. Adibide hori psikologiako bost ikaslek datu-azterketan eta psikobiologian lortutako emaitzetan oinarritzen da. X neurtu den aldagaia da, azterketan lortutako emaitza. Ikasleak *i* hizkiaren bitartez adierazten dira (*i*=1 eta *i*=5 tartean, bost pertsona daude), eta ikasgaia aldagaia, berriz, *j* sinboloaren bitartez adierazten da (bi balio ditu, *j*=1 eta *j*=2 datu azterketa eta psikobiologia, hain zuzen). Taularen lauki bakoitza adierazteko, beraz, X_{ij} erabiliko da, hau da, *i* ikasleak *j* ikasgaian lortutako X emaitza.

2. taula. Datu-azterketa eta Psikobiologiako emaitzak

		Ikasgaia	
		1 Datu-azterketa	**2 Psikobiologia**
Ikasleak	**1 Iker**	7	1
	2 Axun	6	3
	3 Luzia	5	6
	4 Ane	8	4
	5 Nahia	9	3

Adibidez:

Ikerrek psikobiologian lortutako emaitza: $X_{12} = 1$

Anek datu-azterketan lortutako emaitza: $X_{41} = 8$

Matrizeetan, batukari bikoitzak erabiltzen dira, batukari batek pertsona edo ikasleei buruzko informazioa jasotzen baitu (*i* hizkiarena) eta beste batukariak, berriz, aldagaiari edo ikasgaiari buruzko informazioa (*j* hizkiarena). Ondoren, batukari bikoitza agertzen da:

Adibidez: $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{2} X_{ij} = \sum_{i=1}^{5}\left(\sum_{j=1}^{2} X_{ij}\right)$ (1.2)

Nola irakurtzen da batukari hori? Eta nola garatzen da? Irakurtzen den lehenengo batukaria barrukoa da, hau da, bigarrena edo adibidean parentesien artean dagoena. Parentesiaren barruan dagoen batukaria garatzeko, zein elementu batu behar dira lehenengo? *i*-k 1 balio duenean, *j*-ren bi balioak batu behar dira, edo, beste moduan esanda, Ikerri dagozkion bi balioak (7+1). Orduan, *i*-ren bigarren baliora pasa beharko da, hau da, *i*-k 2 balio duenean *j*-ren bi balioak berriro ere batuz (Axuni dagozkion bi balioak). Prozesu hori garatu behar da azken elementuak batu arte. Batukarien ikurren gainean, batzen diren azken elementuak ikus daitezke, *i*=5 subjektuari dagozkion *j*= 1 eta *j*=2 balioa, 9 eta 3, hain zuzen.

$$\sum_{i=1}^{5}\left(\sum_{j=1}^{2} X_{ij}\right) = \left(X_{11}+X_{12}\right)+\left(X_{21}+X_{22}\right)+\left(X_{31}+X_{32}\right)+\left(X_{41}+X_{42}\right)+\left(X_{51}+X_{52}\right) =$$
$$\left(7+1\right)+\left(6+3\right)+\left(5+6\right)+\left(8+4\right)+\left(9+3\right)=52$$

Ikus dezagun beste adibide bat. Aurreko kasuan jarraitutako irizpide berak mantendu behar dira oraingoan ere. Kasu honetan, *j*-k 1 balio duenean (datu-azterketan), parentesien artean dagoen batukaria garatu behar da, beraz, *i*-ren bost balioak (ikasleek ateratako bost emaitzak). Parentesian dagoena garatu ondoren, *j*-ren bigarren balioa hartuko da kontuan (psikobiologia) eta berriro ere dagozkion *i*-ren bost balioak batu.

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{5} X_{ij} = \sum_{j=1}^{2}\left(\sum_{i=1}^{5} X_{ij}\right) = \left(X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}+X_{51}\right)+\left(X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42}+X_{52}\right) =$$
$$\left(7+6+5+8+9\right)+\left(1+3+6+4+3\right)=52$$

Orain, ikus dezagun konstante baten batukari bikoitza nola garatzen den. Batukari sinpleen arauetan, konstantea *n* edo balio kopuruarekin biderkatzen zen. Batukari bikoitzaren kasuan, bi *n* (edo balio kopurua) mota aurkituko dugu. Alde batetik, subjektu kopuruari dagokiona (n_i), eta, bestetik, aldagaiaren kategoria kopuruari dagokiona (n_j). Beraz, konstante baten batukari bikoitzaren emaitza hau izango da: konstantea bider zutabe kopurua (kategoria kopurua) bider errenkada kopurua (ikasle kopurua). Aurreko adibideari jarraituz,

Adibidez*:* k=3

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k = n_i n_j k \tag{1.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k = n_i n_j k = 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$$

Azkenik, interesgarria da batukari bikoitzen beste bi mota bereiztea, psikologian behin baino gehiagotan ikusiko baitituzue. Agertzen den lehenengo batukarian, berretzaileak barruko batukaria eragiten du. Bigarrenean, berriz, berretzaileak bi batukari barneratzen ditu. Ondorioz, bakoitza modu ezberdinean garatzen da eta bakoitzaren emaitzak ere ezberdinak dira.

$$\sum_{i=1}^{5}\left(\sum_{j=1}^{2} X_{ij}\right)^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{2} X_{ij}\right)^2$$

Hemen duzue nola garatzen den: Lehenengo kasuan, berretzaileak *j*, hau da, aldagaia bakarrik, eragiten du. Beraz, Ikerrekin hasita, bi ikasgaietan lortutako emaitzen batuketaren berretzailea kalkulatu beharko da; ondoren, i=2 ikasleak lortutako bi emaitzen batuketaren berretzailea eta abar.

$$\sum_{i=1}^{5}\left(\sum_{j=1}^{2} X_{ij}\right)^2 = \left(X_{11}+X_{12}\right)^2 + \left(X_{21}+X_{22}\right)^2 + \left(X_{31}+X_{32}\right)^2 + \left(X_{41}+X_{42}\right)^2 + \left(X_{51}+X_{52}\right)^2$$
$$= (7+1)^2 + (6+3)^2 + (5+6)^2 + (8+4)^2 + (9+3)^2 = 554$$

Kasu honetan, berriz, lehenago ikusitako batukari bikoitza sinplea dugu. Berretzaileak besterik ez du bereizten.

$$\left(\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{2} X_{ij}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{2} X_{ij}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{2} X_{ij}\right)$$
$$\left[\left(X_{11}+X_{12}\right)+\left(X_{21}+X_{22}\right)+\left(X_{31}+X_{32}\right)+\left(X_{41}+X_{42}\right)+\left(X_{51}+X_{52}\right)\right]^2 =$$
$$\left[(7+1)+(6+3)+(5+6)+(8+4)+(9+3)\right]^2 = 2704$$

6. Ariketak

1. X-ren balioak honako hauek izanik, batukari hauek garatu gai honetan aurkeztutako arauak aplikatuz:

X=1,4,2,4,5,6,3,9,1

a) $\sum_{i=1}^{N}(7+X_i)$

b) $\sum_{i=1}^{N}(5-X_i)$

c) $\sum_{i=1}^{N}(12X_i)$

d) $\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{X_i}{3}\right)$

e) $\sum_{i=1}^{N}8$

f) $\sum_{i=1}^{N}X_i+3$

g) $\sum_{i=1}^{N}4X_i$

h) $\frac{5}{\sum_{i=1}^{N}X_i}$

i) $\frac{\sum_{i=1}^{N}X_i}{8}$

j) $\sum_{i=1}^{N}(X_i)^2$

k) $\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right)^2$

l) $\sum_{i=1}^{N}\left(X_i^2+5\right)$

m) $\sum_{i=1}^{N}\left(5-X_i^2\right)$

2. Ikerketa batean, subjektu batek estimulu bati erantzuteko eman duen debora neurtu da. 12 saio egin dira. Batez bestekoa kalkulatu.

328, 340, 292, 405, 395, 388, 424, 480, 310, 380, 398, 445

$$\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$$

3. Ondorengo taulan, sei subjektuk lehenengo, bigarren eta hirugarren ebaluazioan lortutako emaitzak agertzen dira (X, Y, Z, hurrenez hurren).

1. ebaluazioa	3	2	5	2	4	3
2. ebaluazioa	4	6	6	8	4	5
3. ebaluazioa	7	7	9	8	8	6

a) $\sum_{i=1}^{n}Y_i$

b) $\sum_{i=1}^{n}Z_i$

c) $\sum_{i=1}^{n}Y_iZ_i$

d) $\sum_{i=1}^{n}X_i\sum_{i=1}^{n}Y_i\sum_{i=1}^{n}Z_i$

e) $\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

f) $\sum_{i=1}^{n}X_i\sum_{i=1}^{n}Z_i$

g) $\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2$

h) $\sum_{i=1}^{n}(Z_i-5)$

i) $\sum_{i=1}^{n}(X_i+Y_i+Z_i)$

j) $\sum_{i=1}^{n}(2Y_i+4X_i-5)$

k) $\sum_{i=1}^{n}3Z_i$

l) $\left(\sum_{i=1}^{n}X_iY_i\right)\sum_{i=1}^{n}Z_i$

4. Ikerketa batean, hiru ikaskuntza-metodok ikasleen emaitzetan eragiten duten aztertu nahi dugu. Ikerketa horretan, 18 ikaslek hartu dute parte. 6 ikaslek A irakaskuntza-metodoarekin ikasi dute; 6k, B metodoarekin, eta 6k, C metodoarekin. Beraz, metodo bakoitzean, sei behaketa jaso dira, edota 6

puntuazio. Behaketak *i* hizkiarekin adierazten dira. Metodo mota (A, B edo C), bestetik, *j* hizkiarekin adierazten da. Beraz, *i*-k har dezakeen baliorik handiena 6 da, eta *j*-k har dezakeen baliorik handiena, berriz, 3 da.

Behaketak	**A metodoa**	**B metodoa**	**C metodoa**
1	4	4	3
2	2	2	8
3	6	5	7
4	5	2	2
5	6	2	7
6	5	2	4

a) $\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{3} X_{ij}$

b) $\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{3} X_{ij}^{2}$

c) $\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{3} 3X_{ij}$

d) $\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{3} X_{ij}+5$

e) $\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{3} \frac{X_{ij}}{8}$

f) $\sum_{i=1}^{6}\left(\sum_{j=1}^{3} X_{ij}\right)^{2}$

g) $\left(\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{3} X_{ij}\right)^{2}$

h) $\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{3} \left(X_{ij}+5\right)$

5. Bost umeri adimena neurtzeko hiru froga pasatu dizkiegu: irudizko adimena, berbazko adimena eta adimen orokorra. Hurrengo taulan, ume bakoitzak adimen-froga bakoitzean lortutako puntuazioak agertzen dira. Umeak *i* hizkiarekin adierazten dira, eta frogak, berriz, *j*-rekin adierazten dira.

		Frogak		
		Irudizko adimena	**Berbazko adimena**	**Adimen orokorra**
Umeak	**Iker**	5	4	8
	Joana	6	5	7
	Jon	7	6	5
	Nahia	7	7	6
	Nerea	6	3	2

a) $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} X_{ij}$

b) $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} X_{ij}^{2}$

c) $\left(\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} X_{ij}\right)^{2}$

d) $\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{5} X_{ij}\right)^2$

6. Aurreko ariketako datuekin, eta K konstanteak 3 balioa duela jakinda, honako adierazpen honen balioa kalkula ezazu:

a) $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} k$

b) $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3}\left(X_{ij}+k\right)$

c) $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3}\left(X_{ij}+k\right)^2$

7. Ondoren agertzen diren ariketak garatu. n_i eta n_j sinboloak elementu kopuruari dagozkio:

a) $\left[\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{5} X_{ij}\right)^2\right]-\left[\frac{1}{n_i n_j}\left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{5} X_{ij}\right)^2\right]$

b) $\left[\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{5} X_{ij}^{\ 2}\right]-\left[\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{5} X_{ij}\right)^2\right]$

c) $\left[\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{5} X_{ij}^{\ 2}\right]-\left[\frac{1}{n_i n_j}\left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{5} X_{ij}\right)^2\right]$

8. Zortzi pertsonari optimismo-eskala bat pasatu zaie psikologia-ikasketak hasi aurretik. Bost urte pasa ondoren, eskala bera pasatu zaie. Honako taula honetan, zortzi pertsona horiek bi garaietan lortutako emaitzak ikus daitezke:

Aurretik (X)	5	3	7	5	7	5	2	3
Ondoren (Y)	3	6	8	2	8	3	7	5

Kalkulatu honako hau:

$$\frac{n\sum XY-\sum X\sum Y}{\sqrt{n\sum X^2-\left(\sum X\right)^2}\sqrt{n\sum Y^2-\left(\sum Y\right)^2}}$$

7. Emaitzak

1. ariketa

a) 98
b) 10
c) 420
d) 11,67
e) 72
f) 38
g) 140
h) 0,14
i) 4,375
j) 189
k) 1225
l) 234
m) -144

2. ariketa

382,083

3. ariketa

a) 33
b) 45
c) 250
d) 28215
e) 67
f) 855
g) 361
h) 15
i) 97
j) 112
k) 135
l) 4545

4. ariketa

a) 76
b) 390
c) 228
d) 81
e) 9,5
f) 1016
g) 5776
h) 166

5. ariketa

a) 84
b) 508
c) 7056
d) 2370

6. ariketa

a) 45
b) 129
c) 643

7. ariketa

a) 3,6
b) 34
c) 37,6

8. ariketa

0,15

1.2 Funtzioak eta haien limiteak

Aurkibidea

1. Helburu didaktikoak
2. Zer dira zenbaki errealak?
3. Funtzioak
4. Funtzio baten limitea puntu batean
5. Alboko limiteak
6. Funtzio baten limitea infinituan
7. Indeterminazio-egoerak
8. Asintotak
9. Ariketak
10. Emaitzak

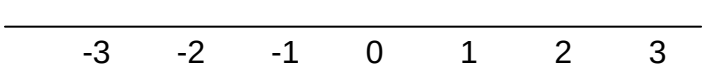
1. Helburu didaktikoak

- Funtzioei lotutako oinarrizko kontzeptuak ulertzea.
- Infiniturako joera ulertzea.
- Funtzioekin lotutako sinboloak ezagutzea.

Funtzioen limiteak probabilitate-banaketei lotuta daude. Limite kontzeptua *Datuen azterketa I* ikasgaian aipatzen da batez ere, eta, *Metodologiaren oinarriak* ikasgaian ere, atal honekin lotutako zenbait kontzeptu ikasten dira.

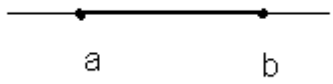
2. Zer dira zenbaki errealak?

R hitzarekin adierazten diren zenbaki oso, arrazional edota irrazionalen multzoak. Zenbaki errealak zuzen honetan adieraz daitezke.

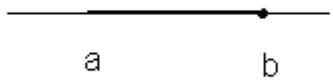


Zuzen horretan, zenbaki errealen multzo ezberdinak definiturik agertzen dira. Horretarako, tarteak kontuan hartu behar dira. Hemen dauden tarte motak.

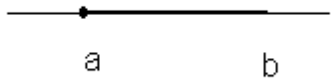
$[a,b]$ *a* eta *b* zenbaki errealen limiteak itxita daude, eta *a* eta *b* puntuak tartean barneratzen dira. Tarte itxia deitzen zaio.



$(a,b]$ *a* limitea irekita eta *b* limitea itxita dago. Beraz, tarteak *b* puntua bakarrik barneratzen du; a, aldiz, ez.



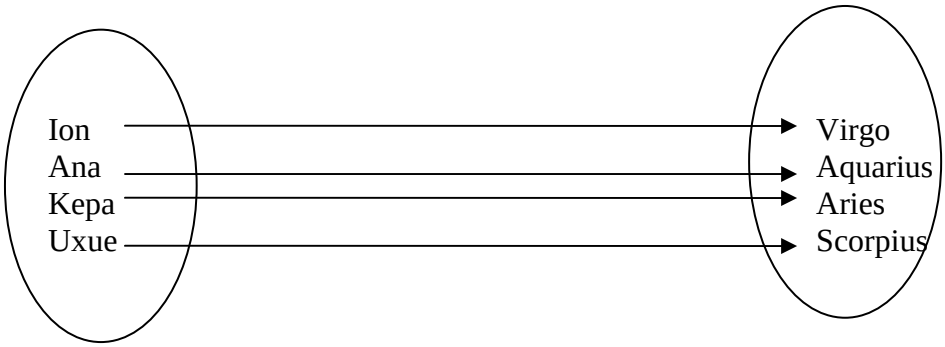
$[a,b)$ *a* limitea itxita dago eta *b* limitea irekita. Kasu honetan, tarteak *a* zenbakia barneratzen du; *b*, aldiz, ez.



(a,b) *a* eta *b* limiteak irekita daude. Tarteak ez ditu *a* eta *b* zenbakiak barneratzen. Tarte irekia deitzen zaio.

3. Funtzioak

Eguneroko bizitzan, korrespondentzia izeneko fenomenoarekin topo egiten dugu etengabe. Pertsona bakoitzari horoskopo bat dagokio; ikasle bakoitzari, emaitza bat ikasgai jakin batean; langile bakoitzari, lanbide bat eta abar. Aurreko adibide guztietan, bi multzo ditugu, eta, multzo horien elementuen artean, korrespondentzia gertatzen da. Adibidez, pertsona talde bat A multzoan koka daiteke, eta horoskopoak, berriz, B taldean kokatzen dira; ikasle taldea A multzoan koka daiteke, eta emaitzak, B multzoan… Korrespondentzia horiei ere funtzio dei dakieke. Harreman horretan, A multzoaren elementu bati B multzoaren elementu bakar bat dagokio.

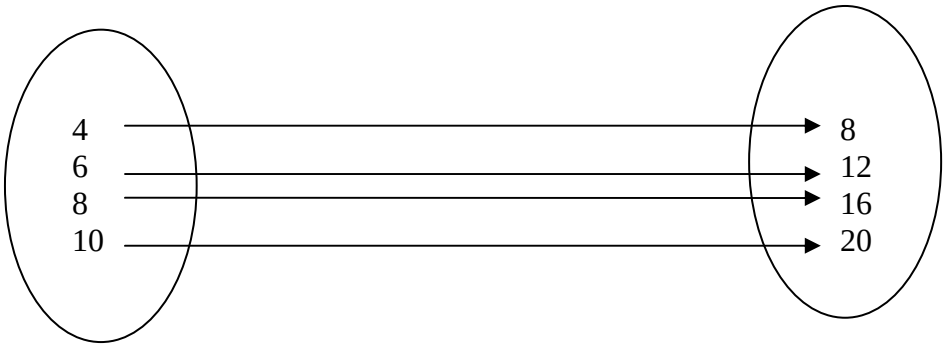


Beraz, funtzioa bi multzoren elementuen arteko harremana da, non lehenengo multzoaren elementuak bigarren multzoaren elementu banarekin erlazionatzen baitira. Lehenengo multzoaren edo dominioaren elementu bati *x* deritzogu (aldagai askea) eta bigarren multzoan edo kodominioan dagokion elementuari y deitzen zaio (menpeko aldagaia). Harreman mota hori f deitzen da, eta harremana honela adierazten da. $f : X \to Y$

Funtzioa harreman matematikoaren adibidea da. $x \in X$ elementuaren eta $y \in Y$ elementuaren artean dagoen harremana $y = f(x)$ moduan adierazten da. Hitzekin esanda, y *x*-aren funtzioa da. Funtzioa izateko, bi ezaugarri bete behar dira: a) izatearen baldintza: X-ren elementu guztiak Y-ren elementuekin erlazionatuta daude, eta b) bat izatearen baldintza: X-ren elementu bakoitzari Y-ren elementu bakarra dagokio.

Zenbaki errealen kasuan, funtzioa kalkulagailua moduan irudika daiteke. Dominioa kalkulagailuan sartzen den informazioa litzateke; kalkulua bera funtzioa litzateke, eta emaitza, kodominioa. Sartzen den informazioa x edo s moduan adierazten da, eta emaitza $f(x)$ edo $f(s)$ moduan adierazten da.

Adibidez: $f(x) = 2x$. Kasu honetan, x-ak hartzen dituen zenbaki erreal guztietarako, funtzioak bikoitza emango du. Batzuetan, dominioari tarte bat dagokio. Beste batzuetan, zenbaki errealen multzoa da, baldin eta dagokion emaitza zenbaki erreala baldin bada.



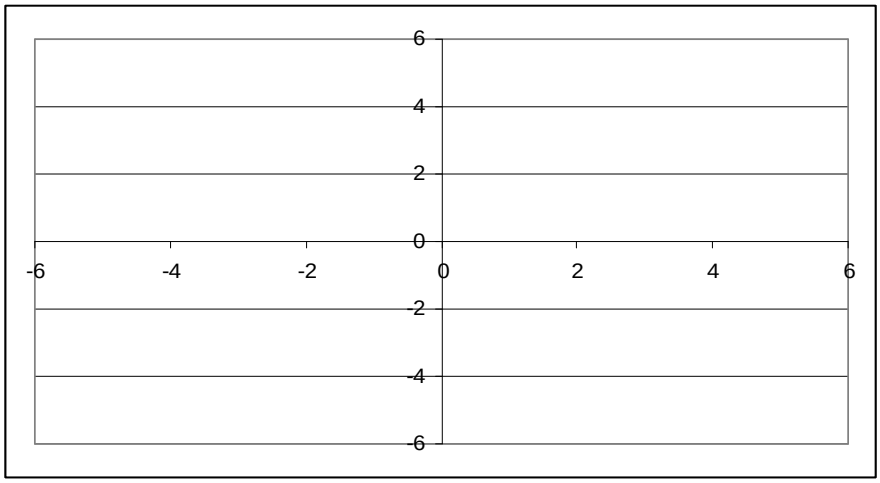
Zenbait kontzeptu:

- f funtzioaren dominioa: $f(x)$ funtzioan agertzen diren x elementuen multzoa. $dom(f)$ gisa adierazten da. Dominioaren elementuei argumentu deitzen zaie.
- f funtzioaren kodominioa: Y multzoaren y elementuen multzoa. $codom(f)$ gisa adierazten da.
- f funtzioaren irudia: x dominioaren elementu bat bada, funtzioak kodominioan ematen dion balioari irudia deituko zaio. X-ren f funtzioaren irudia, hain zuzen. Beste modu batean esanda, menpeko aldagaiak hartzen duen balioen multzoa. $\mathrm{Im}\, g(f)$ gisa adierazten da.

Adibidez: $f(x) = x + 1$ funtzioan, dominioa, kodominioa eta irudia balio erreal guztiak dira. Halere, $g(x) = g^2$ funtzioan, dominioa balio erreal guztiak izan daitezke, baina kodominioak zenbaki errealen berreturak hartuko ditu.

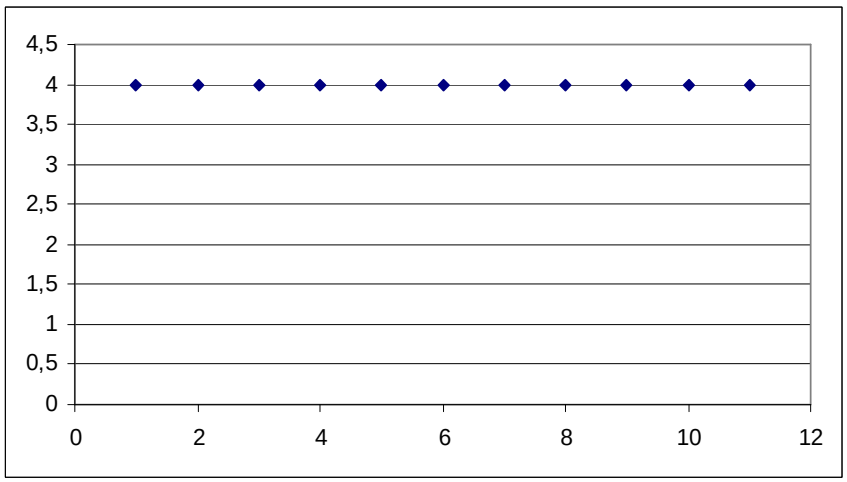
- Aldagai erreal baten funtzio erreala: Funtzio-dominioa eta irudia zenbaki errealen multzoak badira, orduan, funtzio horiek erreferentzia-sistema deitzen den planoan irudikatzen dira.

Funtzio bat hainbat modutan adieraz daiteke: ahoz, taula batean, formula batean edo grafiko baten bitartez.

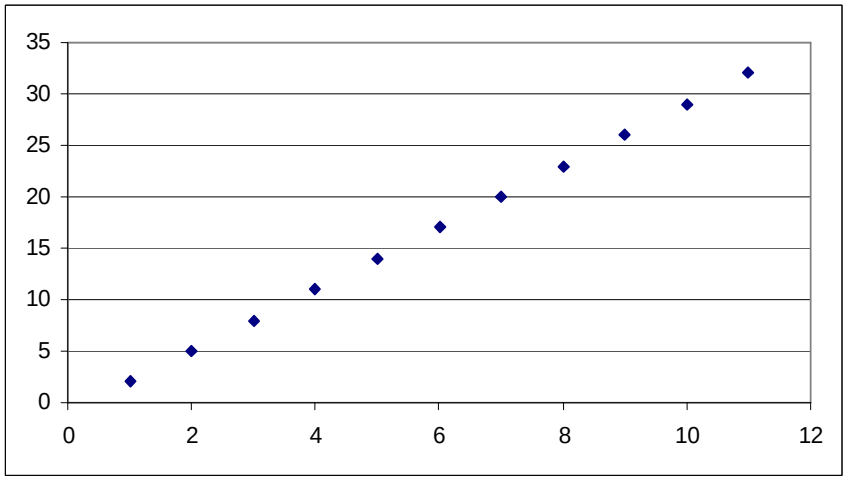


Ondoren, funtziorik tipikoenen irudikapen grafikoak aurkeztuko ditugu:

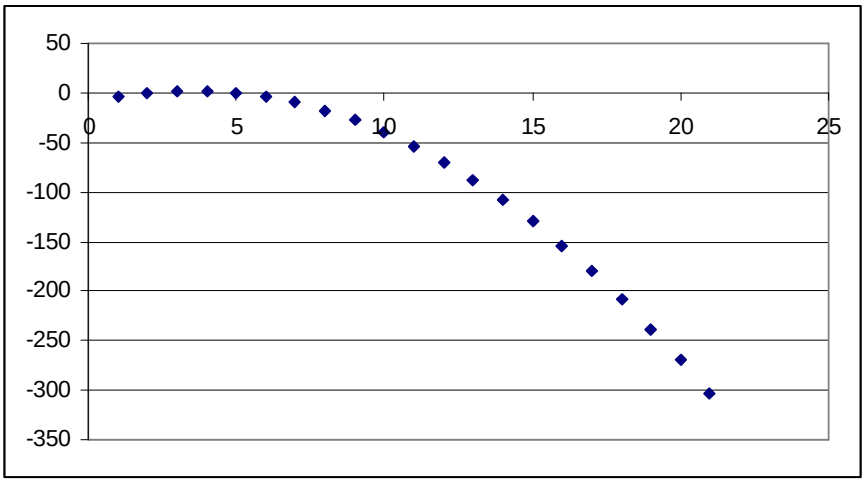
a) Funtzio konstantea. $f(x)=k$. Demagun K=4



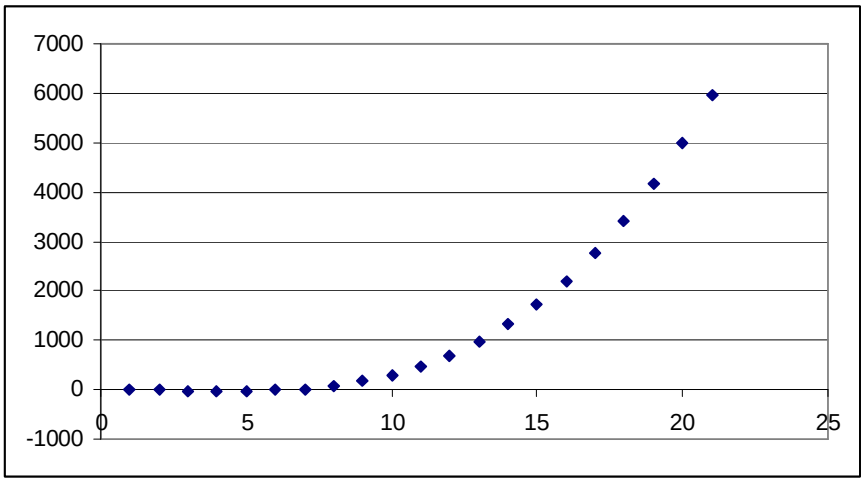
b) Funtzio lineala. $f(x)=ax+b$. Demagun $f(x)=3x+2$



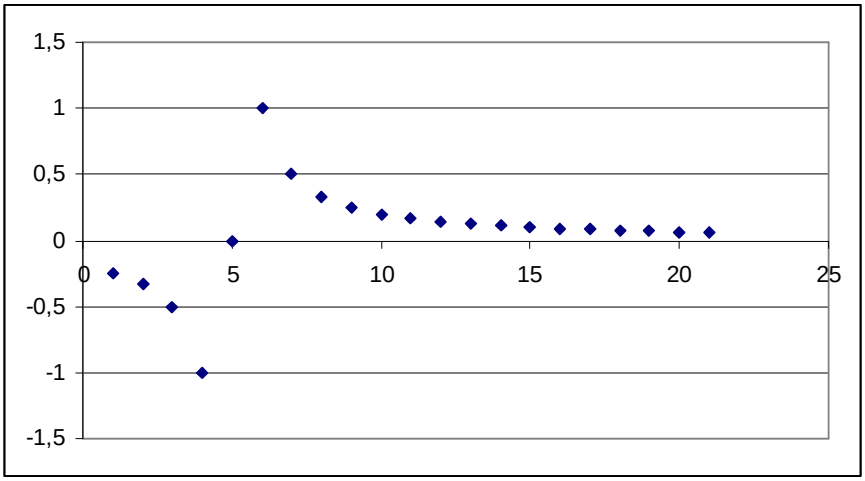
c) Funtzio koadratikoa. $f(x) = ax^2 + bx + c$. Demagun $f(x) = -x^2 + 5x - 4$



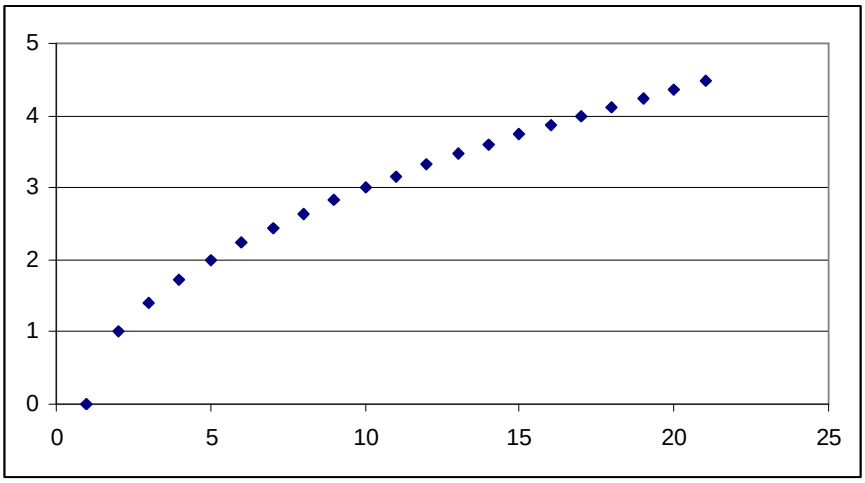
d) Funtzio polinomikoa. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Demagun, $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 4$



e) Funtzio arrazionala. $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2 - 16}$



f) Berreturaren funtzioa. $f(x) = x^{1/2}$



4. Funtzio baten limitea puntu batean

Funtzioaren limitea izango dugu funtzioan agertzen den aldagai askea (x) balio batera hurbiltzen bada, baina balio hori behin ere hartu gabe. *a*-rantz hurbiltzen denean, $f(x)$ funtzio baten limitea *a* da. Beraz, $\lim_{x \to a} f(x) = l$. Hori gertatzeko, *a*-k dominioaren metatze-puntu bat izan behar du.

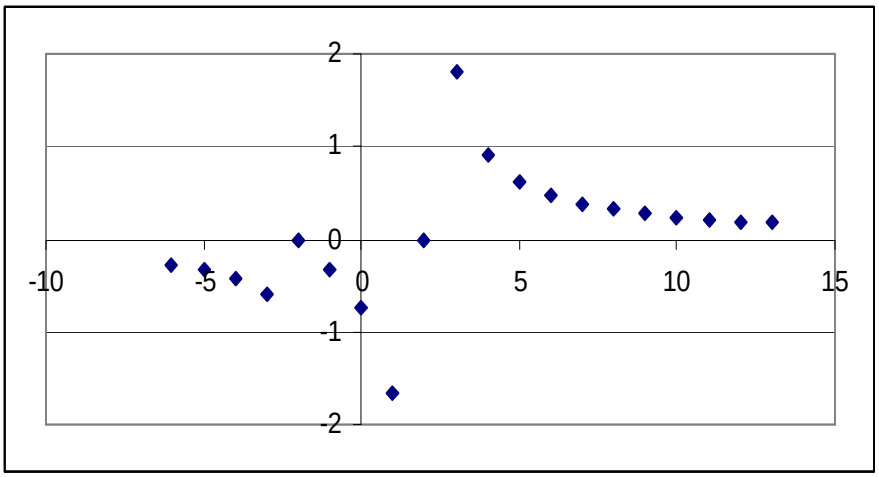
Erraza da funtzio baten limitea puntu batean kalkulatzea. Funtzioa agertzen den *x a* balioarekin ordezkatzearekin nahikoa da.

Adibidez:

$$\lim_{x \to -6} \frac{2x+3}{x^2-4} = \frac{2 \cdot (-6)+3}{(-6)^2-4} = \frac{-9}{32} = -0,28$$

Honako hau litzateke funtzioaren limite zehatza.

X	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
Y	-0,28	-0,33	-0,42	-0,60	-	-0,33	-0,75	-1,67	-	1,80	0,92	0,62	0,47	0,38

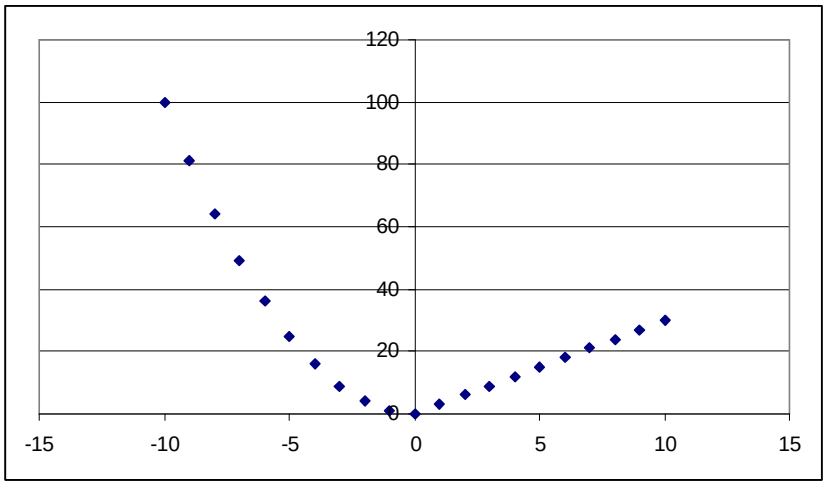


Grafiko honetan, funtzioa garatuagoa dago eta taulan agertzen diren baino datu gehiago sartzen dira.

5. Alboko limiteak

Batzuetan, funtzioak ez dira jarraituak, baizik eta hainbat ataletan definitzen dira. Funtzioak zatika definitzen direnean, zati bakoitzaren alboko limiteak kalkulatu beharko dira.

$f(x)=\begin{Bmatrix} x^2, x<0 \\ 3x, x\geq 0 \end{Bmatrix}$ funtzioak puntu guztietan du limitea. Zalantza sortzen duen puntu bakarra 0 da, eta, 0 bada, alboko limiteak berdinak direnez, funtzio horren limitea 0 da.



$y = f(x)$ funtzio baten ezkerraldeko limitea, x = a puntuan, honela adierazten da: $\lim_{x \to a^-} f(x)$; eta eskuinaldeko limitea honela: $\lim_{x \to a^+} f(x)$

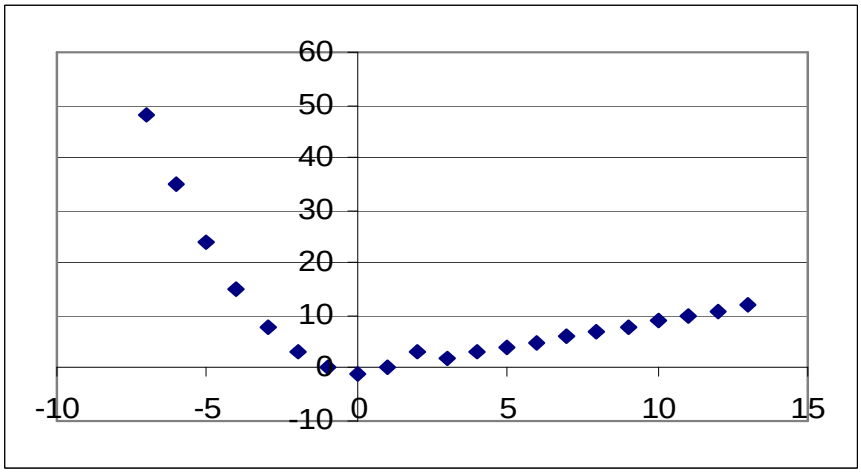
Adibidez:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, x \leq 2 \\ x - 1, x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = 2^2 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = 2 - 1 = 1$$

X	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	48	35	24	15	8	3	0	-1	0	3	2	3	4	5	6	7	8



6. Funtzio baten limitea infinituan

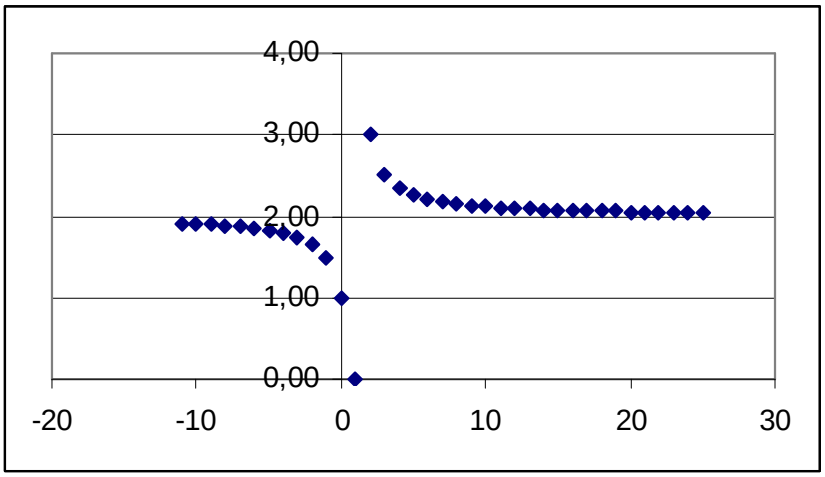
$x \to +\infty$ adierazpenak *x* nahi adina handitzen dela esan nahi du.

$x \to -\infty$ adierazpenak *x*-aren balio negatiboak nahi adina handitzen direla esan nahi du.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ adierazpenak *x* handitzen denean $f(x)$ funtzioa nahi adina handitzen dela esan nahi du, mugarik ez duela, hain zuzen.

Adibidez: $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$

X	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	1,89	1,88	1,86	1,83	1,8	1,75	1,67	1,5	1	-	3	2,5	2,3	2,25	2,2	2,17	2,14



Adibidez:

- $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-5)=\infty$
- $\lim\limits_{x\to\infty}(-2x+15)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to\infty}(6x^2-5x+9)=\infty$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8}{(3x^3-5)}=0$
- Eta polinomioen zatiketaren kasuan:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{(3x^3-5)}=0$, izendatzailean dagoen berretzailea zenbakitzailean dagoena baino handiagoa baita.

- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+5x-3}{3x^2-4}=\dfrac{8}{3}$, izendatzailearen eta zenbakitzailearen berretzaile altuenak berdina direnez, haien koefizienteak zatitzen dira.

- $\lim_{x\to\infty}\frac{-8x^3}{4x-2}=-\infty$, zenbakitzailearen berretzailea izendatzailearena baino handiagoa denez, infinituak berretzaile altuenaren zeinua hartzen du.

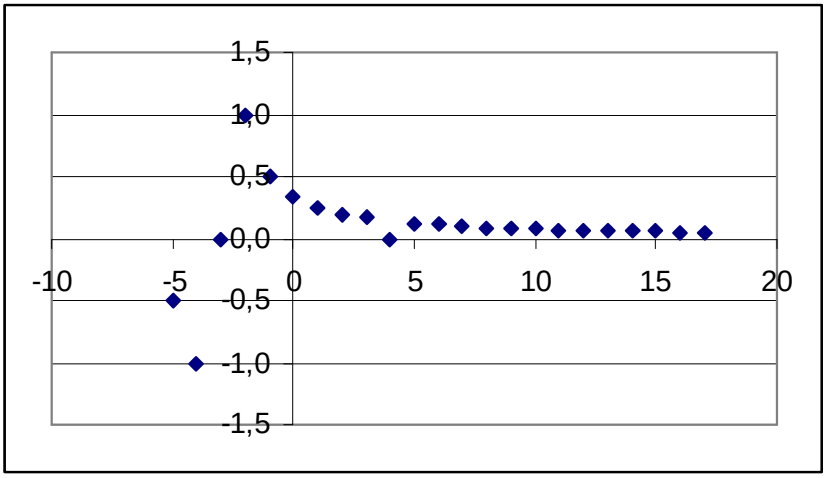
7. Indeterminazio-egoerak

Posible da $f(x)$ funtzioa $x = a$ puntuan definiturik ez egotea eta indeterminazio-egoera agertzea, adibidez $\left(\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\infty-\infty,1^{\infty}\right)$. Orduan, limitea beste estrategien bitartez kalkulatu beharra dago.

Adibidez:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{x^2-x-12}=\frac{4-4}{16-4-12}=\frac{0}{0}$$

-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
-0,5	-1	ind	1	0,5	0,3	0,3	0,2	0,2	ind	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1



Kasu honetan, funtzio hori ez dago 4 puntuan definiturik. Beraz, ordezko irtenbideak bilatu beharko dira.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{x^2-x-12}=\frac{x-4}{(x+3)\cdot(x-4)}=\frac{1}{x+3}$$

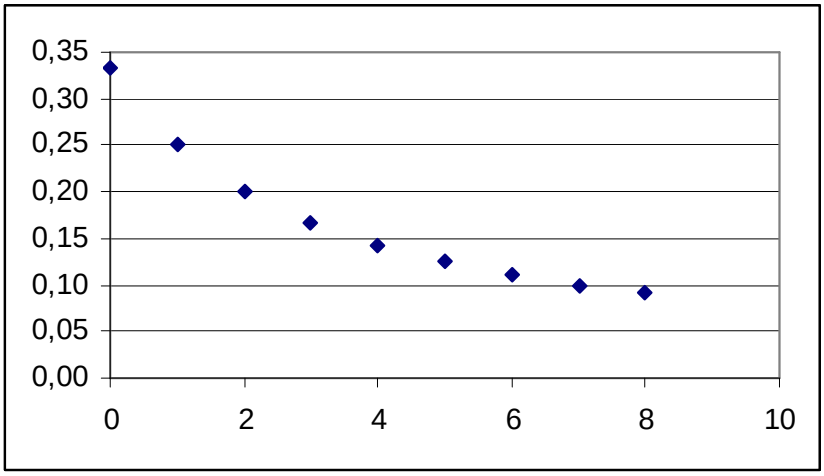
Ondoren, x = 4 ordezkatzen bada, ikusten da funtzio horren limitea 1/7=0,14 dela .

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	0,33	0,25	0,2	0,17	0,14	0,13	0,11	0,1	0,09

Adibidez:

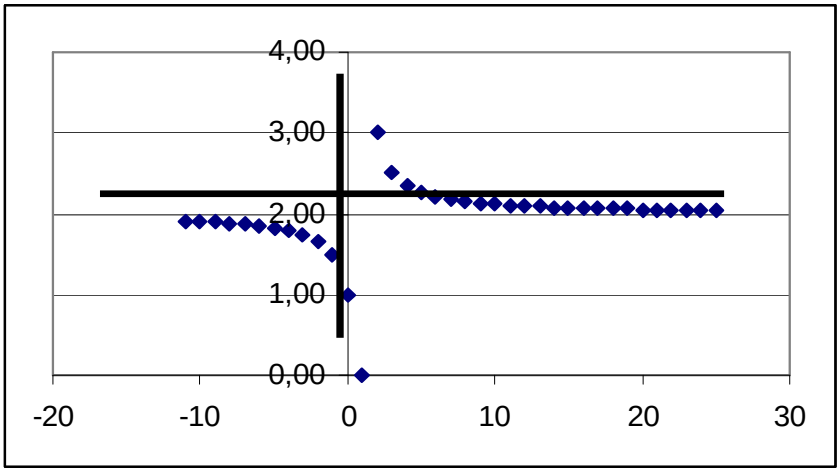
$$\lim_{x\to\infty} x^2 - x = +\infty$$

Kasu honetan, infinitu ber bi ken infinitu berriro ere ematen du infinitu. Gainera, infinituak hartzen duen zeinua funtzioaren berreketa handienaren zeinu bera da.



8. Asintotak

Funtzioaren grafikoari hurbiltzen zaion zuzena. Asintotak zuzen bertikalak, horizontalak edota zeiharrak izan daitezke. Funtzio honek bi asintota ditu: bat horizontala eta beste bat bertikala.



9. Ariketak

Funtzio hauen limiteak kalkulatu:

1. $\lim_{x \to -1} \left(2x^2 + x - 5\right)$

2. $\lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x^2-1}$

3. $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

4. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2+3x-4}$

5. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$

6. $\lim_{x \to \infty} \frac{-2x^3}{x^2+1}$

7. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+3x}{5x^2+6x-2}$

8. Funtzio honen alboko limiteak kalkulatu *x* = 1 puntuan.

$$f(x) = \begin{cases} x-1, x<1 \\ 1/x, x \geq 1 \end{cases}$$

9. Demagun autoestimua eta depresioa neurtzeko bi test erabiltzen ditugula, eta test horien bitartez lortu dugula autoestimuaren eta depresioaren artean dagoen harremana ondorengo funtzioaren bitartez definitzea. X bada autoestimuari buruzko testean lortutako puntuazioa, eta D(x)-k autoestimua depresioaren funtzioa dela adierazte badu,

$$D(x) = \frac{9+5x-6x^2}{5+6x+2x^2}$$

a) Zein depresio maila du pertsona batek autoestimuari buruzko testean 0 puntuazioa lortu baldin badu?

b) Eta autoestimuari buruzko testean -10 puntu lortuz gero?

c) Zein depresio maila espero da autoestimu txikiena duen pertsona batentzat?

10. Emaitzak

1. $\lim_{x\to -1}\left(2x^2+x-5\right)=-4$

2. $\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x^2-1}=\frac{-1}{3}$

3. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}$

$$\frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

4. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x-4}=\frac{0}{0}$

$$\frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+4)}=\frac{0}{5}=0$$

5. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}=\frac{0}{0}$

$$\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{2}$$

6. $\lim_{x\to \infty}\frac{-2x^3}{x^2+1}$

Funtzioak zenbakitzailean berretzaile handiena duenez, orduan, infinitua den emaitzak zeinu negatiboa izango du, beraz, $-\infty$

7. $\lim_{x\to \infty}\frac{2x^2+3x}{5x^2+6x-2}$

Funtzioak, zenbakitzailean eta izendatzailean, gradu bereko berretzailea du; beraz, funtzioaren emaitza bi koefizienteen zatiketa izango da: 2/5.

8.

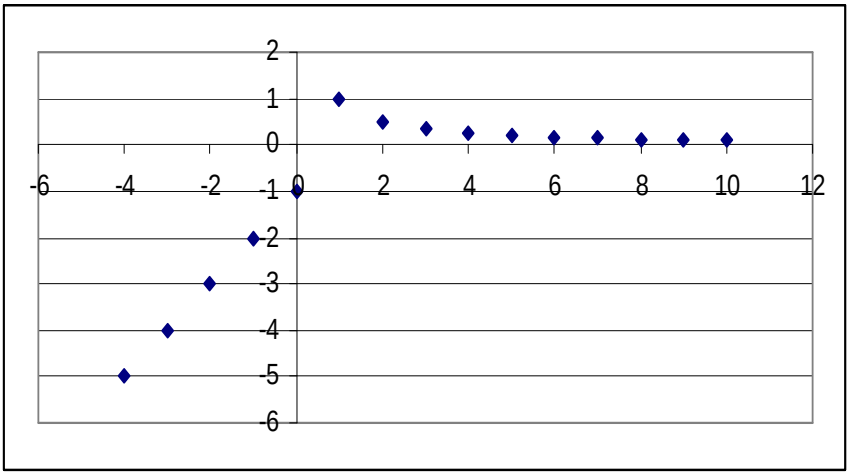
$$f(x)=\begin{Bmatrix} x-1, x<1 \\ 1/x, x\geq 1 \end{Bmatrix}$$

Honako hauek dira alboko limiteak

1-1=0

1/1=1

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	-5,00	-4,00	-3,00	-2,00	-1,00	1,00	0,50	0,33	0,25	0,20	0,17	0,14	0,13	0,11

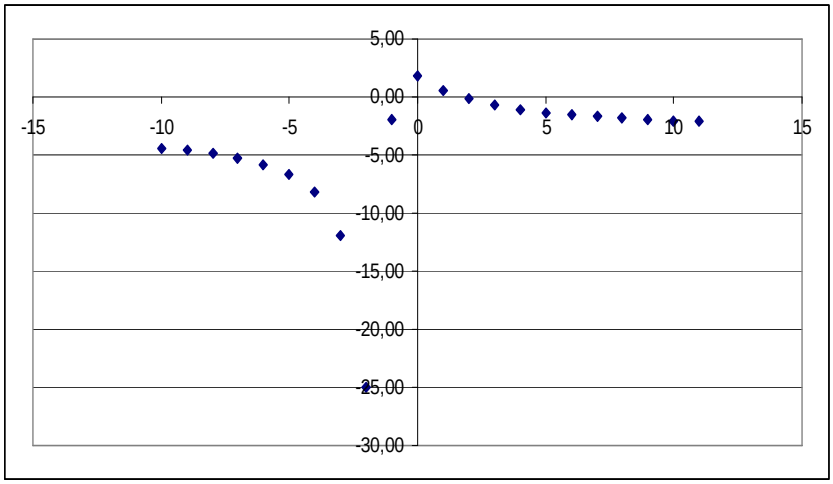


9.

a) Pertsona batek autoestimuari buruzko testean 0 puntuazioa izanez gero, espero da depresioari buruzko testean 1,80 ateratzea.

b) -10 puntuazioa izanez gero, -4.42 aterako du depresioari buruzko testean.

c) Autoestimu txikiena duen pertsona batentzat, hau da, infinitura hurbiltzen denean, depresio maila -3 izango da.



1.3 Matrizeak eta bektoreak

Aurkibidea

1. Helburu didaktikoak
2. Sarrera
3. Bektore eta matrize motak
4. Eragiketak bektoreekin eta matrizeekin
5. Determinanteak
6. Ariketak eta emaitzak

1. Helburu didaktikoak

- Matrizeei eta bektoreei buruzko ezagupen orokorra edukitzea eta hizkuntza ezagutzea.
- Matrizeekin eta bektoreekin oinarrizko eragiketak egiten jakitea.

2. Sarrera

- Zertarako erabiltzen dira psikologian?

Matrizeak datu psikologikoak ordenatzeko eta laburtzeko erabiltzen dira. Psikologian, matrizeen errenkadetan, subjektuak kokatzen dira, eta zutabeetan, aldagaiak. Matrizeei buruzko aplikazio jakinak psikometrian lantzen dira batez ere.

- Zer da $m \times n$ matrize bat? *m* errenkada eta *n* zutabe kopuru jakinean antolatutako a_{ij} elementuen multzo angeluzuzena.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.4)$$

A matrize honetan, $m \times n$ elementu daude. Elementu bakoitza a_{ij} hizkiekin adierazten da. a_{ij} ikurrak matrizeak $i = 1, 2, ..., m$ errenkada eta $j = 1, 2, ..., n$ zutabe dituela adierazten du.

- Zer da bektore bat? Errenkada edo zutabe bakarra duen matrizea da.

Errenkada-bektorea honela adierazten da:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Zutabe-bektorea honela:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

- Eskalarra errenkada eta zutabe bakarra duen matrizeari deitzen zaio (adibidez: 4).

3. Bektore eta matrize motak

1. Matrize karratua. Errenkada eta zutabe kopuru bera duen matrizea, hau da, $m = n$. Matrize karratua n ordenakoa dela esaten da. Ondorengo adibideetan, A matrize karratua da eta B, ez.

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Diagonal nagusia a_{11}, a_{22}, a_{33}, hau da, 1, 1, 0, eta bigarren mailako diagonala a_{13}, a_{22}, a_{31}, hau da, 0, 1, 5.

2. *Matrize iraulia*. A matrizearen iraulia A^t da. A^t A matrizearen errenkada eta zutabeak elkarren artean eraldatuz lortzen da. Hau da, A matrizearen lehenengo errenkada A^t matrizearen lehenengo zutabea izango da. A matrizea $m \times n$ ordenakoa bada, A^t matrizea, $n \times m$ ordenakoa.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 4\\ 5 & 1 & 0\end{pmatrix} \text{ eta } A^t=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ -3 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

Errenkada-bektore baten iraulia zutabe-bektore bat izango da, eta zutabe-bektore baten iraulia errenkada-bektore bat.

3. *Matrize simetrikoa*. Matrize karratu bat simetrikoa da $A=A^t$ betetzen bada.

$$A=\begin{pmatrix}9 & 1 & 5\\ 1 & 6 & 2\\ 5 & 2 & 7\end{pmatrix} \text{ matrize simetrikoa da.}$$

4. *Matrize antisimetrikoa*. Matrize karratu bat antisimetrikoa da $A=-A^t$ betetzen bada.

$$A=\begin{pmatrix}0 & -5\\ 5 & 0\end{pmatrix} \text{ eta } B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 5\\ -2 & 0 & -4\\ -5 & 4 & 0\end{pmatrix} \text{ matrize antisimetrikoak dira.}$$

5. *Matrize nulua*. Matrizearen elementu guztiek 0 balio badute, matrize nulua dugu. 0 matrizea ere deitzen da.

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

6. *Matrize diagonala*. Diagonal nagusiko elementuak izan ezik, 0 balioaz osaturiko matrizea.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

7. *Matrize eskalarra*. Diagonaleko elementu berdinak dituen matrize diagonala da.

$$A=\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

8. *Unitate-matrizea*. Horrelako matrize bat izango dugu baldin eta matrize eskalar bateko diagonal nagusiko elementuek 1 balioa badute.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

9. *Matrize triangeluarra*. Diagonal nagusiaren albo batera elementu nuluak dituen matrize karratua. A matrizea goiko matrize triangeluarra da eta B matrizea, azpiko matrize triangeluarra.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix} \text{ eta } B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ 2 & 4 & 8\end{pmatrix}$$

4. Eragiketak bektoreekin eta matrizeekin

1. *Batuketa eta kenketa*. Bektoreekin eta matrizeekin batuketak edo kenketak egiteko, bi matrizeek errenkada eta zutabe kopuru bera izan behar dute. Dimentsio bereko bi matrizeen batuketaren emaitza dimentsio bereko matrizea izango da. Bi matrizeen elementuak banan-banan batzen dira emaitza lortzeko.

   Batuketa:

$$\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\7\\12\end{pmatrix} \text{ edo } \begin{pmatrix}4 & 5\\ -9 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 6\\ -6 & 11\end{pmatrix}$$

   Kenketa:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 2\end{pmatrix} \text{ edo } \begin{pmatrix}4 & 5\\ -9 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -12 & -5\end{pmatrix}$$

2. *Biderketa eskalar batekin*. *A* matrize baten eta k zenbaki baten arteko biderketa *A* matrizearen dimentsio bereko *B* matrizea izango da, non $b_{ij}=k\cdot a_{ij}$ baita.

$$\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}\cdot 4=\begin{pmatrix}4\\12\\16\end{pmatrix} \text{ edo } \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & -8 & 2\end{pmatrix}\cdot 4=\begin{pmatrix}8 & 4 & 4\\ 12 & -32 & 8\end{pmatrix}$$

3. *Bektoreen arteko biderketa.* Bi bektore biderkatu ahal izateko, errenkada-bektoreak dituen zutabe kopuruak eta zutabe-bektoreak dituen errenkada kopuruak berdinak izan behar dute.

   Ezin biderkatu: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

   Posible da biderkatzea: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Bi bektoreen arteko biderketaren emaitza eskalar bat izango da. Emaitza lortzeko, errenkada bektorearen lehenengo elementua zutabe-bektorearen lehenengo elementuarekin biderkatzen da; bigarrena, bigarrenarekin, eta abar. Ondoren, biderketa guztien emaitza batzen da.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (2 \cdot 1) + (4 \cdot 2) + (3 \cdot 4) = 22$$

Matrizeen arteko biderketa. Hor ere, A matrizearen zutabe kopuruak eta B matrizearen errenkada kopuruak berdinak izan behar dute. Emaitza den matrizeak lehenengo matrizearen errenkada kopurua eta bigarrenaren zutabe kopurua izango du.

Ezin da biderkatu: $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

Posible da biderkatzea: $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Kalkulua honela egiten da:

$$\begin{pmatrix} o & p \\ q & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \cdot a_{11} + p \cdot a_{21} & o \cdot a_{12} + p \cdot a_{22} & o \cdot a_{13} + p \cdot a_{23} \\ q \cdot a_{11} + r \cdot a_{21} & q \cdot a_{12} + r \cdot a_{22} & q \cdot a_{13} + r \cdot a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 7 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 14 & 20 \\ 18 & 32 & 46 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\cdot 3+2\cdot 7 \\ 1\cdot 3+3\cdot 7 \\ 4\cdot 3+1\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 25 \\ 19 \end{pmatrix}$$

4. *Matrize baten aztarna.* Matrize karratu baten diagonaleko elementuen batuketa da. A matrizearen aztarna tr(A) da.

$$tr\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 1-1+8=8$$

5. *Matrize adjuntuak. A* matrizearen adjuntua *A* matrizeak dituen errenkada eta zutabe kopuru berekoa da. Hau da, ordena bereko matrizea da. Matrize adjuntuaren lehenengo elementua kalkulatzeko, a_{11} elementuari dagokion errenkadan eta zutabean ez dauden elementuen determinantea izango da. Adibidez:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Beraz, A matrizean, a_{11} elementuaren adjuntua honako matrize honi dagokion determinantea izango da:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = (1.4)-(4.2) = 4-8 = -4$$

Eta a_{21} elementuarena honako hau:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = (2.4)-(3.2) = 8-6 = 2$$

A matrizearen elementu guztiekin eragiketa horiek eginez, matrize adjuntua lortzeko lehenengo pausoa ematen da:

$$A = \begin{pmatrix} 4-8 & 8-12 & 4-3 \\ 8-6 & 4-9 & 2-6 \\ 8-3 & 4-6 & 1-4 \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & -4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Matrize adjuntua kalkulatu eta gero, elementuen zeinuei jarri beharko diegu arreta. Izan ere, matrizearen zenbait elementuren zeinuak aldatu beharko dira

elementuen posizioaren arabera. Zehazki, ondorengo matrizearen posizio negatiboetan dauden elementuen zeinuak aldatu behar dira.

$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$. Beraz, $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ -2 & -5 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

6. *Alderantzizko matrizeak. A* matrize karratu baten alderantzizko matrizeari A^{-1} deritzo. Matrize karratu batek alderantzizkorik ez badu, orduan, matrize singularra da. Matrizeen aljebran, matrize baten alderantzizkoa matrize bat da, jatorrizko matrizearekin biderkatzen bada, eta horrek identitate-matrizea ematen du.

Honela adierazten da: $A \cdot A^{-1} = I$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{jatorrizkoa} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}}_{alderantzizkoa} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}+\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}+\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{identitatea}$$

Orain ikus ditzagun alderantzizko matrizea lortzeko bi metodo.

a) *Ekuazioen bitartez*

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizeen biderketaren eragiketari jarraitzen badiogu:

$$\left.\begin{array}{l} 4a+2c=1 \\ 4b+2d=0 \\ 5a+3c=0 \\ 5b+3d=1 \end{array}\right\} a = \frac{-2c}{4}; b = \frac{1-3d}{5}$$

Ondorioz, $a = 1,5; b = -1; c = -2,5; d = 2$

Beraz, $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ matrizearen alderantzizko matrizea $\begin{pmatrix} 1,5 & -1 \\ -2,5 & 2 \end{pmatrix}$ da.

b) *Determinanteen bitartez*

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\left[Adj\left(A\right)\right]^t$, non det(A) A matrizearen determinantea eta $\left[Adj\left(A\right)\right]^t$ A matrizea adjuntuaren matrize iraulia baitira.

Adibidez: Kalkulatu A matrizearen alderantzizkoa.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

Lehenik, A matrizearen determinantea kalkulatu behar da. Hirugarren mailako determinantea kalkulatzeko prozedura 37. orrialdean garatzen da.

$$\det(A)=(4+24+12)-(9+16+8)=7$$

Orain, A matrizearen matrize adjuntua sortu beharko da. Hori egiterakoan, elementuen zeinuak hartu behar dira kontuan.

$$A=\begin{pmatrix}-4 & 4 & 1\\ -2 & -5 & 4\\ 5 & 2 & -3\end{pmatrix}$$

Orain, matrize horren iraulia kalkulatuko da $\left[Adj\left(A\right)\right]^t$ lortzeko.

$$A=\begin{pmatrix}-4 & -2 & 5\\ 4 & -5 & 2\\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}$$

Azkenik, emaitzarekin $\frac{1}{\det(A)}$ biderkatuko dugu. Beraz, matrize irauliaren elementu guztiak zati 7 kalkulatu eta matrize hau lortzen da.

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\left[Adj\left(A\right)\right]^t=\begin{pmatrix}-0,57 & -0,29 & 0,71\\ 0,57 & -0,71 & 0,29\\ 0,14 & 0,57 & -0,43\end{pmatrix}$$

7. *Matrize ortogonalak.* Matrize karratu batzuk soilik izan daitezke ortogonalak. *A* matrizea ortogonala da *A* matrizearen irauliarekin biderkatzean identitate-matrizea ematen badu.

$$A\cdot A^t=I$$

$$\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}}_{jatorrizkoa}\cdot\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}}_{iraulia}=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{identitatea}$$

5. Determinanteak

A matrize baten determinantea eskalar bat (zenbaki bat) da eta $\det(A)$ gisa adierazten da. Determinanteek ezaugarri matematiko garrantzitsuak dituzte. Bigarren eta hirugarren mailako matrizeen determinanteak kalkulatzen ikasiko dugu.

1. Bigarren mailako matrize karratuaren determinantea nola kalkulatu:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \det(A)=(a_{11}\cdot a_{22})-(a_{12}\cdot a_{21})$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det(A)=(1\cdot 3)-(4\cdot -2)=12$$

2. Hirugarren mailako matrize karratuaren determinantea (Sarrusen araua aplikatuz).

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

$$\det(A)=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{31}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{33}a_{21}+a_{11}a_{23}a_{32}) \tag{1.6}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\det(A)=\left[(1.-1.8+4.2.0+2.-3.4)-(2.-1.2+4.8.-3+1.0.4)\right]=$$
$$=(-8)+0-24+4+96+0=68$$

6. Ariketak

Matrize hauetan oinarrituz, honako ariketa hauek egin:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\quad G=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}\quad H=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-3&1&-3\\-1&2&-2\end{pmatrix}$$

1. $A+C$
2. $A-C^t$
3. C^t+3D
4. BA
5. BA^t
6. BC
7. CB
8. AA^t
9. $\det(B)$
10. $\det(G)$
11. $Adj(G)$
12. G^{-1}
13. $\det(A)$
14. EG
15. F^t
16. $A-D$

Emaitzak

1. Ezin
2. $\begin{pmatrix}2&1&2\\3&6&2\end{pmatrix}$
3. $C^t+3D=\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&-1&0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-1&2&1\\2&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&6&3\\6&-6&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&7&5\\6&-7&9\end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&4\\3&5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-3&2-5&4-2\\1-0&2-0&4-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-3&2\\1&2&4\end{pmatrix}$
5. Ezin
6. Ezin
7. $\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\\2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-0&1-0\\1-1&-1-0\\2-0&-2-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\\2&-2\end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix}1&2&4\\3&5&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\2&5\\4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4+16&3+10+18\\3+10+8&9+25+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21&21\\21&38\end{pmatrix}$

9. $DET\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1\cdot 0 - (-1\cdot 1) = 1$

10. $DET\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 1\cdot 3 - 2\cdot(-1) = 5$

11. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

12. $DET\left(G\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 5$

$ADJ\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ Hemen, adjuntua kalkulatu dugu zeinuak kontuan hartuz.

$G^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ eta matrize hori zati determinantea: $G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

13. Ezin

14. Ezin

15. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

II. ALDAGAI BAKARREKO ESTATISTIKA DESKRIBATZAILEA

2.1 Datuen antolaketa: maiztasun-banaketak

Aurkibidea

1. Helburu didaktikoak
2. Sarrera
3. Aldagai estatistikoak
4. Maiztasun-banaketak
5. Tarteen mugak: itxurazko mugak eta benetako mugak
6. Datu taldekatuen maiztasun-taulak eratzeko zenbait arau
7. Ariketak
8. Ebazpenak

1. Helburu didaktikoak

Aldagai estatistiko kualitatibo eta kuantitatiboen ezaugarriak ezagutu eta bereizten jakin.

Datuak bildu ondoren, maiztasun-taulak egin aldagai mota guztiekin.

Datu multzo baten maiztasun absolutuak, erlatiboak eta metatuak bereizten eta biak kalkulatzen ikasi.

Datu taldekatuen maiztasun-taulak egin eta horiekin erlazionaturik dauden kontzeptuak eta deskriptiboak ulertu eta ateratzen ikasi.

2. Sarrera

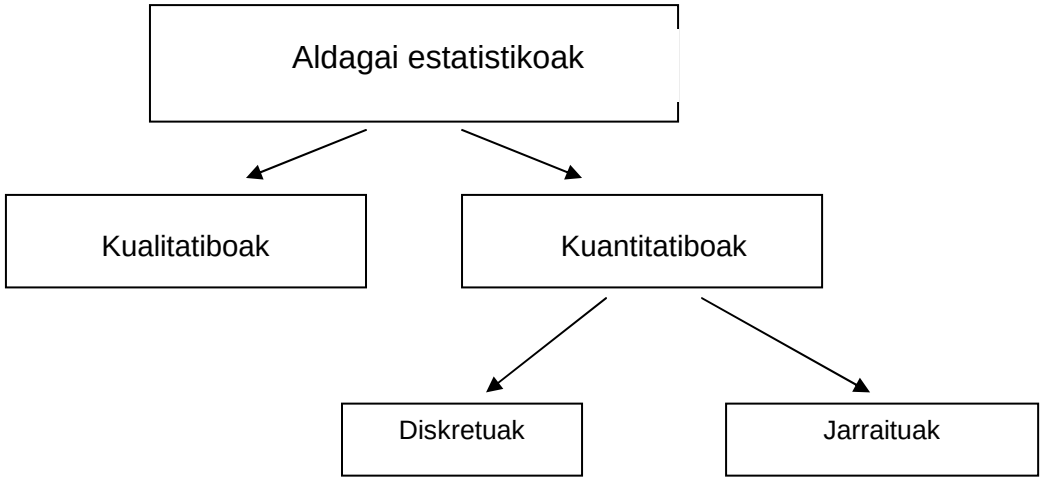
Estatistika taldeko fenomenoei buruzko hainbat datu biltzeaz eta laburbiltzeaz arduratzen den zientzia da, gero datuak modu sinplean irudikatu eta ondorioak atera ahal izateko. Askotan, bildutako datuak grafikoetan jasotzen dira, eta, grafiko horiei esker, datuen ezaugarririk garrantzitsuenak ikusten dira. Edozein adierazpide grafiko egiteko edo estatistiko kalkulatu ahal izateko, beharrezkoa da datuak maiztasun-taulan antolatzea.

Azterketa estatistikoetan, hiru kontzeptu sortzen dira: populazioa, lagina eta banakoa. Definizioak errazak izan arren, batzuetan ez dira oso argi bereizten. *Populazioa* azterketako elementu guztiek osaturiko multzoa da. Baliabideak mugatuak direnez, ikerketak kolektibo baten talde adierazgarriei buruzkoak izan ohi dira, eta, beraz, l*agina*k eratzen dira. Bukatzeko, populazioko edo lagineko elementu bakoitza *banako* bat da. Adibidez, ezinezkoa da fabrika batean egindako pieza guzti-guztiei kalitate-kontrola egitea; horregatik, pieza guztien artean, multzo txiki bat aztertzen da eta lortutako emaitzak fabrika osora orokortzen dira.

Prozesu estatistiko bat gauzatzeko, lehenengo, aldagai (ezaugarri) bakoitzeko datuak bildu, ordenatu eta zenbatu egiten dira maiztasun-tauletan.

3. Aldagai estatistikoak

Aldagai estatistikoa, populazio edo lagin batetik aztertzen den ezaugarri neurgarria da. Aldagaiak honela sailkatzen dira:



Kualitatiboak: hitzen bitartez soilik azal baitaitezke, balioak ez dira zenbakizkoak, nolakotasunak baizik: Amaren lanbidea, egoera zibila, nazionalitatea.

Kuantitatiboak: zenbakien bidez adieraz daitezkeenak. Aldagaiak hartzen dituen balioak zenbakiak dira. Adina, adimen-test baten emaitza (0-100), altuera. Aldagai kuantitatiboak diskretuak edo jarraituak izan daitezke. Aldagai bat *diskretua* da, tarte bakoitzean balio kopuru jakin bat bakarrik har badezake. Balio

puntualak soilik hartzen baitituzte. Adibidez, pertsona baten lagun kopurua beti balio osoa da: 0, 1, 2, 3; eta 2ren eta 3ren artean ez dago besterik, 2,5 edo 2,9. Baina aldagai bat *jarraitua* bada, tarte bakoitzean, nahi adina (edo infinitu) balio har ditzake. Adibidez, 70 k eta 71 k arteko pisuak infinitu dira: 70,1; 70,2; 70,3 …70,999. Baina aipatu beharra dago aldagai jarraituak ere praktikan diskretuak bezala erabiltzen direla.

Aldagaia diskretua denean, zutabe batean, aldagai estatistikoaren balioak ipintzen dira, ia beti txikienetik handienera ordenaturik; aldagaia jarraitua denean, berriz, balioak tarteetan pilaturik aurkezten dira.

4. Maiztasun-banaketak

Jatorrizko datu ugari biltzen direnean, baliagarria da klasetan eta kategoriatan banatzea eta klase bakoitzaren *maiztasuna* zehaztea, hau da, klase bakoitzari dagokion elementu kopurua. Kategoria bakoitzak duen maiztasuna aurkezten duen taulari maiztasun-banaketa deritzo. Balio edo kategoria baten *maiztasun absolutua* (f_i) balioa laginean agertzen den aldi kopuruari deitzen zaio. Oinarrizko maiztasun-taulan, aldagaiaren balioak, kategoriak edo tarte-zabalerak eta maiztasun absolutuak aurkeztuko dira.

Maiztasun-taula osoan, maiztasun erlatiboak (h_i), metatuak (F_i, H_i) eta ehunekoetakoak (hi% eta Hi%) gehitzen dira.

3. taula. Aldagai kualitatibo edo kuantitatibo diskretuen maiztasun-taula

Aldagaiaren balioak edo kategoriak X_i	***Maiztasun absolutuak*** f_i	***Maiztasun absolutu metatuak*** F_i	***Maiztasun erlatiboak*** h_i	***Maiztasun erlatibo metatuak*** H_i
X_1	f_1	F_1	f_1/N	f_1/N
X_2	f_2	f_1+f_2	f_2/N	$f_1/N+ f_2/N$
…	…	...	…	...
X_n	f_n	N	f_n/N	1
	N		1	

Ehunekoetako maiztasun erlatiboak **hi %**	***Ehunekoetako maiztasun erlatibo metatuak*** **Hi %**
h_1*100	H_1*100
h_2*100	H_2*100
...	...
h_n*100	100
100	

Ikerketa batean, datuak jaso ondoren, antolatu egin behar dira, txikienetik handienera, eta ordenatutakoan zenbatu.

Aldagai kualitatibo baten adibidea:

20 ikasleren kirolik gustukoenak agertzen dira ondoren:

F: futbola, T: tenisa, A: atletismoa, E: eskubaloia, S: saskibaloia.

F,F,T,T,T,A,E, A,S,S,S,E,T,T,F,S,S,E,A,E

4. taula. Kirola aldagaiari dagokion maiztasun-taula

X_i	f_i	F_i	h_i	H_i	hi%	Hi%
Futbola	3	3	0,15	0,15	15	15
Tenisa	5	8	0,25	0,40	25	40
Atletismoa	3	11	0,15	0,55	15	55
Eskubaloia	4	15	0,20	0,75	20	75
Saskibaloia	5	20	0,25	1	25	100
	N=20		1			

Aldagai kuantitatibo diskretu baten adibidea:

Partxiseko dado bat 30 aldiz bota da eta emaitza hauek lortu dira:

6, 1, 5, 3, 4, 1, 2, 3, 5, 4

6, 4, 3, 4, 5, 2, 3, 5, 4, 2

5, 4, 1, 2, 3, 5, 5, 6, 2, 3

Maiztasun-taula osoa eratu.

5. taula. Dado bat 20 aldiz jaurtitzearen emaitzak

X_i	f_i	F_i	h_i	H_i	hi%	Hi%
1	3	3	0,10	0,10	10	10
2	5	8	0,17	0,27	17	27
3	6	14	0,20	0,47	20	47
4	6	20	0,20	0,67	20	67
5	7	27	0,23	0,90	23	90
6	3	30	0,10	1	10	100
	N=30		1			

Aldagai kuantitatibo jarraitu baten adibidea:

Gazte talde baten altuerak (cm-tan adierazita) hauek dira:

155 160 163 165 169 170 172 172 175 175

159 156 158 161 162 165 166 168 169 180

Altuera aldagai kuantitatibo jarraitua denez, datuak tartetan bil daitezke. Tarte bakoitzaren zabalera kalkulatzeko formula hau erabiliz $\frac{Max - \min}{\sqrt{N}}$.

$\frac{180-155}{\sqrt{20}} = 5{,}59$, tarte bakoitzaren zabalera 6 cm izango da.

155 cm-tik hasita egingo dira tarteak, balio txikiena delako, eta, gero, 5 unitate gehitu behar zaio. Baina, kontuz; ez zaio 6 gehitu behar tarte-zabalera seikoa izateko. Adibidez, lehenengo tartean 155 eta 160 (mugako balioak) barne daudelako.

6. taula. Datu taldekatuen adibidea

X_i	f_i	F_i	h_i	H_i	hi%	Hi%
155-160	5	5	0,25	0,25	25	25
161-166	6	11	0,30	0,55	30	55
167-172	6	17	0,30	0,85	30	85
173-178	2	19	0,10	0,95	10	95
179-184	1	20	0,05	1	5	1
	N=20		1		100	

Datu taldekatuen kasuan, tarte bakoitzak bere **behe-muga** eta **goi-muga** ditu. Aurreko taulan, lehenengo tartearen behe-muga 155 da eta goi-muga, berriz, 160. Tarte bat irekita dagoela esaten da, hasieran edo bukaeran mugaren bat itxi gabe agertzen delako.

7. taula. Muga irekien adibidea

X_i
- 70eraino
70-100
100-130
130-160
160etik gora

5. Tarteen mugak: itxurazko mugak eta benetako mugak

Aldagai kuantitatibo jarraituen kasuan, bi muga mota aipatzen dira: itxurazko mugak eta benetako mugak (muga errealak edo muga zehatzak ere deitzen zaie). Aldagai horien kasuan, balio batetik bestera, infinitu balio daude, baina, tresna egokien faltagatik, aldagai kuantitatibo diskretu gisa funtzionatzen dute. Adibidez: pertsona baten pisua 60 kilo bada; berez, ez da zehazki 60 izango. Beraren balioa 59,5en eta 60,5en artean egongo da: 59,5 kilo baino gutxiago bada, 59 kilo jarriko da, eta 60,5 baino gehiago bada, 61 izango da.

Maila teorikoan jakin behar da, aldagai kuantitatibo baten edozein baliok bi muga teoriko dituela eta horiek honako formula honekin kalkulatzen direla: X ± 0,5*Neurri-unitatea

Aurreko adibideari jarraituz, 155en behe-muga erreala honela kalkulatzen da: 155-0,5*1 = 154,5 eta 160en goi-muga erreala, berriz, 160+0,5*1= 160,5. Kasu honetan esan behar da neurri-unitatea 1 dela, jatorrizko datuak zenbaki osoak direlako. Baina Xi: 12,5 14,9 15,8 … kasu honetan, 0,1 izango da neurri-unitatea, hamartar kopuruaren arabera.

8. taula. Tarteen mugak eta tarte-ordezkariak

X_i (Itxurazko mugak)	***Xi (Benetako mugak)***	***Tarte-ordezkariak***
155-160	154,5-160,5	157,5
161-166	160,5-166,5	163,5
167-172	166,5-172,5	169,5
173-178	172,5-178,5	175,5
179-184	178,5-184,5	181,5

Batzuetan, heina erabiltzen da datuen sakabanatzea aztertzeko. **Heina (edo ibiltartea)** = Xmax-Xmin. Aldagai jarraituetan muga errealak kontuan hartzen direnez,

184,5 - 154,5 = 30. **Tarte-zabalera** berriz kalkulatzen da goi-muga erreala – behe-muga erreala eginaz, 160,5-154,5 = 6.

Bukatzeko, datu taldekatuen estatistiko batzuk kalkulatu ahal izateko, tarte-ordezkariak (klase edo tarteko marka) atera behar dira.

$$Tarte-ordezkaria = \frac{Goi-muga + Behe-muga)}{2}$$

Kasu honetan, berdin da, itxurazko mugak edo benetakoak hartu.

6. Datu taldekatuen maiztasun-taulak eratzeko zenbait arau

a) Lehenengo datuak ordenatu goraka edo beheraka.

b) Maiztasun absolutuak lortu datuak zenbatu ondoren.

c) Heina edo ibiltartea kalkulatu.

d) Sturges-en formula erabiltzen da tarte kopurua kalkulatzeko.

- K = 1 + 3,322 (log. N)
- Edo datu gutxirekin $\sqrt{N}$

e) Tarte-zabalera kalkulatu datu taldekatuen maiztasun-taula bat egiteko. $\frac{Max - Min}{\sqrt{N}}$ Hamartarrak kontuan hartzen dira goraka biribiltzeko.

f) Datu multzoko balio txikiena lehenengo klasearen (tartea) behe-muga ageria izango da. Zenbaki horri tarte-zabalera gehituz, lehenengo tartearen goi-muga kalkulatzen da. Eta balio hori izango da bigarren klaseko behe-muga. Horrela jarraitzen da balio altuena barne egon arte, eta pixka bat gainetik. Tarte kopurua edo klase kopurua Sturges-en formula bidez lortutakoa izango da.

g) Datu horiek kontuan harturik, maiztasun-taula egiten da. Eta, gero, maiztasun absolutuak, erlatiboak eta metatuak kalkulatuko dira.

7. Ariketak

1. Herri bateko kale batean, 60 automobilen abiadurak neurtu dira radar bat erabiliz. Honako emaitza hauek lortu dira:

25 23 29 38 43 24 24 43 23 43 33 26

25 23 22 52 31 30 31 31 29 52 43 27

29 28 22 25 29 28 26 29 31 19 48 28

18 33 25 27 25 34 30 25 33 33 52 38

21 23 24 18 48 23 25 48 25 23 28 25

a) Sailkatu aurreko datuak maiztasun-banaketa baten bidez, honako klase-tarte hauek erabiliz:

[18,24); [24,30);... ; [48,54)

"[" zenbaki hori barne eta "(" zenbaki hori ez dago barne.

b) Kalkulatu tarte-zabalera, heina, muga errealak eta tarte-ordezkariak.

c) Maiztasun-taula osoa eratu.

2. Batxilergoko 2. mailako ikasleen pisua neurtzean, honako emaitza hauek lortu dira:

55; 56,5; 75; 63; 50; 61; 71; 53; 73,6; 64,8; 67,5; 51,2; 64,3; 73,2; 60,2

a) Aukeratu datu horiek ordenatzeko tarte-zabalera bat eta ordenatu itzazu maiztasun-taula batean.

b) Zenbat tarte sortu dira?

3. Euskal Herriko itzulian erloju kontrako proba batean parte hartu duten 100 txirrindulariek honako taula honetan adierazten diren denborak egin dituzte:

Denbora(min)	Txirrindulari kopurua
[30-32)	22
[32-34)	25
[34-36)	23
[36-38)	15
[38-40)	10
[40-42)	5

Datu horiek muga errealak kalkulatu.

8. Emaitzak

1. ariketa

a) eta c)

X_i	f_i	F_i	h_i	H_i	hi%	Hi%
[18-23)	6	6	0,10	0,10	10	10
[23-28)	22	28	0,37	0,47	37	47
[28-33)	15	43	0,25	0,72	25	72
[33-38)	5	47	0,08	0,80	8	80
[38-43)	2	49	0,03	0,83	3	93
[43-48)	4	53	0,07	0,90	7	90
[48-53)	6	60	0,10	1	10	100

b) Kalkulatu tarte-zabalera, heina, muga errealak eta tarte-ordezkariak.

X_i	Muga errealak	Tarte-ordezkaria
18-22	17,5-22,5	20
23-27	22,5-28,5	25
28-32	28,5-33,5	30
33-37	33,5-37,5	35
38-42	37,5-42,5	40
43-47	42,5-47,5	45
48-52	47,5-52,5	50

Tarte-zabalera= 5

Heina = 36

2. ariketa

a) $\sqrt{N} = \sqrt{15}$ =3,8 --- 4 tarte kopuru

$$\frac{X\ \max - X\ \min}{\sqrt{N}} = \frac{75-51,2}{\sqrt{15}} = 6,14$$ tarte-zabalera 7

X_i	f_i
[50-57)	5
[57-64)	3
[64-71)	3
[71-78)	4

b) Tarte kopurua = 4

c) Tartearen zabaltasuna = 7

3. ariketa

Itxurazko mugak denbora	**Muga errealak**
[30-32)	29,5-31,5
[32-34)	31,5-33,5
[34-36)	33,5-35,5
[36-38)	35,5-37,5
[38-40)	37,5-39,5
[40-42)	39,5-41,5

2.2 Adierazpide grafikoak

Aurkibidea

1. Helburu didaktikoak
2. Sarrera
3. Grafikoak egiteko arau orokorrak
4. Grafiko motak
    4.1 Histograma
    4.2 Maiztasun-poligonoa
    4.3 Barra-diagrama
        Barra sinplea
        Barra anizkoitza
        Barra konposatua
    4.4 Sektore-grafikoa
    4.5 Maiztasun metatuen grafikoa
    4.6 Grafiko lineala
5. Grafikoen alderdikeria
6. Ariketak
7. Emaitzak

1. Helburu didaktikoak

Grafiko motak bereiztea eta aplikazio-baldintzak eta oinarrizko arauak ezagutzea adierazpide grafiko egokiak egiteko.

Gehien erabiltzen diren adierazpide grafikoak egiten ikastea datu multzo batetik abiatuta, eta alderantziz ere bai, grafiko batetik abiatuta maiztasun-taula lortzea.

Grafikoak interpretatzen jakitea, ematen duten informazioa ulertu ahal izateko.

2. Sarrera

Gure gizartean, informazio asko grafikoen bidez aurkezten da. Ohikoa da datuen azterketa egitean datuak grafikoen bidez adieraztea, datu-banaketen ezaugarririk garrantzitsuenak berehala ikusten direlako. Populazio bateko datuak jaso ondoren, eta, datu-analisi konplexuak egin aurretik, informazioa modu sistematikoan eta laburrean aurkezteko modua da lehenengo urratsa. Aztertzen diren datuak aldagaitan antolatuta egoten dira, eta, aldagai horiek kuantitatiboak edo kualitatiboak izaten direnez, aldagai mota bakoitzarentzat, badaude adierazpide grafiko egokiak.

Hiru grafiko mota dira ezagunenak: histograma, barra-diagrama eta sektore grafikoa. Atal honetan, 6 adierazpide grafikoren ezaugarriak azalduko dira. Gaur egun, ordenagailuen bidez, oso erraza da adierazpide grafikoak egitea. Halere, grafiko bakoitzaren ezaugarriak ezagutzea ezinbestekoa da, interpretazio zuzenak egiteko. Gainera, batzuetan, errealitatea nahasten duten irudiak aurkezten dira, eta horiei grafiko engainagarriak deitzen zaie. Kasu horiek azaltzeko, atal honen bukaeran, badago puntu bat grafikoen alderdikeria izenburua duena.

Bukatzeko esan beharra dago irakurleek eskertzen dutela testu zientifikoetan adierazpide grafikoak ematea, baina grafikoen itxura da gutxiena, garrantzitsuena da sinplea eta argia izatea, eta informazioa begirada batez “irakurri” ahal izatea.

3. Grafikoak egiteko arau orokorrak

Grafiko gehienak egiterakoan, honako arau edo gomendio hauei jarraitu behar zaie:

1. Abzisa ardatzean (horizontalean), balio edo klaseak jartzen dira (ahal bada ordenaturik).
2. Ordenatu ardatzean (bertikalean), laginari dagozkion maiztasunak ipintzen dira. Gehienetan, maiztasun absolutuak.
3. Grafikoa ez da lerroz edo laukizuzenez beteta aurkeztu behar, fenomenoaren ideia orokorra adierazteko. Komeni da kategoria kopurua edo tarte kopurua 5etik 9ra bitartekoa izatea.

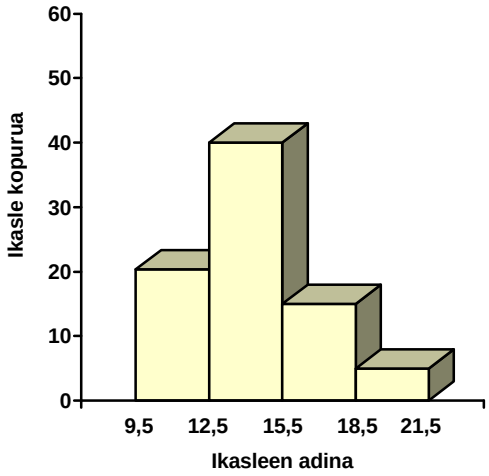
4. Baliorik txikiena handia bada, ardatza puskatuta marraztuko da. Ardatzarekiko eskala erlatiboak, non maiztasunak adierazten baitira, 0tik hasi behar du. Beharrezko izanez gero, ardatza eten egin behar da modu egokian.
5. Ardatzaren luzera gutxi gorabehera bata bestearen berdina edo bat eta erdi luzeagoa izan daiteke. Proportzionaltasun hori garrantzitsua da grafikoak konparatzeko.
6. Ardatz bakoitzean idatzi behar da zer adierazten duen eta neurri-unitatea, hala badagokio.
7. Grafiko batek 4 zati ditu: identifikazioa (grafikoaren zenbakia), grafikoaren izenburua, grafikoaren gorputza (etiketak barne) eta grafikoaren oinarria.

Grafikoak egitean, honako hauek dira akatsik arruntenak: izenbururik ez jartzea, grafiko kargatuegiak eta interpretatzeko zailak izatea, bi ardatzen artean desoreka handia egotea, ardatzetan edo neurri unitateetan errotulurik ez jartzea, aldagaien arabera grafiko desegokiak erabiltzea, eta irudiko hitzik (leyenda) ez erabiltzea.

4. Grafiko motak

4.1. Histograma

Grafiko mota hori aldagai kuantitatibo jarraituen maiztasun-banaketak aurkezteko erabiltzen da. Abzisa-ardatzean, behe-muga errealak jartzen dira, eta, bukaeran, hurrengo behe-muga errealari dagokion balioa jartzen da, baina berez existitzen ez dena. Grafiko horretan, barrak jarraian marrazten dira, aldagai jarraituak aurkezten direlako. Gehienetan, klase-tarteek tarte-zabalera bera izaten dute. Ondorengo grafikoa da horren adibide bat.



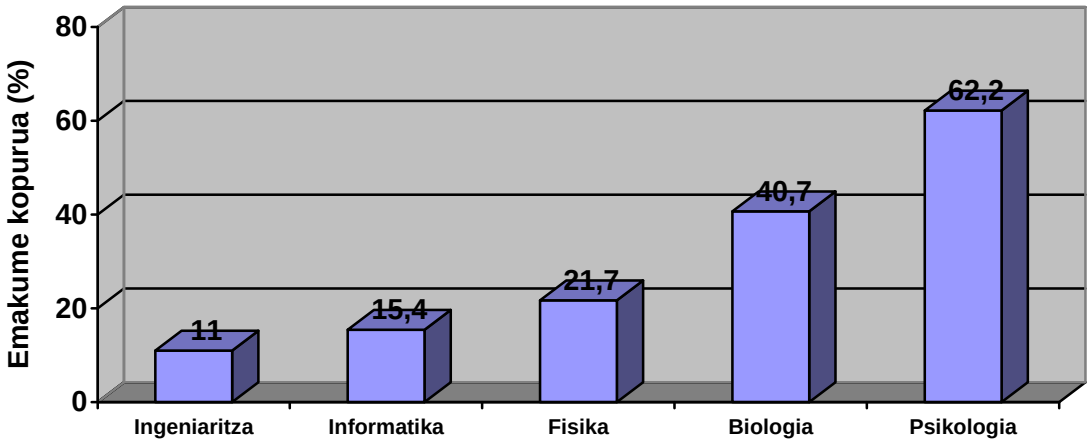
11.irudia. Ikasleen adina adierazten duen histograma

Kasu honetan, maiztasun absolutua erabili da, eta maiztasuna, barra bakoitzaren altuera gisa. Barra guztiek zabalera bera dute, eta erraza da ikustea ezinezkoa dela grafiko honetan beste banaketa bat adieraztea. Hau da, ezin dira bi talde konparatu edo bi aldagai irudikatu beste grafiko batzuetan bezala.

4.2 Barra-diagrama

4.2.1 Barra sinplea

Aldagai kualitatibo eta aldagai kuantitatibo diskretuen maiztasun-banaketak adierazten dira. Ordenatu ardatzean, maiztasun absolutuak edo erlatiboak (%) kokatzen dira eta abzisa ardatzean, aldagaiaren balioak edo kategoriak.

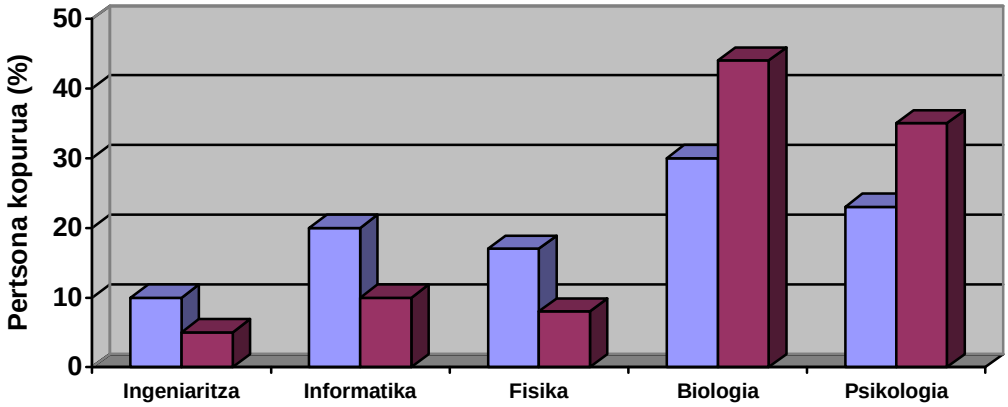


12. irudia. Estatu Batuetan doktoregoa egiten duten emakumeen ehunekoa ikasketen arabera (1994. urtea)

Klase edo kategoria bakoitza barra edo laukizuzen baten bidez adierazten da eta haren luzera maiztasunaren proportzionala da. Barren ordena oinarrizko maiztasun-taularena izango da. Ez dago irizpiderik kategorien ordenari buruz, baina barrak txikienetik handienera ordenatu daitezke edo alderantziz. Antolakuntza horrek interpretatzen laguntzen du.

4.2.2 Barra anizkoitzen diagrama

Grafiko hori aurrekoaren antzekoa da, baina, oraingo honetan, bi aldagai adierazten dira, lehen bezala, kualitatiboak edo kuantitatibo diskretuak. Egiteko modua ere oso antzekoa da; barra bikoitzak, hirukoitzak edo laukoitzak izan daitezke. Ondoren dago grafiko mota horren adibidea dugu. Horrelako kasuetan, hobe da maiztasun absolutuak baino erlatiboak erabiltzea.

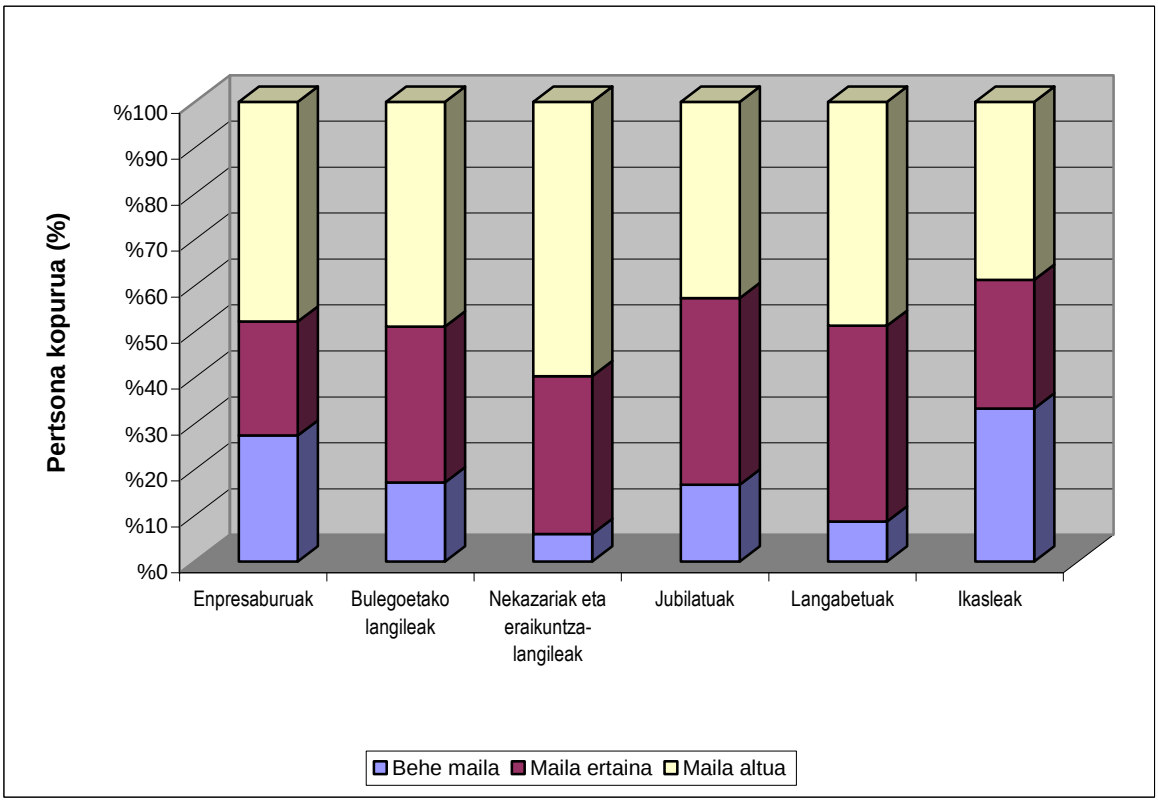


13.irudia. Doktoregoa egiten dutenen ehunekoa arloaren eta sexuaren arabera

Aurreko irudian, barra bikoitzak agertzen dira, sexua aldagaiak bi kategoria dituelako.

4.2.3 Barra konposatuak

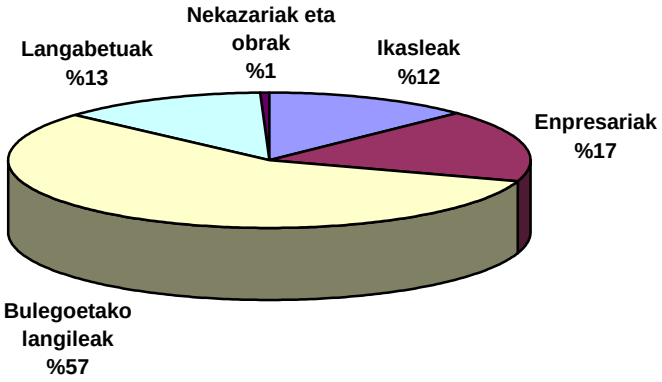
Barra konposatuek maiztasun erlatiboak (%) adierazten dituzte bi aldagairekin (kualitatiboak edo kuantitatibo diskretuak). Honela egiten dira: barra bakoitzean, subjektuen %100 agertzen da kategoria bakoitzean. Barra bakoitzak kolore desberdinak izaten ditu, eta beste aldagaiaren kategorien proportzioak.



14.irudia. Jarduera fisiko maila lan-taldeen arabera

4.5 Sektore grafikoa

Ondorengo grafikoari sektore grafikoa deitzen zaio, baina tarta-itxurakoa ere esaten zaio. Bereziki, oso baliagarria da grafikoki aldagai kualitatiboak adierazteko, eta ez da aldagai kuantitatiboekin erabiltzen. Grafikoaren atal bakoitzean, maiztasun erlatiboak jartzen dira. Zirkuluak 360º adierazten ditu eta laginaren %100. Orduan, sektore bakoitzaren tamaina kalkulatzeko, kategoria bakoitzeko maiztasunari zenbat gradu dagozkion kalkulatu behar da. Sektore bakoitzari kolore bat ezartzen zaio eta barra-diagrama baino politagoa gelditzen da normalean.

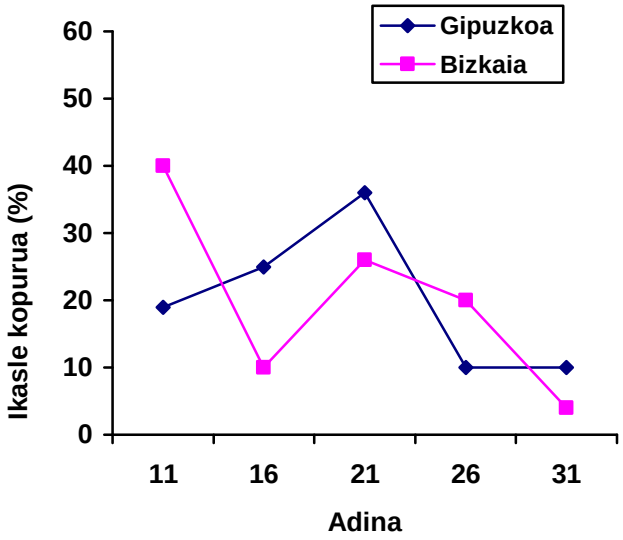


15. Irudia. Hizkuntza-eskola bateko ikasleen lanbidea

4.6 Maiztasun-poligonoa

Maiztasun-poligonoa, histograma bezala, aldagai kuantitatibo jarraituen maiztasun-banaketak adierazteko erabiltzen da. Grafiko hori egiteko ez da barrarik erabiltzen, zuzenen segmentuak baizik; horregatik, poligono izena hartzen du. Normalean, bi maiztasun-banaketa konparatzeko erabiltzen da edo bi aldagairen (bat kuantitatibo jarraitua eta bestea kualitatiboa edo kuantitatibo diskretua) adierazpide grafikoa marrazteko. Histogramaren antzera antolatzen da, baina, abzisa ardatzean, muga errealak kokatu beharrean, klase-markak (edo tarte-ordezkariak) jartzen dira. Klase-marka eta maiztasun erlatiboak gurutzatuz puntu batzuk lortzen dira, eta, bukaeran, puntu horiek lotu besterik ez da egin behar. Bi maiztasun-banaketa irudikatzen direnean, komeni da ordenatu ardatzean maiztasun erlatiboak erabiltzea.

Ondoren, maiztasun-poligono baten adibidea azaltzen da:

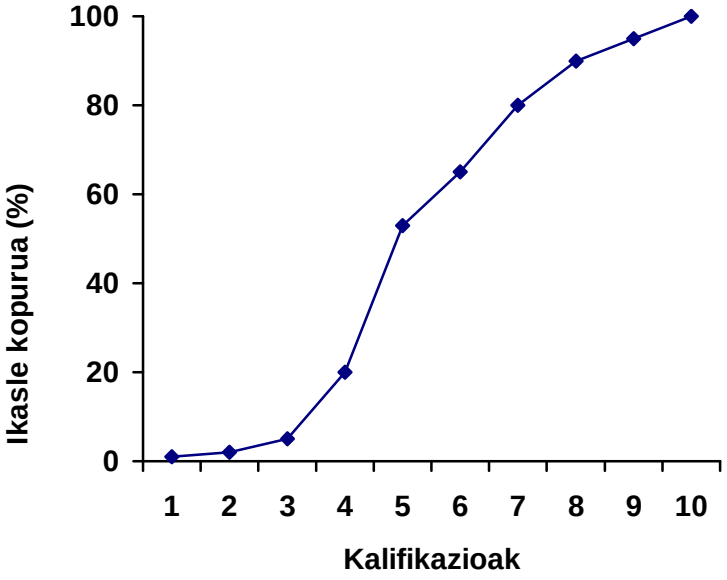


16.irudia. Ikasleen adina jatorriaren arabera

Azkenik, esan beharra dago maiztasun-poligonoak baliagarriak izan daitezkeela barra-diagramekin batera aldagai kuantitatibo diskretuak irudikatzeko.

4.7 Maiztasun metatuen grafikoa

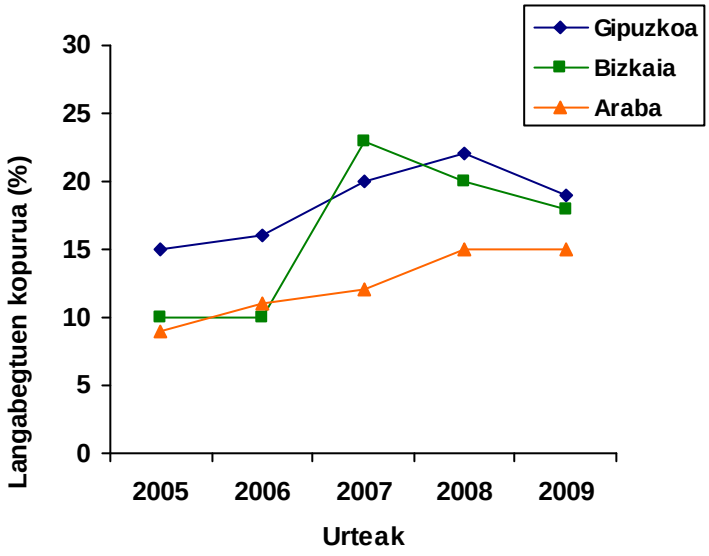
Maiztasun metatuen grafikoaren helburua, izenak esaten duen bezala, maiztasun metatuen banaketak adieraztea da. Adierazpide grafikoak gorakorrak izaten dira, klase bakoitzean aurreko datuen maiztasuna metatzen delako. Sektore grafikoa izan ezik, beste grafiko motak guztiak (barra-diagrama, histograma eta maiztasun-poligonoa) egin daitezke maiztasun metatuekin.



17.irudia. Ikasleen kalifikazioen maiztasun metatuak poligonoa erabiliz

4.8 Grafiko lineala

Grafiko lineala, grafikoen artean, errazenetarikoa da egiteko. Denbora serieen grafikoak irudikatzeko erabiltzen da. Kasu batzuetan, bi aldagairen zentralizazio-neurriak aztertzen dira. Abzisa-ardatzean (horizontalean), denbora-unitatea adierazi ohi da: urteak, hilabeteak, egunak eta abar; eta beste ardatzean, berriz, maiztasunak edo datuen adierazleak. Grafiko mota horretan, garrantzitsua da bereziki ardatzen proportzionaltasuna kontuan hartzea, adierazten den gertaeraren gaizki ulerturik izan ez dadin. Ondorengo adierazpide grafikoak hiru probintzien langabeziaren bilakaera erakusten du.



18. irudia. Langabetuen tasak 2005etik 2009ra probintzien arabera

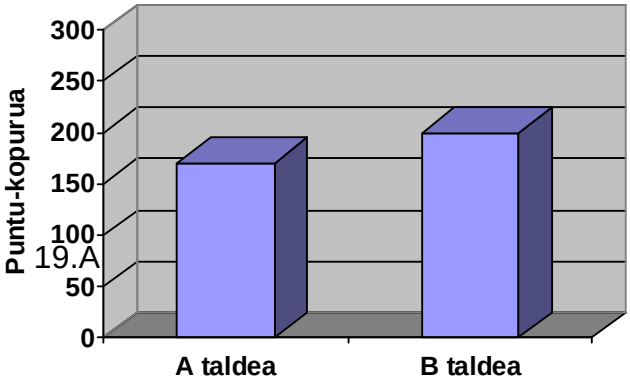
Grafiko horretan, datu serie bat baino gehiago aurkez daitezke eskala bera erabiltzen bada, eta balioak oso desberdinak ez badira.

5. Grafikoen alderdikeria

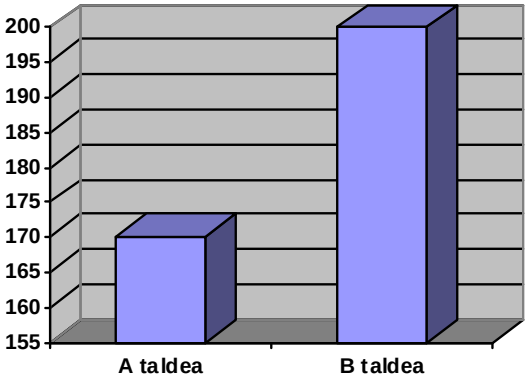
Grafiko bat interpretatzerakoan, ikuspuntu kritikoa izan behar da, batzuk engainagarriak izaten baitira; horretarako, adi begiratu behar zaie eskalei, baita datuak lortzeko erabili den laginaren tamainari ere.

Eskalari dagokionez, ordenatu ardatzeko eskala txikitzean, datuen arteko aldeak handitu egiten dira eta grafiko engainagarria bihur daiteke. Ondoren, adibide bat aurkezten da taula honetako datuekin.

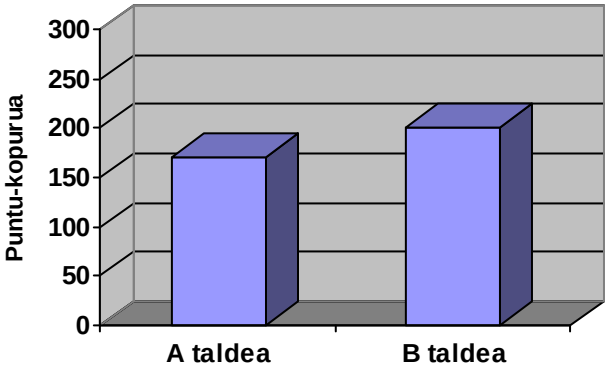
Taldea	Puntu kopurua
A	170
B	200

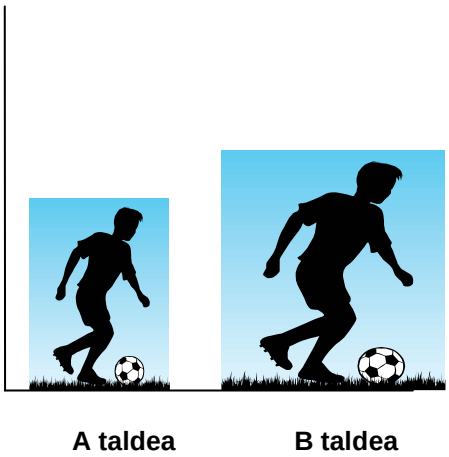


19.A



Grafiko engainagarrien beste kasu bat, grafikoetan laukizuzenen ordez irudiak (piktogramak) erabiltzen direnean gertatzen da; piktogramaren zabalera konstantea ez bada, irudikapen engainagarria lortzen da.





20.A irudia. Egokia

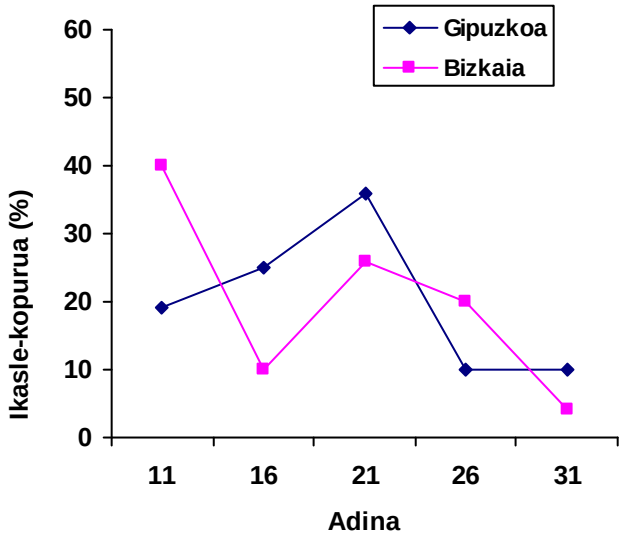
20.B irudia. Engainagarria

Eskuineko grafikoan (20.A irudia) ematen du bi taldeen arteko aldeak handiagoak direla ezkerrekoan (20.B irudia) baino. Horrelako kasuetan, hobe da piktogramarik ez erabiltzea, edo, bestela, irudiaren zabalera konstantea mantentzea.

Azkenik, beste edozein datu-analisitan bezala, komeni da laginaren tamaina ezagutzea konklusioak ateratzeko; aztertu diren elementuen kopurua oso txikia bada, ezin da konklusio fidagarririk atera.

6. Ariketak

1. Egin grafiko estatistiko honi dagokion maiztasun-taula.

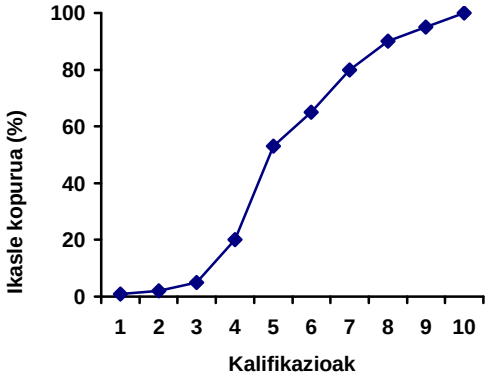


2. Hona hemen ikastetxe bateko 20 ikasleren puntuazioak autoestimuan: 13, 15, 14, 16, 13, 14, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 17, 17, 17, 17, 17, 16, 16, 16. Marraztu maiztasun erlatiboen irudikapen grafikorik egokiena.

3. Irudikatu maiztasun absolutuen eta maiztasun metatuen histograma, honako taula honetako datuak erabiliz.

X_i	f_i
0-4	2
5-9	3
10-14	10
15-19	4
20-24	1
	n=20

4. Behealdean, maiztasun metatuen grafiko bat dago. Egin, horretan oinarrituta, maiztasun-taula.



5. Irudikatu datu multzo hauen grafikoa. Honako hau da aldagaia: gazte batzuek azken urtean irakurritako liburu kopurua.

Neskak: 7 2 4 5 4 2 1 5 6 2 2 Mutilak: 5 8 6 1 5 3 5 2 3 7

6. Bizkaiko Campuseko ikasleen kirol-lehentasunak aztertzeko ikerketa bat burutu da. Hainbat fakultate eta ikasturtetako 100 ikasle zoriz hautatu ondoren, taulan agertzen diren emaitzak lortu dira:

X_i	f_i
Futbola	35
Saskibaloia	20
Eskubaloia	20
Igeriketa	15
Beste batzuk	10

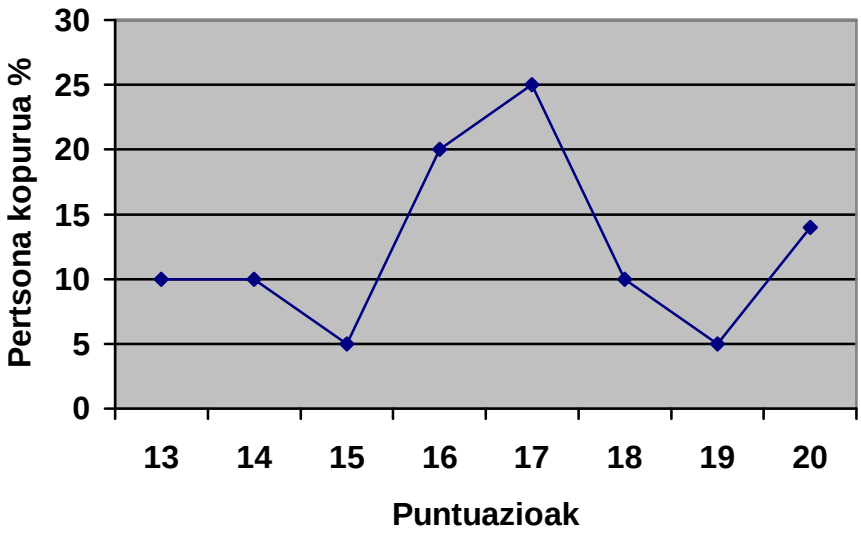
Grafiko baten bidez, taulako datuak adierazi.

Emaitzak

1. ariketa

X_i	Gipuzkoa	Bizkaia
11	19	40
16	25	10
21	36	26
26	10	20
31	10	4

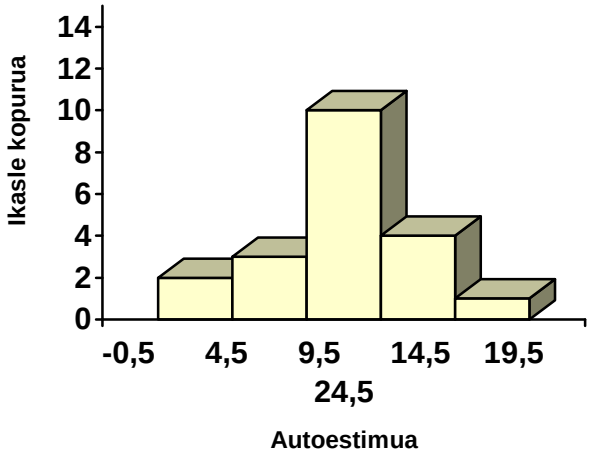
2. ariketa



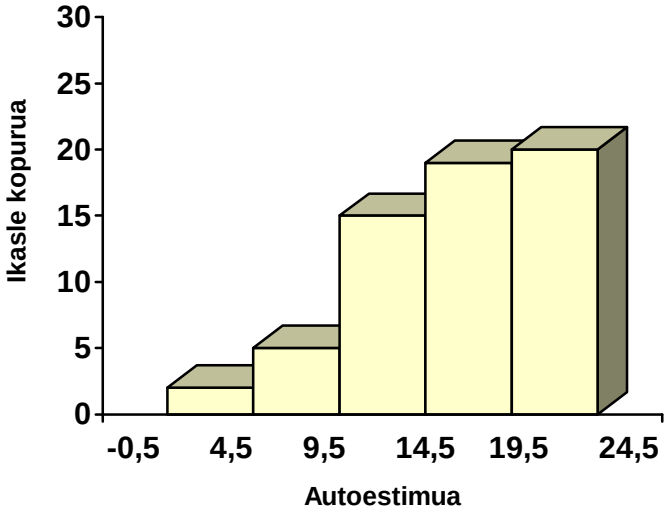
3. ariketa

X_i	f_i	Fi
0-4	2	2
5-9	3	5
10-14	10	15
15-19	4	19
20-24	1	20
	n=20	

Maiztasun absolutuekin



Maiztasun metatuak

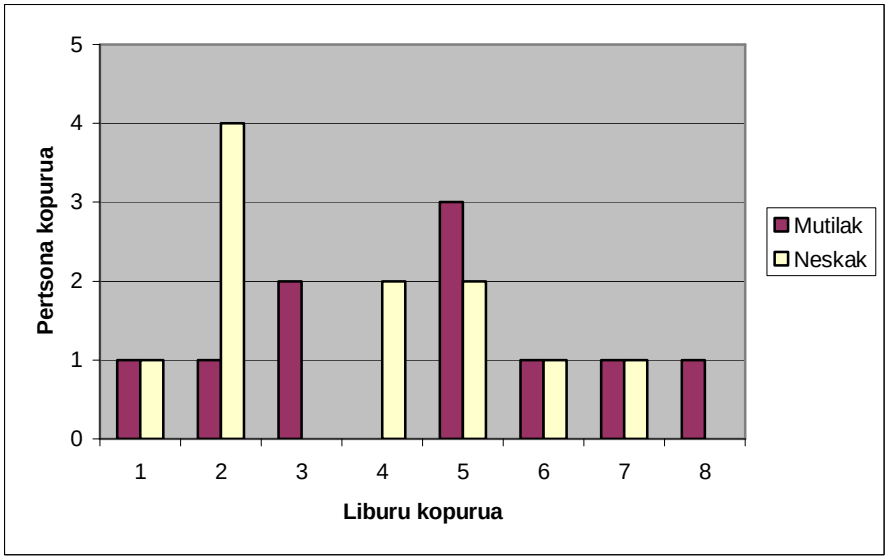


4. ariketa

X_i	F_i
1	1
2	2
3	5
4	20
5	53
6	65
7	80
8	90
9	95
10	100

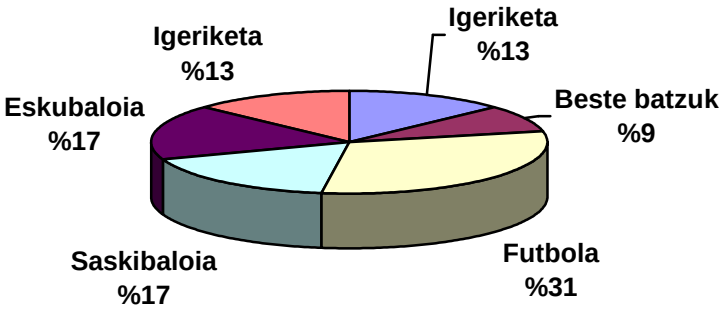
5. ariketa

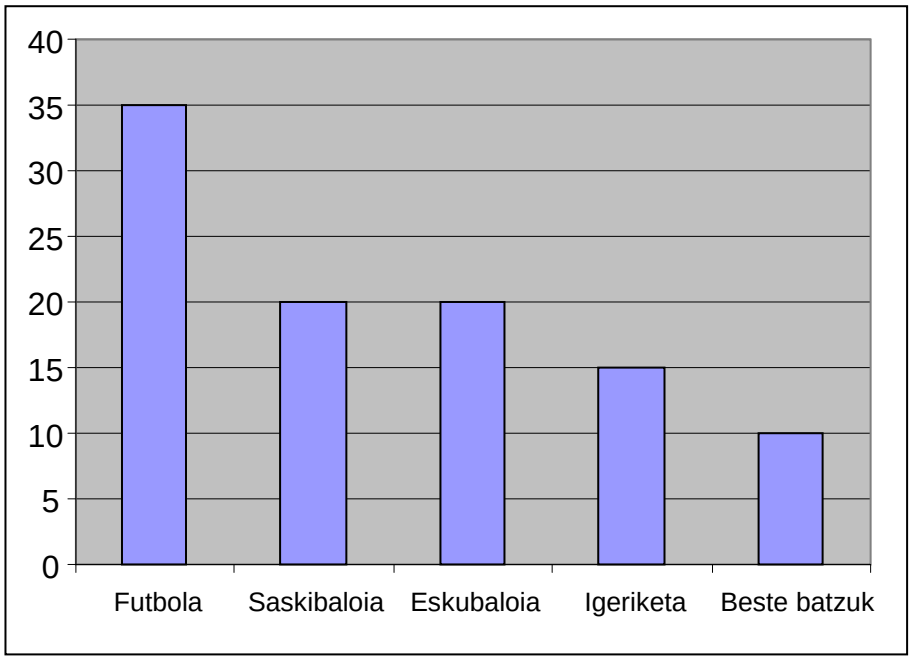
X_i	Mutilak	Neskak
1	1	1
2	1	4
3	2	0
4	0	2
5	3	2
6	1	1
7	1	1
8	1	0



6. ariketa

Kirol-lehentasuna aldagaia kualitatiboa denez, sektore-grafikoa eta barra-diagrama dira egokienak.




40
35
30
25
20
15
10
5
0
Futbola
Saskibaloia
Eskubaloia
Igeriketa
Beste batzuk

2.3 Zentralizazio- eta banakako posizio-neurriak

Aurkibidea

1. Helburu didaktikoak
2. Sarrera
3. Zentralizazio-neurriak
    3.1. Batez besteko aritmetikoa
        3.1.1. Batez besteko aritmetikoaren ezaugarriak
        3.1.2. Batez besteko haztatua
        3.1.3. Batez besteko koadratikoa
        3.1.4. Batez besteko harmonikoa
        3.1.5. Batez besteko geometrikoa
    3.2. Mediana
    3.3. Moda
4. Banakako posizio-neurriak
    4.1. Pertzentilak
    4.2. Kalkulu-prozesua
5. Ariketak
6. Emaitzak

1. Helburu didaktikoak

Zentralizazio- eta posizio-neurrien esanahia ezagutzea, indize estatistiko bakoitzaren kalkulu-prozesua egiten jakitea eta indize horiek interpretatzea.

Zentralizazio- eta posizio-neurriak erabiltzea, konparazioak eta balioespenak egitea.

Kontzeptu horiekin erlazionaturiko problemak ebaztea.

2. Sarrera

Behatutako datu multzoa, askotan, zenbaki bakar batez deskribatzen da. Horretarako, ez da erabiliko balio altuena edo txikiena ordezkari gisa; mugako

balioak baino, balio tipikoak hartuko dira. Egokiena erdiko balio bat aurkitzea litzake.

Datuen ezaugarrien artean, zentralizazio-neurriek sortzen dute interes handiena. Balio bakarrak izan behar dute eta datu multzoaren adierazgarriak. Indize horiek aldagaiaren balioen laburpena adierazten dute eta balio multzoak konparatzeko ere baliagarriak izaten dira. Hau da, laginak konparatzeko beren zentralizazio-neurriak konparatzen dira. Adibidez, nesken taldeko matematikako etekin akademikoa (n=200) mutilen taldekoarekin (n=205) konparatzea. Konparazio hori egitea oso zaila izango da, datu guztiak kontuan hartzen baditugu. Orduan, zera egiten da, lehenengo taldearen batez bestekoa (edo beste zentralizazio-neurri bat) kalkulatu eta, gero, konparatu. Laginaren balio-tartearen erdigunearen inguruan kokatuko dira indize horiek; horregatik, “zentralizazio-neurriak” izena hartzen dute.

Batez besteko aritmetikoa, batez besteko haztatua, mediana eta moda dira zentralizazio-indize erabilienak. Beste estatistiko batzuk ere erabiltzen dira zentralizazio-neurri gisa, batez besteko harmonikoa, geometrikoa eta koadratikoa.

Kontuan izan behar da, batez bestekoa taldearen ezaugarri bat dela, eta ez pertsonarena. Baina, atal honetan, badaude beste indize batzuk pertsonarenak direnak, banakako posizio-indizeak (koantilak). Banakako posizio-indizeek pertsona batek aldagai batekiko duen posizioa adierazten dute taldearekin konparatuz. Koantilak dira edozein banaketa zati berdinetan (4, 10 edo 100) zatitzen duten balioak.

Gai hau ikasten hasi aurretik, komeni da irakurlea batukaria erabiltzen ohituta egotea.

3. Zentralizazio-neurriak

3.1 Batez besteko aritmetikoa

Batez besteko aritmetikoak banaketako datu guztiak erabiltzen ditu, eta komeni da datuak homogeneok izatea. Zentralizazio-neurrien artean, egonkorrena da, populazio berean egindako laginketa desberdinen artean (Hays, 1994). Gainera, batez bestekoa oinarria da edo froga parametriko

guztiekin erlazionatuta dago. Baina indize horrek badu arazo bat: ez dela erresistentea puntuazio atipikoen kasuan, balio arraro batek guztiz alda dezakeelako emaitza. Horregatik ez da erabili behar balio arraroak daudenean edo banaketa oso asimetrikoa denean.

Ez da ahaztu behar aldagaiak berez kuantitatiboa izan behar duela batez besteko aritmetikoa kalkulatzeko, datu multzo baten baliorik txikienaren eta handienaren artean dagoen zenbaki bat dela, eta litekeena dela datuetako batekin ere bat ez egitea eta zenbaki hamartarra izatea.

Ondoren aurkeztuko da datuen aurkezpenen arabera batez besteko aritmetikoa kalkulatzeko prozesua:

a) **Datu isolatuekin** *n* balioen batura datu kopuruaz zatituta. Honako balio hauek baldin baditugu: $x_1, x_2, \ldots x_n$, batez bestekoa da:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\sum X_i}{n} \qquad (2.1)$$

Adibidea: Azterketa batean, honako nota hauek atera dituzte zenbait ikaslek: 5, 6, 4, 7, 8, 3. Zein da ikasle horien batez besteko nota?

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + Xn}{n} = \frac{5+6+4+7+8+3}{6} = 5{,}5$$

Batez bestekoa = 5,5

b) Maiztasun-taula. Aldagaiaren balioak eta maiztasun absolutuak taula batean antolatuta baldin badaude, errazagoa da batez besteko aritmetikoa honako formula hau erabiliz kalkulatzea:

$$\overline{X} = \frac{X_1 . f_1 + X_2 . f_2 + \ldots + X_n . f_n}{n} = \frac{\sum X_i . f_i}{n} \qquad (2.2)$$

Hiri batean, honako tenperatura maximo hauek izan dira abuztuko azken hamabost egunetan: 40º, 39º, 39º, 38º, 37º, 30º, 28º, 28º, 30º, 30º, 35º, 34º, 40º, 40º, 35º. Zein da hamabost egun horietako tenperatuaren batez bestekoa?

Balioak X_i	Maiztasun absolutua f_i	$X_i.f_i$
28	2	56
30	3	90
34	1	34
35	2	70
37	1	37
38	1	38
39	2	78
40	3	120
	n =15	$\sum . f_i = 523$

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i . f_i}{n} = \frac{523}{15} = 34{,}87^{o}$$

c) **Datu taldekatuekin**. Aldagai kuantitatibo jarraituekin ari bagara, edo diskretuen balio kopurua handia bada, behatutako datuak tarteetan antolatzen dira. Kasu horietan, beharrezkoa da batez bestekoa eta ia indize estatistiko gehienak lortzeko tarte-ordezkariak kalkulatzea.

Adibidea: 50 galderako test batean, 200 ikaslek zuzen erantzundako galderak beheko taulan aurkezten dira.

Galdera kopurua X_i	X_i (tarte-ordezkaria)	Maiztasun absolutua f_i	$X_i.f_i$
0-9	4,5	10	45
10-19	14,5	80	1160
20-29	24,5	90	2205
30-39	34,5	10	345
40-49	44,5	10	445
		n=200	$\sum . f_i = 4200$

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i \cdot f_i}{n} = \frac{4200}{200} = 21 \text{ erantzun zuzen}$$

3.1.1. Batez besteko aritmetikoaren ezaugarriak

Komenigarria izaten da bestez besteko aritmetikoaren propietateak ezagutzea, kalkulu batzuk laburtzeko edo demostrazioak garatzeko.

a) Lagin baten elementu guztien batez bestekoarekiko desbideratzeen baturak zero balio du. $\sum (X_i - \overline{X}) n_i = 0$. Desbideratze batzuk positiboak izango dira eta beste batzuk, negatiboak, X-aren balio batzuk $\overline{X}$ baino zenbaki altuagoak izango direlako eta beste batzuk, berriz, baxuagoak. Zenbakizko adibide bat aurkezten da propietate hori egiaztatzeko:

X_i	f_i	$(Xi - \overline{X})$	$(Xi - \overline{X}) f_i$
28	2	-6,87	-13,74
30	3	-4,87	-14,61
34	1	-0,87	-0,87
35	2	0,13	0,26
37	1	2,13	2,13
38	1	3,13	3,13
39	2	4,13	8,26
40	3	5,13	15,39
	n =15		0

b) Demagun datu multzo bat azpimultzotan banatuta dagoela, bakoitza bere maiztasun eta batez besteko aritmetikoarekin. Orduan, zenbaki guztien batez besteko aritmetikoa lortzeko, azpimultzo horien batez besteko aritmetikoen batez besteko haztatua kalkulatzen da.

$$\overline{X} = \frac{\sum \overline{X}_i . n_i}{\sum n_i} \qquad (2.3)$$

Zenbakizko adibide bat aurkezten da propietate hori egiaztatzeko:

	Multzoa		
Azpimultzoak	1 (01 taldea)	2 (02 taldea)	3 (31 taldea)
Maiztasunak	$n_1 = 80$	$n_2 = 90$	$n_3 = 110$
Batez bestekoak	$\overline{X}_1 = 6,5$	$\overline{X}_2 = 5,5$	$\overline{X}_3 = 6,7$

$$\overline{X}_o = \frac{\overline{X}_1.n_1 + \overline{X}_2.n_2 + \overline{X}_3.n_3}{n_1 + n_2 + n_3} = \frac{6,5.80 + 5,5.90 + 6,7.110}{80 + 90 + 110} = 6,26$$

c) Konstante bat datu multzo bati gehitzen bazaio, aldagai berri horren batez besteko aritmetikoa konstante hori gehituta gelduko da: $\overline{Y} = \overline{X} + k$. Hirugarren propietatea egiaztatzeko adibide bat:

Honako datu hauek emanda, kalkulatu ***y*** aldagaiaren batez bestekoa.

X: 1, 5, 6, 3 $\overline{X} = 3,75$

Y = X + 5

Propietatea aplikatuz $\overline{Y} = \overline{X} + 5 = 8,75$

Datu guztiak erabiliz $\overline{Y} = \frac{6 + 10 + 11 + 8}{4} = 8,75$

d) Aldagai bat konstante batez biderkatzen denean, batez bestekoa ere konstante horretaz biderkatuta geratzen da.

X: 1, 5, 6, 3 $\overline{X} = 3,75$

Y = X . 5 $\overline{Y}$?

Propietatea aplikaturik $\overline{Y} = \overline{X}.5 = 3,75.5 = 18,75$

Datu guztiak erabilita $\overline{Y} = \frac{5 + 25 + 30 + 15}{4} = 18,75$

e) Beste aldagai batzuen konbinazio lineal moduan definitutako aldagai baten batez bestekoa jatorrizko aldagai horien batez bestekoen konbinazio lineal bera izango du.

$Y_i = a.Xi + b.Z_i \longrightarrow \overline{Y} = a.\overline{X} + b.\overline{Z}$

$Y_i = 3.Xi + 2.Z_i \longrightarrow \overline{Y} = 3.\overline{X} + 2.\overline{Z}$

$X_1 = 8$ $X_2 = 4$ $X_3 = 12$ $X_4 = 4$ $\overline{X} = \frac{8+4+12+4}{4} = 7$

$Z_1 = 3$ $Z_2 = 9$ $Z_3 = 5$ $Z_4 = 3$ $\overline{Z} = \frac{3+9+5+3}{4} = 5$

Ezaugarria aplikatuz**:** $\overline{Y} = 3.\overline{X} + 2.\overline{Z} = 3.7 + 2.5 = 31$

3.1.2 Batez besteko haztatua

Batzuetan, aldagaiaren balio guztiek ez dute pisu (edo garrantzia) bera izaten. Pisua (w_i) igoaz joango da, balioaren garrantziaren arabera. Informazio horrek ez du maiztasunarekin zerikusirik.

Batez besteko haztatua kalkulatzeko, balio bakoitzaren haztapenak hartuko dira kontuan.

Honela adierazten da: $$\overline{X}w = \frac{\sum x_i w_i n_i}{\sum w_i n_i} \qquad (2.4)$$

w_i: X_i aldagaiaren haztapena izanda eta $\sum w_i$, haztapen guztien batura.

Adibidea: Ikasle batek hiru azterketa egin ditu eta zailtasuna gero eta handiagoa da; honako emaitza hauek atera ditu: 5, 8 eta 7.

Lehenengo azterketa ordu erdian egin zuen; bigarrena, ordubetean, eta hirugarrena, ordu eta erdian. Horregatik, haztapen hauek esleitzen dira: 1, 2 eta 3, hurrenez hurren. Batez bestekoa kalkulatzea eskatzen da.

X_i	**n_i**	**W_i**	**$X_i W_i$**
5	1	1	5
8	1	2	16
6	1	3	21
	3	N = 6	42

Batez besteko aritmetikoa kalkulatzean, ondorengo emaitza lortzen da:

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{5+8+7}{3} = 6{,}67$$

Baina, batez besteko haztatua kalkulatzean, emaitza aldatu egiten da:

$$\overline{X}_w = \frac{(5.1)+(8.2)+(7.3)}{(1+2+3)} = \frac{5+16+21}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

Kasu honetan, azterketa egiteko behar den denbora hartzen da kontuan.

3.1.3. Batez besteko koadratikoa

Batez besteko horrek zientzia biologikoetan eta medikuntzan du aplikazioa. Batzuetan, aldagaiak balio positiboak eta negatiboak hartzen ditu, adibidez, neurketa-erroretan. Kasu horietan, interesa egon daiteke batez besteko bat lortzeko, baina zeinuaren eraginik izan gabe. Batez besteko koadratikoaren bidez konpontzen da arazo hori. Horren ondoren, behaketa bakoitzean ber bi eginez (zeinua desagertzen da), batez besteko aritmetikoa lortzen da, eta, azkenik, erroketa koadratua eginez, jatorrizko neurketa unitatera bueltatzen da.

Batez besteko koadratikoa honela kalkulatzen den batez bestekoa da, datuak $x_1, x_2, ..., x_n$ izanik:

$$\overline{X}_k = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} \qquad (2.5)$$

Adibidea: Honako datu hauek emanda, kalkulatu batez besteko koadratikoa:
-1 -1,5 -2 -2,1 1 2 1,5 2

X_i	X_i^2
-1	1
-1,5	2,25
-2	4
2,1	4,41
1	1
2	4
1,5	2,25
2	4
n = 8	22,91

$$\overline{X}_k = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{22{,}91}{8}} = 1{,}69$$

3.1.4. Batez besteko harmonikoa

Batez besteko harmonikoa abiaduraren, denboraren eta errendimenduaren batez bestekoak kalkulatzeko erabili ohi da, eta honela kalkulatzen da, datuak X_1, X_2, …, X_n izanik:

$$\overline{X}_h = \frac{n}{\sum_i \frac{1}{X_i}} \qquad (2.6)$$

<u>Lehenengo adibidea</u>: X_i-ren datuak emanda, batez besteko harmonikoa kalkulatu.

X_i	$\frac{1}{X_i}$
1	1
2	0,5
4	0,25
8	0,125
n = 4	1,875

$$\overline{X}_h = \frac{n}{\sum_i \frac{1}{X_i}} = \frac{4}{1{,}875} = 2{,}13\widehat{3}$$

<u>Bigarren adibidea</u>: Mezulari batek 100 kilometro egin ditu autopista batean 120 km/h-ko abiadurarekin eta, ondoren, 10 kilometro 30km/h-ko abiadurarekin. Abiaduraren batez bestekoa kalkulatu.

$$\overline{X}_h = \frac{n}{\sum_i \frac{1}{X_i}} = \frac{2}{\frac{1}{120} + \frac{1}{30}} = 48$$

3.1.5. Batez besteko geometrikoa

Batez besteko geometrikoa erabiltzen da batez besteko interes-tasa, ehunekoen batez bestekoa eta hazkunde tasak kalkulatzeko. Batez besteko geometrikoa honela kalkulatzen da, datuak X_1, X_2, …, X_n izanik, honako formula hau aplikatuz: $\overline{X}_g = \sqrt[n]{x_1.x_2.x_3....x_n}$ (2.7)

Adibidea: Hiru bono moten interes-tasak dira: % 5, % 4 eta % 8. Kalkulatu batez besteko geometrikoa.

$\overline{X}_g = \sqrt[3]{5.4.8} = 5{,}43$

Hau da hiru batez bestekoen arteko harremana: $\overline{X}_h \leq \overline{X}_g \leq \overline{X}_k$ (2.8)

3.2 Mediana

Joera zentraleko neurri gisa, mediana erabiltzen da, aldagai kuantitatiboa izanik batez besteko aritmetikoa erabili ezin denean: banaketa asimetrikoa delako, balio arraroak agertzen direlako edo muga itxi gabeak dituelako hasierako edo bukaerako tarteetan.

Banaketaren balioak txikitik handira ordenatuta, medianaren balioa erdiko posizioan dagoen puntuazioa da. Balio kopurua bikoitia bada, erdiko bi balioen erdigunea izango da (bien batez besteko aritmetikoa). *Me* ikurraz adierazten da mediana.

<u>Lehenengo adibidea</u>: Ikasle batek nota hauek atera ditu 9 azterketatan: 4, 6, 7, 4, 8, 7, 3, 5, 9.

Lehenengo datuak ordenatu behar dira: 3, 4, 4, 5, $\boxed{6}$,7, 7, 8, 9.

Ordenatu ondoren, kalkulatu (N +1)/2 = (9+1)/2 =5. Bosgarren balioa da mediana, kasu honetan $\boxed{\text{Mediana = 6}}$.

<u>Bigarren adibidea</u>: Ikasle batek honako emaitza hauek ditu 10 azterketatan: 3, 4, 4, 5, 6,7, 7, 8, 9,10.

(N+1)/2= (10+1)/2=5,5 Bosgarren eta seigarren balioen artean dago mediana

3, 4, 4, 5, $\boxed{6,7}$, 7, 8, 9,10

(6+7)/2=6,5 Mediana =6,5

Hirugarren adibidea: Datuak maiztasun-taulan ordenatuta daudenean nola kalkulatu mediana.

Balioak X_i	**Maiztasun absolutua f_i**	**Maiztasun absolutu metatuak**
28	2	2
30	3	5
34	1	6
35	**2**	**8**
37	1	9
38	1	10
39	2	12
40	3	15
	n =15	

Zortzigarren balioa izango da mediana; maiztasun absolutu metatuen zutabean begiratu eta horri dagokion balioa 35 da, beraz, Mediana = 35.

Aldagaiak eskala ordinal batean neurtuta egon beharko du gutxienez.

Datuak taldekatuta baldin badaude, *medianadun tartea* definituko da, eta tarte horren barruan egongo da mediana. Beraz, taldearen erdia duen maiztasun metatuari dagokion tarteari deituko zaio medianadun tartea. Kasu horretan, mediana kalkulatzeko formula bat erabiltzen da:

$$Me = L_{i-1} + \frac{(\frac{N}{2} - F_{i-1})}{n_i} b \qquad (2.9)$$

L_{i-1} = Mediana duen klasearen behe-muga erreala

b = Mediana duen klasearen tarte-zabalera

F_i= Mediana duen klasearen goi-muga errealari dagokion maiztasun metatua

F_{i-1}= Mediana duen klasearen behe-muga errealari dagokion maiztasun metatua

Laugarren adibidea:

Galdera kopurua X_i	Maiztasun absolutua f_i	Maiztasun absolutu metatuak F_i
0-9	10	10
10-19	80	90
20-29	**90**	**180**
30-39	10	190
40-49	10	200
	n=200	

Lehenengo (N+1)/2 = (200+1)/2=100,5

$$Me = L_{i-1} + \frac{(\frac{N}{2} - F_{i-1})}{n_i} b = 19{,}5 + \frac{(\frac{200}{2} - 90)}{90} 10 = 20{,}6$$

3.3 Moda

Maiztasun-banaketa jakin batean gehien errepikatzen den balioari (kategoria edo modalitatea) *moda* deitzen zaio, hau da, maiztasun absoluturik handienari dagokion balioari, eta *Mo* ikurraz adierazten da.

Lehenengo adibidea (aldagai kualitatiboa): Zortzi lagunek gustuko dituzten koloreak honako hauek dira: gorria, beltza, beltza, urdina, zuria, berdea, morea, laranja. Moda =beltza

Bigarren adibidea (aldagai kuantitatiboa): Zortzi lagunen adinak hauek dira: 18, 17, 19, 20, 15, 18, 17, 18. Moda =18

Moda aldagai kualitatiboekin erabiltzen da joera zentraleko neurria kalkulatzeko, baina kuantitatiboekin ere erabili daiteke osagarri gisa. Datu taldekatuak izanez gero, honako hau da modaren formula:

$$Mo = L_{i-1} + b \frac{(F_{i-1} - F_{i-2})}{(F_{i-1} - F_{i-2}) + (F_{i+2} - F_{i+1})} \qquad (2.10)$$

L_{i-1} = Moda duen klasearen behe-muga erreala

b = Moda duen klasearen tarte-zabalera

F_i= Moda duen klasearen goi-muga errealari dagokion maiztasun metatua

F_{i-1}= Moda duen klasearen behe-muga errealari dagokion maiztasun metatua

Hirugarren adibidea. Kalkula itzazu datu taldekatu hauen moda.

Galdera kopurua X_i	**Maiztasun absolutua f_i**	**Maiztasun absolutu metatuak F_i**
0-9	10	10
10-19	80	90
20-29	**90**	**180**
30-39	10	190
40-49	10	200
	n=200	

Moda duen klasea (20-29) da; lerro horretan oinarritu behar da formula aplikatzeko orduan. Gainera, formularen bitartez lortzen den emaitzak bi balioen artean egon behar du, hobeto esanda muga errealetan 19,5 eta 29,5en artean.

$$Mo = L_{i-1} + b\frac{(F_{i-1} - F_{i-2})}{(F_{i-1} - F_{i-2}) + (F_{i+2} - F_{i+1})} = 19,5 + 10\frac{90-10}{(90-10)+(200-190)} = 28,39$$

Batzuetan, puntuazio-taldean gehien errepikatzen den balioa bakarra ez denean (adibidez, bi), *bimodala* deitzen zaio eta, maiztasun absolutu bera dutenak asko direnean, berriz, *multimodala*.

4. Banakako posizio-neurriak (Koantilak)

Banakako posizioko neurriek edo koantilek pertsona baten posizioa definitzen dute talde batekin konparatuz. Aldagai kuantitatiboetarako (ordinalak ere barne) dira baliagarriak koantilak, eta neurri horren azpitik datuen ehuneko jakin bat uzten duten balioak dira. Adibidez: pertsona batek % 80k baino puntuazio hobea lortu duela jakitea beraren puntuazio zehatza ezagutzea baino interesgarriagoa izan daiteke.

Indize horiek banaketak dituen zatien kopuruaren arabera sailkatzen dira: kuartilak (4 zati), dezilak (10 zati) eta pertzentilak (100 zati). Medianak datu multzoa bitan zatitzen eta % 50eko azalera uzten du alde bakoitzean, nahiz eta banaketa simetrikoa ez izan.

Kuartilek banaketa lau ataletan zatitzen dutenez, banaketa bakoitzak hiru kuartil ditu (Q_1, Q_2 eta Q_3). Lehen kuartila Q_1 taldearen kopuru-laurdena duen maiztasun metatuari dagokion balioa da. Q_2, berriz, taldearen erdiari dagokion balioa da, eta Q_3 taldearen % 75ari dagokiona.

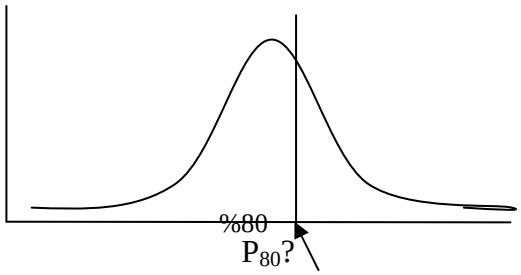
Dezilek hamar zatitan banatzen dute datu multzoa, eta banaketa bakoitzak bederatzi dezil ditu (D_1, D_3, ….. D_9).

4.1. Pertzentilek banaketa ehun ataletan zatitzen dute eta gehien erabiltzen diren indizeak dira. Atal bakoitzean, banaketaren balioen % 1 dago. Pertzentilak adierazteko, *P* letra erabiltzen da, eta, guztira, 99 pertzentil daude (P_1, P_2,……, P_{99}). Hala, P_{10} hamargarren pertzentilaren gainetik, datuen %90 kokatzen da.

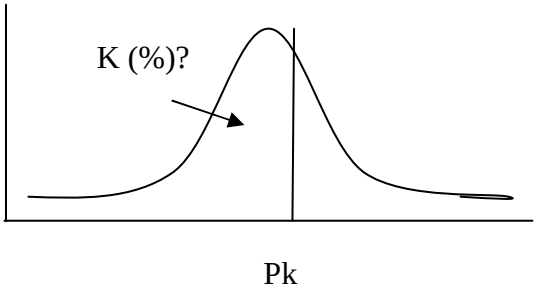
4.2. Kalkulu-prozesua

Bi buruketa mota daude, normalean, koantilen inguruan:

a) Ehuneko batek (k) aldamenean uzten duen balioa (Pk) kalkulatzea eskatzen denenean.



b) Puntuazio jakin bat (Pk) baino baxuagoak lortzen dituztenen ehunekoa (K) kalkulatzea helburua denean.



Kalkulu-prozesua ez da bera datu isolatuekin eginda edo datu taldekatuekin, nahiz eta antzeko logikari jarraitu.

4.2.1 Datu isolatuak

Lehenengo helburua lortu nahi bada, honako kalkulu-prozesu honi jarraitzen zaio.

Lehenengo adibidea: Kalkula itzazu P_{20} balioa, aldagai baten puntuazioak honako hauek izanik: 9,10, 5, 6, 3, 7.

a) Datuak txikienetik handienera ordenatzea da lehenengo lana.

Xi: 3, 5, 6, 7, 9, 10

b) Gero, $\frac{N.K}{100}$ kalkulatu. Hau da, N-ren % 20. (6x20)/100 = 1,2

c) Datu multzoaren lehenengo balioa 3 denez, P_{20}=3.

Bigarren helburua lortu nahi bada, berriz, honelako kalkulu-prozesuari jarraitzen zaio.

Bigarren adibidea: Aurreko adibideko datuetan oinarrituz, zein da X_i = 5-i dagokion pertzentila?

a) Zenbat balio daude 5 edo txikiagoak direnak? 2.

b) 2k zer ehuneko adierazten du 6tik: (2/6)x100= 33,33

c) Emaitza K = 33, edo P_{33}

4.2.2 Datu taldekatuak

Datu taldekatuekin pertzentilak kalkulatzeko, badago formula bat; Mediana kalkulatzeko erabiltzen denaren oso antzekoa denez, parametroen esanahia ez da berriro errepikatuko atal honetan. Bestalde, pertzentilen formula bakarrik garatuko da; dezilak edo kuartilak lortu nahi izanez gero, lehenengo, pertzentiletara pasatzen da, eta, gero, formula hauetakoren bat aplikatu, helburuen arabera.

a) Puntuazio konkretu bat kalkulatu nahi denean, formula hau erabiltzen da:

$$P_k = L_{i-1} + \frac{(\frac{N.k}{100} - F_{i-1})}{n_i} b \qquad (2.11)$$

Formula hori aplikatu ahal izateko, lehenengo kalkulatu behar da pertzentila zein tartetan kokatzen den. Horretarako, maiztasun metatuen zutabea kalkulatu ondoren, $\frac{N.K}{100}$ lortzen da, eta balio hori aurkitu behar da maiztasun metatuen zutabean edo zenbaki hori non dagoen sartuta. Maiztasun metatu horri dagokion klase-tarteari “pertzentila duen klasea” deitzen zaio.

b) Ehunekoa edo *k* kalkulatu nahi denean, aurreko formulan oinarritutako beste formula bat erabiltzen da, eragiketa aritmetikoak sinpleagoak direlako:

$$K = \frac{(Pk - L_{i-1})(\frac{n_i}{b}) + Fi - 1}{N} 100 \qquad (2.12)$$

Kasu honetan, pertzentila duen klasea zein den jakiteko, *Pk* puntuazioa hartu eta *Xi*-aren zutabean zein tartetan dagoen sartuta egiaztatu behar da, eta horixe izango pertzentila duen klasea.

Lehenengo adibidea: Lantegi batean, langileak hautatzeko prozesuan, honako irizpide hau onartu zen: hautagaia lanposturako egokitzat jotzen da, antsietate-testean emaitza 30 edo txikiagoa denean. Testa 200 pertsonari egin ondoren , honako emaitza hauek lortu ziren:

X_i	f_i	F_i
0-9	10	10
10-19	80	90
20-29	90	180
30-39	10	190
40-49	10	200
	n=200	

Zein da pertzentilaren maila? Zenbat subjektuk lortu dute irizpidea betetzea?

$$K = \frac{(Pk - Li)(\frac{n_i}{b}) + Fi_{-1}}{N_i}100 = \frac{(30 - 29{,}5)(\frac{10}{10}) + 180}{200}.100 = 90{,}25$$

Pertzentilaren maila 90 da, eta 200en % 90 180 izanik, 180 pertsonek bete dute irizpidea.

Bigarren adibidea: Aurreko datuetan oinarrituta, kalkula ezazu P_{20}.

$$\frac{N.K}{100} = \frac{200.20}{100} = 40$$

$$P_{20} = L_{i-1} + \frac{(\frac{N.K}{100} - F_{i-1})}{n_i}b = 9{,}5 + \frac{(\frac{200.20}{100} - 10)}{80}10 = 13{,}25$$

5. Ariketak

1. Ikastetxe bateko 200 ikasleren batez bestekoa 50 baldin bada, eta ikasle bakoitzaren puntuazioari 10 puntu gehitu badizkiogu, zein izango da puntuazio berrien batez bestekoa?

2.- Talde bateko 10 ikaslek proba batean lortu dituzten emaitzak hauek izan dira: 30, 40, 50, 50, 60, 70, 70, 80, 90, 100. Kalkula itzazu batez besteko aritmetikoa, geometrikoa, harmonikoa, koadratikoa, mediana eta moda.

3. Kalkula itzazu taula honetan agertzen den aldagaiaren batez besteko aritmetikoa, geometrikoa, harmonikoa, koadratikoa, mediana eta moda.

X_i	f_i
0-4	2
5-9	3
10-14	10
15-19	4
20-24	1
	n=20

4. Aurreko maiztasun-taulan oinarrituta, esan zein den puntuazio altuenen % 30en puntuaziorik txikiena.

X_i	f_i
0-4	2
5-9	3
10-14	10
15-19	4
20-24	1
	n=20

5. Aurreko maiztasun-taulan oinarrituta, pertsona baten puntuazioa 16 bada, esan zein den pertsona horri dagokion pertzentila.

6. Emaitzak

1. ariketa

Emaitza = 60

2. ariketa

Batez bestekoa = 64; B. geometrikoa = 60,29; B. harmonikoa = 56,43; B. koadratiko = 67,38; Mediana = 65; Moda = 50 eta 70 (bimodala).

3. ariketa

X_i	Xi	f_i	F_i
0-4	2	2	2
5-9	7	3	5
10-14	12	10	15
15-19	17	4	19
20-24	22	1	20
		n=20	

Batez bestekoa = 11,75; B. geometrikoa = 10,22; B. harmonikoa = 7,88; B. koadratikoa = 12,72; Mediana = 12; Moda = 13,25

$$\frac{(N+1)}{2} = \frac{(20+1)}{2} = 10{,}5$$

$$Me = L_{i-1} + \frac{(\frac{N}{2} - F_{i-1})}{n_i} b = 9{,}5 + \frac{(\frac{20}{2} - 5)}{10} 5 = 12$$

$$Mo = L_{i-1} + b\frac{(F_{i-1} - F_{i-2})}{(F_{i-1} - F_{i-2}) + (F_{i+2} - F_{i+1})} = 9{,}5 + 5\frac{5-2}{(5-2)+(20-19)} = 13{,}25$$

4. ariketa

	X_i	f_i	F_i
	0-4	2	2
	5-9	3	5
P_{70} →	**10-14**	**10**	**15**
Pk =16 →	**15-19**	**4**	**19**
	20-24	1	20
		N=20	

$$\frac{(N.K)}{100} = \frac{(20.70)}{100} = 14$$

$$P_{70} = L_{i-1} + \frac{(\frac{N.k}{100} - F_{i-1})}{n_i} b = 9{,}5 + \frac{(\frac{20.70}{100} - 5}{10} 5 = 14$$

5. ariketa

$$K = \frac{(Pk - L_{i-1})(\frac{n_i}{b}) + Fi_{-1}}{N} 100 = \frac{(16 - 14{,}5)(\frac{4}{5}) + 15}{20} .100 = 81$$

III. PROBABILITATEA

3.1. Zenbatzeko teknikak edo konbinatoria

Aurkibidea

1. Helburu didaktikoak
2. Sarrera
3. Biderketaren metodoa
4. Zuhaitz-diagramaren metodoa
5. Konbinazio-zenbakiak
6. Aldakuntzak
    6.1. Aldakuntza arruntak
    6.2. Errepikatuzko aldakuntzak
7. Permutazioak
    7.1. Permutazio arruntak
    7.2. Errepikatuzko permutazioak
8. Konbinazioak
    8.1. Konbinazio arruntak
    8.2. Errepikatuzko konbinazioak
9. Ariketak
10. Emaitzak

1. Helburu didaktikoak

Zenbatzeko tekniken ezaugarriak eta horiek nola erabiltzen diren ezagutzea.

Konbinatoriako teknikak aplikatzen jakitea, zuhaitz-diagrama eta formula zehatzez baliatuz.

Elementuak taldekatzeko moduak bereiztea: aldakuntzak, permutazioak eta konbinazioak.

Konbinazio-zenbakiekin eta zenbaki baten faktorialarekin lan egiten ikastea.

2. Sarrera

Zenbatzeko teknikak estrategiak dira, esperimentu bat egitean zenbat aukera dauden zehazteko erabiltzen direnak. Fenomeno aleatorio asko konbinatoriari dagozkio, multzo finitu bateko elementuak konbinatuz (aukeratuz edo elkartuz) sortzen baitira. Zenbatzeko teknikek (konbinatoriak) aldez aurretik ezarritako arau batzuen arabera ordenatzeko edo multzokatzeko moduak jorratzen dituzte. Beraz, oso tresna garrantzitsuak dira probabilitate-kalkulurako, horiei esker posible diren kasuak (edo emaitza posible guztiak) eta aldeko kasuak (aurretik definituriko aldeko emaitzak) zenbatu baitaitezke, eta, horren ondorioz, gertaera edo emaitza guztiak gertatzeko probabilitate bera duten egoeretan, probabilitateak kalkula daitezke. Konbinatoriak berezko printzipioak eta formulak ditu.

Multzo bateko elementuak azpimultzotan banatzea da teknika horien ezaugarria. Sortutako azpimultzo guztietan elementuak behin bakarrik agertzen direnean, azpimultzoak arruntak edo errepikapenik gabekoak direla esaten da; azpimultzo bakoitzean elementu bat behin baino gehiagotan ager badaiteke, ordea, errepikatuzko azpimultzoak esaten zaie, aldakuntzak, permutazioak edo konbinazioak badira ere. Gainera, zenbatzeko tekniken artean, biderketaren metodoa eta zuhaitz-diagramaren metodoa sartzen dira.

3. Biderketaren metodoa

Biderketaren metodoa zenbatzeko metodo analitiko bat da, esperimentu konposatua esperimentu sinpleagotan deskonposatu eta horietako bakoitzaren aukera kopurua biderkatzen duena.

Adibideak:

1) Dadoa 4 aldiz jaurtiz, lau zifrako zenbat zenbaki lor daitezke?

Dadoaren esperimentua lau aldiz errepikatzen da, eta, esperimentu bakoitzean, 6 aukera (edo emaitza) posible daude.

Hau da, $6.6.6.6 = 6^4 = 1296$. Beraz, lau zifrako 1.296 zenbaki lor daitezke.

2) Zenbat modutan antola daitezke BOLA hitzaren lau letrak?

$4.4.4.4 = 4^4 = 256$

3) Anak bi praka pare ditu armairuan, bata urdina eta bestea marroia, eta 4 jertse: urdina, berdea, zuria eta laranja. Janzteko, praka pare bat eta jertse bat aukeratu baditu, zenbat modutan aukeratu ditzake?

2.4 =8

4) Nire etxetik lanera joateko, 2 bide daude, eta 5 bide lanetik nire bikotekidearen etxera joateko. Zenbat bide daude nire etxetik nire bikotekidearen etxeraino, lanetik pasatuta?

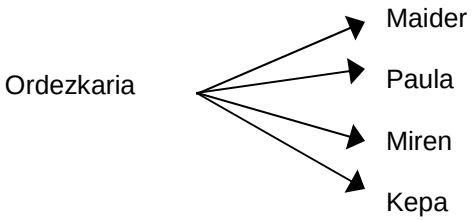
2.5 = 10

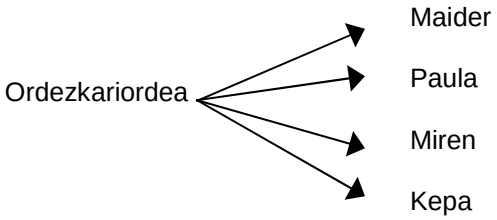
4. Zuhaitz-diagrama metodoa

Zuhaitz-diagrama zenbatzeko metodo grafiko bat da: esperimentu sinple bakoitzean agertzen diren aukera guztiak adierazi behar dira, zuhaitz baten adarrak balira bezala. Aukera kopurua azken adar kopuruak adierazten du.

Adibidea:

Ikasgelako ordezkaria eta ordezkariordea aukeratzeko, 4 ikasle aurkeztu dira: Maider, Paula, Miren eta Kepa. Irudikatu, zuhaitz-diagrama baten bidez, hauteskunde-prozesuan egon daitezkeen konbinazio guztiak.





Hona hemen konbinazio guztiak (O: ordezkaria; OO: ordezkariordea)

1. O Maider eta OO Maider
2. O Maider eta OO Paula
3. O Maider eta OO Miren
4. O Maider eta OO Kepa
5. O Paula eta OO Maider
6. O Paula eta OO Paula
7. O Paula eta OO Miren
8. O Paula eta OO Kepa
9. O Miren eta OO Maider
10. O Miren eta OO Paula
11. O Miren eta OO Miren
12. O Miren eta OO Kepa
13. O Kepa eta OO Maider
14. O Kepa eta OO Paula
15. O Kepa eta OO Miren
16. O Kepa eta OO Kepa

5. Konbinazio-zenbakiak

n-ren faktoriala, *n!*, *n*-ren eta zenbaki arrunt txikiago guztien arteko biderkadura da.

n! = n. (n-1). (n-2). …. 3.2.1

(3.1)

Adibidea: 4!=4.3.2.1. =24

m eta *n* zenbaki arruntak emanda, *m* ≥ *n* izanik, "*n* gain *m*" konbinazio-zenbakia $\binom{m}{n}$ idazten da, eta honela definitzen:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}. \qquad (3.2)$$

Adibidea: a) $\binom{6}{2}$ b) $\binom{5}{1}$

a) $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6.5.\cancel{4.3.2.1}}{2.\cancel{4.3.2.1}} = 15$

b) $\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!4!} = \frac{5.\cancel{4.3.2.1}}{1.\cancel{4.3.2.1}} = 5$

6. Aldakuntzak

Demagun *m* elementuz osatutako multzo handi bat dugula. Aldakuntzak *m* elementu horietatik *n* elementuko multzoak dira. Hau da, kolore desberdinetako 20 pilota baditugu, pilota horiek launaka hartuz osa ditzakegun multzoak aldakuntzak dira. Aldakuntzen barnean, bi mota ditugu: errepikatuzkoak eta errepikapenik gabekoak.

6.1. Aldakuntza arruntak

Azpimultzoak elementu desberdinez osatuko dira, eta elementuen ordena hartuko da kontuan. Kasu honetan, *m* elementu ditugu: $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$. Kopuru zehatz bateko multzoak egin nahi ditugu, baina elementu bakoitzak taldeko leku bakar bat bete dezake; hau da, elementuak ezin dira errepikatu. Argi dago, beraz, kasu honetan *n* < *m* egiaztatu beharra dagoela. Adibidez, *1, 2* eta *3 m* elementuak badira, binaka hartuta, zenbat zenbaki desberdin sor daitezkeen izango da aldakuntzen adibide bat: (1,2) (2,1) (3,1) (1,3) (3,2) (2,3). Kasu honetan elementu gutxi direnez (sei, hain zuzen), ez da beharrezkoa aldakuntzen formula erabiltzea. Lor ditzakegun talde ezberdinak *m* elementu *n*-ka hartutako aldakuntzak dira, $A_{m,n}$ idazkera zientifikoan.

Mota honetako zenbat aldakuntza lor daitezkeen kalkulatzeko, berriz, formula sinple hau erabiltzen da: $A_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$ Aurreko adibidearen emaitza bera du:

$$A_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

Errepikapenik gabeko aldakuntzen adibide bat lasterketa bat izan daiteke. 10 lasterkarik parte hartuko dute lasterketan, eta lehen hirurak igarri beharko ditugu (lehenengoa, bigarrena eta hirugarrena). Zenbat apustu egin behar genuke zalantzarik gabe hirukote irabazlea igartzeko? Kasu horretan, $A_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Kontuan izan nola egiten diren adierazpen hauek:

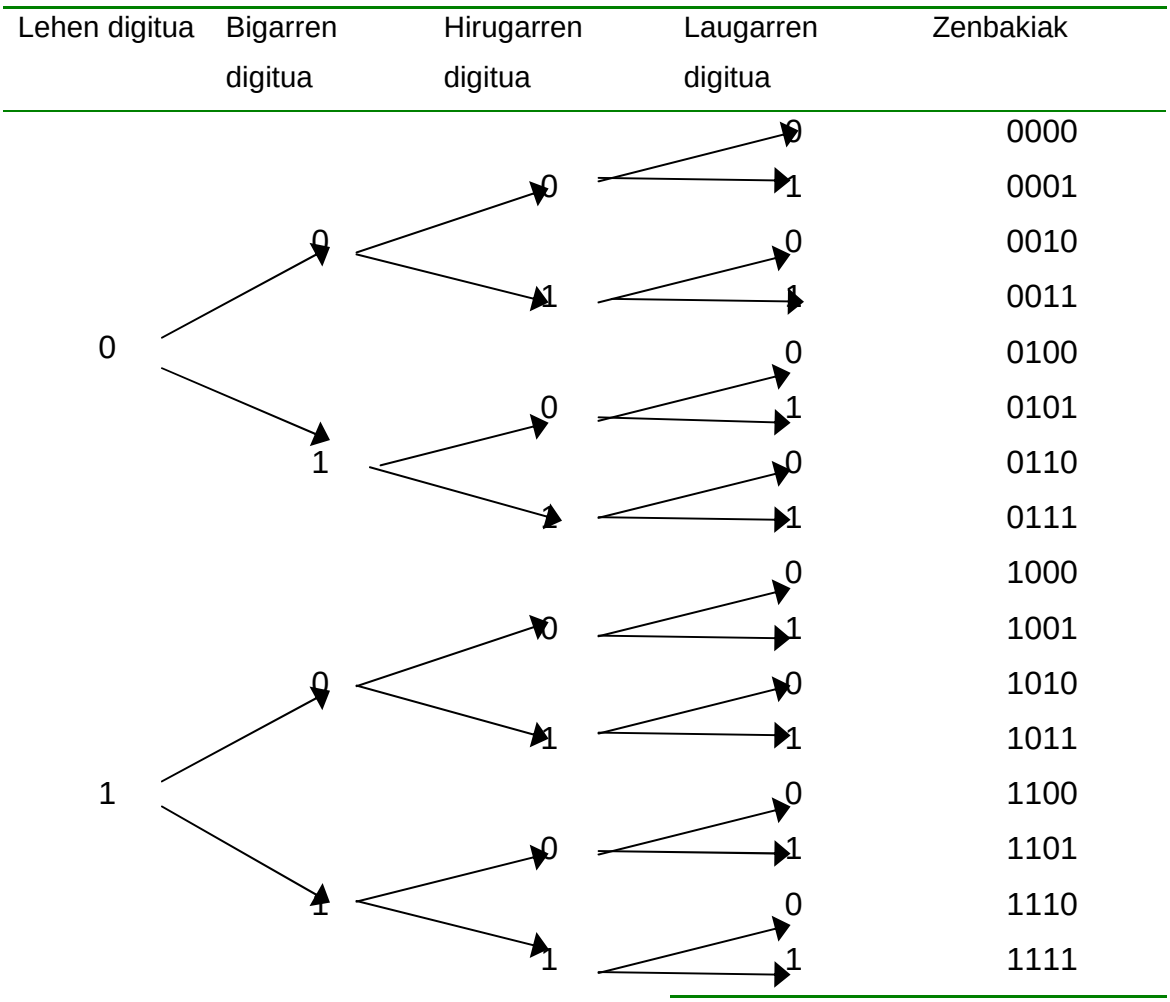
$$A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10.9.8.\cancel{7.6.5.4.3.2.1.}}{\cancel{7.6.5.4.3.2.1}} = 10.9.8 = 720$$

Zenbakitzailean eta izendatzailean 7tik aurrera berdinak direnez, honela laburtu dezakegu adierazpena: 10x9x8. Komenigarria da ezaugarri hori kontuan izatea, faktorialeko zenbakia oso altua denean, kalkulagailuak errorea ematen duelako.

6.2. Errepikatuzko aldakuntzak

Kasu honetan, *m* elementurekin, kopuru zehatz bateko multzoak egin nahi ditugu, baina elementuak errepika ditzakegu. Adibidez, {A, B, C} multzoan, errepikatuzko aldakuntza hauek onar litezke: AAA, AAB, BAA, AAC, ABB eta abar. Zenbat aldakuntza egon daitekeen kalkulatzeko, formula hau aplikatzen dugu: $AR_{m,n} = m^n$, non *m* elementu kopurua eta *n* multzoen elementu kopurua baitira.

Adibidez, lau digituko zenbat zifra osa daitezke 0 eta 1 zenbakiekin? Arazo hori formula beraren bidez ere ebatz daiteke; hau da, $AR_{2,4} = 2^4 = 16$. Hala, 16 zenbaki ezberdin sor daitezke, baina grafikoki nola ebatziko litzakeen ere azalduko dugu zuhaitz-diagrama erabiliz:



Errepikatuzko aldakuntzaren beste adibide bat futbol-kinielak dira. Horietan, hiru elementu ditugu, *1, X* eta *2*, eta horiek modu zehatz batean kokatu behar ditugu, irabazi ahal izateko. Argi dagoenez, partida gehiago ditugu ikur baino; hau da, elementuak errepikatu behar ditugu, posible baita bost partidatan etxeko taldeak irabaztea, eta, beraz, bost partidatan *1* ikurra ipini behar izatea. 14 partidako zenbat kiniela desberdin egin ditzakegu, beraz? Edo, beste era batera esanda, 14 partidako kiniela bat ezbairik gabe igartzeko, zenbat kiniela bete behar genituzke? Horrelako arazoetarako, grafikoki soluzioa bilatzen saiatzea baino errazagoa da formula egokia aplikatzea. Hala, $AR_{3,14} = 3^{14} = 4.782.969$

7. Permutazioak

Permutazioak zenbait elementu multzokatzean sortzen zaizkigun

hurrenkera ezberdinak dira, betiere kontuan hartuta elementu guztiak hartu behar ditugula eta hurrenkerak garrantzia duela. Hau da, 1, 2 eta 3 digituekin sor ditzakegun hurrenkera ezberdinetan, adibidez, (1 2 3), (1 3 2) eta (2 1 3) zenbaki multzo ezberdinak dira, multzo bakoitzak elementu berak izan arren. Hemen ere, permutazio arruntak eta errepikatuzkoak bereizten ditugu.

7.1. Permutazio arruntak

Mota honetako permutazioek adierazten digute *n* elementurekin *n* elementuko zenbat multzo desberdin egin daitezkeen. Elementuen ordena da azpimultzo bakoitzaren bereizgarri bakarra, haietan guztietan multzoko elementu guztiak baitaude. Zenbaki horri *n* faktorial deritzo, eta honela idazten da: *n!*. Beraz, *H, A* eta *U* letrekin, horiek errepikatu gabe, osa daitezkeen multzo ezberdin guztiak kalkulatzeko, permutazio arrunten formula erabili behar genuke: $P_3 = 3!$; hau da, 3x2x1= 6. Beste hainbat adibide eman daiteke, esaterako zenbat aukera ditugun bost lagun zerrendatzeko edo zazpi liburu apal batean ipintzeko zenbat modu dauden: $P_5 = 5!$ eta $P_7 = 7!$, hurrenez hurren.

7.2. Errepikatuzko permutazioak

Oraingoan, taldeak sortzerakoan, elementuen ordena hartzen da kontuan, eta elementu horiek errepikatzeko aukera dute. Kasu honetan, elementu errepikatuak izaten dira tartean, eta elementuen ordena ere hartzen da kontuan. Formula orokorra: PRn = n^n, *n* elementu kopurua izanik.

Adibidez, lau elementu (*1, 2, a, b*) launaka hartuta eratzen diren errepikatuzko permutazioak. $PR_4=4^4=256$.

Aurreko kasuan, elementu bakoitza errepika daiteke 1, 2, 3 edo 4 aldiz, eta kasu guztien emaitza ematen digu. Baina badaude beste kasu batzuk, elementu bakoitza zenbat aldiz errepika daitekeen zehazten digutenak; adibidez, *A*, *T, E* eta *A* letrekin osa daitezkeen multzo ezberdinak kalkulatzean. Kasu horretan, bi *A* genituzke, eta, guk letra horiekin sor daitezkeen multzo *ezberdinak* kalkulatu nahi ditugunez, hori kontuan izan behar dugu. Horren arabera, lehenengo elementua α_1 aldiz errepikatuko da; bigarrena, α_2 aldiz; hirugarrena, α_3 aldiz…, eta

enegarren, elementua α_n aldiz.

Mota horretako permutazioak kalkulatzeko, beharrezkoa izango dugu elementu errepikatuak zenbat diren eta zenbat aldiz errepikatzen diren jakitea, formula aplikatu ahal izateko: $PR_{m(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)} = \frac{m!}{\alpha_1!\alpha_2!...\alpha_n!}$, *m* elementu kopurua izanik.

Hasieran aipatutako adibidea ebatzi nahi izango bagenu, beraz, honako hau egin behar genuke: $PR_{4(2,1,1)} = \frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!} = 12$; hau da, 12 modu posible daude *A, T, E* eta *A* letrekin multzoak osatzeko.

Beste adibide bat emango dugu. Demagun lau baloi, hiru pilota eta bost panpina banatu nahi ditugula 12 haurren artean. Zenbat banaketa ezberdin egin ditzakegu? Kontuan izan elementu errepikatuak ditugula eta haur bati baloi bat edo bestea egokitzea gauza bera dela, eta guk banaketa *ezberdinak* kalkulatu nahi ditugula. $PR_{12(4.3.5)} = \frac{12!}{4!\cdot 3!\cdot 5!} = 27720$

8. Konbinazioak

Oraingoan, taldeak sailkatzeko elementuen ordena ez da kontuan hartzen. Hori dela-eta, zenbatzeko beste teknikekin konparatzean, oro har, emaitza txikiagoak lortuko ditugu. Hiru zenbakirekin 2 elementuko konbinazioak eginez gero, 3 emaitza ezberdin lortuko ditugu: (1,2) edo (2,1), (1,3) edo (3,1) eta (2,3) edo (3,2).

8.1. Konbinazio arruntak

Demagun *m* elementu ditugula. Kasu horretan, *n* elementu aukeratu nahi dira (non m>n), eta ez zaigu axola elementu bakoitzak multzoan zein leku duen, elementua multzoan dagoen ala ez baizik. Ordenak garrantzirik ez luke izango, beraz. Sor litezkeen konbinazio ezberdinen kopurua honela kalkulatuko genuke: $K_{m,n} = \frac{A_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$. (3.4)

Modu honetako konbinazioen adibide bat 10 lagunen lasterketa bat genuke, non lehen hirurak hurrengo lasterketara igaroko baitira (aurrena, bigarren edo

hirugarren heltzeak berdin dio). $K_{10,3} = 120$. Kontuan izan lehen antzeko adibide bat erabili dugula, errepikapenik gabeko aldakuntzen sailean, baina, kasu hartan, ordenak garrantzia zuen; hau da, lehenengoa, bigarrena eta hirugarrena igarri behar ziren. Kasu hartan, 720 aukera genituen, askoz gehiago.

8.2. Errepikatuzko konbinazioak

Errepikatuzko konbinazioetan ere, *m* elementu ditugu, eta horiek *n*-ka hartu nahi dira, baina, kasu horretan, elementuak errepika ditzakegu. Ordenak ez du garrantzirik izango. Beraz, multzoak ezberdintzat jotzeko, elementu ezberdin bat, behintzat, izan beharko dugu. Sor litezkeen konbinazio ezberdinen kopurua honela kalkulatuko dugu:

$$KR_{m,n} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!} \qquad (3.5)$$

Adibidez, kalkulatu *4, 5* eta *6* digituekin sor daitezkeen lau faktoreko biderkadura kopurua. Adibidez: (4x4x5x6), (4x4x4x6), …

$$KR_{m,n} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!} = \frac{(3+4-1)!}{(3-1)!4!} = 15$$

9. Ariketak

1. ariketa. Aurpegiak 1etik 6ra zenbakituta dauzkan dado bat eta txanpon bat jaurti dira, aldi berean. Zuhaitz-diagramaren metodoa erabiliz, adierazi zenbat emaitza posible dituen esperimentu horrek eta zein diren.

2. ariketa. Kalkulatu faktorial hauek eta konbinazio-zenbaki hauetako bakoitza.

a) 13! b) 12.14! c) $\binom{6}{4}$ d) $\binom{8}{5}$

3 ariketa. *1, 2, 3, 4* eta *5* zenbakiekin bi zifrako zenbat zenbaki osa ditzakegu elementuak errepikatu gabe?

4. ariketa. Argazki bat ateratzean, zenbat modutan koka daitezke talde bateko 11 lagun.

5. ariketa. Lehiaketa bat irabazi eta bost oparitatik hiru aukeratzeko esaten badizute, zenbat aukeraketa ezberdin egin ditzakezu?

6. ariketa. Azterketa batean, bost galdera daude, eta hiru galdera aukeratu behar dira erantzuteko. Hiru galderako zenbat azterketa multzo sor daitezke?

7. ariketa. Txanpon hauek ditugu: 1 €-koa, 2 €-koa, 0,50 €-koa eta 0,20 €-koa. Zenbat azpimultzo ezberdin lortuko ditugu, hirunaka hartzen baditugu?

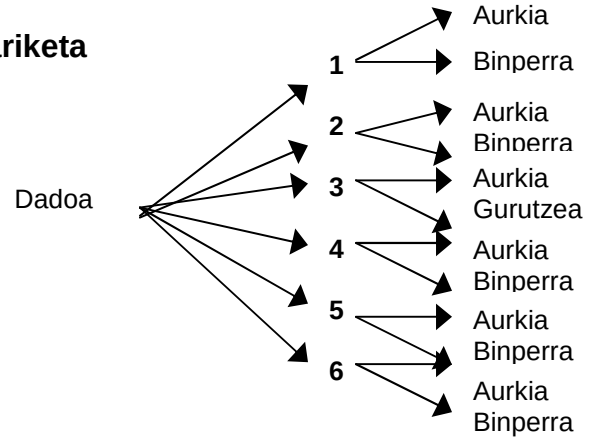
8. ariketa. Demagun herri bateko eskola batean DBHko laugarren mailako haurrei sexu-heziketako ikastaro batzuk ematen dizkietela, sexu-harremanen bidez transmititzen diren gaixotasunei buruzko prebentzio-kanpaina baten barnean. Ikastaroa amaitu ostean haurrek zenbat ikasi duten ikusteko, froga bat egiten zaie. Zoriz, eskola horretako 40 ikasleetatik 14 hartzea erabaki da. Ebaluazioa egiteko, 14 pertsonako zenbat lagin ezberdin atera daitezke?

9. ariketa. Loteria primitiboan, 49 zenbakitik 6 asmatu behar dira, sari nagusia irabazteko. Zenbat txartel bete behar dira 6 zenbakiak asmatzen direla ziurtatzeko?

10. ariketa. Sakelako telefono baten PIN kodea 4 digituk osatzen dute. Kalkulatu zenbat aukera dauden sakelako telefonoa norbaitek lapurtu ondoren, kodea asmatzeko.

10. Emaitzak

1. ariketa



Aukera kopurua = 6.2 =12 (1A, 1G, 2A, 2G, 3A, 3G, 4A, 4G, 5A, 5G, 6A, 6G)

2. ariketa

a) 13! = $6{,}22702.10^{9}$

b) 12.14!=$1{,}04613.10^{12}$

c) 15

d) 56

3. ariketa. Kasu honetan, aldakuntzaz ari garela hartu behar dugu kontuan, *m* eta *n* ezberdinak direlako (beraz, ez da permutazioa) eta ordenak axola duelako (ez baita gauza bera 42 eta 24). Aurkezten zaizkigun bost digituak ezberdinak direnez, errepikapenik gabeko aldakuntzaren formula aplikatuko dugu:

$$A_{5,2} = \frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$$

4. ariketa. Kasu honetan, permutazio mota batez ari gara, *m* eta *n* berdinak baitira, hau da, elementu guztiak jartzen baitira argazkia ateratzeko. Kasu honetan, gainera, pertsonak errepikatu ezin direnez, errepikapenik gabeko permutazioa da. Beraz:

$$P_{11} = 11! = 39.916.800$$

5. ariketa. Hemen ezingo genuke permutazioen formula aplikatu, *m* eta *n* ezberdinak baitira. Aldakuntzez edo konbinazioez ari gara, beraz, eta ordenak axola ez duenez —hau da, aukeratzen ditudan hiru oparietan zein ematen didaten aurrena, zein bigarrena eta zein hirugarrena axola ez zaidanez—, konbinazioez ari gara, hain zuzen, errepikapenik gabeko konbinazioez, opari guztiak ezberdinak baitira. Beraz, formula aplikatuz:

$$K_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = 10$$

6. ariketa. Kasu honetan, elementuen ordenak ez du eraginik multzoetan, eta ez ditu bereizten. Beraz, hirunaka harturiko bost elementuren konbinazioak dira.

$$K_{5,3} = 10$$

7. ariketa

$$K_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!3!} = 4$$

8. ariketa. Kasu honetan ere, argi dago ez garela permutazioez ari, ez baititugu ikasle guztiak hartzen, 40tik 14 baizik. Horrez gain, haurren hurrenkerak ere ez digu axola, haur berez osatutako bi multzo berdinak izango baitira horien hurrenkera aldatuta ere. Hori guztia kontuan hartuta, konbinazioez ari garela ondorioztatuko dugu, eta, haurrak errepikatu ezin direnez, errepikapenik gabeko konbinazioak kalkulatu beharko ditugu. Beraz:

$$K_{40,14} = \frac{40!}{(40-14)!4!} = \frac{40!}{26!4!} = 8,43x10^{19}$$

9. ariketa. $K_{49,6}$ = 13.983.816 13.983.816/6=2.330.636

10. ariketa. $AR_{10,4}=10^4$ =10.000

3.2 Probabilitatearen oinarrizko kontzeptuak

Aurkibidea

1. Helburu didaktikoak
2. Sarrera
3. Zorizko esperimentuaren inguruko kontzeptuak
4. Probabilitatearen ikuspuntuak
5. Batuketaren teorema
6. Probabilitate baldintzatua
7. Biderketaren teorema
8. Probabilitate osoaren teorema
9. Bayes-en teorema
10. Ariketak
11. Emaitzak

1. Helburu didaktikoak

1. Probabilitatearen teoriari buruzko oinarrizko sarrera bat egitea, axioma garrantzitsuenak landuz.
2. Gertaera sinple eta konposatuak adierazten eta probabilitateak kalkulatzen jakitea.
3. Oinarrizko probabilitate-teoremak ezagutu eta aplikatzen jakitea.

2. Sarrera

Gaur egun, probabilitatea analisi estatistikoan erabiltzen da, gehienbat. Probabilitate-teoriak garrantzi handia izan zuen matematika-arloan (eta zientzian oro har), ziurtasun absolutuaren aldeko erabateko joera nolabait orekatu egin zuelako.

Lege deterministei esker, iragar daiteke naturako fenomeno askoren bilakaera, hala nola gorputz baten erortze askea nola gertatzen den. Batzuetan, ordea, fenomenoak zorizkoak dira, beti egoera edo baldintza beretan gertatzen

diren arren, adibidez: dado bat jaurtirik, zein zenbaki aterako da? Zorizko gertaerei aleatorio deitzen zaie, eta haien bilakaera probabilitateen kalkuluaren bidez aztertzen da.

Probabilitatearen teoria Matematikaren adar bat da eta gertakari edo esperimentu jakin batek emaitza jakin bat izateko duen posibilitatea kuantitatiboki zehazten du. Probabilitate matematikoak zorizko jokoetan du bere oinarria. Joko horietan sortzen ziren galderei erantzunak emateko sortu zen. Blaise Pascal matematikari eta filosofo frantziarra (1623-1662) probabilitate-teoriaren sortzailetako bat izan zen.

3. Zorizko esperimentuaren inguruko kontzeptuak

Zoriz gertatzen diren fenomenoetan (ausazko *esperimentua* edo zorizko saiakuntza), emaitza posible bakoitzari *gertaera* (edo gertakizun) deitzen zaio. Gertaera bakoitzaren ziurgabetasuna neurtzen duen balioari, berriz, *probabilitatea* deritzogu. Ausazko esperimentuek emaitza desberdinak izan ditzakete, baldintzak berak izanda ere. Saiakuntza egin aurretik ezin dugu zehazki jakin zein emaitza aterako den, zoriaren menpe dagoelako. Txanpon edo dado bat gora jaurtitzea da ausazko esperimentuen ohiko adibidea.

Esperimentu horren ondorioz izan daitezkeen gertaera guztien multzoari *lagin-espazioa* esaten zaio. Adibidez, dado bat jaurtitzearen lagin-espazioa honako hau da: E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Beraz, lagin-espazioaren azpimultzo bakoitzari *zorizko gertaera* deritzo.

Honako hauek dira gertaera mota horietako batzuk:

a) *Gertaera ziurra*: beti gertatzen da. Matematikoki, P(A) = 1. Adibidea: Dadoaren adibidean 6 edo zenbaki txikiagoa ateratzea.

b) *Gertaera ezinezkoa*: ez da inoiz gertatzen, P(A) = 0. Adibidiea: Dadoaren adibidean 7 zenbakia ateratzea.

c) Gertaera baten *osagarria* edo *aurkakoa*: A gertaera betetzen bada, bere osagarria dena $\overline{A}$ ez da gertatzen, eta alderantziz. Matematikoki: $\overline{A}$= E - A. Adibidea: Zorro batean bola gorriak, beltzak eta zuriak daude. A gertaera bola gorria izatea bada, gorria ez izatea osagarria da. Kasu honetan, beltzak eta zuriak.

d) *Gertaera bateragarriak* izango dira, bi gertaera aldi berean gertatzeko posibilitatea dagoenean, eta aukera hori ez badago, *bateraezinak* izango dira. Bateragarrien adibidea: Pertsona batek ingelesez eta frantsesez jakitea posible da; beraz, bateragarriak dira gertaera horiek. Bateraezinen adibidea: karta-jokoen kasuan karta bat urrea eta kopa izatea.

e) *Gertaera askeak.* Gertaeren artean, inolako loturarik ez dagoenean; hots, gertaera batek ez du bestean eraginik. Karta-jokoan ateraldi bakoitzean karta multzora bueltatzen denean.

f) *Menpeko gertaerak***.** Bi gertaeren artean harremana dagoenean. Gertaera batek bestea baldintzatzen duenean. Irakasgai bateko bi azterketaren emaitzak.

4. Probabilitatearen ikuspuntuak

Probabilitatea kalkulatzeko, hiru ikuspuntu ditugu nagusiki:

a) *Ikuspuntu klasikoa*, non A gertakizun baten probabilitatea honela kalkulatzen baita.

p(A)= A-ren aldeko kasuak / kasu posible guztiak

"Laplaceren erregela" deitzen zaio.

Laplaceren erregela aplikatzeko, oinarrizko gertaerek ekiprobableak izan behar dute; kasu posible guztiek probabilitate berekoak izan behar dute, eta lagin-espazioak, ezaguna.

Adibidez, sei aldeko dado bat botata, bikoitia ateratzeko probabilitatea kalkulatu.

P(bikoitia)= {2,4,6} / {1,2,3,4,5,6} = 3/6

b) *Ikuspuntu enpirikoa*, non aztertzen ari garen fenomenoaren emaitzak aldi askotan jasotzen baititugu (esperimentatuz edo errealitatetik zuzenean jasoaz). Probabilitatea A gertakizunaren aldeko kasuen proportzioa izango da. Beste modu batera esanda, infinitu aldiz errepikatuz gero, probabilitate teorikoaren edo gertaeraren benetako probabilitatea ezagutuko genuke. Zenbat eta gehiagotan errepikatu esperimentua, orduan eta gehiago hurbilduko da maiztasun erlatiboa

gertaeraren benetako probabilitatera. Propietate horri zenbaki handien legea deitzen zaio. Adibidez, seikoaren emaitza bikoitia ateratzeko probabilitatea emateko, seikoa behin eta berriz bota eta bikoitia atera den aldien proportzioa jasoko genuke. Probabilitatea, modu horretan, estimazio edo hurbilketa bat izango da noski.

Adibidea: Kalkulatu txanpona jaurti eta aurkia ateratzeko probabilitatea ikuspuntu enpirikoa aplikatuz.

Jaurtiketa kopurua	**Aurpegi kopurua**	**Maiztasun erlatiboa**
10	4	0,4
100	62	0,62
1.000	560	0,56
10.000	5030	0,503

Kontuan hartuta Laplaceren erregela aplikatuta probabilitatearen balioa 0,5 dela, haren maiztasun erlatiboa 10.000 aldiz jaurtita hurbiltzen da gehien balio horretara.

c) *Ikuspuntu subjektiboa*, non gertakizunaren probabilitatearen zenbatespen bat arrazoituz, aldeko eta aurkako faktoreak kontuan hartuz, egiten baita.

5. Batuketaren teorema

Batzuetan, gertaera sinpleen probabilitateak kalkulatzeko, gertaeren arteko eragiketak egin behar dira.

Bi gertaeren bilkura honela adierazten da: A U B; eta P(A U B) adierazpenak esanahi du A edo B gertaera suertatzeko probabilitatea.

a) Gertaera bateraezinak direnean, A edo B gertaerak suertatzeko dagoen probabilitatea honela kalkulatzen da: P(AUB) = P(A) + P(B). Gertaera bateraezinetan $P(A \cap B) = 0$ delako.

Adibidea: Kutxa batean, 4 bola zuri, gorri bat eta 5 beltz daude, zoriz bola bat

ateratzen bada, zein da bola gorria edo beltza izateko probabilitatea?

P(G U B) = P(G) + P(B) = 1/10 + 5/10 = 6/10 = 0,6

b) Gertaera bateragarriak direnean, berriz: P(AUB) = P(A) + P(B) – P(A $\cap$ B)

Adibidea: Karta sorta batetik, karta bat atera dugu. Kalkulatu zazpiko bat (edozein sailetakoa) edo kopa ateratzeko probabilitatea.

P(ZUK) = P(Z) + P(K) – P(Z$\cap$K) = 4/40 + 10/40 – 1/40 = 13/40 = 0,325

c) Gertaera osagarrietan edo aurkakoetan: P($\overline{A}$) = 1 - P(A). Bi gertaera aurkakoen baturak 1 emango du, P($\overline{A}$)+P(A) = 1.

Adibidea: Talde batean, 100 pertsona daude; horien artean, 20 beltzaranak dira eta 80 pertsonak begi marroiak dituzte. Beltzaranen artean, begi marroiak dituztenak 10 dira. Pertsona bat zoriz aukeratzen badugu, kalkulatu beltzarana ez izateko probabilitatea.

P($\overline{A}$) = 1 - P(A)

P($\overline{B}$) = 1 - P(B) = 1 – 20/100 = 0,80

6. Probabilitate baldintzatua

A gertaera gertatu dela jakinik, B gertaera ateratzeko probabilitatea P(B/A) da. Izendatzailean, baldintza jartzen da, eta A-k baldintzatutako B-ren probabilitatea irakurtzen da.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ Edo } \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (3.6)$$

Batzuetan ez da beharrezkoa teorema hori aplikatzea, Laplaceren erregela aplikatzearekin nahikoa izan daitekeelako.

Adibidea: Ikasgela batean, 8 mutil eta 12 neska daude, 5 mutilek eta 8 neskak egunkaria irakurtzen dute. Ikasle bat zoriz hartuta eta neska dela jakinda, kalkulatu egunkaria irakurtzeko probabilitatea.

a) $P(E/N) = \frac{8}{12} = 0,667$ Laplaceren erregela

b) $P(E/N) = \frac{P(N \cap E)}{P(N)} = \frac{8/20}{12/20} = 0,667$ Probabilitate baldintzatua

7. Biderketaren teorema

Probabilitate baldintzatuaren definizioaren arabera, menpeko bi gertaeraren ebaketaren balioa honela kalkulatzen da:

$P(A \cap B) = P(A).\ P(B/A)$ (3.7)

Esperimentu bateko bi gertaera askeak badira, honako hauek betetzen dira:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$	(3.8)
$P(A/B) = P(A)$	(3.9)
$P(B/A) = P(B)$	(3.10)

Esperimentu batek hiru gertaera posible baditu, aurreko formula hori aldatu egingo da:

A, B eta C menpekoak badira: $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A).\ P(C/A \cap B)$

A, B eta C askeak badira: $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

1. adibidea (gertaera askeak): Txanpon bat hiru aldiz jaurtitzen badugu, kalkulatu hiru aurki ateratzeko probabilitatea.

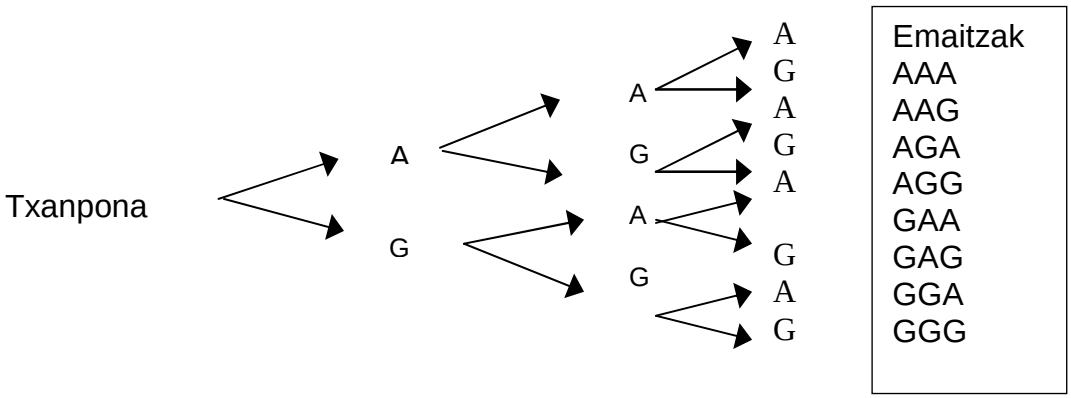
a) Biderketaren teorema

P(aurpegia) = 0,5

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P(A_2).P(A_3) = 0,5.0,5.0,5 = 0,125$

b) Zuhaitz-diagramaren bitartez

c)



Guztira, zenbat aukera posible daude? 8

Zenbat aukera daude 3 aurki ateratzeko? 1

P(A) = Aldeko kasuak/Kasu posibleak = 1/8=0,125

2. adibidea (gertaerak askeak diren probatzeko): Bi zorizko gertaeraren probabilitateak ezagutzen dira. P(A) = 0,4; P(B) = 0,2; P(AUB) = 0,5. A eta B gertaerak askeak al dira? Arrazoitu erantzuna.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$

$0,5 = 0,4 + 0,2 - P(A \cap B)$; $P(A \cap B) = 0,1$

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) = 0,4 \cdot 0,2 = 0,08$

A eta B gertaerak ez dira askeak, $P(A \cap B)$ ez delako P(A) bider P(B).

3. adibidea (menpeko gertaerak):

40 kartako multzotik bi karta aterako ditugu, lehenengo karta bueltatu gabe. Kalkulatu zein probabilitate dagoen 2 bateko lortzeko.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$

P(1.batekoa eta 2.batekoa) = P(1.batekoa) . P(2.batekoa/1.batekoa) = 4/40.3/39 = 0,008.

8. Probabilitate osoa

Esperimentu bateko gertaera sinpleak lagin-espazio osoari ez badagozkio, beraren azpimultzo bati baizik, probabilitateen kalkulua konplexuagoa da. Aurrekoaren ohiko adibide gisa, hiru poltsa desberdinetatik, bolak ateratzen ditugu, hiru poltsetan bola multzo ezberdinak utzirik. Zenbateko probabilitatea dago ateratako boletako bat kolore zehatz batekoa izateko?

Horrelakoetan, probabilitate osoaren teoremaz baliatzen gara. Horren arabera, E lagin-espazioa k gertaera bateraezinek osatuta dago (B_1, B_2, …, B_k); beraz, E = B_1, B_2, …, B_k, izango da. A gertaera beste B gertaera guztiekin bateragarria badugu, $A = A \cap E$. Eta ondorioz,

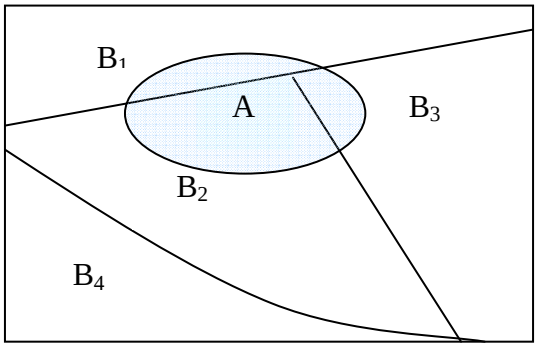
$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ... + P(A \cap B_k) \qquad (3.11)$$

A-ren probabilitatea kalkulatzeko biderketaren teorema aplikatzen badugu $P(A \cap Bi)$, bakoitzaren lekuan, P(B_i). P(A/B_i) jarriko dugu:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B2) + \ldots + P(B_k) \cdot P(A/Bk)$$

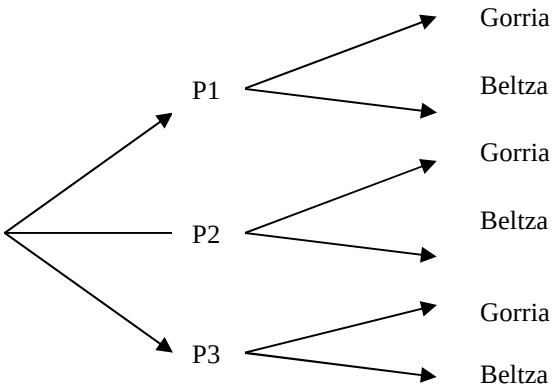
B_1, B_2, …, B_k-ren probabilitate guztiak jakinik, eta A-ren probabilitate baldintzatuak $(p(A/B_i)_{i=1,2,...,n}$ ere jakinik, honako hau da formula orokorra:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i).P(A/B_i) \qquad (3.12)$$



Adibidea: Esperimentu batean, bola gorri bat (G) ateratzen da hiru poltsetako (P_1, P_2, P_3) batetik: lehenengo poltsan, 2 bola gorri eta 3 beltz daude; bigarrenean, 3 bola gorri eta 7 beltz, eta hirugarren poltsan, 4 bola gorri eta 4 beltz daude. Kalkulatu zoriz bola bat atera eta gorria izateko probabilitatea.

Beheko zuhaitz-diagraman erakusten dira posibilitate guztiak.



P1G	**1/3. 2/5**
P1B	1/3.3/5
P2G	**1/3.3/10**
P2B	1/3.7/10
P3G	**1/3.4/8**
P3B	1/3.4/8

$P(G) = P(P1) \cdot P(G/P_1) + P(P_2) \cdot P(G/P_2) + P(P_3) \cdot P(G/P_3)$

$P(G) = 1/3.2/5+1/3.3/10+1/3.4/8=0,40$

9. Bayesen teorema

Bayesen teorema Thomas Bayesek (1702-1761) asmatu zuen. Probabilitatearen teorian, probabilitate baldintzatuaren banaketak ematen duen emaitza lortzen da, zorizko B gertaeraren probabilitate baldintzatua suposatuz A gertaera eman dela jakinik. Algebraikoki adierazita $P(B_i/A)$.

Aurreko atalaren jarraipena izango da hau. E lagin-espazioa k gertaera bateraezinez osatuta dago (B_1, B_2, …, B_k) eta, B gertaera bat aztertzen badugu (A-ren probabilitatea jakinik –inoiz ere zero izango ez dena–, eta B_i bakoitzaren *a posteriori* probabilitatea ere jakinik –i = 1, 2, …, K izanik–), honako hau lortuko da Bayesen teoremaren bidez:

$$P(B_i / A) = \frac{P(A \cap Bi)}{P(A)} = \frac{P(Bi).P(A / Bi)}{P(A)} = \frac{P(Bi).P(A / Bi)}{\sum P(B_i).P(A / B_i)} \qquad (3.13)$$

Laburbilduz, Bayesen teorema probabilitate baldintzatuaren alorrean kokatzen da baldintza batzuk gertatzen direnean. Baldintza honako bi hauek dira:

1. B gertaera (B_1, B_2, …, B_k) guztiek lagin-espazioa osatzen dute.
2. A gertaera bateragarria dela B gertaera guztiekin: $P(A \cap E) \neq 0$.

Teoria mailan azpimarratu behar da ondorengo probabilitateak $P(B_1)$, $P(B_2)$, ..., $P(B_K)$ *a priori* probabilitateak direla esperimentua egin aurretik lortutako probabilitate teorikoak direlako. Baina probabilitate baldintzatuak, $P(B_i/A)$, *a posteriori* deitzen dira, esperimentua egin ondorengo probabilitateei erreferentzia egiten dietelako.

Adibidea: Aurreko adibidean oinarriturik, orain, galdera da: Bola gorri bat atera dugula jakinik, zein da lehengo poltsakoa izateko probabilitatea?

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1).P(A/B_1)}{P(B_1).P(A/B_1) + P(B_2).P(A/B_2) + P(B_3).P(A/B_3)} = \frac{1/3.2/5}{1/3.2/5 + 1/3.3/10 + 1/3.4/8} = 0,33$$

10. Ariketak

1.- Txanpon bat bitan jaurtitzen bada, zein gertaerak du probabilitate handiago: bi aurki ateratzeak ala aurki eta binper bana ateratzeak.

2.- DBH 4. mailako ikasgela batean, 40 ikasle daude guztira. Ikasle bat zoriz aukeratuta, neska izateko probabilitatea 0,55 bada, zenbat mutil eta neska daude ikasgelan? Zer probabilitate dago aukeratutako ikaslea mutila izateko?

3.- Bazkari batean, 30 gizon eta 32 emakume daude. 18 gizonek eta 19 emakumek okela aukeratu dute, eta gaintzekoek, arraina. Gizon bat zoriz hartzen badugu, kalkulatu arraina eskatu izanaren probabilitatea.

4.- Poltsa batean, 1etik 4ra zenbakitutako bolak daude. Bola bat atera, emaitza idatzi eta berriro poltsan sartzeko esperimentua 6.000 aldiz egin dugu. Hona hemen lortutako maiztasunak:

Bola	**1**	**2**	**3**	**4**
n_i (maiztasunak)	1.000	1.300	1.500	2.200

Kalkulatu bola bat ateratzean bakoitia izateko probabilitatea.

5.- Azterketa batek bi proba ditu. Lehenengo proba zuzen burutzeko probabilitatea 0,40 da, eta bigarrena ondo burutzekoa, 0,30. Bietako proba bat ondo egiteko probabilitatea 0,45 baldin bada, esan bi proba horien ebazpena independentea den ala ez.

6.- Populazio batean, gizonezkoen % 6k eta emakumezkoen % 10ek minbizia dute. Badakigu oro har % 70 gizonezko direla.

a) Pertsona bat zoriz aukeratzen dugu eta badu minbizia, zein da gizonezkoa izateko dagoen probabilitatea?

b) Zein da zoriz aukeratzen dugun lehenengo pertsonak minbizia izateko probabilitatea?

7.- Hiru makinak (*A, B* eta *C*) % 45, % 30 eta % 25 produzitzen dute, hurrenez hurren, enpresan produzitzen diren pieza guztien artean. Makina horiek egindako pieza akastunak % 3, % 4 eta % 5 dira.

a. Zoriz pieza bat hartzen badugu, kalkulatu akastuna izateko probabilitatea.

b. Pieza bat zoriz aukeratu dugu eta akastuna da, zein da B makinak produzitutakoa izateko probabilitatea?

11. Emaitzak

1. ariketa. Gertaera posible guztiak (A= aurki eta B = binper) = AA, BB, AB, BA. Aurki bat eta binper bat lortzeko probabilitatea 2/4 da, bi aurki lortzekoa, berriz, 1/4.

2. ariketa. 18 mutil eta 22 neska; p = 0,45

3. ariketa. p = 0,40

4. ariketa. p = 2500/6000=0,42

5. ariketa. Proba horien ebazpena ez da askea.

6. ariketa.

a) $P(G/M) = \dfrac{0,70*0,06}{0,70.*0,06+0,30*0,10} = 0,58$

b) $P(M) = P(G).P(M/G) + P(E).P(M/E) = 0,7*0,06+,30*0,10 = 0,072$

7.-

a) P(Ak) = P(A) · P(Ak/A) + P(B) · P(Ak/B) + P(C) · P(Ak/C)

P(Ak) = 0,45 · 0,03 + 0,30 · 0,04 + 0,25 · 0,05 = 0,038

b) Bayesen teorema erabiliz

$$P(B/Ak) = \frac{P(B).P(Ak/B)}{P(A).P(Ak/A)+P(B).P(Ak/B)+P(C).P(Ak/C)} = \frac{0,30.0,04}{0,45.0,03+0,30.0,04+0,25.0,05} = 0,32$$

IV. ESTATISTIKA INFERENTZIALAREN OINARRIAK

Aurkibidea

1. Helburu didaktikoak
2. Sarrera
3. Estatistika deskribatzailea eta estatistika inferentziala
4. Estatistika inferentzialean erabiltzen diren kontzeptuak
5. Jauzia: Laginetik populaziora

1. Helburu didaktikoak

Atal honek estatistika inferentziala ikastean erabiliko den hizkuntzara hurbiltzea du helburu. Estatistika inferentziala hainbat suposiziotan oinarritzen da. Haren logika ulertu ahal izateko, suposizio horiek ezagutu behar dira. Estatistika inferentzialaren oinarriak ezartzea da atal honen helburua.

2. Sarrera

Psikologiako lizentziaturan, estatistika inferentziala bigarren ikasturtean ikasten da. Halere, estatistika inferentzialaren zenbait kontzeptu lehenengo mailan ere azaltzen dira. Estatistikaren helburu garrantzitsuetako bat inferentziak egitea da. Inferentzia hitzarekin, aurreikustea, asmatzea, orokortzea esan nahi dugu. Estatistika inferentziala aplikatuz egingo ditugun aurreikuspenek *fidagarritasun* maila jakin bat izango dute. Izan ere, aurreikuspen zuzenak egitera noraino hurbiltzen garen jakingo dugu. Horixe da zientzia eta superstizioa bereizten duen ezaugarri bat, superstizioaren bitartez egiten diren aurreikuspenak noraino diren fidagarriak ezin baita jakin. Estatistika inferentziala erabiliz, honelako galderak erantzuteko gai izango gara: Posible al dugu pertsonen oldarkortasun maila aurreikusi beren enpatia mailan oinarrituz? Bereizten al da bi talderen autoestimu maila estatistikoki, talde bati esku-hartzea aplikatu bazaio eta beste taldeari aplikatu ez bazaio? Zenbakizko adimena eta emoziozko adimena erlazionaturik al daude? Balio kontserbadoreak dituzten pertsonek balio aurrerakoiak dituztenek baino aurreiritzi gehiago al dituzte? Esku-hartze programa bat neurosia duen pertsona talde baten sintomak gutxitzeko gauza al da? Nolakoa da Euskal Herriko

biztanleriaren aurreiritzi maila atzerritarrekiko? Galdera horiei guztiei erantzuteko, estatistika inferentziala erabili beharko dugu.

3. Estatistika deskribatzailea eta estatistika inferentziala

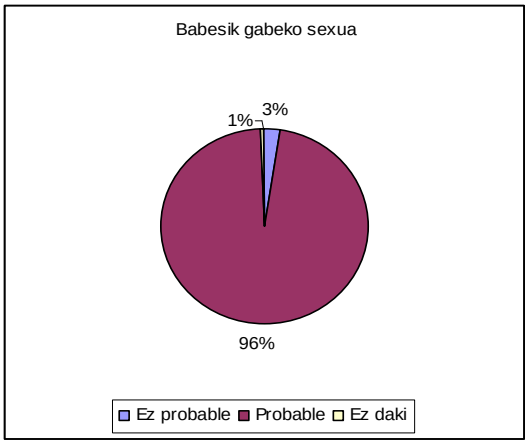
Zer etortzen zaigu burura estatistika hitza aipatzen denean? Oro har, estatistika hitza aditzean, jendeari grafikoak eta ehunekoak etortzen zaizkio burura. Adibidez, hauteskundeetan alderdi politiko bakoitzari emandako botoen ehunekoak; egunkarietan agertzen diren populazioaren osasun-ohiturei buruzko inkesten emaitzak; EHUko psikologia fakultateko ikasleen sexu-banaketa. Gehienen ustez, estatistikak zenbakizko deskribapena esan nahi du.

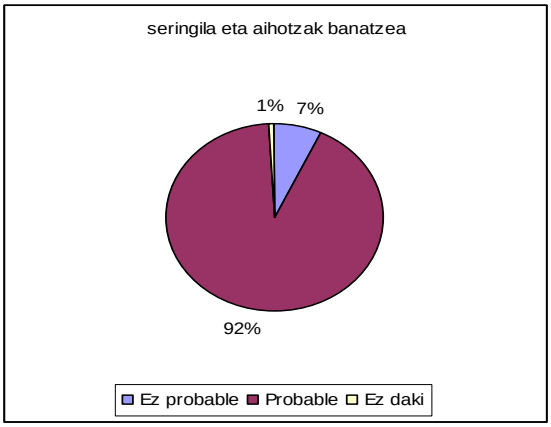
Halere, batzuetan, estatistikaren helburua zenbakizko deskribapena baino harago doa. Kasu horietan, datu multzo handi batetik, datu-lagin txiki bat aztertzen da multzo handiaren ezaugarriak asmatzeko. Hau da, estatistikaren helburua zenbakiak aurreikustea, asmatzea, estimatzea edo inferitzea ere izan daiteke. Hori gertatzen da, adibidez, azken hilabeteetako langabetuen ehunekoan oinarrituz datozen hilabetetako langabezia-tasa estimatzen bada; gaitz batek hurrengo hilabetetan populazioan izango duen efektua; datorren asteko eguraldiaren aurreikuspena; psikoterapia-eredu batek depresioa pairatzen duen populazioan izango duen eragina.

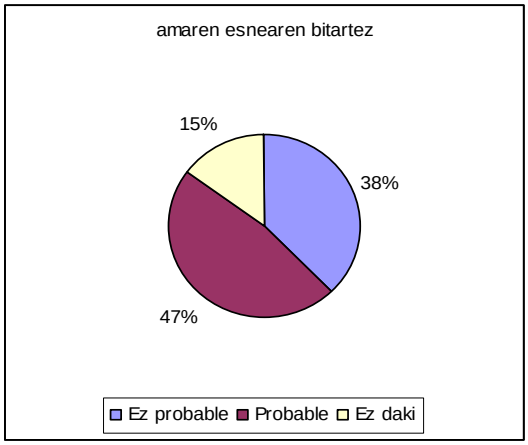
Beraz, estatistikak bi aplikazio nagusi ditu. Alde batetik, datu multzoen deskribapena, eta, bestetik, lagin batean oinarrituta, datu multzo bati buruzko ondorioak ateratzea. *Estatistika deskribatzaileak* zenbakizko metodoak eta metodo grafikoak erabiltzen ditu, datu multzo batean ereduak bilatzeko, datuak laburtzeko eta datuei buruzko informazioa aurkezteko. *Estatistika inferentzialak* laginetatik lortutako datuak erabiltzen ditu estimazioak egiteko, aurreikusteko edota emaitzak datu multzo handiago bati orokortzeko.

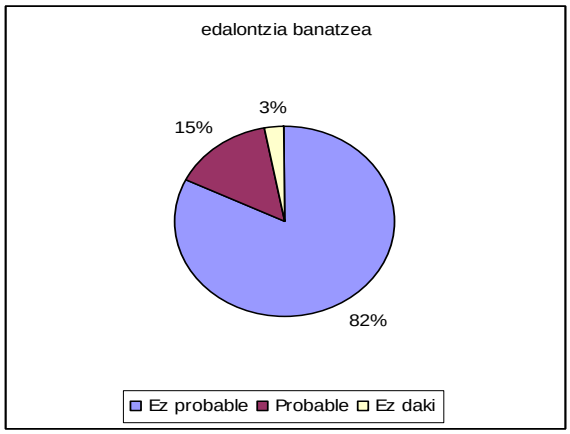
Estatistika deskribatzailearen adibidea: 2009an SEISIDAk enkargatutako lan batean, Espainiako 1.608 pertsonari GIBari eta GIBa duten pertsonei buruzko jarreren inguruko inkesta bat egin zitzaien. Galdera bat zen ea noraino uste zuten posible zela GIBarekin infektatzea hainbat transmisio-bideren bitartez. Zazpi aukera aipatu ziren, eta lehenengo hirurak bakarrik ziren zuzenak. Kasu honetan, *estatistika deskribatzailea* erabili zen lagin horretan, GIBari buruzko sinesmen zuzenak eta ez-zuzenak dituztenen ehunekoak deskribatzeko. Gainera,

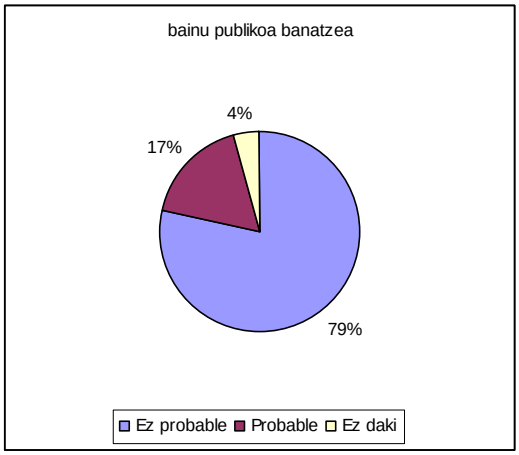
informazioa aurkezteko ondorengo sektore grafikoak erabili ziren.

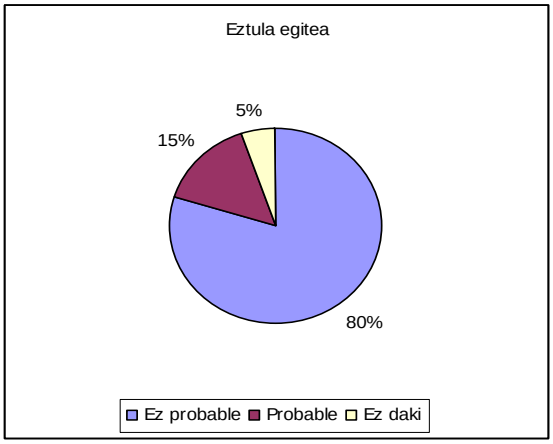


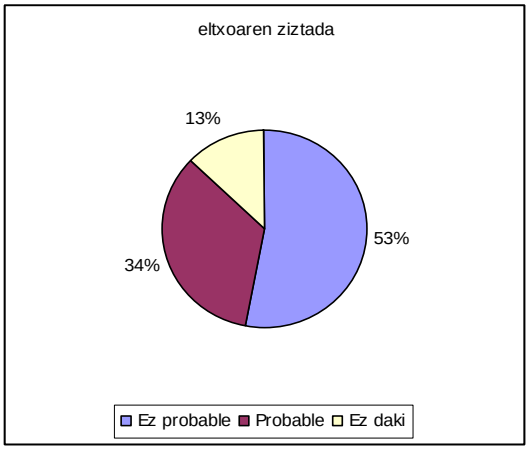










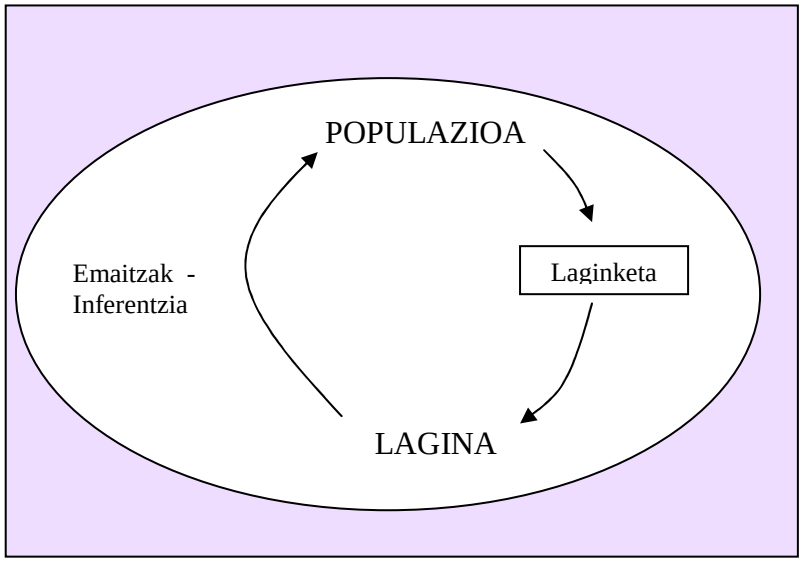


21. irudia. GIBari buruzko iritziak.

Estatistika inferentzialaren adibidea: Mischelek eta Bakerrek (1975) idatzitako artikulu batean, sariaren atzerapenari buruzko lana azaltzen dute. Hiru eta lau urteko 60 ume, zoriz, bi talde esperimentaletan (gozokiaren ezaugarri orokorrak eta ezaugarri zehatzak) banatu zituzten. Umeak gela batean utzi zituzten jolasten, aurrean azukrezko gozoki bat zutelarik. Ikertzaileak esan zien gozoki bat jan nahi bazuten tinbre bat jo, besterik ez zutela egin behar, eta orduan ikertzaileak gozoki bat emango ziela. Halere, esperimentua amaitu baino lehen tinbrea jotzen ez bazuten, orduan, ikertzaileak bi gozoki emango zizkien. Ikertzaileak ume talde bati gozokiaren ezaugarri zehatzetan pentsatzeko eskatu zion (gustua, gozotasuna, ahoko sentsazioa), eta beste taldeari gozokiaren ezaugarri orokorretan pentsatzeko eskatu zion (itxura, forma). Sariaren ezaugarri zehatzetan pentsatu zuten umeen artean, tinbrea jo zutenen ehunekoa handiagoa izan zen beste ezaugarri orokorretan pentsatu zuen taldean baino. Esperimentuak atera zuen ondorioa izan zen sarien ezaugarri zehatzetan pentsatzen duten umeek saria atzeratzeko zailtasun handiago zutela, sarien ezaugarri orokorretan pentsatzen dutenek baino. Dirudienez, sariaren alderdi kontsumigarriek sortzen dute tentazioa. Helduaroan, saria atzeratzeko horrelako estrategia kognitiboak erabiltzen dira, baina, haurtzaroan, umeak ez dira gai horrelako estrategiak erabiltzeko. Beraz, esperimentuan bi ume talde konparatu bazituzten ere, ondorioak adin talde horretako ume guztiei aplikatu zitzaizkien. Kasu horretan, autoreek *estatistika inferentziala* aplikatu zuten beren datuak aztertzeko.

4. Estatistika inferentzialean erabiltzen diren kontzeptuak

Estatistika inferentzialari esker, populazioak azter ditzakegu. Psikologia ikasten ari garenez, populazio horiek pertsonez osatuta egoten dira, oro har. Hasteko, populazio kontzeptua aipatuko da.



22. irudia. Populazioaren eta laginaren arteko harremanak

Populazioa: Unitateen multzo bat da. Unitateak pertsonak, animaliak, instituzioak, gertaerak eta abar izan daitezke. Populazioa definitu egiten da unitateek partekatzen dituzten ezaugarriak esplizituki adierazten ditugunean.

Adibidez: Espainian bizi diren GIBdun pertsonak; fabrika batek urte batean egiten dituen autoak; urte batean Euskal Herrian gripea pairatzen duten pertsonak; Eroskiko kontsumitzaileak; 50-60 urte bitarteko Gipuzkoako emakumeak; 10 zentimetro baino txikiagoak diren arrainak; gorilak; munduan azken bost urteotan izandako gatazka armatuak; 1.000 euro baino gutxiago kobratzen dutenak; azken urtean Espainian gertatutako auto-istripuak…

Populazioak mugatuak edo mugagabeak izan daitezke. Oro har, populazio mugatuak zenbatu daitezkeenak dira, eta mugagabeak, berriz, zenbatu ezin direnak. Psikologian erabiltzen ditugun populazio gehienak mugagabeak dira:

depresioa pairatzen duten pertsonak, pertsona helduak, populazio orokorra eta abar. Halere, populazioari buruzko inferentziak egiteko teknikak berdintsuak dira populazio mugatu nahiz mugagabeetan; beraz, horrek ez digu arazorik ekarriko.

Populazioek bi ezaugarri dituzte. Alde batetik, populazioa eskuraezina da, praktikoki behintzat. Eroskiko kontsumitzaileen motibazioak aztertu nahi bagenitu, ez litzateke posible izango Eroskiko kontsumitzaile guztiengandik datuak lortzea. Modu berean, ezingo genuke 10 zentimetro baino txikiagoak diren arrainen populazioa bildu beren elikagaiak aztertzeko. Bestalde, populazioaren beste ezaugarri bat ezezaguna izatea da. Hain handi eta eskuraezinak direnez, populazioa ezagutzea ia ezinezkoa da. Izan ere, populazioa zuzenki ezezaguna denez, populazioari buruzko informazioa aldez aurretik egindako ikerketetatik lortuko dugu.

Lagina: Lagina populazioa osatzen duten unitateen azpimultzo bat da. Alegia, populazioa definitzen duten ezaugarri guztiak izan beharko ditu laginak. Bestela, laginetik lortutako datuak ez dira baliagarriak izango populazioari buruzko estimazioak edo aurreikuspenak egiteko.

Adibidez: Hauteskundeen aurreko boto-asmoari buruzko estimazioa 1.000 hautesleren laginean oinarritzen da; gurasoen hezkuntza mailak seme-alaben estimulazio mailan duen eragina aztertzeko, 500 gurasoren lagina erabili da; arrain txikien elikagaiak aztertzeko, 300 arrain txiki aztertu dira; datorren urtean herrialde jakin batean lurrikara bat gertatzeko dagoen probabilitatea kalkulatzeko, herrialde horretan aurreko 200 urteetan izandako lurrikaren banaketa aztertzen da.

Laginek bi ezaugarri nagusi dituzte. Alde batetik, lagina eskuragarria da. Laginetatik, datuak bil ditzakegu: 1.000 pertsonaren galdera bat egin, eta 300 arrain txiki aztertu. Bestetik, lagina ezaguna da. Laginetik datuak hartzen ditugunez, lagina ezagut dezakegu. Izan ere, laginaren datuak aztertuko ditugu.

Lehenago esan bezala, garrantzitsua da laginak populazioaren unitateek dituzten ezaugarriak izatea. Hau da, *lagin adierazgarriei esker,* hor lortutako datuak populazioari egotzi ahal izango dizkiogu. Ikerketetan lagin adierazgarriak

bermatzeko, komenigarri da laginketa-prozedurak eta teknika zehatzak erabiltzea. Lagina ez-adierazgarriak lortzearen arriskuak agerian daude adibide honetan: Parlamenturako hauteskundeetan, enpresek boto-asmoari buruzko galderak egiten diote populazioaren lagin bati. Agian, hautesle guztietatik, 1.000 pertsonaren datuak lortzen dituzte, besterik ez. Lagin hori bost herritan bakarrik lortuz gero, laginak populazioaren ezaugarri guztiak ez izateko aukera handia egongo litzateke. Eta hala balitz, populazioari buruz aterako genituzkeen ondorioak ez lirateke zuzenak izango. Beraz, estimazio okerrak egingo genituzke.

Gure ikerketaren helburua ez da berez lagina ikastea, laginean agertzen diren hainbat ezaugarri aztertzea baizik. Hauteskundeetan, lagineko 1.000 pertsona horiengan, ezaugarri bat aztertzen dugu, boto intentzioa, hain zuzen. Beste adibide bat, lagina 500 gurasoz osatuta egon daiteke, baina gure ikerketa-helburua gurasoen hezkuntza mailarekin lotuta dago. Ikerketaren helburua laginetan dauden hainbat ezaugarrirekin erlazionatuta dago. Ezaugarri horiek laginaren unitate bakoitzean balio ezberdinak izan ditzakete eta *aldagaiak* deitzen dira. Zein alderdiri emango zaion botoa ezaugarri aldakorra da pertsona bakoitzean. Modu berean, hezkuntza maila ezaugarri aldakorra da guraso bakoitzarentzat. Ezaugarri horiei aldagaiak deritzote, balio ezberdinak har dezaketelako lagin eta populazioaren unitate bakoitzean.

Estatistikoa eta parametroa. Ehunekoa, batez bestekoa, bariantza, desbiderapen estandarra, mediana eta abar aldagaiak deskribatzeko erabiltzen ditugun balioak dira. Balio horiek laginetan neurtzen diren aldagaietatik lortzen direnean, estatistikoak dira, baina, populazioari dagozkionean, parametro deitzen zaie.

Adibidez: Demagun boto-asmoa neurtzen dugula 1.000 pertsonako lagin batean. EB alderdiari botoa ematen diotenen ehunekoa (demagun %13) estatistiko bat da. Estatistiko hori erabil daiteke Euskal Herriko populazioan EBri botoa emango dioenen ehunekoa estimatzeko. Estimatu nahi dugun ehunekoari parametro deitzen zaio. Beste adibide bat: Lagina osatzen duten 500 gurasoek ikasten emandako denbora 8,3 urte da batez beste. Batez besteko hori, kasu honetan, estatistikoa da, laginari baitagokio. Halere, 8,3 batez bestekoan oinarrituz, gurasoen populazioan ikasten emandako urteen batez bestekoa aurreikusi edo

inferitu nahi dugu. Beraz, estimatu nahi dugun batez besteko horri parametroa deituko zaio.

Estatistika inferentzialean, beraz, estatistikoak eta parametroak bereizi beharko ditugu. Estatistikoak ikertzaileek kalkulatzen dituzte, baina parametroak ez ditu ikertzaileak kalkulatzen, inferitu edota estimatu egiten baititu. Bi balio mota bereizi ahal izateko, estatistikoak idazkera latinoaren bitartez adierazten dira, eta parametroak, berriz, idazkera grekoaren bitartez idazten dira. Ondorengo taulan, zenbait adibide dituzue:

9. taula. Populazioaren eta laginaren ezaugarri deskriptiboak

	Estatistikoak (guk laginetan kalkulatutakoak)	Parametroak (estimatuak, aurreikusitakoak)
Batez bestekoa	$\bar{X}$	μ
Ehunekoa	P	π
Desbiderapen estandarra	S	σ
Bariantza	S^2	σ^2

Lagin eta populazio bakarra baditugu, aurreko balioak erabil genitzake. Baina posible litzateke bi populazioren arteko diferentziaren tamaina interesatzea. Orduan, parametro eta estatistiko ezberdinak lirateke gure interesekoak.

Adibidez: Demagun psikoterapia mota batek depresio-sintoma duten pertsonen autoestimuan duen efektua aztertu nahi dugula. Orduan, depresio-sintoma duten bi populazio konparatu nahi ditugu, psikoterapia zehatz hori jaso dutenena eta terapiarik jaso ez dutenena, hain zuzen. Kasu horretan interesatzen zaigu estimatzea bi populazio horiek autoestimuan noraino bereizten diren. Beraz, parametroa bi autoestimuen batez bestekoen arteko diferentzia izan liteke. Bi populazio horietatik 30 pertsonaz osatutako bi laginetan, autoestimua neurtuko genuke (terapia jaso dutenak eta terapiarik jaso ez dutenak); batez bestekoak bi taldetan kalkulatu, eta elkarren arteko diferentzia ere bai. Kasu horretan, laginetan

lortutako estatistikoa batez bestekoen arteko aldea litzateke, eta bi populazioen arteko aldea den parametroa estimatzeko erabiliko litzateke.

10.taula. Estatistikoak eta parametroak bi lagin izanez gero

	Estatistikoak (guk laginetan kalkulatutakoak)	Parametroak (estimatuak, aurreikusitakoak)
Bi batazbestekoen arteko diferentzia	$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$	$\mu_1 - \mu_2$
Bi proportzioen arteko diferentzia	$P_1 - P_2$	$\pi_1 - \pi_2$

5. Jauzia: Laginetik populaziora

Esan bezala, estatistika inferentzialean laginetan lortutako aldagaien azterketatik (estatistikoak), populazioaren ezaugarriak saiatuko gara asmatzen edo estimatzen. Populazioaren ezaugarriak asmatu nahi ditugula esaten dugunean, hor dauden aldagaiei buruzko informazioa estimatzea esan nahi dugu, parametroak, hain zuzen. Beraz, estatistika inferentzialaren azken helburua parametroen balioak estimatzea izango da.

Estatistika inferentziala egin ahal izateko, hau da, laginetan kalkulatutako estatistikoetatik populazioaren parametroak estimatu ahal izateko, hiru pauso nagusi eman beharko ditugu. Lehenik, jauzi horretan galera handia izango dugula esan behar da, ziurtasuna, hain zuzen. Laginetik populaziora jauzi egiteko, errore maila kontuan hartu behar dugu. Bigarrenik, jauzia egin ahal izateko, populazioari buruzko aztarna edo pistaren bat izan beharko dugu. Bestela, ezingo genuke inferentziarik inolaz ere egin. Azkenik, prozedura logiko zehatza erabili beharko dugu parametroa estimatzeko.

Pauso horiek, banan-banan, modu orokorrean azalduko ditugu, baina prozedura horrek guztiak lagin adierazgarririk gabe ez du ezertarako balio. Laginak populazioaren ispilu izan behar du. Laginaren adierazgarritasuna

bermatzeko, zorizko laginketa erabiltzen da. Badaude hainbat teknika zorizko laginketa egin ahal izateko, eta datuen azterketa izeneko ikasgaian ikasiko dituzue. Atal honetan, bakarrik esango dugu laginaren adierazgarritasuna estatistika inferentziala egiteko baldintza dela. Hori esanda, laginetik populaziorako jauzia egiteko prestatuko zaituztegu.

1. pausoa. Ziurtasuna galtzea. Inferentzia eginda, populazioei buruzko ondorioak atera ditzakegu. Hori oso garrantzitsua da populazioari buruzko informazioa lortzeko ez ezik, baita orokortasunak egiteko ere. Aldagaien arteko harremanak orokortzean, ereduak sortzen ditugu, eta, horien bitartez, teoria psikologikoak eta abar. Adibidez, 30 pertsonatako lagin batean aurkitutako nortasun autokratikoaren eta aurreiritziaren arteko harremana interesgarria da dudarik gabe. Halere, harreman hori populaziora orokortzea askoz ere interesgarriagoa da, inferentzia egitean harreman horren inplikazioak areagotzen baitira: 'nortasun autokratikoak eta aurreiritziak lotuta agertzeko joera dute'. Izan ere, teoria asko orokortasun horietan oinarritzen dira. Beraz, inferentzia estatistikoak berebiziko garrantzia du psikologian. Aitzitik, inferentzian jauzia emateak kostu edo galera handi bat ere badu: ziurtasuna. Jauzi hori egindakoan eta populazioari buruzko ondorioak ateratzean ezin izango gara inoiz ere ez ziur egon. Nolabaiteko errore maila kontuan hartu beharko dugu nahitaez. Errore maila probabilitatearen arabera adierazten da, eta, psikologian, % 5 baina txikiagoa izan ohi da. Errore maila hori txikia bada ere, egon beti egongo da. Izen ezberdinak har ditzake, hala nola esanguratsutasun maila, I motako errorea, arrisku maila, eta haren proportzioa alfa hitz grekoarekin adierazten da. Alfaren balioa zenbat eta txikiagoa, gure estimazioa are eta zurrunagoa. Adibidez, errore mailak adierazten du nortasun autokratikoak eta aurreiritziak lotuta egoteko joera dutela. Beraz, nahiz eta pertsona gehienengan hala izan, errore mailak jakinarazten digu salbuespenak ere aurkituko ditugula.

Bigarren pausoa. Aztarnen bila. Populazioari buruzko aztarnaren bat behar dugu estatistika inferentziala egiteko, hau da, laginetik populaziorako jauzia emateko. Lehenago, populazioa ezezaguna dela esan dugu. Horrekin esan nahi genuen

populazioan agertzen diren aldagaien berri ez dugula. Hala bada, nola da posible behar ditugun aztarnak lortzea? Hona galdera horri erantzuteko logika: Esan bezala, guk laginaren bitartez lortutako datuak ezagutzen ditugu. Guk neurtutako aldagaiek banaketa bati jarraitzen diote. Badakigunez, aldagai psikologiko askok banaketa normalari jarraitzen diote. Izan ere, autoestimua aldagaia eskala baten bitartez neurtuko bagenu, populazio gehienak erdialdeko puntuazioak lortuko luke; populazioaren pertsona gutxiagok izango luke aurreko puntuazioa baino autoestimu txikiagoa edo handiagoa, eta are eta gutxiagok muturretako puntuazioak. Autoestimu aldagaiaren banaketarekin bezala, beste aldagai psikologikoekin ere gertatzen da. Banaketa normala ez da banaketa mota bakarra, baina bai arruntena.

Beraz, gure galderara itzuliz, gure laginean neurtutako aldagai psikologikoak banaketa normalari jarraitzen badio, litekeena izango da aldagai horrek populazioan ere banaketa normalari jarraitzea. Horixe da behar dugun lehenengo aztarna, aldagaiaren banaketa teorikoa ezagutzea, hain zuzen. Aldagaiaren banaketa teorikoa ezagutzea oso garrantzitsua da. Horren ondorioz, lagin-banaketa ere ezagutuko dugu eta jakin ahal izango dugu populazioan zein lagin-ehunekok izango lukeen autoestimua batez besteko jakin bat baino puntuazio altuagoak edo baxuagoak. Bigarren aztarna populazioan dagoen autoestimuaren batez bestekoa ezagutzea da. Hori zuzenki ez dugu jakingo, baina beste ikerketetako emaitzetatik jakin ahal izango dugu, oro har. Beraz, jakinda aldagaiak populazioan zein banaketari jarraitzen dion eta populazioaren batez bestekoa, inferentzia estatistikoa egin ahal izango dugu.

Adibidea: Populazioan autoestimua normal banatzen da, eta haren batez bestekoa 5 da. Datu hori beste lan batzuetatik jaso dugu. Guk, populazio horretatik, 26 pertsonako lagin bat hautatu dugu zoriz, eta, haien autoestimuari buruzko galdera bat egin ondoren, 6,2ko batez bestekoa eta 1,5eko desbiderapen estandarra lortu ditugu. Banaketa normala ezaguna denez, formula bat aplikatu besterik ez da egin behar, 6,2 baino puntuazio baxuago edo altuagoak lortzeko probabilitateak ezagutzeko.

Batez bestekoa den parametroa (μ) = 5

Laginaren tamaina (n) = 26

Batez bestekoa den estatistikoa $(\bar{X})$ = 6,2

Desbiderapen estandarra (S) = 1,5

Ditugun datuekin, Studenten t banaketaren formula aplikatuko dugu, eta eman digun emaitzari dagokion probabilitatea probabilitate-tauletan begiratuko dugu. Horren ondorioz, badakigu ezen, populazioan batez bestekorik arruntena 5 baldin bada, lagin horretan 6,2ko batez bestekoa edo batez besteko handiagoa duten laginak ateratzeko aukera 0,001ekoa dela.

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}} = \frac{6,2-5}{1,5/\sqrt{25}} = 4$$

Populazioan batez bestekoak lortzeko dagoen probabilitatea kalkulatzen denean, batez bestekoaren *lagin-banaketa* aztertzen ari gara. Batez bestekoaren lagin-banaketa lagin batean lor daitezkeen batez besteko posible guztiei atxikitako probabilitate-banaketa baita.

Laburbilduz, estatistika inferentzialaren bitartez, laginean lortutako datuez baliatzen gara populazioari buruzko ondorioak ateratzeko. Horretarako, laginean, aldagaiak (adibidez, autoestimua) neurtzen ditugu eta estatistikoak kalkulatzen ditugu (batez bestekoa, proportzioa eta abar). Populazioan aldagaiari buruzko ondorioak ateratzeko, estatistikoak erabiliko ditugu parametroak estimatzeko edo asmatzeko. Estatistika inferentzialean, parametroak zein baliorekin identifikatzen diren bakarrik ez zaigu interesatzen, batzuetan guk lortutako datuak ea parametro batetik estatistikoki bereizten diren ere jakin nahi izango baitugu. Galdera horiei erantzuteko, autoestimuaren batez bestekoaren lagin-banaketa ezagutu beharko dugu. Hala, ondorengo galderei erantzuteko aukera izango dugu: Nolako autoestimuaren batez bestekoa egongo da populazioan? Edota bereizten al da nik lortutako autoestimuaren batez bestekoa populazioaren batez bestekotik? Aldagaiaren lagin-banaketan oinarrituko gara inferentziak egiteko. Datuak aztertzeko, bi teknika erabiliko ditugu inferentziak egiteko: Konfiantza-tarteak (aipatutako lehenengo galderari erantzuteko) eta hipotesi-testak (bigarren galderari erantzuteko).

Hirugarren pausoa. Prozedura. Inferentziak egiteko tekniken prozedura ezin da ulertu oinarrizko suposizio bat garbi izan gabe. Ikertzaileak munduari begiratzen dionean, dena zoriz gertatzen dela suposatzen du: munduan gertatzen diren gauzak kasualitatez gertatzen dira; gertaerak ez daude elkarri lotuta, independenteak baitira. Gouldek (2006) bere liburuan deskribatzen duen bezala, zoriak duen esanahia kontrajarria da alor zientifikoan eta mundu errealean. Mundu errealean, zoriak kaosa, nahastea, irrazionaltasuna, zalantza esan nahi du. Zoriak adierazten du gertaerak aurreikusi ezin direla, eta horrek beldurra sortzen du guregan. Gizakiok gertaerak aurreikusi nahi ditugu, eta, horrela, gure etorkizuna kontrola dezakegu. Goizean, leihotik begiratzen dugu egunean zehar erabiliko dugun arropa aukeratu aurretik; isildu egiten gara esan nahi duguna besteari min egingo diola aurreikusten badugu, eta, horrela, harremanak mantentzen ditugu; etxe-eraikuntza malguak egiten ditugu lurrikaren efektuari aurre egiteko… Beraz, mundu errealean, aurreikusteko ezintasuna beldurgarria da.

Aitzitik, ikuspegi zientifikotik ikusita, zoriaren esanahia, hain justu, kontrakoa da. Zoriari esker, estatistika inferentziala egin dezakegu. Hau da, zoriak aurreikuspenak egiteko aukera ematen digu! Eskerrak aldagai psikologikoak zoriz banatzen direla populazioan! Pertsona batzuek estimu handiagoa dute beste batzuek baino; beste batzuk oldarkorragoak dira beste batzuk baino… Printzipioz, Kepak duen autoestimuak ez du zerikusirik Mariak duenarekin; Mariak duen oldarkortasun maila ez dago lotuta Ireneren oldarkortasun mailarekin; Irenek eta Jonek duten bizitza-asetasun maila ez daude lotuta. Gertaera guztiak independenteak eta zorizkoak izatea da inferentziaren oinarria. Suposizio horretan oinarritzen garelako dugu posible populazioari buruzko informazioa izatea. Aldagaiak, autoestimua kasurako, zoriz banatzen direlako ezagut ditzakegu lagin-banaketak. Hainbat *zorizko banaketa* ezagutzen ditugu eta erabiliko ditugu: banaketa normala, Studenten T-a, Khi karratuarena, Fisherrena eta abar.

Beraz, aldagai psikologikoak, populazioan, zoriz banatzen dira eta aldagai psikologikoen puntuazioak populazioan agertzeko probabilitatea ezagutzen dugu (lagin-banaketa). Horrek garbi gelditu behar du inferentziak egiten hasteko. Adibidez, demagun adimen-test bat dugula populazioan zorizko banaketa normalari jarraitzen diona. Horrek esan nahi du populazio gehienak tarteko

puntuazioak lortuko dituela, eta batzuek bakarrik, muturreko puntuazio baxuak eta altuak. Beste modu batean esanda, demagun estimatzen dela populazioaren %95ek lortzen duen puntuazioa 3 eta 7 punturen artean dagoela. Populazio gehiena bi puntu horien artean kokatzen denez, pertsona horien elkarren arteko ezberdintasunak zoriari egotziko dizkiogu. Izan ere, tarte horren barruan dauden pertsonek antzeko adimena dute, eta elkarren artean dauden ezberdintasunak zorizkoak izan daitezke; hau da, ezberdintasun horiek estatistikoki ez dizkiogu benetako adimen-ezberdintasunei egotziko. Izan ere, posible litzateke tarte horren barruan kokatzen diren puntuazioen ezberdintasunak adimena ez den beste faktore batzuen eragina izatea. Agian, batzuek gaizki egin dute lo aurreko gauean, edo nekatuta zeuden, edota adimen-ariketa ez dute ondo ulertu. Tarte horren kanpoko puntuazioak, aitzitik, adimen-ezberdintasunei egotziko diegu.

Adibidea: Adibide honetan, honako galdera honi erantzungo diogu: Bereizten al dira populazioko batez bestekoa eta gure laginean aurkitutako batez bestekoa? Beste modu batean esanda, bi batez bestekoen artean dagoen diferentzia zoriari zor diogu, ala esanguratsua da estatistikoki? Badakigu adibide gisa erabiltzen dugun populazioan laginen % 95ean 3 eta 7 punturen bitarteko batez bestekoa lortuko dela (autoestimua aldagaiaren lagin-banaketa aztertu baitugu). Demagun populazio horretatik zoriz 30 pertsona hautatzen ditugula eta haiek lortutako adimenaren batez bestekoa 8,5 dela. Ez al da arraroa, zoriz hautatu badira, 8,5 puntu lortzea, kasuen % 95ean espero litekeena 3 eta 7 punturen arteko puntuazioa bada? Bai, arraroa da eta, beste moduan esanda, ez da probable. 3 eta 7 tartearen barruan ez dagoenez, aldea esanguratsutzat joko dugu. Kontuan hartu populazioaren % 5 bakarrik kokatzen dela 3 eta 7 tartetik kanpo. Orduan, lortutako batez bestekoa ez diogu zoriari egotziko, aldea esanguratsutzat jotzeko bezain handia baita. Benetako adimen-ezberdintasunek egon behar dute hain batez besteko altua izateko! Populazioaren batez bestekoa eta laginean lortutakoa elkarren artean ezberdinak dira estatistikoki. Ezberdintasuna esanguratsua da. Hau da erabiliko dugun logika.

Estatistika inferentzialaren logika aurkezteko, lagin bakarraren kasua aipatu dugu, non populazioaren batez bestekoa lagin batean lortutako batez bestekoarekin konparatzen baita. Prozedura berdintsua erabiliz, problema eta

galdera ezberdinei erantzun ahal izateko: bi populazio konparatuz, populazio bakarreko binakako datuak konparatuz, bi populazio baino gehiago konparatuz eta abar. Ordezko teknikak ere baditugu lagin-banaketa ez dugunean ezagutzen erabiltzeko. Beraz, atal honetakoa hasiera besterik ez da, baina estatistika inferentzialeko oinarrizko suposizioak ezarri ditugu.

V. DATU PROZESUA TEKNOLOGIA ERABILIZ

5.1. Kalkulagailua nola erabili

Aurkibidea

1. Helburuak
2. Sarrera
3. Kalkulagailuko teklak eta haien funtzioak
4. Moduen eta funtzioen menua
5. Eragiketen emaitza
6. Memoria independentea
7. Eragiketa asko egiteko agindua
8. Emaitzen aurkezpen esponentziala
9. *Reset* egiteko aukera
10. Aldagai bakarreko kalkulu estatistikoak
11. Bi aldagaiko kalkulu estatistikoak
12. Ariketak
13. Emaitzak

1. Helburu didaktikoak

- Kalkulagailuaren oinarrizko funtzioak ezagutzea.
- Memoria ezabatu eta gordetako datuekin eragiketak egiten ikastea.
- Estatistika-funtzioak ezagutzea eta emaitzak lortzea: aldagai bakarrekoak (SD) eta bi aldagaikoak (LR).

2. Sarrera

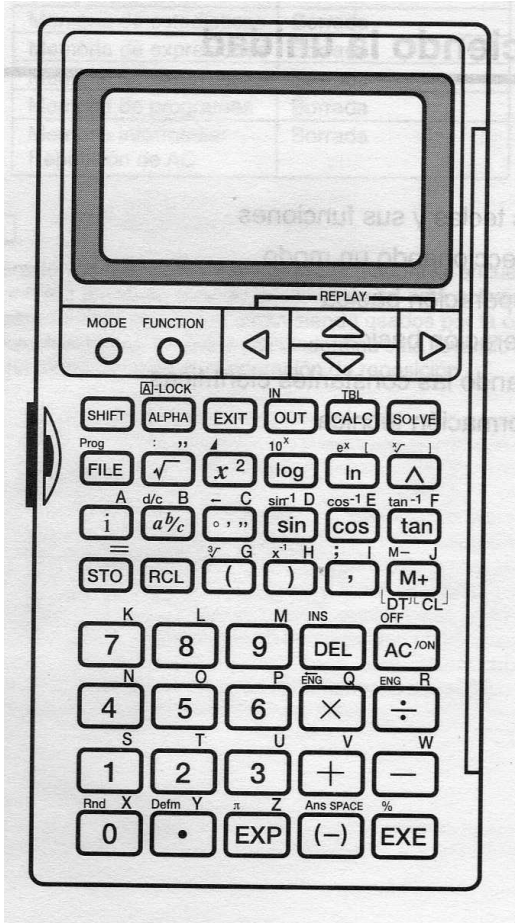
Kalkulagailuari arreta gehiago jarri behar litzaioke; matematikaren zenbait kontzeptu eta prozeduren ikaskuntzan, laguntza handikoak izan daiteke. Datuak aztertzeko, erabilgarria da honako eginkizun hauetarako: oinarrizko eragiketa aritmetikoak, berreturak, faktorialak, zenbaki aleatorioak, batukariak, zenbatzeko teknikak, estatistikoak eta abar.

Atal honetan, edozein kalkulagailu erabiltzeko ezagutza orokorrak

aurkeztuko dira, eta, zehazki, CASIO 4800P kalkulagailuaren funtzionamendua deskribatuko da, adibide gisa, ezinezkoa delako guztiena azaldu. Gainera, beste arrazoi bat dago atal honetako azalpenak, hain justu, lehen aipatutako kalkulagailu-marka eta -ereduan oinarritzeko: lehenengo mailako ikasleei gomendatzen zaielako.

3. Kalkulagailuko teklak eta haien funtzioak

Kalkulagailu zientifikoek, normalean, funtzio gehiago dituzte botoi edo tekla baino; beraz, tekla berak bi edo hiru funtzio izan ditzake. Hori horrela den ikusteko, eta tekla horiek zein diren eta zein funtzio betetzen dituzten ikusteko, kalkulagailuari adi-adi begiratu behar diogu. Tekla askok gainean edo azpian zerbait idatzita eduki ohi dute, idatzita agertzen den hori(ek) d(ir)a botoi horrek d(it)uen beste funtzioa(k). 2. eta 3. aukerako funtzio horiek erabili ahal izateko, SHIFT eta beste botoi batzuk (ALPHA, INV, ...) erabili behar genituzke, kalkulagailuaren arabera. Beraz, baditugu 1. aukerako funtzioak edo funtzio primarioak, 2. aukerako funtzioak edo funtzio sekundarioak eta 3. aukerako funtzioak edo funtzio tertziarioak. Normalean, funtzio primarioa tekla sakatuta lortzen da.



Adibidez, CASIO 4800Pan, funtzio primarioa tekla zuzenean sakatuta lortzen da; bigarrena, berriz, SHIFT + tekla sakatuta (laranjaz agertzen diren ikurren funtzioa lortzen da) eta hirugarrena, ALPHA + tekla sakatuta (gorriz aurkezten den ikurraren funtzioa eskatzen da).

4. Moduen eta funtzioen menua

Kalkuluak egiten hasi baino lehen, modu egokia aukeratu behar da, MODE tekla sakatuz. Gehienetan, estatistikako kalkuluak egiteko, SD modua (aldagai bat) edo LR modua (bi aldagai) aurkezten dira. Kalkulagailu batzuetan, funtzioen menua agertzen da pantailan, FUNCTION botoia sakatuz. Casio 4800ean, DSP/CLR gisa agertzen dena oso funtzio garrantzitsua da . Funtzio horri dagokion zenbakia sakatu ostean, datuak aurkezteko eta datuak borratzeko menu antzeko bat agertzen zaigu. Hor ematen diren aukeretan, honako hauek dira erabilgarrienak eta garrantzitsuenak:

- **Fix** → Datuen aurkezpenean zenbat dezimal agertzea nahi dugun zehazteko.
- **Norm** → Bi aukera daude Norm1 edo Norm2. Norm1 aukeran, notazio esponentziala automatikoki erabiliko da 10^{-2} baino balio txikiagoekin eta 10^{10} baino balio altuagoekin. Norm2 aukeran, berriz, notazio esponentziala automatikoki erabiliko da 10^{-9} baino balio txikiagoekin eta 10^{10} baino balio altuagoekin.
- **Eng** → Ingeniaritzako notazioa aktibatzeko eta desaktibatzeko balio du.
- **Mcl** → Memorian sartuta ditugun aldagai guztien balioak borratzen ditu.
- **Scl** → SD moduan sortu diren aldagaiak borratzen ditu. Estatistikako modalitatean sartutako datuak ezabatzen ditu.

Edozein kalkulagailu zientifikotan egongo dira funtzio horiek eta lanean hasteko beharrezkoak dira. Adibidez, kalkulagailua itzali arren, estatistikako funtzioan, aurreko datuak gordetzen dira eta bereziaz ezabatu behar dira memoriatik.

Beste funtzio sorta erabilgarri bat MATH izenarekin agertzen da. Horri esker, kalkulagailuak txertatuta dauzkan hainbat funtzio zientifiko erabili ahal izango ditugu. MATH funtzio sortaren barruan, lau menu izango ditugu: integralena, diferentzialena eta zenbatzeko teknikak, kalkulu numerikoena, funtzio hiperbolikoekin eginiko kalkuluena eta ingeniaritzako notazioa. Hauek dira guri

interesatzen zaizkigun sinboloak:

- **x!** → Balio bat sartu ostean ikur hori sakatzen badugu, sartutako balioaren faktoriala lortuko dugu. n zenbaki oso eta positibo baten faktorialaren ikurra n! da. Berez, ondoz ondoko faktoreen biderkadura da, 1etik hasita eta n zenbakiarekin bukatuta, biak barne: n! = n x (n - 1) x (n – 2) x …x1. Kasu berezi gisa, 0! = 1 dela definitu da.
- **nPr** → Permutazioak kalkulatuko ditu (zenbatzeko tekniken atalean azaldu da kontzeptu hori). n: guztira dauden elementuen kopurua, eta r: aukeratzen diren elementuen kopurua. Hamar elementu launaka hartuta, zenbat aldakuntza desberdin eratzen dira? ${}_{10}P_4$=5040
- **nCr** → Konbinazioak kalkulatuko ditu (zenbatzeko tekniken atalean azalduko da kontzeptu hori). Hamar elementu launaka hartuta, zenbat konbinazio posible daude? ${}_{10}C_4$=210

5. Eragiketaren emaitza (Ans)

Eragiketa bat egitean lortutako emaitza hurrengo eragiketetan erabil daiteke, kalkulagailuak automatikoki emaitza hori gorde egiten baitu. Azken eragiketaren emaitza erabiltzeko, beraz, Ans funtzioa bilatu behar genuke gure kalkulagailuaren botoietan.

6. Memoria independentea

Memoria horri esker, zuzenean, M aldagaitik batu edo ken dezakegu M^+ edo M^- teklak erabiliaz. Funtzio hori oso erabilgarria da, adibidez, hainbat kalkulu egin nahi direnean eta haien emaitzak batu nahi direnean. Hori bai, kontuan izan behar dugu funtzio hori SD edo eta LR moduan ezin daitekeela erabili.

7. Eragiketa asko egiteko agindua eta eragiketen ordena

Zergatik lortzen dut erantzun okerra kalkulagailuan adierazpenak dituenean? Eragiketen ordenak garrantzi handia duelako.

Adibidez,

$$\frac{2x3+4^2}{2}$$

Hori honela sartu behar da: $(2x3 +4^2)\div 2$ eta emaitza 11 da.

Baina, parentesirik gabe sartzen badugu, $2x3 +4^2\div 2$, kalkulagailuak, lehenengo, 4^2 egingo du, 16; gero zati 2, 8; azkenik 6+8, eta emaitza 14 izango da.

Kontuan izan parentesirik gabe kalkulagailuak biderketak eta zatiketak egiten dituela lehenengo, eta gero, batuketak eta kenketak.

Kalkulagailu zientifikoek, besteak beste, badute beste abantaila bat, eragiketa asko sar daitezkeela da; hau da, oso eragiketa luze eta konplexuak sar ditzakegu, eragiketa sinpleak banaka sartu beharrean. Hala, adibidez, behean agertzen den adierazpena sar dezakegu, eta ez dugu eragiketa sinpleagotan zatitu behar. Hori bai, oso garrantzitsua da horrelakoetan parentesiak era egokian jartzea, bestela kalkulagailuak eragiketa ez baitu guk nahi bezala ebatziko.

$$X = \frac{3+\left[4*\frac{(5+4)}{3}\right]^2}{5}+8$$ Emaitza: 37,4

Kalkulagailuz egitekotan, dena jarraian: (((3+(4*(5+4)/3)^2)/5)+8=37,4

8. Emaitzen aurkezpen esponentziala

Kalkulagailu motaren, eta aukeratutako moduaren arabera, zenbaki kopuru maximo ezberdinak ager daitezke eragiketa beraren emaitza gisa. Adibidez, Norm1 moduan baldin bagaude, 1/200 = 5. E -03 agertuko zaigu, eta, Norm2 moduan baldin bagaude, berriz, 1/200 = 0,005.

Aurkezpen esponentziala oso erabilgarria da, batez ere zenbaki oso altu edo oso baxuekin, eta lehen begiratuan zein zenbakiz ari garen ulertzea errazten du. Esponentzialaren zeinua positiboa bada, koma eskuinerantz mugitu behar da, eta negatiboa bada, aldiz, ezkerrerantz. Hala, pantailan 1.2 E+12 agertzen bada ($1,2 \times 10^{+12}$ esanahi du), 1.200.000.000.000 zenbakia izango da, eta 1.2 E -05 ($1,2 \times 10^{-5}$), berriz, 0,000012 zenbakia.

9. *Reset* egiteko aukera

Aukera horri esker, kalkulagailuaren hasierako jatorrizko balioak edo konfigurazioa berrezar dezakegu. Dena den, kontuan izan behar da hori egiten badugu, kalkulagailuaren memorian genuen informazio guztia galduko dugula. *Reset* aukera kalkulagailu gehienek izaten dute, eta menuan ager daiteke edo, bestela, kalkulagailuaren atzeko aldean, botoitxo bat ere egon ohi da. Botoitxo hori sakatzeko, puntadun zerbait erabili behar da; sakatu ostean, normalean, kalkulagailuak berresteko eskatuko digu.

10. Aldagai bakarreko kalkulu estatistikoak

Gidaliburua kontsultatu behar da kasu bakoitzean, baina oinarrizko analisi estatistikoak egiteko prozedura honako hau da:

a) Memoria garbitu
b) “Mode” funtzio egokia jarri: SD (aldagai bat) edo LR (bi aldagai)
c) Datuak sartu
d) Emaitzak lortu

Kalkulagailua SD moduan ipintzen badugu, aldagai bakarreko eragiketa anitz egin ahal izango ditugu; besteak beste, populazioaren desbideratze tipikoa, laginaren desbideratze tipikoa, datuen batez bestekoa, datuen berreturen batura eta datu kopurua tekla bati emanez soilik lor ditzakegu. Horretarako, noski, lehenik eta behin, kalkulagailuari X-ren balio guztiak sartu behar zaizkio. Datuak sartzeko, aski da balioak banaka sartzea eta balio bakoitzaren ostean DT edo M+ tekla sakatzea; balio bera behin baino gehiagotan sartu nahi badugu, berriz, aski da balioa sartzea, gero SHIFT tekla sakatu eta maiztasuna ipintzea, hau da, datu hori zenbat aldiz sartu nahi dugun ipintzea. Hemen esan beharra dago kalkulagailu guztiek ez dutela maiztasunak sartzeko aukerarik.

Datu guztiak sartu ostean, menura joan behar dugu, eta *Result* atalean agertuko zaigu kalkulagailuak eman diezagukeen informazioa, adibidez desbideratze tipikoa, edo datuen batez bestekoa. Edozein modutan ere, kalkulagailu bakoitzean ikasi behar da nola lortzen diren emaitzak. Honela azaldu daitezke:

1. $\bar{X}$ → Datuen batez bestekoa.
2. Xσn → X-en datuekiko populazioak duen desbideratze tipikoa.
3. Xσn-1 → X-en datuekiko laginak duen desbideratze tipikoa.
4. $\sum x^2$ → X-en datuen berreturen batura.
5. ∑x → X-en datuen batura.
6. n →zenbat datu ditugun.

Memoria borratu

Datuak sartu aurretik, oso garrantzitsua da memoria hustea!! Hori egiten ez badugu, kalkulagailuak pentsatuko du lehenagoko saioren batean X-rako sartu genituen datuen jarraipen bat dela, eta kalkulu guztiak X-ren balio guztiekin egingo ditu, orain sartutakoekin eta lehendik zituenekin.

- Memoria nola borratu → Kalkulagailuaren erabilera orokorrean aipatu bezala, memoria estatistikoa borratzeko, DSP/CLR funtziora heldu behar dugu, eta, horren barruan, **Scl** funtzioa aurkitu. Agindu hori ematen da Casio 4800P ereduan.

Memoria zein egoeratan dugun ikusteko, menura joan eta n-ri dagokion zenbakia sakatu besterik ez dugu; emaitza 0 bada, memoria hutsa dago; bestela, baditu datuak eta borratu egin behar dira.

Datuak sartu

Ariketa: Beheko taulako datuen estatistikoak kalkulatu (batez bestekoa, laginaren eta populazioaren desbideratze tipikoa, ∑x, $\sum x^2$). Gainera, lortu aldagaiaren balio bakoitza batez bestekotik zenbat urruntzen den.

X_i	n_i
51	5
52	3
53	2
54	2
55	2

Teklen eragiketa: CASIO 4800P

51 SHIFT ; 5 DT

⇩ ⇩

X-aren balioa Maiztasuna

52 SHIFT ; 3 DT

X-aren balioa Maiztasuna

…..

Horrela jarraitu datuak sartzen.

<u>Emaitzak nola lortzen diren</u>

Datuak sartu ondoren, kalkulagailu bakoitzak emaitzak lortzeko bide zehatza du. Batzuetan, urdinez agertzen dira tekla batzuen ondoan zenbait adierazpen. Adibidez, Casio 4800Pan, FUNCTION 7 STAT, edo, emaitzak guztiak agindu batekin ikusi ahal izateko, 4800Pan FUNCTION 8 RESULTS.

Emaitzak:

- $\bar{X} \rightarrow 52{,}5$
- Xσn → 1,4516
- $X\sigma n_{-1} \rightarrow 1{,}5063$

- $\sum x^2 \rightarrow 38617$
- $\sum x \rightarrow 735$
- $n \rightarrow 14$
- $X\sigma n_{-1}{}^{2} \rightarrow 2{,}269$
- FUNCTION 7 3 X^2 EXE
- $55\text{-}\bar{X} \rightarrow 2{,}5$
- $54\text{-}\bar{X} \rightarrow 1{,}5$

11. Bi aldagaiko kalkulu estatistikoak

Kalkulagailua LR moduan ipiniz gero, X-ri eta Y-ari dagozkion datuak sar ditzakegu, eta, horren ondorioz, orain artekoaz gain, erregresioaren kalkuluak egiteko aukera izango dugu.

- <u>Erregresio zuzenaren ekuazioa: Y = a+bX</u>

Lehen bezala, oraingo honetan ere, oso garrantzitsua da datuak sartzen hasi aurretik kalkulagailuaren memoria hustea edo hutsa dagoela ziurtatzea, hori egin ezean aurretik sartuta geneuzkan datuekin nahasiko baitira datu berri horiek.

Kontuan izan behar dugu bi aldagaien datuak sartu behar ditugula, x-renak eta y-arenak, eta, kasu batzuetan, maiztasuna ere bai. Casio 4800P erabiliz gero, honako tekla hauek sakatu besterik ez dago: < x-ren balioa > **,** < y-ren balioa > DT.

X	Y
10	20
35	42

Adibidez, 10, 20 DT 35, 42 DT.

- Datu berdinak sartu nahi baditugu, adibidez X-rako 10 balioa eta Y-rako 30 balioa bi aldiz sartu nahi baditugu, behin sartu eta DT bi aldiz sakatzea aski dugu.
- Bestalde, bi aldiz izan beharrean hamar aldiz balio berdin horiek sartu nahi baditugu, hauxe egin behar genuke: 10 **,** 30 SHIFT **;** 10 DT

- Datuak memorian sartu ostean borratu nahi baditugu, prozesua antzekoa da, baina, amaieran, DT sakatu beharrean CL sakatu behar da. Hori bai, kontuan izan datuak borratu ahal izateko ezinbestekoa dela datu horiek zein diren jakitea.

Datu guztiak sartu ondoren, menura joaten bagara, kalkulagailuak guk sartutako datu horiekin kalkula ditzakeenak agertzen zaizkigu. Aldagai bakarrarekin ari ginenean baino gehiago ditugu orain; hona hemen estatistiko berrien esanahia:

- $\bar{Y}$ → Y-ko datuen batez bestekoa.
- Yσn → Y-ko datuekiko populazioak duen desbideratze tipikoa.
- Yσn-1 → Y-ko datuekiko laginak duen desbideratze tipikoa.
- $\sum y^2$ → Y-ko datuen berreturen batura.
- $\sum y$ → Y-ko datuen batura.
- $\sum xy$ →X-ko eta Y-ko datuen batura.
- A → Erregresio-formulako A konstantea.
- B → Erregresio-formulako B koefizientea.
- r → Korrelazio-koefizientea.
- $\hat{x}$ → x-ren balio estimatua.
- $\hat{y}$ → y-ren balio estimatua.

Adibidea: Hona hemen altuerari eta pisuari buruzko datu batzuk. Lehenik eta behin, erregresio lineal bat egin ezazu, erregresioaren formulako A, B eta r kalkulatu ahal izateko. Ondoren, erregresioaren formula erabili, 1,80 metroko altuerari dagokion pisua kalkulatzeko eta 65 kiloko pisuari dagokion altuera kalkulatzeko.

Altuera (m)	Pisua (Kg)
1,50	47
1,54	48,7
1,60	53
1,65	56
1,70	59

Datuak sartu ondoren, aldagai bakarreko kasuetan bezala lortzen dira emaitzak.

Emaitzak:

7. A → -45,63
8. B → 61,56
9. r → 0,998
10. 1,8 $\hat{y}$ → 65,17
11. 63 $\hat{x}$ → 1,76

11. Ariketak

1. Burutu kalkulagailuz eta eskuz adierazpen hau:

$$\frac{4^5 + 5\sqrt{10} * 9 - 70}{8} * 5$$

2. Irakasle batek A eta B ikastaldeek hizkuntzetarako zer-nolako gaitasun maila duten jakin nahi du. Horretarako, ikastalde bakoitzetik, 10 ikasle aukeratu ditu. Honako emaitza hauek lortu ditu:

A taldea	5	3	8	3	6	4	5	4	7	6
B taldea	4	9	1	2	8	9	4	3	2	2

a) Zein da, batez beste, talde bakoitzeko jakite maila?

b) Zein taldek du sakabanatze maila handiena?

c) X aldagairen datuen batura kalkulatu.

d) X aldagaiaren datuen berreturen batura.

e) Laginaren tamaina zenbatekoa da?

3. Honako datu hauek kontuan harturik, kalkulatu:

X	70	63	72	60	66	70	74	65	62	67	65	68
Y	45	51	70	35	66	67	85	70	33	46	49	62

a) Y-ren X-rekiko erregresio-ekuazioa kalkulatu.

b) X = 50 izanda, zenbatetsitako balioa kalkulatu (Y').

c) X-en Y-rekiko erregresio-ekuazioa lortu.

d) Y = 80 izanda, zenbatetsitako balioa lortu (X').

4. 50 pertsonak osaturiko talde batetik, zoriz aukeratutako hirukoteak nahi ditugu. Zenbat talde desberdin har ditzakegu?

5. Honako faktorial hauek kalkulatu: 20! 30! 100!

12. Emaitzak

1. ariketa

685,79

2. ariketa

a) $\bar{X}$ = 5,58 $\bar{X}$ = 4,5

b) Sx= 1,66 Sx=3,10, B taldean

c) ∑x=51 ∑x= 44

d) $\sum x^2$= 285 $\sum x^2$= 280

e) nA: 10, nB: 10. Guztira: 20

3. ariketa

a) Y' = -131,07+2,81X

b) 9,32

c) X'= 55,76+0,196Y

d) 71,41

4. ariketa

50C3=19600

5. ariketa

a) $2{,}432902008.10^{18}$

b) $2{,}652528598.10^{32}$

c) Casio 4800P kalkulagailuan, 69! arte egiten ditu kalkuluak; hortik aurrera, errorea ematen du. Arrazoia da zenbaki oso altuak ateratzen direnez pantailan ez direla sartzen digitu guztiak.

5.2 Datuen azterketa Excel programa erabiliz

Aurkibidea

1. Helburu didaktikoak
2. Sarrera
3. Menuaren aurkezpena
4. Formulak sortzea eta funtzioak
    4.1. Zenbakien serieak sortu
    4.2. Eragiketen serieak sortu
    4.3. Zenbait funtzioren erabilera
    4.4. Grafikoak sortu
5. Ariketak
6. Emaitzak

1. Helburu didaktikoak

Excel programara modu orokorrean hurbiltzea. Excel zertarako erabiltzen den jakitea. Programa psikologiako lizentzian ez ezik, egunero ere erabil daiteke.

Tresna horren bitartez formulak sortzea, eta estatistika deskribatzaileko zenbait funtzio ezagutzea. Programa horri esker, datuen azterketa deskribatzailean erabiltzen diren formulak landu daitezke.

Excelek grafikoak sortzeko eta aurkezteko ematen dituen baliabideak ezagutzea eta erabiltzen ikastea.

2. Sarrera

Microsoft Office-ko programa bat da, eta Word programa bezain hedatuta dago. Ordenagailuak Word programa badu, litekeena da Excel programa ere izatea. Hona hemen programan sartzeko klikatu beharreko irudia.

Modu erraz eta intuitiboan lan egiteko programa izanik, gelaxka askoz osatutako koadrikula batez baliatzen da.

Excel programa erabil daiteke kalkulagailua erabiltzen den moduan. Horregatik, kalkulu-orri ere deitzen zaio. Era horretan erabiltzean, programak badu abantaila bat, alegia datuak kalkulagailuko leihoan baino hobeto ikus daitezkeela eta emaitzak erraz itsas daitezkeela Word gisako testu-programetan.

Estatistika deskribatzailea aplikatzean, Excel SPSS programa baino erabilgarriagoa da. Gainera, grafikoak egiteko programa sinple eta egokia da, eta grafiko horiek Word formatuko txostenetan txukun aurkezteko aukera ematen du.

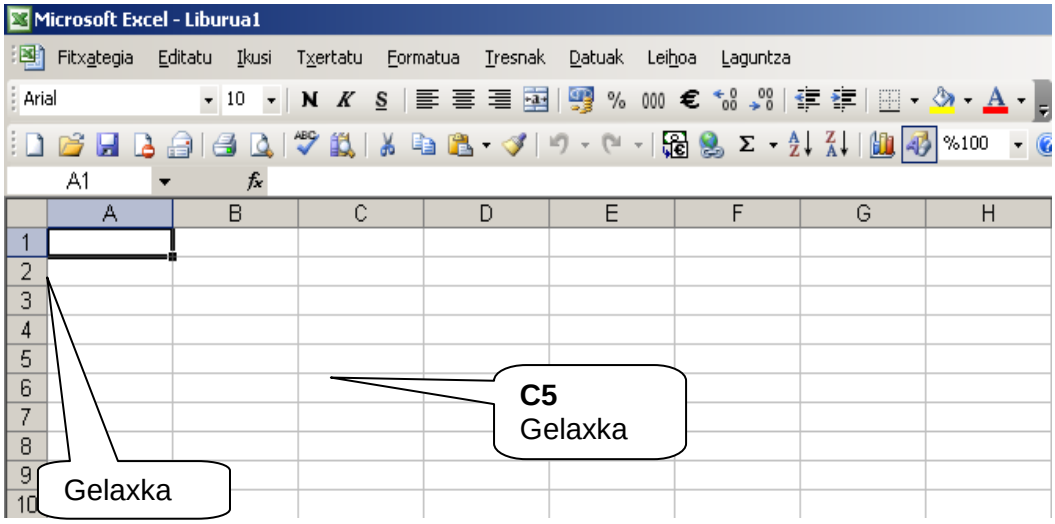
Psikologiako lizentzian, batez ere irakasgai hauetan erabil daiteke Excel programa: Datu-azterketa I eta II; Ikerketa-diseinuetan, eta Psikometrian. Eta, txostenetan, grafikoak aurkezteko gainerako irakasgai teorikoetan ere erabil daiteke.

3. Menuaren aurkezpena

Programan klikatuz gero, ondoren agertzen den leihoa irekitzen da. Datuak ordenatzeko eta aztertzeko aukera ematen duenez, orria gelaxkaz beteta agertzen da. Gelaxka bakoitza bi elementuren bitartez identifika daiteke (zutabeko letraren eta errenkadako zenbakiaren bidez).

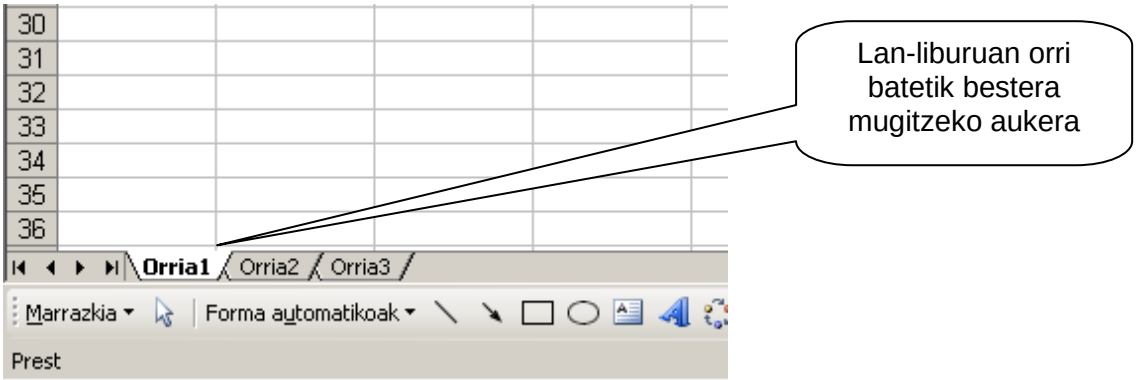
Menuan agertzen diren leiho batzuk Word programak dituenen antzekoak dira (adibidez, FITXATEGIA, EDITATU eta IKUSI). FORMATUAri esker, gelaxken ezaugarriak alda daitezke. TRESNAK izeneko menuak funtzio konplexuak erabiltzeko aukera ematen du; DATUAK izeneko leihoak, datuen inguruko eragiketak egiteko; eta LEIHOAk, leihoaren ezaugarriak aldatzeko.

Menuaren azpian dauden zenbait irudi erabiliko dira atal honetan, eta haren funtzioa aurrerago azalduko da.



1. irudia. Excel kalkulu-orria

Nahiz eta Word programaren antz handia izan, Excelek zenbait berezitasun ere baditu. Irekitako leihoaren azpian, ORRIA1, ORRIA2 eta ORRIA3 agertzen dira. Horrek hainbat kalkulu-orri daudela adierazten du, eta, orriak fondo zuria badu, aktibatuta dagoela esan nahi du (hau da, martxan). Nahi izanez gero, ORRIA2 edota ORRIA3 klika daiteke, eta bakoitza pantaila berria izango da. Orri horiek izendatu, gehitu eta ezaba daitezke saguaren eskuineko botoiaren menuaz baliatuz. Orrialde horiek erabilgarriak dira, batez ere, datuak antolatu eta ordenatzeko.



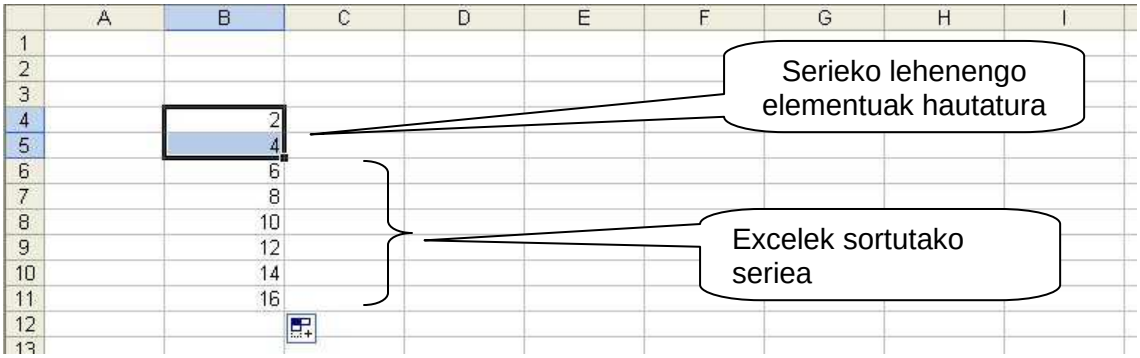
2. irudia. Exceleko fitxategiak dituen orriak

4. Formulak sortzea eta funtzioak

Datuak aztertzen eta formulak sortzen hasi aurretik, Excelek egin ditzakeen zenbait funtzio aurkeztuko dira.

4.1. Zenbakien serieak sortu

Excelek zenbaki serieak sortzeko aukera ematen du. Gelaxka batean 1 zenbakia idazten bada, zenbaki hori serie batean errepikatuko da. Hori lortzeko, zenbakiaren gelaxkan klikatu beharko da eta + kurtsorearen sinboloa gora, behera, eskuinera edota ezkerrera mugitu. Horri esker, zenbaki serieak etengabe errepika daitezke. Zenbaki serieak ez ezik, serie aritmetikoen serieak ere sor ditzake prozedura bera erabiliz. Kasu honetan, seriearen lehenengo elementuak hautatu eta + kurtsorearen sinboloa mugituz lor daiteke, ondoren agertzen den irudian bezala. Ondorengo irudian, lehenengo, 2 eta 4 zenbakiak idatzi ziren, eta gero + kurtsorea luzatu zen B11ra arte.

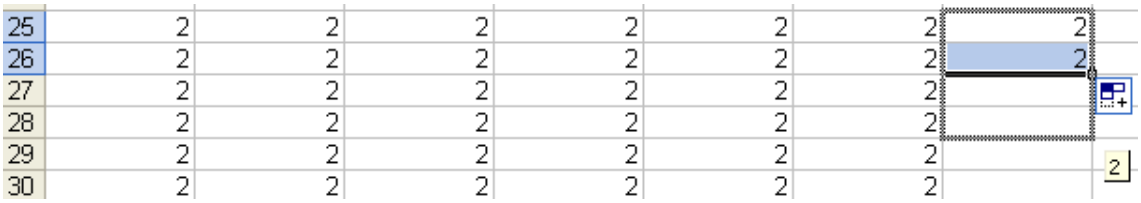


3. irudia. Serie aritmetikoak

1. Adibidea:

a) Zenbaki seriea sortu:

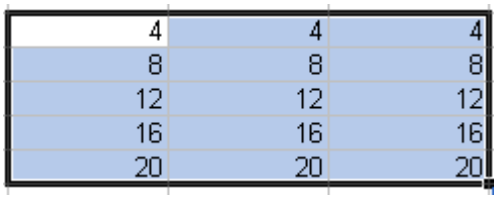
- 2 zenbakia idatzi E25 gelaxkan eta seriea sortu L25 gelaxkaraino.
- Errenkada hautatu eta seriea sortu E30-L30 gelaxketaraino.



4. irudia. Zenbaki serieak

b) Serie aritmetikoa sortu:

- I36 gelaxkan, idatzi 4 zenbakia eta I37, gelaxkan 8 zenbakia. Biak hautatu eta serieari jarraitu I40 gelaxkaraino.
- Seriea hautatu eta K zutaberaino eraman.



5. irudia. Zutabe serieak

4.2. Eragiketen serieak sortu

Excela kalkulagailua balitz bezala erabil daiteke. Horretarako egin behar den lehenengo gauza gelaxka bat hautatzea da (edozein) eta = tekla sakatu. Tekla hori sakatuz gero, gelaxkan idazten den guztia menuaren azpian dagoen leihoan ere agertuko da. Horri esker, formulazioak sor daitezke. Excelen eragiketak sortzeko, nahitaezkoa izango da parentesiak egoki erabiltzea.

Eragiketen teklak honako hauek dira: batuketak +, kenketak -, zatiketak / eta biderketak *.

2. Adibidea:

Eragiketak	*Emaitzak:*
1. =5+8 ok	1. 13
2. =(6+9)/7 ok	2. 2,14
3. =(15-34)*8 ok	3. -152
4. =((9+7)*3)/(7-9) ok	4. -24

Askotan, zenbaki kopuru handia izanda, balio bakoitzarekin eragiketa bera egin beharko da. Excel programak hori oso modu sinplean egiten du, aurrerago aipatu diren bi prozedurak nahasiz (serieak sortu eta eragiketak). Demagun 10 pertsonak autoestimu-eskala batean lortutako puntuazioa jaso dela, eta puntuazio bakoitza modu jakin batean eraldatu nahi dela eragiketa bat eginez. Hona hemen adibide bat:

Subjektuak	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Puntuazioa	2	4	6	3	2	1	3	7	6	5

Subjektu bakoitzak lortutako puntuazioa (Xi) H bihurtu nahi da, modu honetan hain zuzen: $H = \frac{X_i}{2}$

Xi puntuazio seriea Exceleko gelaxketan kokatu beharko da (bakoitza gelaxka ezberdinean, baina hurrenez hurren). Ondoren, orriaren edozein gelaxkatan klikatu formula eratzeko; = idatzi hasieran eta gero, dagokion formula. Adibidez: =B17/2. Modu antolatuan agertzeko, puntuazioaren azpian idatzi behar da. Formula sortzeko, Xi balioa non kokatzen den adierazi beharko da. Hori egiteko, bi modu daude: a) gelaxkaren izendapena adierazi (zutabea eta lerroa) edota b) balioa agertzen den gelaxkan bertan klikatu. Formula lehenengo gelaxkan kalkulatuta, hurrengo gelaxkak bete daitezke serieari jarraituz. Excelek eragiketa ondoko gelaxketara aplikatzen du automatikoki. Prozedura hori oso erabilgarria da, datu-azterketan batez ere.

B	C
2	=B17/2
4	
6	
3	
2	
1	
3	
7	
6	
5	

B	C
2	1
4	2
6	3
3	1,5
2	1
1	0,5
3	1,5
7	3,5
6	3
5	2,5

6. irudia. Eragiketa serieak

3. Adibidea:

X_i	X_i^2	$X_i^2 - 4,4$	$((X_i - 3)*2)/5$
5	25	20,6	0,8
4	16	11,6	0,4
5	25	20,6	0,8
2	4	-0,4	-0,4
5	25	20,6	0,8
5	25	20,6	0,8
5	25	20,6	0,8

X_i^2

E	F
5	=e17*e17
4	
5	
2	
5	
5	
5	

4. Adibidea:

Hemen bost pertsonak X, Y eta Z aldagaietan dituzten balioak:

X	2	5	2	2	2
Y	9	9	9	2	2
Z	1	2	1	1	1
H	-6,00	-3,00	-6,00	-6,00	-6,00
I	2,57	6,43	2,57	0,57	0,57
J	-6,33	-5,00	-6,33	-4,00	-4,00

Kalkulatu bost pertsonei dagozkien H, I eta J balioak:

1. H= X-8
2. I= (X*Y)/7
3. J= ((X-Z)*6)/Y-7

H

	A	B	C	D	E
1	2	5	2	2	2
2	9	9	9	2	2
3	1	2	1	1	1
4	=A1-8	-3	-6	-6	-6

I

	A	B	C	D	E
1	2	5	2	2	2
2	9	9	9	2	2
3	1	2	1	1	1
4	-6	-3	-6	-6	-6
5	=(A1*A2)/7	6,42857143	2,57142857	0,57142857	0,57142857

J

	A	B	C	D	E
1	2	5	2	2	2
2	9	9	9	2	2
3	1	2	1	1	1
4	-6	-3	-6	-6	-6
5	2,57142857	6,42857143	2,57142857	0,57142857	0,57142857
6	=((A1-A3)*6)/A2-7		-6,33333333	-4	-4

4.3. Zenbait funtzioren erabilera

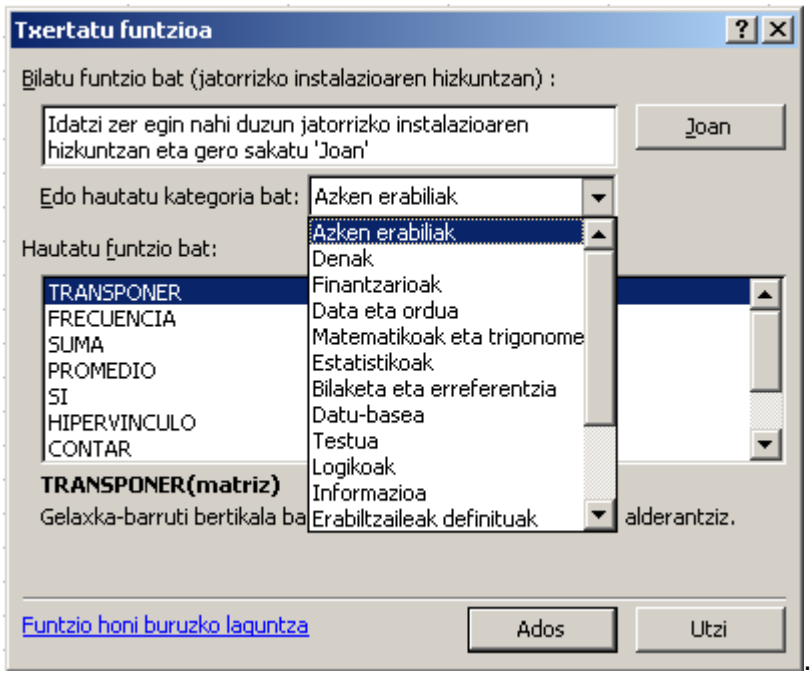
Psikologian, ikasgai askotan erabiliko diren estatistikoak Excelen bitartez kalkula daitezke. Aurrerago esandako moduan, Exceli esker, formulak sor ditzakegu, eta, hala, posible da estatistikoak kalkulatzea. Izan ere, Excelek lana aurrezten du, ohiko estatistikoen formulak funtzio moduan eskaintzen baititu. Hona hemen Excelek dituen zenbait funtzio:

- Batuketak (SUMA)
- Berretura (POTENCIA)
- Batez bestekoa (PROMEDIO)
- Mediana (MEDIANA)
- Desbideratze estandarra (DESVESTP)
- Desbideratze estandar zuzendua (DESVEST)
- Bariantza (VARP)
- Bariantza zuzendua (VAR)
- Normalizazioa (NORMALIZACION)
- Berreturen batura (SUMA.CUADRADOS)
- Pearsonen korrelazio-koefizientea (PEARSON)
- Erregresio-koefizientea (PENDIENTE)
- Erregresio-konstantea (INTERSECCION.EJE)

- Zorizko zenbakiak (ALEATORIO)

Funtzioak erabiltzeko, beharrezkoa da datu gordinak Exceleko orrian egotea. Betiere, gelaxka bakoitzean, balio bat ipini beharko da, eta balio guztiak segidan. Ez du axola balioak modu horizontalean edo bertikalean ipintzeak.

Balio guztiak sartuta, emaitza agertzea nahi den gelaxkan klikatu ondoren, menuaren azpian dagoen f_x sinboloa sakatu beharko da. Honako leiho hau irekiko da.



7. irudia. Funtzioen leihoa

Leiho honetan, Excelek eskaintzen dituen funtzio guztiak agertzen dira. Eragiketa BILATU FUNTZIO BAT leihoan idazten bada, zuzenean agertuko da. Dena den, funtzioen bilaketa errazteko funtzioak kategoriatan antolatuta daude. EDO HAUTATU KATEGORIA BAT leihoan klikatuz gero, kategoria guztiak agertzen dira. Datuen azterketan gehien erabiliko den kategoria ESTATISTIKOAK izango da. Excel funtzio berak baliatuz behin eta berriro erabiltzen bada, orduan, AZKEN ERABILIAK litzateke kategoria egokiena. Leiho horrek funtzio bakoitzaren definizio labur bat ere ematen du.

<u>Batukaria</u>

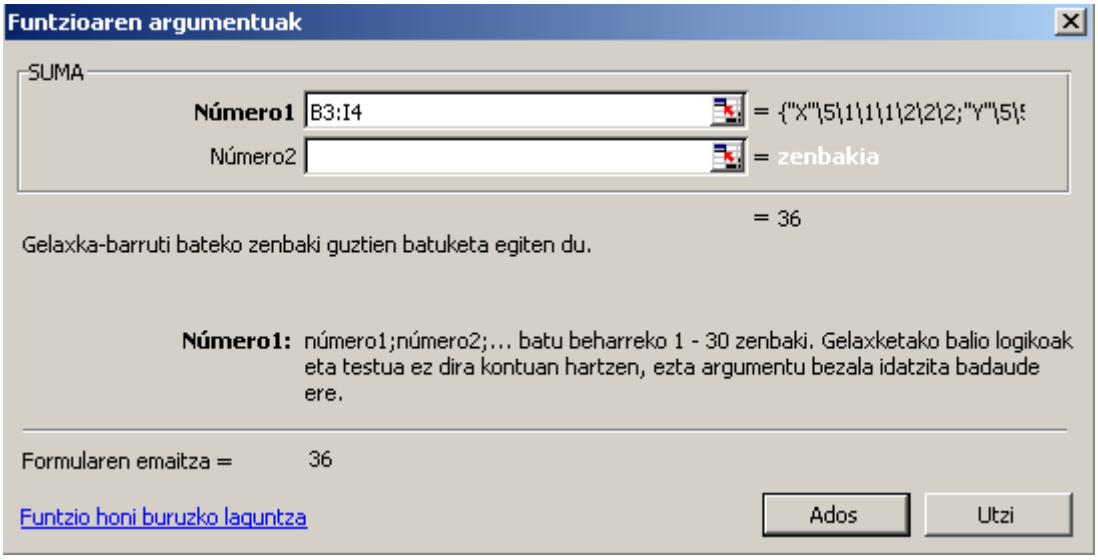
Zenbakiak batzeko, SUMA funtzioa erabiliko da. Demagun X eta Y aldagaien balioak batu nahi direla.

5. Adibidea:

X	5	1	1	1	2	2	2
Y	5	5	3	1	3	2	3

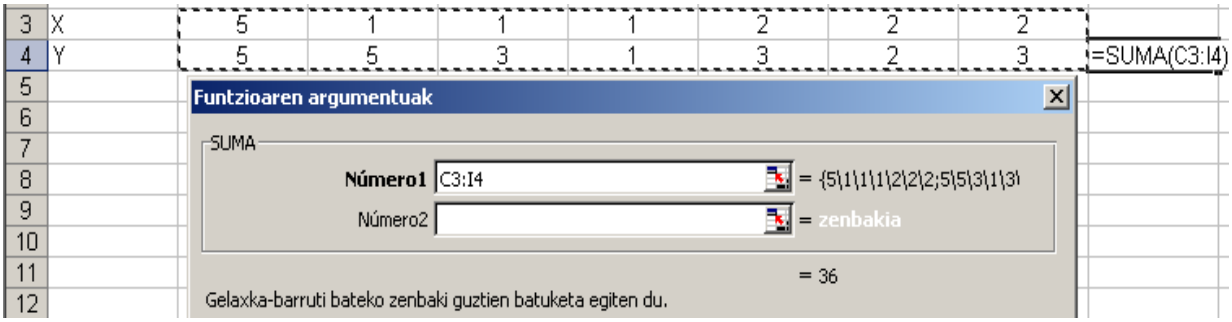
Emaitza: 36

Lehenik, emaitza agertzea nahi den gelaxkan klikatu beharko da. Bigarrenik, f_x klikatu eta SUMA hautatu. Ondoren, honako leiho hau agertuko da:



8. irudia. Batuketa funtzioaren leihoa

Leiho hori SUMA funtziorako agertzen bada ere, bestelako funtzioetan ere, antzekoak agertzen dira. Leiho horretan, programari adierazi behar zaio zein gelaxkatako zenbakiak batu nahi diren. Gogoratu gelaxka bakoitza izendatzeko zutabeko hizkia eta errenkadako zenbakia erabiltzen zirela. J7:J13 adierazpenak adierazten du Excelek J7 gelaxkan dagoen zenbakitik hasita J13 gelaxkan dagoen zenbakirainoko batuketa egingo duela.



9. irudia. Batuketa funtzioaren prozedura

Beste modu errazago bat gauza bera egiteko, NUMERO 1 leihoaren eskuinaldeko laukitxoan klikatzea da. Orduan, leihoa minimizatu egiten da (ondorengo irudian agertzen den moduan) eta zuzenki hauta daitezke batu nahi diren gelaxkak, balioak klikatuz eta aukeratuz. Leihoa berriro handitzeko, leihoaren eskuinaldeko botoian klikatu beharko da. ADOS klikatuz gero, emaitza agertuko da.

10. irudia. Batu behar den zenbaki seriea

Azkenik, SUMA funtzioa sarritan erabiltzen denez, kalkulu-orriko goiko menuan ere, badago, batukariaren sinboloarekin adierazita: $\sum$. Hori zuzenean erabil daiteke. Gelaxka bat sakatu, non batukariaren emaitza agertzea nahi baita, eta, = sinboloari eman gabe, batukariaren sinboloa besterik ez da sakatu behar. Ondoko zenbakiak hautatuta agertuko dira, baina norberak interesatzen zaizkion elementuak hautatu beharko ditu. Orduan, OK klikatu eta emaitza agertu da.

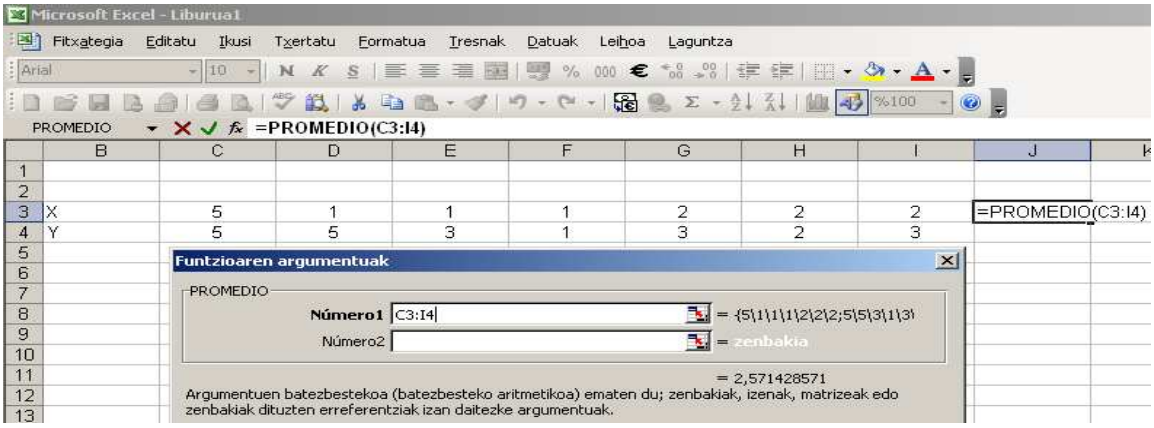
Batez bestekoa

Datu multzo baten batez bestekoa kalkulatzeko funtzioaren bitartez, berriro ere, balio guztiek Exceleko orri batean egon beharko dute. Lehenik, emaitza –hau da, batez bestekoa– agertzea nahi den gelaxkan klikatu beharko da. Bigarrenik, funtzioaren leihoa irekitzea eskatu beharko da, eta, han, estatistikoen kategorian kokatzen den PROMEDIO estatistikoa hautatu beharko da.

Adibidea 6:

Goiko taulan dauden datuak erabiliz, balio guztien batez bestekoa kalkulatu.

Emaitza: 2,57



11. irudia. Batez besteko funtzioaren leihoa eta prozedura

<u>Mediana</u>

Balio multzo baten mediana kalkulatzeko, hurrengo pausoak eman beharko dira. Lehenik, datuak kalkulu-orrian idatzi beharko dira. Bigarrenik, edozein gelaxkatan, = idatzi, eta f_x klikatu. Funtzioen leihoan, estatistikoen kategorian dagoen mediana funtzioa hautatu. Hirugarrenik, NUMERO1 leihoaren eskuinaldeko laukitxoa klikatuz, funtzioen leihoa minimizatu, mediana kalkulatu nahi den balio multzoa hautatzeko. Leihoa berriro maximizatu eta eragiketa onartu. Balioa hautatutako leihoan agertuko da.

7. Adibide :

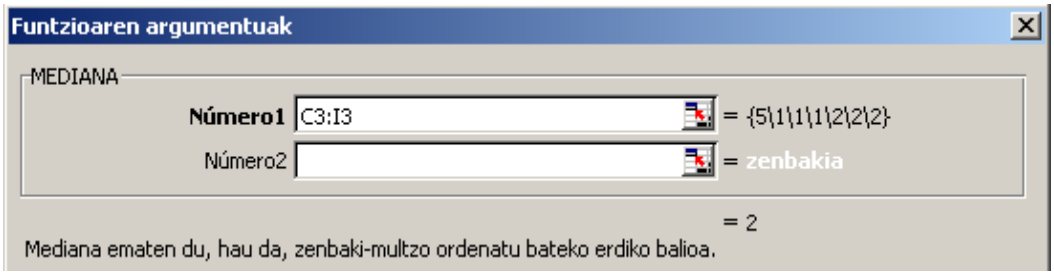
X eta Y aldagaien mediana eta desbideratze estandarra kalkulatu.

X	5	1	1	1	2	2	2
Y	5	5	3	1	3	2	3

Emaitza:

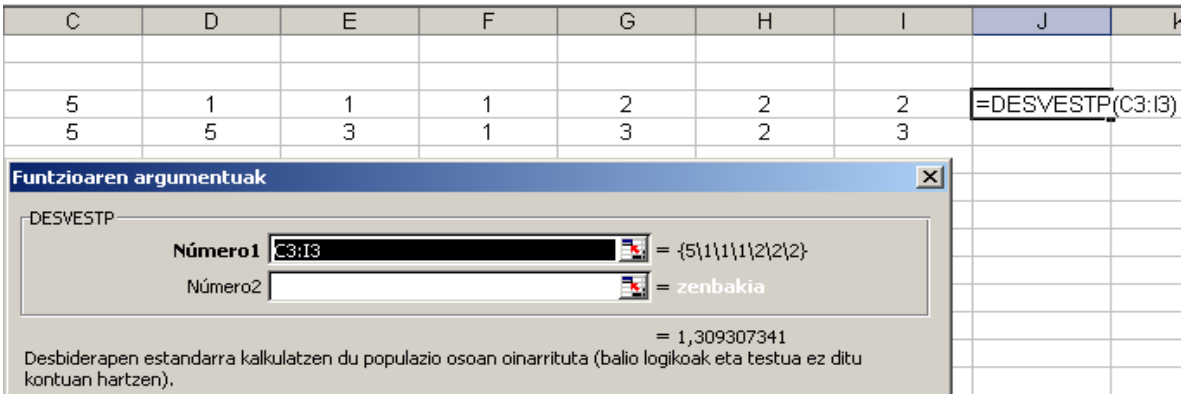
Medianak: 2 eta 3; Desbideratze estandarrak: 1,31 eta 1,36.

X aldagaiaren mediana nola kalkulatu:



12. irudia. Mediana funtzioaren leihoa

X aldagaiaren desbideratze tipikoa nola kalkulatu:

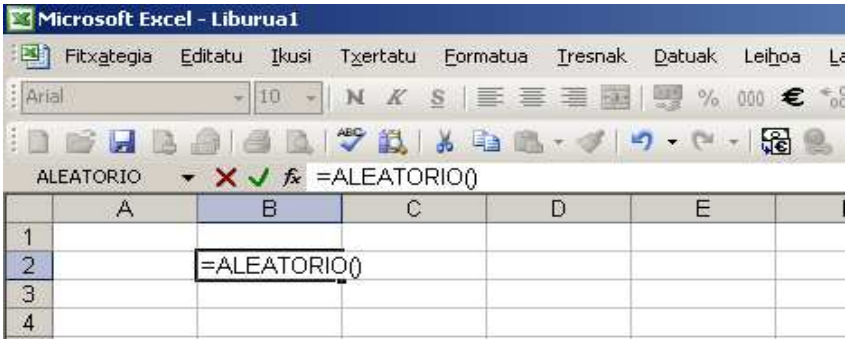


13. irudia. Desbideratze tipiko funtzioaren leihoa

<u>Zorizko zenbakiak</u>

Excelek zorizko zenbakia sortzeko programa du, ALEATORIO edo ALEATORIO.ENTRE deitzen dena. Programa horien berezitasuna zera da, orrialdeko beste gelaxketan klikatu ondoren programa aktibatu egiten dela, eta zorizko zenbakiak etengabe aldatzen direla. Beraz, zenbaki serie bat finkatu nahi izanez gero, KOPIATU eta ITSATSI BEREZIA (BALIOAK) menuak erabil daitezke.

Zero eta bat bitarteko zorizko zenbakiak lortzeko, gelaxka batean, =ALEATORIO () idatzi eta onartzearekin nahikoa da. Gehiago behar izanez gero, serie bat sor daiteke.



14. irudia. Zorizko zenbakiak sortzeko funtzioa

A eta B zenbakien arteko zorizko zenbakia sortzeko, honako formula hau erabiltzen da: ALEATORIO()*(b-a)+a. Demagun, 1 eta 35 bitarteko zorizko zenbakiak sortu nahi ditugula. Betiere, ezaugarri horretako zorizko zenbaki gehiago beharko bagenitu, seriea sortu behar genuke.

15. irudia. Tarte jakin baten barruan zorizko zenbakiak sortzeko funtzioa

4.4. Grafikoak sortu

Grafikoak sortzea Excel programaren erabilera nagusia da. Baliabide hori maiz erabiltzen da bi arrazoi nagusirengatik. Alde batetik, programa horrek eskaintzen duen tresna oso erraza eta malgua da, grafikoak modu askotan pertsonaliza baitaitezke. Bestetik, Excelen landutako grafikoak oso modu errazean itsas daitezke Word dokumentuetan. Hori oso erosoa izango da psikologiako ikaslearentzat, egingo diren txostenetan Exceleko grafikoak txerta daitezkeelako. Eta ez hori bakarrik, Word dokumentuetan itsatsitako grafiko horiek eraldatu ere egin baitaitezke handik.

a) Grafikoan bertan adierazita agertuko diren balioak. Exceleko taula batean aurkezten dira. Demagun 5. adibidean agertzen diren X eta Y aldagaien batez bestekoak adierazi nahi direla grafikoki. Hala balitz, X eta Y aldagaien batez bestekoak kalkulatu behar lirateke eta honela kokatu (adibidez):

X	2,00
Y	3,14

Orduan, lau gelaxka horiek hautatu beharko dira eta goiko menuan agertzen den grafiko-irudian klikatu. Grafikoen leiho laguntzailean irekitzen da, eta, pausoz pauso, egin behar diren aukeraketak ematen ditu, oso modu erosoan.

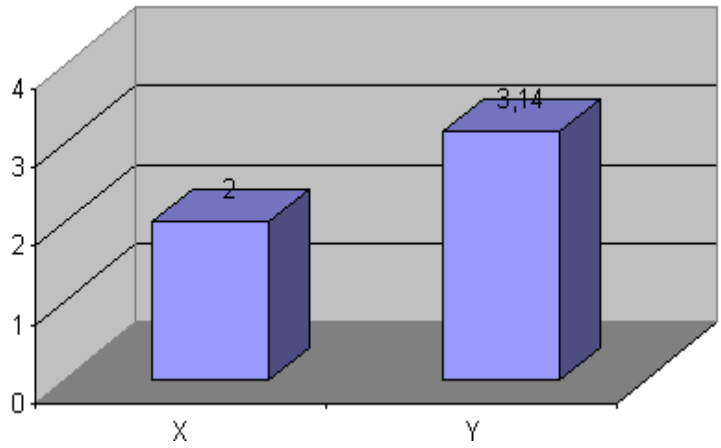
b) Lehenengo leiho laguntzaileak grafiko mota bat aukeratzea eskatzen du. DIAGRAMA MOTA leihoan agertzen diren aukeretan klikatuz, hainbat grafikoren adibideak agertuko dira. Demagun lehenengo grafiko mota hautatzen dela

(ZUTABEAK) lehenengo estiloarekin. SAKATU ETA EDUKI SAKATUTA ADIBIDEA IKUSTEKO botoia klikatuta mantenduz, zure datuekin grafikoak duen itxura aurkezteko aukera ematen du. Hautatu eta gero, HURRENGOA tekla klikatu beharko da.

c) Datuen jatorria lantzen da. Aldagaien balioak bereizteko erabiliko den modua aukeratzen da pauso honetan. Balioen deskribapena egin nahi den moduaren arabera, Excelek bi aukera ematen ditu. Leiho horrek grafikoak izango duen itxura ikusteko aukera ere ematen du. Hautatu eta gero, HURRENGOA klikatu beharko da.

d) Grafikoa aurkezteko, hainbat aukera agertzen dira. Lehenengo pantailan, grafikoaren izenburua adieraz daiteke, baita kategoria eta balioen ardatzetan adieraziko diren aldagaiak ere. Bigarren pantailan, ardatzetan agertzen diren balioak ikusgarri edo ez-ikusgarri bihurtzeko aukera ematen da. Hirugarren pantailan, grafikoan ikustea nahi diren lerroak definituko dira. LEGENDA leihoak zutabeen erreferentzia agertzea nahi den ala ez galdetzen du; eta, agertzen bada, non nahi den jartzea eskatzen du. Oro har, aldagai kategoriko bat baino gehiago erabili nahi denean behar izaten da. Erabiltzen ari garen adibidearen kasuan, ez da behar; beraz, hobe litzateke kentzea. Bosgarren pantailan, zutabeetan bertan grafikoari buruzko informazioa jartzeko aukera ematen du. Azkeneko leihoan, grafikoaren azpian datuen taula aurkezteko aukera ematen du. Pauso guztiak eman eta gero, AMAITU botoia klika daiteke, eta grafikoa jatorrizko orrian agertuko da.

Grafikoa sortu eta gero, kalkulu-orrialdetik bertatik, beraren ezaugarriak (formatua, koloreak…) eralda daitezke. Horretarako, grafikoaren ezaugarrietan bertan, bitan klikatu beharko da. Grafikoaren azkeneko bertsioa lortu denean, kopiatu eta Word formatuko dokumentuetan itsas daiteke. Word dokumentuan ere grafikoaren gainean bitan klikatuz, berriro ere, ezaugarriak alda daitezke.



16. irudia Barra-diagrama

5. Ariketak

1. Ariketa

X	5	1	1	1	2	2	2
Y	5	5	3	1	3	2	3

a) $\sum XY$ Ariketa hau hiru pausotan egin beharko da. Lehenik, balioak biderkatu; bigarrenik, biderketen seriea sortu, eta, hirugarrenik, emaitzak batu beharko dira.

b) $\sum (X-3Y)^2$ Ariketa hau ere hiru pausotan egin beharko da. Lehenik, POTENCIA funtzioa eskatu, X-3Y adierazpena zehaztuz; bigarrenik, seriea sortu; eta, hirugarrenik, batukaria erabili emaitzak batzeko.

c) Y aldagaiaren desbideratze estandarra kalkulatu dagokion funtzioa erabiliz.

d) X aldagaiaren mediana kalkulatu, funtzio egokia aukeratuz.

e) X eta Y aldagaietarako korrelazio-koefizientea kalkulatu dagokion funtzioa erabiliz. Korrelazio-funtzioak bi matrize eskatzen ditu. Lehenengo matrizean, X aldagaiaren datuak sartu behar dira, eta, bigarrenean, berriz, Y aldagaiari dagokionak.

2. Ariketa

Gipuzkoako 1.008 pertsonari beren osasun-egoera ebaluatzeko eskatu zitzaien, 1etik (oso txarto) 5erainoko (oso ondo) eskala batean. Honako emaitza hauek jaso ziren.

GUZTIRA	SEXUA		ADINA			
	Gizonak	Emakumeak	18-24 urte	25-44 urte	45-64 urte	65+
3,53	3,55	3,5	3,92	3,63	3,42	3,35

Adinaren araberako emaitzak adierazi grafiko batean (barra-grafikoa erabili)

- Izenburua ipini grafikoan
- Y ardatzean, 5 puntutako eskala zehaztu
- ‘legenda’ ezabatu
- Grafikoaren azpian datuen taula itsatsi. Datuen taula grafikoaren azpian agertzeko, DIAGRAMA AUKERAK leihoan dagoen DATU TAULA pantailan sartu behar da. Pantaila horretan, datuen taula agertzeko aukeran sakatu behar da.
- Grafikoaren atzealdea zuria izan dadila.

3. ariketa

Ondorengo taulan, sei lan-taldetako 1.008 pertsona egiten duten jarduera fisikoaren arabera sailkatu dira (maila txikiko jarduera, maila ertaineko jarduera eta maila altuko jarduera).

Jarduera fisikoaren maila	Enpresaburuak	Bulegoetako langileak	Nekazariak eta eraikuntza-langileak	Jubilatuak	Langabetuak	Ikasleak
Maila txikia	27,4	17,2	6	16,7	8,7	33,3
Maila ertaina	24,8	33,9	34,3	40,6	42,6	28
Maila altua	47,8	48,9	59,7	42,7	48,7	38,7

Sortu honako grafiko hauek:

a) Gazta motako grafikoa sortu enpresaburuen jarduera fisikoa deskribatzeko.
b) Barra/kono/zilindro grafikoaren bitartez, taulan dauden datu guztiak adierazi.
c) Grafikoak Word dokumentuan itsatsi eta handik ordenatu ardatzean “Pertsona kopurua” jarri grafikoan bitan klikatuz.

6. Emaitzak

1. ariketa

a) 50

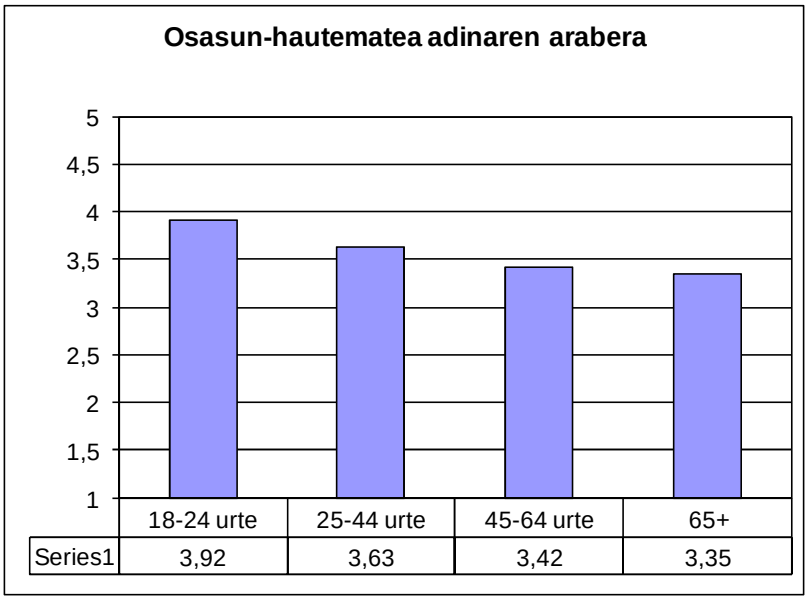
b) 478

c) 1,36

d) 2

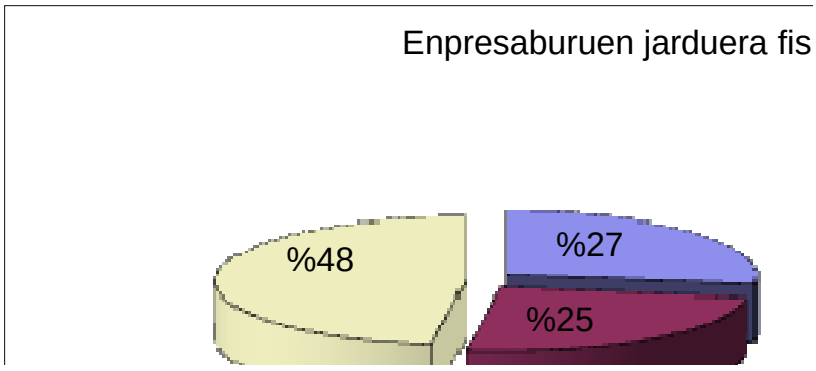
e) 0,48

2. ariketa

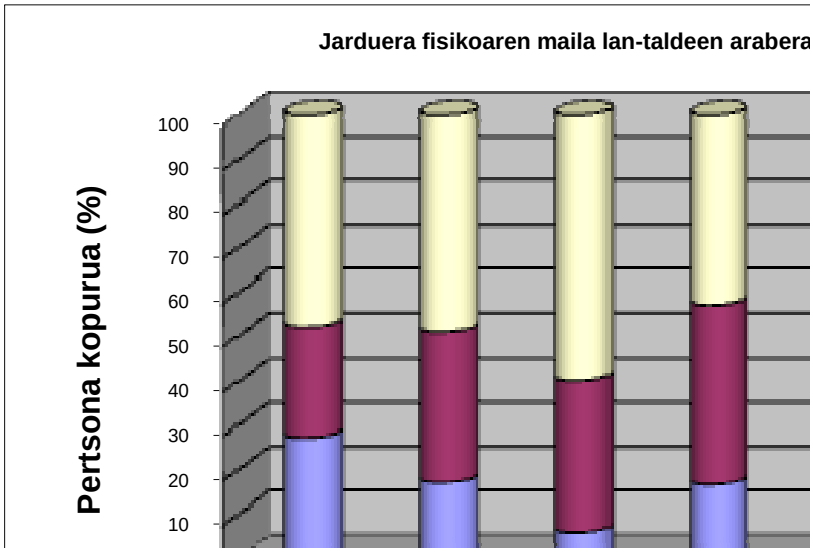


3 .ariketa

a)



b) eta c)


Jarduera fisikoaren maila lan-taldeen arabera
Pertsona kopurua (%)
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10

VI. ZENBAKI EZJAKINTASUNAREN ONDORIOAK

Aurkibidea

1. Helburu didaktikoak
2. Sarrera
3. Matematikarekiko iritzi okerrak
4. Matematika-ezjakintasuna eta sasizientziak
5. Matematika irakas-ikaskuntza prozesuko zailtasunak
6. Zenbakiekiko fobia

1.- Helburu didaktikoak

Gure bizitzan matematikaren garrantzia azpimarratzeko gai izatea eta matematika-ezjakintasunaren arrazoi nagusiak azaltzea.

Matematika-ezjakintasunak pertsonen jokabidean duen eraginaz ohartaraztea. Bereziki, sasizientzietan sinestearekin duen erlazioa adieraziz.

2.- Sarrera

Estatistikak eta Probabilitateak eragin handia du gizakiaren hainbat arlotako jokaeretan. Horrela, egunkaria irakurtzean, oinarrizko kontzeptuak behar dira hor agertzen diren taula eta grafikoen esanahia ondo ulertzeko. Komunikabideetan aurkezten diren datu horiek honako eremu hauetan kokatzen dira: kontsumoa eta zerbitzuak, iragarpen ekonomiko eta sozialak, boto-asmoa, jarrerei buruzko inkestak, besteak beste.

Behin baino gehiagotan entzuten dugu adierazpen hau: “Ikasgai guztien artean, Matematikan moldatzen nintzen beti okerren”. Zergatik gertatzen da hori? Allen Paulosen iritziz, hiru arrozoi nagusirengatik: matematikari buruzko iritzi okerrak, hezkuntza urria eta blokatze psikologikoa.

Pertsona askori iruditzen zaio badirela, alde batetik, matematikarako balio duten pertsonak, matematikako ariketei beti ebazpena aurkitzen dietelako, eta, bestetik, balio ez dutenak, beraz, erremediorik ez dutenak eta ez esperantzarik ere. Halako sentipenak sekulako oztopoak dira matematika-jakintzarako. Beti egin daiteke zerbait arazoak dituzten pertsonei laguntzeko. Badaude zenbait teknika matematika arloan emaitzak hobetzeko balio dutenak: zenbaki txikiagoak erabiltzea, zerikusia duten baina errazago ebatz daitezkeen problemak aztertzea,

marrazkiak edo diagramak egitea.

Matematika bizitzarekin zerikusirik gabeko abstrakzio bihozgabetzat jotzen duten askok, baina bizi ote liteke inor gutxieneko matematika jakintzarik gabe? Gabezia horren kalteak jorratzen dira atal honetan. Adibidez, matematikan ezjakina den jendeak joera handia izaten du gauzak pertsonalizatzeko eta sasizientzietan sinesteko. Jende askok “Zergatik niri?” galdera egiteko joera du. Pentsaera horrek estatistika-akatsen bat du. Ezbeharrak gertatzen dira, eta norbaiti gertatu behar zaizkie. Zergatik ez zuri? Probabilitatea eta logika ez dira matematikarientzat bakarrik; bizitzako egoera askotan, baliagarriak izango dira, oro har aurrean dugun errealitatea ongi ulertzeko.

3.- Matematikarekiko iritzi okerrak

Allen Paulosek matematikari buruzko bost iritzi oker aipatzen ditu “Zenbakirik gabe bizi” liburuan:

a) **Matematika kalkulua baino ez dela**. Liburu bat idazteko ez da nahikoa idazmakina erabiltzen jakitea, ezta matematiko ariketak egiteko kalkulagailuak nola funtzionatzen duen jakitea ere. Gure matematika-arazoak ez dira sortzen kalkulatzeko gaitasun-ezetik.

b) **Matematika guztiz gai hierarkikoa dela**. Matematikako zenbait arlotan, bada metaketa-alderdi bat, baina askok uste duen baino garrantzi gutxiago du sarritan; lehenengo mailako matematikako gaiak ez badira menderatzen, zaila egiten dela bigarren mailakoak ulertzea.

c) **Matematikak eta istorio-kontaketak badute elkarrekin zerikusirik.** Paulosek kontakizunen eta zenbakien arteko jokoa erabiltzen du bere liburuan. Matematika-irakaskuntzak alderdi jostagarriak eskainiko balitu, haren ustez, matematika ezjakintasuna ez litzateke hain hedatuta egongo.

d) **Matematika bakar batzuentzako gaia baino ez da**. Badira matematikarako besteek baino gaitasun handiagoa duten pertsonak, jakina, besteek baino hobeto idazten dutenak ere badiren bezala. Ia edonork uler dezake, lanerako baliagarria izateko zenbakiak eta probabilitateak, erlazioak eta arrazoibideak, grafikoak eta truke-indizeak zer diren eta kontzeptu horiek guztiek eguneroko bizitzako alor guztietan zer eginkizun duten.

e) **Matematikak sorgortu egiten gaituela hausnargai sakonetarako.** Ez

du zentzurik pentsatzeak zientzia bati buruzko ezagutza teknikoak menderatzen dituen pertsona bat ez dela gai izango bizitzaren misterioak eta konplexutasunak miresteko.

4. Matematika-ezjakintasuna eta sasizientziak

Matematika-ezjakintasuna eta sasizientzia elkarren eskutik ibili ohi dira, matematikan ezjakina den batek errazago onartzen duelako edozein baieztapen. Adibidez, numerologiak eremu zabala eskaintzen du norberak ikusi nahi duena ikusteko, zenbakien eta bizidunen arteko erlazio mistikoa adierazteko.

Medikuntza oso aproposa da aldarrikapen sasizientifikoetarako. Horrelako aktibitateetan, esku-hartzeak arrakasta izan duenean bakarrik gogoratuko dira segur aski, baina, batzuetan, berez sendatzen dira gaixotasunak; huts egindako kasu gehienak, berriz, ahaztu eta lurpean uzten dira. Zoriak dituen gorabeherak aski dira edozein tratamendurekin gerta daitezkeen “mirarizko sendatzeak” esplikatzeko.

Astrologia oso zabaldurik dagoen sasizientzia da; ia egunkari guztiek argitaratzen dute egunero beren horoskopoa. Badirudi jende askok onartzen dituela horoskopoko iragarpenak. Paulosek esaten duen bezala, kezkagarria da jendeak astrologoei sinestea, eta beldurra ematen du pentsatzea beste nori sinetsiko dioten. Eta are kezkagarriagoa da oraindik sineste horietan beren jokabidea oinarritzea. Bukatzeko, esan beharra dago astrologiarako bereziki –oro har, sasizientzietarako– egiazko zientzia dela antidotorik hoberena.

5. Matematika irakas-ikaskuntza prozesuko zailtasunak

Institutua da ikasleei matematika-oinarriak irakasteko leku egokia. Unibertsitatera iristen direnean, beranduegi izaten da askorentzat. Aljebra, geometria eta geometria analitikoaz zertxobait ulertarazteaz gain, batxilergoko ikasleei matematika finitu deitzen dena irakatsi beharko litzaizkieke Allen Paulosen iritziz. Gai garrantzitsuenen artean daude: konbinatoria, grafikoen teoria, jolasen teoria eta, bereziki, probabilitatea.

Lehen hezkuntzatik hasita Batxilergora arteko ikasketa-planetan Estatistika agertu arren, ikasle gehienek ez dute behar den maila lortzen. Segur aski, irakasteko metodoak aldatu beharko dira eta denbora gehiago ere eman Estatistikako edukiei.

Estatistikaren ikaskuntzak garapen pertsonalean laguntzen du, arrazoiketa

kritikoa garatzen baitu, proba objektiboen balioespenean oinarritzen delako; datu kuantitatiboak erabiltzen, gure iritziak kontrolatu edota beste batzuenak interpretatzeko gai izaten ere laguntzen du (Ottaviani, 1998). Matematikako ezagutzek garrantzi handia dute edozein pertsonarentzat gaur egungo gizartean, baina aitortu beharra dago ez dela lan erraza gai hau irakastea, kontuan izanik sarritan ikasleek motibazio gutxi eta matematikako ezagutza maila baxua dutela.

Oro har, ikaslearen motibazioa ikaskuntza-prozesuan parte hartzeko erabakiarekin lotuta dago. Horrek esan nahi du parte hartzeko erabakia ikasleak jarrita dituen helburuekin erlazionatuta dagoela. Edozein ikasleren helburua irakasgaiak gainditzea da, baina aukeratzen duten estrategia desberdina. Helmuga sinpleena izango da eskola magistraletara joan, buruketak egin edo akademia batean matrikulatu “nahiko” kalifikazioa lortzeko. Kasu horretan suposatzen da ikasleak epe motzeko ikuskera duela eta ez diola balio gehigarririk erantsiko bere prestakuntzari, gaiaren informazio pixka bat eskuratuta konformatuko dela.

Probabilitatearen inguruko kontzeptuak sinpleak iruditu arren, nahiko konplexuak dira, kontzeptu bakoitzak eremu jarraitu bat deskribatzen du, eta eremu horiek erlazionaturik daude, baina probabilitatea ulertzeak normalean ematen zaion baino denbora luzeagoa eskatuko luke.

Ikasleak dituen hasierako ezagutzak ebaluatzea neurri egokia dela azpimarratzen dute adituek. Gainera, taldeko lanak proposatu eta emaitzak baino gehiago prozesua balioestea interesgarria litzateke. Eta irakasle askok gomendatzen du estatistikako eskoletan datu errealekin lan egitea eta ikasleak ikertzaile-paperean jartzea. Azkenik, kontuan izanda irakurtzen irakurriz ikasten dela eta idazten idatziz, matematikako problemak ebazterakoan, oso garrantzitsua izango da buruketa desberdinak egiten saiatzea.

6. Zenbakiekiko fobia

Ikasle askori ez zaio matematika gaia gustatzen eta jarrera negatibo hori txikitatik dute. Komeni da lehenbailehen jarrera hori aldatzea, gure bizitzako hainbat arlotan aurkituko ditugulako zenbakiak. Irakasleak konbentzitu behar ditu ikasleak berek badutela matematikak ulertzeko gaitasuna. Horretarako, lehenengo, kontzeptu errazak argitu beharko dira, eta, gero, ezagutzak finkatutakoan, sakonduz joan.

Zenbakiekiko fobiak (edo beldurrak) aritmofobia izena hartzen du. Editoreek

esaten dute liburu batean formula matematikoren bat agertzen bada, haren salmentak erdira gutxitzen direla. Irakurle asko ez dira saiatu ere egiten formula horiek ulertzen. Edozein pertsona alfabetatu bezala, zenbaki-sistema hamartarra eta lau eragiketak ezagutzen dituzte. Analfabeto funtzionalak dauden bezala (letrak ezagutu arren liburu bat irakurtzeko gai ez direnak), “matematika-ezjakintasuna” duten pertsonek ez dira gai zenbakizko adierazpen errazena ulertzeko ere.

Baina, aritmofobia orokorrean, kalteak eta ondorengo anumerismoarenak gehienbat sozialak dira. Pentsamendu kuantitatiboarekiko edo metodo zientifikoarekiko uzkurrak diren pertsonak harrapakin errazak izango dira engainatzaileentzat, eta adituek esaten dute harreman zuzena dagoela esoterismoaren hazkuntzaren edo fanatismo erlijiosoaren eta zientziaren ukapenaren artean, eta azken finean, arrazoiaren ukapenaren artean.

VI. ERANSKINAK

A. Ikur estatistikoak

Aurkibidea

1. Helburu didaktikoak
2. Ikurren aurkibidea
3. Ikur estatistiko alfabetikoak
4. Ikur grekoak eta beste

1.1. Helburu didaktikoak

- Estatistikako sinboloak ezagutaraztea kontzeptu jakinekin erlazionatzeko.
- Kontzeptu estatistikoen definizio laburrak, orokorrak eta azkarrak ematea ikasleak eskoletako azalpenei hobeto jarraitzeko.
- Sinboloak gai jakinekin erlazionatzea.

1.2. Ikurren aurkibidea

1. a
2. $A_{m,n}$
3. b
4. B (n, p)
5. Cov (X,Y)
6. CV
7. a.g.
8. E(f(x))
9. f
10. F(x)
11. H_0
12. H_1
13. IQR
14. $K_{m,n}$
15. n
16. N
17. $P_{n,r}$
18. P
19. P(A/B)
20. P(x)
21. p balioa
22. Q_1
23. Q_2
24. Q_3
25. R
26. R^2
27. S
28. S^2
29. t
30. t_c
31. Var (X)
32. X
33. $\bar{X}$
34. Y
35. Z
36. z_c
37. α
38. β
39. ε
40. χ^2
41. μ
42. ρ
43. π
44. σ
45. σ^2
46. $\sum f(x)$
47. !
48. $\cap$
49. $\cup$

1. 3. Ikur estatistiko alfabetikoak

1. a

Testu baliokidea: Konstantea, ebakitzailea

Esanahia: Y ardatzari dagokion balio bat da. Karratu txikienen erregresio zuzenak Y ardatza balio horretan ebakitzen du.

Formula: $a = \overline{Y} - b\overline{X}$

Gaia: Erregresio lineala

2. $A_{m,n}$

Testu baliokidea: Aldakuntzak

Esanahia: m elementu izanik, n elementuko azpimultzoetan sor daitezkeen konbinazio guztiak. Elementuen ordena kontuan hartzen da.

Formula: $A_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$

Gaia: Zenbatzeko teknikak

3. b

Testu baliokidea: Erregresio-koefizientea, malda

Esanahia: Karratu txikienen erregresio zuzenaren malda. X aldagaiaren unitate bakoitzeko Y ardatzean ematen den unitate kopuruaren hazkuntza edo beherakada.

Formula: $b = r \cdot \frac{S_y}{S_x}$

Gaia: Erregresio lineala

4. B (n, p)

Testu baliokidea: n eta p parametroak dituen banaketa binomiala

Esanahia: n aldiz burututako bi aukera askeko zorizko esperimentuetan (adb: txanpona airera n aldiz botatzea), aukera bakarra (adb: gurutzea) lortzearen probabilitate-banaketa diskretua.

Formula: $\frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$

Gaia: Probabilitate-banaketak

5. Cov (X,Y)

Testu baliokidea: X eta Y aldagaien arteko kobariantza

Esanahia: X eta Y aldagaiek duten aldakortasun komunaren neurria

Formula: $Cov(X,Y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{N}$

6. CV

Testu baliokidea: Aldakortasun-koefizientea

Esanahia: Probabilitate-banaketa baten sakabanaketa-neurri normalizatua. Desbiderapen estandarraren eta batez bestekoaren arteko ratioa.

Formula: $C_v = \frac{\sigma}{\mu}$

Gaia: Sakabanaketa-neurriak

7. a. g.

Testu baliokidea: Askatasun-graduak

Esanahia: Esperimentu batean gertatzen diren behaketa askeen kopurua.

Gaia: Probabilitate-banaketak

8. E(f(x))

Testu baliokidea: Aldagai baten itxaropena, itxarondako balioa, batez bestekoa

Esanahia: Esperimentu baten emaitzaren balio bakoitza bider agertzeko duten probabilitatearen batuketa.

Formula: $E\left(f\left(x\right)\right) = \sum f\left(x\right) \cdot P\left(x\right)$

9. f

Testu baliokidea: Maiztasuna

Esanahia: Balio bakoitza agertzen den aldi kopurua

Gaia: Maiztasun-taulak

10. F(x)

Testu baliokidea: Funtzio-banaketa, probabilitate-funtzioaren banaketa

Esanahia: X aldagai batek x balioa edo gutxiagoko balioak hartzeko probabilitatea da. $x \to F(x) = P(X \leq x)$

Gaia: Maiztasun-taulak

11. H_0

Testu baliokidea: Hipotesi nulua

Esanahia: Populazioaren parametro bati buruzko hipotesia

Gaia: Hipotesi-testak

12. H_1

Testu baliokidea: Ordezko hipotesia

Esanahia: Hipotesi nulua ukatzean ontzat ematen den hipotesia

Gaia: Hipotesi-testak

13. IQR

Testu baliokidea: Kuartilen arteko heina

Esanahia: Hirugarren eta lehenengo kuartilen arteko aldea. IQRk datuen % 50 barneratzen du.

Formula: $IQR = Q_3 - Q_1$

Gaia: Joera zentraleko neurriak

14. $K_{m,n}$

Testu baliokidea: Konbinazioak

Esanahia: m elementu izanik, n elementuko azpimultzoetan sor daitezkeen konbinazio guztiak. Elementuen ordenak ez du garrantzirik.

Formula: $K_{m,n} = \dfrac{m!}{(m-n)!n!}$

Gaia: Zenbatzeko teknikak

15. n

Testu baliokidea: Laginaren tamaina

Esanahia: Laginean dauden unitateen kopurua

Gaia: Maiztasun-taulak

16. N

Testu baliokidea: Populazioaren tamaina

Esanahia: Populazioan dagoen unitate kopurua

Gaia: Maiztasun-taulak

17. P_n

Testu baliokidea: Permutazio-zenbakia

Esanahia: n elementu izanik, elementuen ordena aldatuz egin daitekeen talde kopurua.

Formula: $P_n = n!$

Gaia: Zenbatzeko teknikak

18. P

Testu baliokidea: Lagin-proportzioa

Esanahia: Laginean kalkulatutako proportzioa

Formula: Arrakasta kopurua/ gertaera guztiak

Gaia: Estatistika deskribatzailea

19. P(A/B)

Testu baliokidea: Probabilitate baldintzatua

Esanahia: B gertaera emanda dagoela, A gertatzeko dagoen probabilitatea

Formula: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Gaia: Probabilitatea

20. P(x)

Testu baliokidea: x balioaren probabilitatea

Esanahia: X aldagaiaren x balioa agertzeko duen probabilitatea.

Formula: Emaitza positiboak / emaitza guztiak

Gaia: Probabilitatea

21. p balioa

Testu baliokidea: Maila kritikoa, esanguratsutasun-gradua

Esanahia: Emaitzetatik eratorritako datu-puntu jakin bat baino emaitza muturrekoagoak lortzeko probabilitatea da.

Gaia: Hipotesi-testak

22. Q_1

Testu baliokidea: Lehenengo kuartila, 25 pertzentila

Esanahia: Balio baxuenen % 25 azpitik uzten duen aldagaiaren balioa

Formula: Datu baxuenen erdiko mediana

Gaia: Joera zentraleko neurriak

23. Q_2

Testu baliokidea: Bigarren kuartila, 50 pertzentila, mediana

Esanahia: Balio edo kasuen % 50 azpitik uzten duen aldagaiaren balioa

Gaia: Joera zentraleko neurriak

24. Q_3

Testu baliokidea: Hirugarren kuartila, 75 pertzentila

Esanahia: Balio guztien % 75 azpitik uzten duen aldagaiaren balioa

Formula: Datu altuenen erdiko mediana

Gaia: Joera zentraleko neurriak

25. R

Testu baliokidea: Laginaren korrelazio-koefizientea, Pearson-en r, Pearson-en korrelazio-koefizientea

Esanahia: Bi aldagairen artean dagoen erlazio-intentsitatearen indizea

Formula: $r = \frac{COV(X,Y)}{S_x \cdot S_y}$

Gaia: Korrelazioa

26. R^2

Testu baliokidea: Determinazio-koefizientea

Esanahia: Eredu estatistiko batek azaltzen duen menpeko aldagaiaren bariantzaren proportzioa

Formula: $(r)^2$

Gaia: Erregresio lineala

27. S

Testu baliokidea: Laginaren desbiderapen estandarra edo errore estandarra

Esanahia: Aldagai baten balioen sakabanaketa-indizea. Bariantzaren erro karratua da.

Formula: $S = \sqrt{\sum \frac{\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n}}$

Gaia: Sakabanaketa-neurriak

28. S^2

Testu baliokidea: Laginaren bariantza

Esanahia: Aldagai baten balioen sakabanaketa-indizea. Desbiderapen estandarraren karratua.

Formula: $S^2 = \sum \frac{\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n}$

Gaia: Sakabanaketa-neurriak

29. t

Testu baliokidea: Studenten t-a

Esanahia: Studenten t banaketari jarraitzen dion aldagaia.

Formula: $t = \frac{X - \mu}{S}$

Gaia: Probabilitate-banaketak

30. t_c

Testu baliokidea: t puntu kritikoa

Esanahia: Hipotesi nuluaren onarpen- eta ukatze-guneak bereizten dituen t banaketaren puntuazioa

Formula: t puntu kritikoa α den errore-probabilitatearen menpe dago. α-ren probabilitatea t banaketaren probabilitate-tauletan begiratu beharko da, eta t puntuazioa bilatu.

Gaia: Hipotesi-testak

31. Var (X)

Testu baliokidea: Aldakortasuna

Esanahia: Aldagai baten aldakortasunaren indizea

Formula: $Var(X) = E\left(X - \mu\right)^2$

Gaia: Sakabanaketa-neurriak

32. X

Testu baliokidea: Aldagai askea; aldagai iragarlea (erregresio linealean)

Esanahia: Eragina sortzen duen aldagaia; kausa-ondorio harremanean, kausa den aldagaia.

Gaia: Erregresio lineala

33. $\overline{X}$

Testu baliokidea: Batez bestekoa

Esanahia: Aldagai baten balioen batuketa zati balio kopurua

Formula: $\overline{X} = \frac{\sum X}{n}$

Gaia: Joera zentraleko neurriak

34. Y

Testu baliokidea: Menpeko aldagaia; irizpide aldagaia (erregresio-analisian)

Esanahia: Aldagai askearen eragina jasotzen duen aldagaia; kausa-ondorio harremanetan, ondorio-aldagaia da.

Gaia: Erregresio lineala

35. Z

Testu baliokidea: Puntuazio tipikoa edo estandarizatua; Z puntuazioa

Esanahia: Normalizatutako edo estandarizatutako aldagai baten puntuazioa (non 0 baita batez bestekoa eta 1 desbiderapen tipikoa).

Formula: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

Gaia: Probabilitate-banaketak

36. z_c

Testu baliokidea: z puntu kritikoa

Esanahia: Hipotesi nuluaren onarpen- eta ukatze-guneak bereizten dituen Z banaketaren puntuazioa.

Formula: z puntu kritikoa α den errore-probabilitatearen menpe dago. α-n oinarrituta, probabilitatea Z banaketaren probabilitate-tauletan begiratu beharko da, eta z puntuazioa bilatu.

Gaia: Hipotesi-testak

1.4. Ikur grekoak eta beste

37. α

Testu baliokidea: Alfa, errore-probabilitatea; esangura maila; I motako probabilitatea.

Esanahia: Hipotesi nulua benetakoa denean, ukatzeko dagoen probabilitatea.

Gaia: Hipotesi-testak

38. β

Testu baliokidea: Beta, II motako errorea

Esanahia: Hipotesi nulua faltsua denean, onartzeko dagoen probabilitatea.

Gaia: Hipotesi-testak

39. ε

Testu baliokidea: Epsilon

Esanahia: Erregresioaren probabilitate-ereduan errorea adierazteko erabiltzen den hitza.

Formula: $y = \beta_o + \beta_1 x + \varepsilon$

Gaia: Erregresio lineala

40. χ^2

Testu baliokidea: Khi karratu

Esanahia: Khi karratu banaketari jarraitzen dion aldagai baten puntuazioa

Gaia: Probabilitate-banaketak

41. μ

Testu baliokidea: Mu

Esanahia: Populazioaren batez bestekoa. Itxaropen matematikoarekin bat dator.

Formula: $\mu = E(X) = \sum X \cdot P(X)$

Gaia: Probabilitate-banaketak

42. ρ

Testu baliokidea: Rho

Esanahia: Populazioaren korrelazio-koefizientea

Formula: $r = \frac{COV(X,Y)}{S_x \cdot S_y}$

Gaia: Korrelazioa

43. π

Testu baliokidea: Pi

Esanahia: Populazioaren proportzioa. Populazioan dagoen balio jakin baten kopurua zati balio guztiak

Formula: $\pi = E(P)$ (arrakasta kopurua/ gertaera guztiak)

Gaia: Probabilitate-banaketak

44. σ

Testu baliokidea: Sigma

Esanahia: Populazioaren desbiderapen tipikoa/estandarra. Aldagai batek populazioan duen sakabanaketa-indizea.

Formula: $\sigma = \sqrt{\sum \frac{(X_i - \mu)^2}{N}}$

Gaia: Probabilitate-banaketak

45. σ^2

Testu baliokidea: Sigma karratu

Esanahia: Populazioaren bariantza. Aldagai batek populazioan duen sakabanaketa-indizea.

Formula: $\sigma^2 = \sum \frac{(X_i - \mu)^2}{N}$

Gaia: Probabilitate-banaketak

46. $\sum f(x)$

Testu baliokidea: Funtzio baten batukaria

Esanahia: Funtzio baten batukaria izanik, aldagai baten balioak batu behar direla adierazten du.

Formula: $\sum_{i=1}^{n} f(x)$ adierazpenean, i-k batu behar den lehenengo elementua adierazten du, eta n-k, batu behar den azken elementua.

Gaia: Maiztasun-taulak.

47. !

Testu baliokidea: Faktoriala

Esanahia: n zenbakien faktoriala, 1etik n-rainoko zenbaki guztien biderketa da.

Formula: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$

Gaia: Zenbatzeko teknikak

48. $\cap$

Testu baliokidea: Ebakidura edo intersekzioa

Esanahia: A eta B bi gertaera baldin badira, $A \cap B$ bi gertaera batera suertatzen direla adierazteko erabiltzen da.

Gaia: Probabilitatea

49. $\cup$

Testu baliokidea: Bildura

Esanahia: A eta B gertaeren bildurak $A \cup B$, bata edo bestea gertatzen denean adierazten du.

Gaia: Probabilitatea

B. Biribilketa

Aurkibidea

1. Sarrera
2. Biribilketa estatistikoa
3. Eragiketak biribilketa erabiliz
4. Oharra: Zer dira zifra esanguratsuak?
5. Ariketak
6. Emaitzak

1. Sarrera

Biribilketa zenbakiek dituzten hamarren ez esanguratsuak ezabatzeko erabiltzen den prozedura da. Zenbaki hamartarrak ditugunean, zifra gutxiago dituen zenbaki bat lor daiteke biribilketaren bitartez.

2. Biribilketa estatistikoa

Biribilketan, zenbakia zifra batetik aurrera moztu egiten dugu, ondorengo arauak aplikatuz.

1. araua: Zenbakia moztu eta ondorengo zifra 5 baino txikiagoa bada, aurreko zenbakia bere horretan gelditukо da.
Adibidez: 456.284 hamarrekora biribilduz, 456.280

2. araua: Halere, zenbakia moztu dugularik, ondorengo zifra 5 baino handiagoa bada, orduan aurreko zenbakiari 1 gehituko zaio.
Adibidez: 456.284 ehunekora biribilduz, 456.300

Badira beste prozedura batzuk zenbakiak biribiltzeko, baina errore gutxien duenari biribilketa estatistikoa deitzen zaio. Biribilketa-prozedura hori, bereziki, datu estatistikoen matrize handiekin erabiltzen da. Biribilketa estatistikoak biribilketa arruntaren errorea gutxitzen du. Biribilketa arruntarekin konparatuz, berezitasun bat gehiago du.

3. araua: Biribildu behar den zenbakia 5 zifrarekin amaitzen bada, orduan hurbilen dagoen zenbaki bikoitiarekin biribilduko da.
Adibidez: 350,5 biribilduz 350 lortzen da, eta 351,5 biribilduz, 352 lortzen da.

3. Eragiketak biribilketa erabiliz

Eragiketetan, biribiltzeko hainbat arau daude. Arau horiek aplikatzen dira baldin eta eragiketetan parte hartzen duten zenbakiek hamarren kopuru ezberdina badute. Eragiketetan agertzen diren zenbakiak hamarren kopuru bera badute, azken emaitza den zenbakiak ere hamarren kopuru bera izango du.

Batuketetan eta kenketetan zenbakiek hamarren kopuru ezberdina badute, orduan azken emaitzak hamarren gutxien duen zenbakiaren hamarren adina izango du.
Adibidez:
4,8 + 4,57 = 9,37, beraz, 9,4
5,2369 – 2,3 = 2,9369, beraz, 2,9

Biderketetan, zatiketetan eta berreturetan, emaitzak zifra esanguratsu gutxien duen zenbakiaren zifra esanguratsu adina izango ditu.
Adibidez:
2,51 x 2,30 = 5,773, beraz, 5,77
2,4 x 0,000673 = 0,0016152, beraz, 0,0016

4. Oharra: Zer dira zifra esanguratsuak?

a) Zero ez den edozein zifra esanguratsua da.
   Adibidez: 2,346 lau zifra esanguratsuak
b) Zero ez diren zenbakien artean dauden zeroak esanguratsuak dira
   Adibidez: 3005 lau zifra esanguratsuak
c) Zero ez den lehenengo zenbakiaren ezkerrean dauden zeroak ez dira esanguratsuak.
   Adibidez: 002346 lau zifra esanguratsuak eta 0,0003 zifra esanguratsu bat
d) Zenbakia 1 baino handiagoa baldin bada, puntu hamartarraren eskuinean dauden zeroak esanguratsuak dira.
   Adibidez: 24,00 lau zifra esanguratsuak
e) Zenbakia bat baino txikiagoa bada, honako zero hauek dira esanguratsuak:

Zenbakiaren amaieran daudenak eta zero ez diren zenbakien artean daudenak

Adibidez: 0,0032 bi zifra esanguratsuak

0,903 hiru zifra esanguratsuak

0,6700 lau zifra esanguratsuak

f) Hamarrenak ditugunean, irizpide gisa, azken zeroak esanguratsutzat emango ditugu, batzuetan hala ez izan arren.

5. Ariketak

1. ariketa

Honako zenbaki hauek biribildu:

a) 44.900 milakora
b) 98.049 ehun milakora
c) 257.099 milakora
d) 634.218 ehunekora
e) 150.578 hamar milakora
f) 182.171 milakora
g) 816.350 ehunekora
h) 450,56 hamarrenera
i) 423,52 hamarrenera
j) 3,5 unitatera
k) 2,5 unitatera

2. ariketa

a) 2,3 + 4,56
b) 3,5467 + 4,6
c) 3,45 x 0,08
d) 5 / 4,350

6. Emaitzak

1. ariketa

a) 45.000
b) 100.000
c) 257.000
d) 634.200
e) 150.000
f) 182.000
g) 816.400
h) 450,6
i) 424,5
j) 4
k) 2

2. ariketa

a) 6,86, beraz, 6,9
b) 8,1467, beraz, 8,1
c) 0,276, beraz, 0,3
d) 1,14942, beraz, 1

C. Aljebra

Aurkibidea

1. Sarrera
2. Eragiketak polinomioekin
3. Ariketa gidatuak
4. Ekuazioak
5. Ariketa gidatuak
6. Ariketak
7. Emaitzak

1. Sarrera

Monomioak letra eta zenbakiak nahasiz formulatzen diren adierazpenak dira.

Monomioek hainbat osagai dituzte:

a) Zeinua. Monomioaren zeinua positiboa edo negatiboa izan daiteke.
b) Koefizientea. Monomioaren zenbakizko osagaia.
c) Letra. Monomioaren letrazko osagaia.
d) Berretzailea.

Monomioen osagai horiek nahasirik agertzen dira, honela.

Adibidez:

Lehenengo monomioaren zeinua positiboa da; haren koefizientea 5 da; xy letrak ditu, eta x-aren berretzailea 1 da; y-ren berretzailea, berriz, 3 da.

$$5xy^3 = 5 \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y$$

$$\frac{-3m^2n}{4mn} = \frac{-3}{4} \cdot \frac{\cancel{m} \cdot m \cdot \cancel{n}}{\cancel{m} \cdot \cancel{n}} = 0,75m$$

$$\frac{8xy}{-4} = -2xy$$

Monomio berdintsuek letrazko partea eta berretzailea berdinak dituzte.

Adibidez:

$4x^2$ eta $-5x^2$ berdintsuak dira

$8yz$ eta $-2zy$ berdintsuak dira

$3x^2yz$ eta $4xyz$ ez dira berdintsuak

$8x^2z$ eta $\frac{6x^2z}{2}$ berdintsuak dira

2. Eragiketak polinomioekin

Polinomioak hainbat monomioz osatutako adierazpenak dira.

Adibidez:

$5xy+2x^2z$

$3xzy^2-\frac{2xz}{4}$

$\frac{xy}{5z}-2y$

a) Monomioen arteko batuketa eta kenketa. Antzeko monomioak batu ala ken daitezke. Orduan, koefizienteak batu eta letrazko osagaia eta berretzaileak kopiatu egiten dira.

Adibidez:

$2x^4+5x^4=7x^4$

$8x+3y+2x=10x+3y$

$3x^2+4x+x=3x^3+5x$

$4x-2x+x^2=x^2+2x$

b) Monomioen arteko biderketa. Monomioek ez dute antzekoak izan behar biderkatu ahal izateko. Kasu honetan, koefizienteak biderkatu, letrazko parteak kopiatu eta letra bera duten monomioen berretzaileak batu egiten dira.

Adibidez:

$5x\cdot 4x^4=20x^5$

$3y\cdot(-2y)=-6y^2$

$4xy^2z\cdot 2xy=8x^2y^3z$

$2y\cdot\frac{-3xzy}{2}=-3xy^2z$

c) Monomioen arteko zatiketa. Monomioek ez dute antzekoak izan behar zatiketa egin ahal izateko. Koefizienteak zatitu, letrazko partea kopiatu eta

berretzaileen kenketa egiten da.

Adibidez:

$3xy^2 : 2xy = \frac{3y}{2}$

$4x^3y : 2x = 2x^2y$

$-8xy^2z^3 : 4x = -2y^2z^3$

d) Monomioen berreturak. Koefizienteari berretzailea aplikatzen zaio eta berretzaileak biderkatu egiten dira.

Adibidez:

$\left(3x^3\right)^2 = 9x^6$

$\left(2x\right)^3 = 8x^3$

$\left(a-b\right)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$\left(a^2 - b^2\right) = \left(a+b\right)\cdot\left(a-b\right)$

e) Azkenik, posible da polinomioei faktore komuna ateratzea. Monomio bakoitzak komunean dituen osagaia monomioen gainontzeko osagaiekin biderkatzean datza. Faktore komunak polinomioen adierazpena erraztu egiten du.

Adibidez:

$7x^2z - x = x\left(7xz - 1\right)$

$15xy^2 - 30yz = 15y\left(xy - 2z\right)$

3. Ariketa ebatziak

a) $2x^2 \cdot \left(4x^3 + 5xy\right) = 8x^5 + 10x^3y$

b) $2xy \cdot \left(3x - 2yz + 3xy\right) = 6x^2y - 4xy^2z + 6x^2y^2$

c) $\left(2x^2 + 3y\right)\cdot\left(y - 4x\right) = 2x^2y - 8x^3 + 3y^2 - 12xy$

d) $\left(x - 2y + 3\right) - \left(y - 2x + 1\right) = x - 2y + 3 - y + 2x - 1 = 3x - 3y + 2$

e) $\frac{3x}{3} + \frac{5x}{3} = \frac{8x}{3}$

f) $\frac{4x}{3} + \frac{5x}{2} = \frac{8x + 15x}{6} = \frac{23x}{6}$

g) $\frac{x^2}{x+1}-\frac{x^2+3}{x}=\frac{x^3-\left[(x+1)(x^2+3)\right]}{x(x+1)}=\frac{x^3-(x^3+3x+x^2+3)}{x(x+1)}=\frac{-x^2-3x-3}{x^2+x}$

4. Ekuazioak

Bi adierazpen aljebraikoen arteko berdintza da. Berdintza aldagaiaren zenbait baliotarako besterik ez da betetzen. Honako hauek dira arau garrantzitsuenak:

a) Ekuazioaren bi ataletan, gai bera batu edo ken daiteke.

Adibidez: $7x=x+4$ bada, orduan $7x+5x=x+4+5x$

b) Ekuazioaren atal batean dagoen gai bat beste atalera pasa daiteke zeinua aldatuz.

Adibidez: $7x=x+4$, orduan $7x-x=4$

c) Ekuazioaren atal batean dagoen biderkagaia beste atalera pasa daiteke atal osoa zatituz. Alderantziz ere gertatzen da, hau da, atal batean dagoen zatitzailea beste atalera pasa daiteke atal berria biderkatuz.

Adibidez: $7x=x+4$, orduan $x=\frac{x+4}{7}$

$\frac{7x}{2}=x+4$, orduan $7x=2(x+4)$

5. Ariketa gidatuak

<u>1. Ariketa</u>

$4(3-2x)+6=1-5(1+3x)-4x$

1. Pausoa. Parentesiak garatu eta kendu

$12-8x+6=1-5-15x-4x$

2. Pausoa. Ezezagunaren gai guztiak alde batera pasatu

$12+6-1+5=-15x-4x+8x$

3. pausoa. Antzeko gaiak batu

$22=-11x$

4. pausoa. Ezezaguna askatu

$x=\frac{-22}{11}=-2$

2. Ariketa

$$\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{5}{3}\left(\frac{2x}{3}-\frac{2}{5}\right)=\frac{x+3}{6}$$

1. pausoa: Parentesiak garatu eta kendu

$$\frac{3x}{2}-\frac{3}{6}-\frac{10x}{9}+\frac{10}{15}=\frac{x+3}{6}$$

2. pausoa: Zatikiak landu

$$\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}-\frac{10x}{9}+\frac{2}{3}=\frac{x+3}{6}$$

3. pausoa: Zatikiak deskonposatu

$$\frac{27x-9-20x+12}{18}=\frac{3x+9}{18}$$

4. pausoa: Ezezagunak alde batera pasa

$$27x-20x-3x=9+9-12$$

5. pausoa: Antzeko gaiak batu ala kendu

$$4x=6$$

6. pausoa: Ezezaguna askatu

$$x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

6. Ariketak

1. ariketa. Garatu honako polinomio hauek:

a) $5x^4-3x^5$

b) $-8y^3+3y^3$

c) $4xp-px-3p+5-\left(6xp-1+\frac{3}{2}\right)$

d) $\left(5x^3+4y+5xz\right)-\left(7xz-4y-3zx\right)$

e) $y\left(yz-\frac{z}{2}\right)$

f) $5x^2+4x^2y-5y-4y^2$

g) $\frac{3x^3}{2}\cdot\frac{2y}{3x}$

h) $\frac{4xy}{2}:\frac{5y}{3}$

i) $\frac{x^2-y^2}{x+y}$

j) $\left(\frac{2y}{3}\right)^2-\left(3+y^2\right)$

2. ariketa. Garatu honako ekuazio hauek:

a) $6x-12=10x+12-4$

b) $4(x-5)+3(3x-4)=13x+32$

c) $5x-\left[\frac{3}{2}-2\left(-\frac{x}{2}+3-x\right)-1\right]=x-3$

d) $\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{5}{3}\left(\frac{2x}{3}-\frac{2}{5}\right)=\frac{x+3}{6}$

e) $8x-3\left[5x-3(2x+8)\right]=6$

f) $\frac{3-x}{x+2}-\frac{x-1}{x-2}=-2$

g) $\frac{2-x}{3}+\frac{1-x}{5}=1-\frac{x+3}{6}-\frac{x}{2}$

h) $\frac{x-m}{2}=\frac{x+m}{3}-\frac{2x-3m}{6}$

7. Emaitzak

1. ariketa

a) $x^4(5-3x)$

b) $-5y^3$

c) $-3xp-3p+\frac{9}{2}$

d) $5x^3+8y+xz$

e) $zy(2y-1)$

f) $(x^2-y)(5+4y)$

g) x^2y

h) $\frac{6x}{5}$

i) $x-y$

j) $\frac{-5y^2-27}{9}$

2. ariketa

a) $x=-5$

b) $x=\frac{44}{5}$

c) $x=\frac{-35}{6}$

d) $x=\frac{3}{2}$

e) $x=-6$

f) $x=3$

g) $x=\frac{19}{4}$

h) $x=\frac{8m}{3}$

VII. BIBLIOGRAFIA ETA INTERNETEKO BALIABIDEAK

Bibliografia

Botella, J. (2004). *Análisis de datos en Psicología I: teoría y ejercicios*. Madril: Pirámide.

Botella, J.(1991). *Problemas y ejercicios de psicoestadística*. Madril: Pirámide.

Etxeberria, J. (2004). *Estatistika eta SPSS*. Usurbil: Elhuyar.

Ibabe, I. eta Etxeberria, J. (2001). *Datu-analisia eta SPSS. Praktikak*. Usurbil: Elhuyar.

Paulos, J.A. (2006). *Zenbakirik gabe bizi*. E.H.U

Interneteko baliabideak

1. José María Salinas irakaslearen webgunea: http://www.ugr.es/~jsalinas/

2. Portaera zientzien metodologiako elkartea (Asociación Española de Metodología de las Ciencias del Comportamiento): http://www.aemcco.org/

3. Universidad Autónoma de Madrid: http://www.uam.es/personal_pdi/psicologia/carmenx/MaterialD.html

4. Lane (2003). Hyperstat Online Textbook http://davidmlane.com/hyperstat/index.html